Алекса Малчески
Машински факултет - Скопје

СИМЕТРИЧНИ ПОЛИНОМИ ОД ТРИ ПРОМЕНЛИВИ

1. Вовед

Во бројната математичка литература, како во учебниците, збирките, посебно во литературата по алгебра, во проблеми и задачи од различен вид, или во делови од нив, се среќаваат најразлични алгебарски изрази, кои што имаат некои свои посебни особини. Во средношколската литература најчесто се застапени рационални изрази, алгебарски равенства, равенки, системи линеарни равенки,условни равенства и условни неравенства, системи равенки од произволен вид, полиноми итн. Потврда за тоа ќе добиеме ако ги разгледаме задачите кои ги има во многу средношколски учебници и збирки:

а) Ако x, y, z се позитивни реални броеви, да се докаже дека

$$\frac{x^3+y^3+z^3}{x^2+y^2+z^2} \geq \frac{x+y+z}{3}.$$

б) Полиномот $P(x,y,z)=(x+y)(y+z)(z+x)+xyz$ да се разложи на множители.

в) Полиномот $P(x,y,z)=y^2z+3xy^2+7xyz+3x^2y+2xz^2+6x^2z+2z^2y$ да се разложи на множители.

г) Да се провери точноста на равенството

$$(a+b+c)^4+(-a+b+c)^4+(a-b+c)^4+(a+b-c)^4=4(a^4+b^4+c^4)+24(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$$

д) Да се провери точноста на неравенството

$$(x_1^2+1)(x_2^2+2)(x_3^2+4)(x_4^2+1) \geq (x_1x_3+1)(x_2x_4+1),$$

каде x_1, x_2, x_3, x_4 се позитивни реални броеви.

Да се решат системите

ѓ) $\begin{cases} x^2+xy+y^2=4 \\ x+xy+y=2 \end{cases}$ **е)** $\begin{cases} x+y+z=\frac{13}{3} \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{13}{3} \\ xyz=1 \end{cases}$,

ж) $\begin{cases} x+y+z=9 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1 \\ xy+yz+zx=27 \end{cases}$

ѕ) Полиномот $P(x,y)=x^3y^2+2x^2y+yx^2$ да се разложи на множители.

и) Полиномот $P(x, y, z) = x^2 y + xy + yz + zx$ да се разложи на мноители.

Од овие, а и од бројни други примери може да се види дека дека кај некои од нив, или делови од нив имаат специфична структура.

На пример можеме да забележиме дека во задачата в) се појавува алгебарски израз во кој во сите мономи збирот на степените на променливите е еднаков. Во задачата а)можеме да забележиме дека се среќаваат алгебарски изрази кои се дел од поголем алгебарски израз, во кој покрај тоа што во секој од собироците збирот на степените е еднаков, можеме да ги разместиме местата на променливите а тие нема да се променат.

Во полиномот под и) можеме да забележиме дека не е исполнет ниту еден од овие услови.

Основната цел е дали може во множеството од сите алгебарски изрази, или во рационални алгебарски изрази да се направи некоја нивна класификација, или да се издвои еден нивни дел, според некоја нивна особина. Намерата е на такво помало множесто од објекти, кои ја имаат таа особина, да може да се направи попродлабочена анализа.Да се разоткријат некои нивни особини, со чија помош бројот на задачи во кои се среќаваат тие, ако може да се решат на стандарден начин или бројот на задачи кои може да се решат да се зголеми. Ако ништо повеќе, барем нивното решение да биде олеснето.

Најчесто, на пример при решавање на системи равенки, по аналогија од решавањето на системи линеарни равенки настојуваме една од променливите, од некоја од равенките, да ја претставиме како функција од преостанатите променливи и потоа да ја замениме во другите равенки. Потоа настојуваме да го решиме новодобиениот систем, од преостанатите равенки во кој ја нема изразената променлива. На пример, во системот равенки ж) од првата равенка може да се изрази било која од непознатите и да се замени во преостанатите две равенки, па потоа да се реши новодобиениот систем. Во многу случаи со таквата постапка се доаѓа до непредвидливи потешкоти, и најчесто таквиот пат не дава резултат, т.е. не не води кон решение.Може да се добие равенка со преголем степен, која во општ случај не може да ја решиме.

