Статијата прв пат е објхавена во списанието Математички лист на ДМ на Србија

Ратко Тошић, Нови Сад

О великим бројевима

За два броја је на основу њиховог декадног записа лако утврдити који је већи. За велике бројеве, међутим, а нарочито за њихово приближно представљање често ради концизности користимо запис у виду степена неког броја. У такозваној научној нотацији бројеви се представљају у облику степена броја 10 помноженог неким бројем. На пример, 150 се записује као $1{,}5\cdot10^2$, 274000000 као $2{,}74\cdot10^8$ итд.

Представу о величини неких бројева записаних у научној нотацији, или уопште помоћу степена, можете стећи ако се упознате са неким чињеницама из физике. На пример, маса наше планете Земље износи приближно $6\cdot10^{24}$ килограма. Светлост се креће брзином од $300000=3\cdot10^5$ километара у секунди, тј. $3\cdot10^8$ метара у секунди. Светлосна година је растојање које светлост пређе за годину дана и износи 9460 милијарди километара. Изражено у метрима, то је $9{,}46\cdot10^{15}$ метара. Данас се зна да пречник наше Галаксије износи око 100 хиљада светлосних година. У свемиру постоје милиони галаксија, а растојања између њих мере се милионима светлосних година. Да бисмо стекли бар приближну представу о тим растојањима, поменимо да светлост пређе растојање од Месеца до Земље за нешто више од једне секунде, иако је растојање од Земље до Месеца једнако приближно 30 Земљиних пречника.

Наводимо још неколико интересантних чињеница:

Од почетка нове ере до данас прошло је много мање од 10^{11} (сто милијарди) секунди.

Највећи до сада познати прост број је $2^{30402457}-1$, пронађен у децембру прошле године. Децимални запис тог броја садржи 9152052 цифре и да би се он одштампао била би потребна цела књига од неколико стотина страница (и то је један аргумент у прилог писања бројева у научној нотацији). Фирма *Electronic Frontier Foundation* понудила је награду од $100\,000$ долара ономе ко први пронађе прост број са најмање десет милиона цифара. По свему судећи, неће се дуго чекати на уручење награде.

Највећи број који се може написати помоћу три декадне цифре без коришћења других симбола је број 9^{9^9}. Декадни запис тога броја садржи 369693100 цифара. Ако претпоставимо да једна страница књиге садржи 5000 графичких знакова, следи да би за штампање декадног записа тога броја било потребно 80 томова од по хиљаду страна.

За број 10^{100} постоји и посебан термин – **гугол**. По томе је броју названа и најпопуларнија претраживачка машина на Интернету. У декадном запису гугол се записује помоћу једне јединице и 100 нула. Назив гугол предложио је деветогодишњи нећак математичара Едварда Каснера. Он је предложио и назив гуголплекс за број који се записује помоћу јединице иза које следи гугол нула, тј. за број $10^{10^{100}}$.

Укупан број атома у целом свемиру много је мањи од једног гугола. Физичари су проценили да је број елементарних честица у свемиру мањи од 10^{87}.

У овом чланку позабавићемо се решавањем задатака у којима се тражи да се упореде по величини неки бројеви. Обично су у питању велики бројеви записани у облику степена или помоћу израза у којима фигуришу велики бројеви или њихови степени.

Претходно наводимо неколико једноставних тврђења која се користе у решавању таквих задатака. На почетку сваког решења навешћемо у загради редне бројеве најважнијих тврђења која користимо.

ОСНОВНА ТВРЂЕЊА

Тврђење 1. Ако су a, m и n природни бројеви, $a>1$ и $m<n$, онда је $a^m<a^n$.

Тврђење 2. Ако су a, b и n природни бројеви и $a>b$, онда је $a^n>b^n$.

Тврђење 3. Ако је $0<a<b$ и $0<c<d$, онда је $ac<bd$.

Тврђење 4. Ако су a, b природни бројеви и $a>b$, онда је $a^2>(a-b)(a+b)$.

Прва три тврђења су очигледна. Четврто следи на основу тога што је

$$a^2>a^2-b^2=(a-b)(a+b).$$

Тврђење 5. Ако су a, b природни бројеви и $a<b$, онда је $\frac{a}{b}<\frac{a+1}{b+1}$.

Заиста, ако је $a<b$, онда је разлика

$$\frac{a}{b}-\frac{a+1}{b+1}=\frac{a(b+1)-b(a+1)}{b(b+1)}=\frac{a-b}{b(b+1)}$$

негативна, одакле следи тврђење.

Тврђење 6. За сваки природан број a је $\frac{a+1}{2a+1}>\frac{2a+1}{4a+1}$.

Следи на основу тога што је разлика $\frac{a+1}{2a+1}-\frac{2a+1}{4a+1}=\frac{a}{(2a+1)(4a+1)}$ позитивна.

Тврђење 7. Ако је $x<y$, за позитивне бројеве x и y, онда је $\frac{x}{x+1}<\frac{y}{y+1}$.

Следи на основу тога што је $\frac{x}{x+1}=1-\frac{1}{x+1}$,

што значи да се разломак $\frac{x}{x+1}$ повећава са повећањем x.

Тврђење 8. Ако је $x<y$, за позитивне бројеве x и y, онда је $\frac{x}{y}<\frac{x+1}{y+1}$.

Заиста, ако је $0<x<y$, онда је $xy+x<xy+y$, тј. $x(y+1)<y(x+1)$, одакле следи тврђење.

ЗАДАЦИ

Задатак 1. Шта је веће: 315^{33} или 50^{50}?

