Статијата прв пат е објавена во списанието НУМЕРУС

Гоце Шопкоски

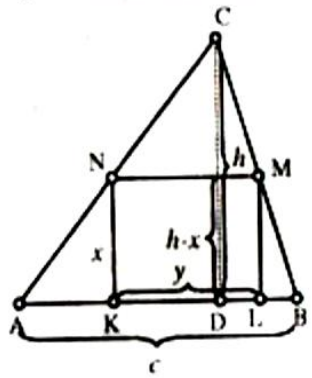
ДВЕ ЗАДАЧИ ЗА МАКСИМУМ

Фигурите (телата, предметите) во природата се споредуваат со мерење на одредени нивни својства. Својствата на фигурите по кои се врши споредувањето со мерење се викаат *величини*. Величини се: периметарот, плоштината, волуменот, должината, масата... Занимливи се задачите во кои треба да се одреди најголемата (максималната) или најмалата (минималната) вредност на величината. Во делот на вишата математика има постапки за решавање на вакви задачи. Меѓутоа, за голем број од тие задачи постојат и елементарни (алгебарски или геометриски) постапки за решавање кои се користеле и пред да бидат познати постапките во вишата математика.

Еве две задачи за максимум за кои даваме различни начини на решавање. Првата задача е подготвителна за втората.

Задача 1: Во даден остроаголен триаголник да се впише правоаголник со најголема плоштина.

Решение 1 (алгебарско): Нека во триаголникот ABC е вишан правоаголник KLMN, така што неговите темиња K и L лежат на страната AB, а CD е висина на ΔABC. Да означиме $\overline{AB}=c$, $\overline{CD}=h$, $\overline{KN}=x$, $\overline{KL}=y$, а со P плоштината на правоаголникот KLMN.



Од $\Delta ABC \sim \Delta NMC$ следи $y : c = (h - x) : h$,

т.е. $\qquad y = \dfrac{c(h-x)}{h}$ ... (1)

Од $P = xy$, следи

$$P = x \cdot \frac{c(h-x)}{h} = -\frac{cx(x-h)}{h} = -\frac{c}{h}\left(x^2 - 2\frac{h}{2}x + (\frac{h}{2})^2 - (\frac{h}{2})^2\right) =$$

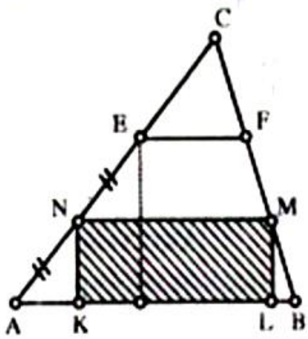
$$= -\frac{c}{h}(x-\frac{h}{2})^2 + \frac{c}{h}\cdot\frac{h^2}{4} = \frac{ch}{4} - \frac{c}{h}(x-\frac{h}{2})^2.$$

Оваа плоштина е најголема ако разликата е најмала, т.е. ако намалителот $\frac{c}{h}(x-\frac{h}{2})^2 = 0$, од каде што следи дека $x = \frac{h}{2}$.

Со замена на вредноста на x во (1) се добива

$$y = \frac{c}{h}(h-\frac{h}{2})^2, \text{ т.е. } y = \frac{c}{2}, \text{ па } S_{max} = \frac{c}{2}\cdot\frac{h}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{ch}{2} = \frac{1}{2}\cdot P_{\Delta ABC}.$$

Значи, правоаголникот KLMN има најголема плоштина (која е еднаква на половината од плоштината на ΔABC), ако неговата страна MN е средна линија на ΔABC, а висината е еднаква на половината од соодветната висина на ΔABC.



Решение 2 (геометриско): Ако отсечката MN е средна линија на ΔABC, тогаш, $P_{ABC} = 2\overline{MN}\cdot\overline{KN}$ и $P_{KLMN} = 0{,}5P_{ABC}$.

Ако $\overline{AN} < \overline{NC}$, тогаш на отсечката NC ќе ја конструираме точката E така што $\overline{NE} = \overline{NA}$, а потоа ќе повлечеме полуправа EF∥AB. Добиваме трапез ABFE чија висина е двапати поголема од отсечката KN. Бидејќи MN е негова средна линија следи $P_{ABFE} = \overline{MN}\cdot 2\overline{KN}$.

Значи, $P_{KLMN} = 0{,}5P_{ABFE} < 0{,}5P_{ABC}$, т.е.

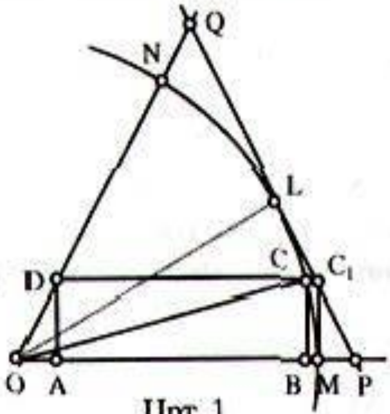
$P_{KLMN} < 0{,}5P_{ABC}$, кога $\overline{AN} < \overline{NC}$.

Според тоа, правоаголникот KLMN има најголема плоштина (еднаква на $0{,}5P_{ABC}$) кога една од неговите страни е средна линија на триаголникот.

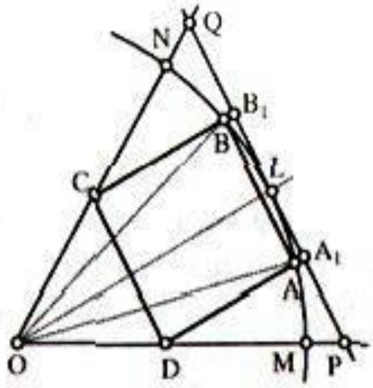
Задача 2: Во кружен исечок со остар централен агол α ($\alpha \le 90°$) да се впише правоаголник со најголема плоштина.

Овде ќе дадеме само објаснение за геометриското решение, а за алгебарското решение потребни се знаења што се стекнуваат во средното образование.

Решение: Нека L е средина на лакот MN (црт. 1). Ја *конструираме тангентата на лакот на исечокот во точката* L. Пресечните точки на тангентата со краците на аголот MON да ги означиме со P и Q.



Црт. 1



Црт. 2

Ако темето C на правоаголникот ABCD што е впишан во исечокот (црт. 1) се совпаѓа со точката L, тогаш неговата плоштина, што е еднаква на половината од плоштината на триаголникот OPQ, ќе биде најголема (според зад. 1).

Ако правоаголникот ABCD е впишан во исечокот (црт. 2), тогаш продолжувајќи ги неговите страни DA и CB до пресекот со отсечката PQ во точките A_1 и B_1 ќе се добие правоаголникот A_1B_1CD впишан во триаголникот OPQ. Користејќи ја задачата 1 следи

$$P_{ABCD} < P_{A_1B_1CD} < 0{,}5\, P_{OPQ}$$

Значи, правоаголник што е вписан во исечок има најголема плоштина кога една од неговите страни лежи на *радиусот, а едно негово теме е во средишната точка од лакот.*

Ако пак две темиња на правоаголникот лежат на лакот, тогаш неговата плоштина е најголема кога бисектрисата OL е оска на симетрија на правоаголникот, а за темињата A и B важи: $\measuredangle NOB = \measuredangle BOL = \measuredangle LOA = \measuredangle AOM$.