Се поставува прашање дали може оваа дополнителна особина на примерите под а) и б), односно непроменливоста на изразите со промена на местата на променливите да се обопшти и да биде основа за дабивање нивни дополнителни својста за полиноми кои ја поседуваат. Како и во другите случаи во алгебрата, да се добијат дополнителни особини за нивната структура, евентуално за нивно разложување на множители и редица други.

2. Симетрични полиноми од три променливи

Пред да преминеме на анализа на полиномите од три променливи кои се симетрични, што е и основна цел на овие страници, корисно е да го уточниме поимот полином од три променливи. Израз добиен само со множење и степенување со природен експонент на константи и променливи го нарекуваме моном.На пример мономи се $x^2 y, -4xyz^5$.

Дефинција.Збир на конечен број на мономи во кои се појавува повеќе од една променлива се нарекува полином од повеќе променливи. Ако во полиномот се појавуваат точно n различни променливи, тогаш го нарекуваме полином од n променливи.

Ако во мономите се сретнуваат точно три различни реално независни променливи, полиномот го нарекуваме полином од три реално независни променливи.

Пример 1. Полиномот $P(x,y,z) = x^2y^2 + 2xy + y^2z^2 + 2yz + z^2x^2 + 2zx + 3xyz$ е полином од три реално независни променливи.

Пример 2. Полиномот $P(x,y,z) = 5x^4y^2 + 3yz^5 + 3x^3z^3$ е полином од три реално независни променливи.

Дефинција. Полиномите кај кои во секој моном кој е дел од него збирот на степените на променливите е еден ист природен број го нарекуваме хомоген полином.

Природно е тој природен број да има своја ознака. Него ќе го означиме со $\mathrm{st}\,P$, $\mathrm{st}\,P = m$ и ќе го наречеме степен на хомогениот полином.

Ако $P(x,y,z)$ е хомоген полином од трет степен, тогаш

$$P(tx,ty,tz) = t^m P(x,y,z), \text{ каде } m = \mathrm{st}\,P.$$

Полиномот $P(x,y,z) = 5x^4y^2 + 3yz^5 + 3x^3z^3$ е хомоген полином, бидејќи збирот на степените во секој од мономите е еднаков на 6.

Хомогените полиноми нема специјално да ги разгледуваме, т.е. нема да се предмет на интересирање на овие страници. Во натамошниот тек само ќе ја користиме каде е потребно претходната дефинција.

Наш предмет на интересирање е друга класа на полиноми од повеќе реално независни променливи. Тоа се таканаречените симетрични полиноми.

Дефинција. Полиномите кај кои произволна промена на местата на две променливи нивниот облик не се менува ќе ги нарекуваме **симетрични полиноми**.

Според дефинцијата, полином од три променливи е симетричен ако и само ако

$$f(x,y,z) = f(x,z,y) = f(z,y,x) = f(y,x,z)$$

Природно прашање е дали постојат симетрични полиноми од три променливи со најмал степен, и ако постојат кои се тие. Заради особините на операцијата собирање и множење во множеството на реални броеви, јасно е дека секој од полиномите

$$\sigma_1 = x + y + z, \qquad \sigma_2 = xy + yz + zx, \qquad \sigma_3 = xyz$$

е симетричен полином. Секој од нив е хомоген полином, при што $\mathrm{st}\,\sigma_1 = 1$, $\mathrm{st}\,\sigma_2 = 2$ и $\mathrm{st}\,\sigma_3 = 3$. Логично е прашањето дали може некој од овие симетрични полиноми да се претстави како полином од преостанатите два. Јасно е дека не може, и тоа може да се провери непосредно.