Решење. (1) $50^{50}>49^{50}=(7^2)^{50}=7^{100}>7^{99}=(7^3)^{33}=343^{33}>315^{33}$.

Задатак 2. Шта је веће: 31^{11} или 17^{14}?

Решење. (1) Како је $31^{11}<32^{11}=(2^5)^{11}=2^{55}$ и $17^{14}>16^{14}=(2^4)^{14}=2^{56}$, следи да је $17^{14}>31^{11}$.

Задатак 3. Доказати да број 2^{300} има више од 90 и не више од 100 цифара у свом декадном запису.

Решење. (1) $10^{90}=1000^{30}<1024^{30}=(2^{10})^{30}=2^{300}=(2^3)^{100}=8^{100}<10^{100}$. Како је 10^{90} 91–цифрен број, а 10^{100} најмањи 101–цифрен број, следи тврђење.

Задатак 4. Шта је веће: 2^{3000} или 3^{2000}?

Решење. (2) Како је $2^{3000}=(2^3)^{1000}=8^{1000}$ и $3^{2000}=(3^2)^{1000}=9^{1000}$, следи да је $3^{2000}>2^{3000}$.

Задатак 5. Шта је веће: 2^{40} или 3^{28}?

Решење. (2) $3^{28}=(3^7)^4=2187^4>1024^4=(2^{10})^4=2^{40}$.

Задатак 6. Шта је веће: 5^{44} или 4^{53}?

Решење. (3,2) Искористићемо чињеницу да је $5^{44}=(5^{11})^4$ и покушаћемо да нађемо неке блиске степене бројева 2 и 5. На пример, можемо да искористимо чињеницу да је $125=5^3<2^7=128$. Тада је $5^9<2^{21}$, а како је и $5^2<2^5$, то је $5^{11}=5^9\cdot5^2<2^{21}\cdot2^5=2^{26}$. Одатле се добија да је $5^{44}<2^{104}=4^{52}$, што је довољно да закључимо да је $5^{44}<4^{53}$.

Задатак 7. Доказати да је $2^{100}+3^{100}<4^{100}$.

Решење. (3,2) Како је $2^{100}<3^{100}$, довољно је да докажемо да је $2\cdot3^{100}<4^{100}$, тј. $2<\left(\frac{4}{3}\right)^{100}$. Последња неједнакост следи на основу (3), јер је $2<\left(\frac{4}{3}\right)^3$ и $1<\left(\frac{4}{3}\right)^{97}$.

Задатак 8. Шта је веће: 100^{100} или $50^{50}\cdot 150^{50}$?

Решење. (4,2) Дати бројеви се могу написати у облику $(100^2)^{50}$ и $(50\cdot 150)^{50}=((100-50)(100+50))^{50}$. Како је $100^2>(100-50)(100+50)=50\cdot 150$, степеновањем леве и десне стране са 50 добијамо да је $100^{100}>50^5\cdot 150^{50}$.

Задатак 9. Шта је веће: $1234567\cdot 1234569$ или 1234568^2 ?

Решење. (4) Означимо број 1234568 са x. Тада на основу неједнакости $(x-1)(x+1)<x^2$, следи да је $1234567\cdot 1234569<12345678^2$.

Задатак 10. Шта је веће: $\frac{1234567}{7654321}$ или $\frac{1234568}{7654322}$?

Решење. (5) Означимо 1234567 са a, а 7654321 са b. Како је $a<b$, на основу (5) следи да је први разломак мањи.

Задатак 11. Доказати да је $\frac{1}{15}<\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{99}{100}<\frac{1}{10}$.

Решење. (7) Нека је $a=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{99}{100}$.

Упоредо са a посматрајмо и бројеве $b=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{100}{101}$ и $c=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{98}{99}$.
Лако се види да је сваки од тих бројева представљен у облику производа 50 разломака. На основу тврђења (7), сваки од 50 фактора у представљању броја b већи је од одговарајућег фактора у представљању броја a, што значи да је $b>a$.
Исто тако, лако се види да је производ $ab=\frac{1}{101}$. Тада је $a^2<ab=\frac{1}{101}<\frac{1}{100}=\left(\frac{1}{10}\right)^2$, што значи да је $a<\frac{1}{10}$. Потпуно аналогно, упоређујући факторе бројева a и c (без првих, који су једнаки), закључујемо да је $a>c$ и $ac=\frac{1}{200}$. Следи да је $a^2>ac=\frac{1}{200}>\frac{1}{225}=\left(\frac{1}{15}\right)^2$, одакле је $a>\frac{1}{15}$.

Задатак 12. Упореди по величини разломке $\frac{222222221}{333333332}$ и $\frac{444444443}{666666665}$.

Решење. (8) Множећи бројилац и именилац првог разломка са 2 добијамо је он једнак $\frac{444444442}{666666664}$, па на основу тврђења (8) следи да је други разломак већи.

ЗАДАЦИ ЗА САМОСТАЛАН РАД

1. Нађи све степене бројева 2,3,4,5,6,7,8,9,11,12 који нису већи од 10000 и поређај их по величини.
2. Нађи највећи између бројева: $5^{100}, 6^{91}, 7^{90}, 8^{85}$.
3. Шта је веће: а) $\frac{2^{2005}+1}{2^{2006}+1}$ или $\frac{2^{2006}+1}{2^{2007}+1}$; б) $\frac{10^{2005}+1}{10^{2006}+1}$ или $\frac{10^{2006}+1}{10^{2007}+1}$?