Да забележиме дека симетричен полином е и полиномот

$$P(x,y,z)=x^2+y^2+z^2 .$$

Непосредно може да се провери точноста на равенството

$$x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx) ,$$

за произволни x,y,z . Значи, тој може да се претстави како полином од σ_1 и σ_2. Од друга страна, степенот на секој собирок во P е два а исто така степенот на σ_2 е два, при што во исто време тој е и хомоген. Меѓутоа степените на секоја променлива во σ_2 се помали од 2 кој е степен на секоја променлива во $P(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$. Според тоа, ако како критериум го избереме степенот на променливите поодделно, тогаш полиномот $\sigma_2=xy+yz+zx$ можеме да го сметаме за поелементарен од полиномот

$$P(x,y,z)=x^2+y^2+z^2 .$$

Слично, полиноми од три променливи кај кои збирот на степените во секој моном е три се

$$P(x,y,z)=xyz ,$$

$$Q(x,y,z)=x^2y+y^2x+x^2z+z^2x+y^2z+z^2y ,$$

$$R(x,y,z)=x^3+y^3+z^3 .$$

Точноста на равенствата

$$\begin{aligned}x^3+y^3+z^3&=(x+y+z)[(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)]-(xy+yz+zx)(x+y+z)+3xyz\\&=\sigma_1[\sigma_1^2-2\sigma_2]-\sigma_2\sigma_1+3\sigma_3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x^2y+y^2x+x^2z+z^2x+y^2z+z^2y&=(x+y+z)[(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)]-\\&\quad-(x^3+y^3+z^3)\\&=\sigma_1(\sigma_1^2-2\sigma_2)-[\sigma_1(\sigma_1^2-2\sigma_2)-\sigma_2\sigma_1+3\sigma_3]\\&=\sigma_2\sigma_1-3\sigma_3.\end{aligned}$$

може непосредно да се провери.

Значи, P,Q,R може да се претстават како полиноми полиномите $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$. Ако како критериум за елементарност го избереме критериумот како и во случајот со степен два, тогаш јасно е дека наједноставен од нив е $\sigma_3=xyz$.

Според тоа, гледаме дека претставувањето на некои симетрични полиноми од три променливи е можно преку симетричните полиноми σ_1, σ_2 и σ_3. Основен проблем, кој овде ќе го решаваме, е претставувањето на произволен симетричен полином преку симетричните полиноми σ_1, σ_2 и σ_3. Дали е тоа можно и да се направи постапка, редослед на чекори за тоа да се постигне.Од тие причини во натамошниот дел симетричните полиноми $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ќе ги нарекуваме **елементарни симетрични полиноми**.

3. Орбита на моном

Основата во дефинцијата за симетричен полином е тоа што со промена на местата на било кои две негови променливи не се менува неговиот облик, односно тој останува ист. Во секој симетричен полином постојат делови од него кои ја поседуваат таа особина. Како и во многу другите делови од математиката, од најразлични нејзини области, секогаш според даден признак се бараат “помали” односно “најмали” делови со таа особина.

Пример. Полиномот

$$P(x,y,z) = x^3y^3 + x^2y^2 + y^3z^3 + y^2z^2 + z^3x^3 + z^2x^2$$

очигледно е дека е симетричен полином. Полиномот може да се претстави како збир на два симетрични полиноми со помал број собироци.

Навистина

$$P(x,y,z) = Q(x,y,z) + R(x,y,z),$$

каде

$$Q(x,y,z) = x^3y^3 + y^3z^3 + z^3x^3 \text{ и } R(x,y,z) = x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2.$$

Дефиниција. Симетричниот полином со најмал број на собироци при што еден од нив е, $x^k y^l z^m$ се нарекува **орбита** и обично се означува со $O(x^k y^l z^m)$.

Пример 1. Полиномот $P(x,y,z) = x^4y^4z + x^4yz^4 + xy^4z^4$ очигледно е дека е орбита, т.е. $P(x,y,z) = O(x^4y^4z)$.

Пример 2.Полиномот

$$P(x,y,z) = x^3y^2z + x^3yz^2 + x^2y^3z + x^2yz + x^2yz^3 + xyz^2 + xy^3z^2 + xy^2z^3 + xy^2z,$$

не е орбита, бидејќи непосредно се гледа дека $P(x,y,z) = O(x^2y^3z) + O(x^2yz)$, т.е. е симетричен полином кој е збир на две орбити.

При разгледувањето на симетрични полиноми од три променливи, покрај орбита на мономи од облик $x^k y^l z^m$, мора да се разгледуваат и орбити на мономи од редуциран облик, т.е. на мономи од облик x^k и $x^k y^l$.Оправданоста за нивно разгледување е тоа што $x^k = x^k y^\circ z^\circ$ и $x^k y^l = x^k y^l z^\circ$,односно и нив можеме да ги разгледуваме како мономи од три променливи.

Бидејќи орбитата е најмал симетричен полином кој содржи даден моном (кој не е помножен со константа) во збирот $O(x^k)$ покрај x^k се појавуваат како собироци и y^k и z^k, т.е. $O(x^k) = x^k + y^k + z^k$. Јасно, $O(x^k) = O(y^k) = O(z^k)$.

Дефинција. Орбитите од облик $O(x^k)$ ќе ги нарекуваме **степени суми**. Степените суми $O(x^k)$ ќе го означуваме со s_k. Според тоа $s_k = x^k + y^k + z^k$.

Пример. Полиномот $P(x,y,z) = x^4 + y^4 + z^4$ е симетричен полином и

$$P(x,y,z) = O(x^4) = s_4 .$$

Орбитите на мономите кои содржат повеќе од една променлива имаат посложена структура. Нив ќе ги разделиме на два вида орбити. Орбити на мономи кои во себе содржат две променливи и орбити на мономи кои во себе содржат три променливи. На пример $O(x^2y^3)$, $O(xy^3)$, $O(x^2z^2)$ се орбити кои што содржи две променливи, при што нив можеме да ги разгледуваме како орбити од облик $O(x^2y^3) = O(x^2y^3z^\circ)$,

$$O(xy^3) = O(xy^3z^\circ) \text{ и } O(x^2z^2) = O(x^2z^2y^\circ), \text{ при што}$$

$$O(x^2y^3) = x^2y^3 + y^2z^3 + z^2y^3 + y^2z^3 + z^2x^3 + x^2z^3$$

$$O(yx^2) = yx^2 + xy^2 + xz^2 + zx^2 + yz^2 + zy^2$$

$$O(x^2z^2) = x^2z^2 + y^2z^2 + z^2x^2$$

Во општ случај таквите орбити се од облик $O(x^ky^l)$, $k \neq l$ која може да се разгледува како орбита $O(x^ky^lz^\circ)$, при што

$$O(x^ky^l) = O(x^ky^lz^\circ) = x^ky^lz^\circ + x^kz^ly^\circ + y^kx^lz^\circ + y^kz^lx^\circ + z^kx^ly^\circ + z^ky^lx^\circ$$
$$= x^ky^l + x^kz^l + y^kx^l + y^kz^l + z^kx^l + z^ky^l$$

Еден специјален случај на ваквите орбити е кога степените на двете променливи се совпаѓаат. Орбита на моном од две променливи, $O(x^ky^l)$, во случај кога $k = l$ го добива обликот, односно тој е облик $O(x^ky^k) = x^ky^k + y^kz^k + z^kx^k$.

Најопшт облик на орбита на моном е $O(x^ky^lz^m)$. Секако дека таа е симетричен полином од облик

$$O(x^ky^lz^m) = x^ky^lz^m + x^ky^mz^l + x^ly^kz^m + x^ly^mz^k + x^my^kz^l + x^my^lz^k .$$

Нејзини специјални случаи се кога таа има два еднакви степени во секој нејзин собирок или кога сите три степени се еднакви меѓу себе.

Во првиот случај таа е од облик

$$O(x^ky^kz^m) = x^ky^kz^m + x^ky^mz^k + x^my^kz^k ,$$

а во вториот случај таа е од облик

$$O(x^ky^kz^k) = x^ky^kz^k .$$

Јасно е дека секоја од досега разгледуваните орбити е хомоген полином.

Пример. Орбитата на мономот x^2yz^2 е симетричниот и хомоген полином

$$O(x^2yz^2) = x^2yz^2 + xy^2z^2 + x^2y^2z \ .$$

Пример. Орбитата на мономот xy^2z^3 е

$$O(xy^2z^3) = xy^2z^3 + xy^3z^2 + x^2yz^3 + x^2y^3z + x^3y^2z + x^3yz^2 \ .$$

Од претходните разгледувања,бидејќи бројот на собироци во секој полином е конечен, па тој е конечен и во секој симетричен полином, добиваме дека секој симетричен полином може да се претстави како збир на орбити и степени суми, помножени со константи.

4. Претставување на степена сума s_k преку $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$

Во претходниот дел видовме дека степените суми

$$s_2 = x^2 + y^2 + z^2 \text{ и } s_3 = x^3 + y^3 + z^3$$

може да се претстават преку елементарните симетрични полиноми σ_1, σ_2 и σ_3.

Непосредно може да се провери дека е точна следната формула за пресметување на степени суми:

$$s_k = \sigma_1 s_{k-1} - \sigma_2 s_{k-2} + \sigma_3 s_{k-3} \ . \qquad (*)$$

Навистина, ако во изразот на десната страна на последното равенство ги замениме изразите за σ_1, σ_2, σ_3, s_{k-1}, s_{k-2} и s_{k-3}, добиваме

$$\begin{aligned}\sigma_1 s_{k-1} - \sigma_2 s_{k-2} + \sigma_3 s_{k-3} &= (x+y+z)(x^{k-1} + y^{k-1} + z^{k-1}) - \\ &\quad - (xy+yz+zx)(x^{k-2} + y^{k-2} + z^{k-2}) + xyz(x^{k-3} + y^{k-3} + z^{k-3}) = \\ &= x^k + xy^{k-1} + xz^{k-1} + yx^{k-1} + y^k + yz^{k-1} + zx^{k-1} + zy^{k-1} + z^k - \\ &\quad - yx^{k-1} - xy^{k-1} - xyz^{k-2} - yzx^{k-2} - zy^{k-1} - yz^{k-1} - zx^{k-1} - \\ &\quad - zxy^{k-2} - xz^{k-1} + yzx^{k-2} + xzy^{k-2} + xyz^{k-2} = x^k + y^k + z^k = s_k\end{aligned}$$

Според тоа равенството (*) е точно. Равенството (*) како формула ќе го користиме за изразување и пресметување на било која степена сума s_k.

Бидејќи

$$s_\circ = x^\circ + y^\circ + z^\circ = 3, \ s_1 = x^1 + y^1 + z^1 = \sigma_1 \text{ и } s_2 = x^2 + y^2 + z^2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2,$$

користејќи ја формулата (*), добиваме:

$$x^3 + y^3 + z^3 = s_3 = \sigma_1 s_2 - \sigma_2 s_1 + \sigma_3 s_\circ = \sigma_1(\sigma_1^2 - 2\sigma_2) - \sigma_2\sigma_1 + 3\sigma_3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3 \ .$$

Слично, користејќи ги равенствата

$$s_1 = \sigma_1, s_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2 \text{ и } s_3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3$$

и точноста на равенството (*), можеме да ја пресметаме четвртата степена сума, при што

$$s_4 = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2 + 4\sigma_1\sigma_3 \ .$$

Аналогно постапуваме за s_5, итн.Користејќи ги претставувањата на $s_\circ$, s_1, s_2 преку елементарните симетрични полиноми $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ и формулата (*) можеме да ја формираме следната табелица:

Изрази за степени суми $s_n = x^n + y^n + z^n$ како полиноми од σ_1, σ_2 и σ_3
$s_\circ = 3$ $s_1 = \sigma_1$
$s_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$
$s_3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3$
$s_4 = \sigma_1^4 - 4\sigma_{1\,2}^2 + 2\sigma_2^2 + 4\sigma_1\sigma_3$,
$s_5 = \sigma_1^5 - 5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1\sigma_2^2 - 5\sigma_1^2\sigma_2 - 5\sigma_2\sigma_3$
$s_6 = \sigma_1^6 - 6\sigma_1^4\sigma_2 + 9\sigma_1^2\sigma_2^2 - 2\sigma_1^3 + 6\sigma_1^3\sigma_3 - 12\sigma_1\sigma_2\sigma_3 + 3\sigma_3^2$
$s_7 = \sigma_1^7 - 7\sigma_1^5\sigma_2 + 14\sigma_1^3\sigma_2^2 - 7\sigma_1\sigma_2^3 + 7\sigma_1^4\sigma_3 - 21\sigma_1^2\sigma_2\sigma_3 + 7\sigma_1\sigma_3^2 + 7\sigma_2^2\sigma_3$
....

Оваа таблица можеме да продолжиме да ја формираме до произволен природен број n.

5. Претставување на орбита $O(x^k y^l z^m)$ преку $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

Орбитите на мономи кои имаат повеќе од една променлива ќе ги изразиме преку елементарните симетрични полиноми $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

Не е тешко да се докаже дека орбитата $O(x^k y^l)$, $k \neq l$ може да се претстави во облик

$$O(x^k y^l) = O(x^k)O(y^l) - O(x^{k+l}) . \qquad (**)$$

Навистина, со непосредно пресметување, добиваме:

$$\begin{aligned} O(x^k)O(y^l) - O(x^{k+l}) &= (x^k + y^k + z^k)(x^l + y^l + z^l) - (x^{k+l} + y^{k+l} + z^{k+l}) \\ &= x^k x^l + x^k y^l + x^k z^l + y^k x^l + y^k y^l + y^k z^l + z^k x^l + z^k y^l + z^k z^l - x^{k+l} - y^{k+l} - z^{k+l} \\ &= x^k y^l + x^k z^l + y^k x^l + y^k z^l + z^k x^l + z^k y^l = O(x^k x^l) \end{aligned}$$

Бидејќи $O(x^k) = s_k$, $O(x^l) = s_l$ и $O(x^{k+l}) = s_{k+l}$, формулата (**) можеме да ја запишеме во облик $O(x^k y^l) = O(x^k)O(y^l) - O(x^{k+l}) = s_k s_l - s_{k+l}$.

Во специјалниот случај $k = l$, т.е. за орбита од облик $O(x^k y^k)$ не е тешко да се провери дека е точно равенството

$$O(x^k y^k) = \tfrac{1}{2}[O(x^k)O(y^k) - O(x^{2k})] = \tfrac{1}{2}[(O(x^k))^2 - O(x^{2k})] . \qquad (***)$$

Навистина, со непосредно пресметување, добиваме

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}[(O(x^k))^2 - O(x^{2k})] &= \tfrac{1}{2}[(x^k + y^k + z^k)^2 - (x^{2k} + y^{2k} + z^{2k})]\\ &= \tfrac{1}{2}(x^{2k} + y^{2k} + z^{2k} + 2x^k y^k + 2y^k z^k + 2z^k x^k - x^{2k} - y^{2k} - z^{2k})\\ &= \tfrac{1}{2}2(x^k y^k + y^k z^k + z^k x^k) = x^k y^k + y^k z^k + z^k x^k = O(x^k y^k)\end{aligned}$$

Ако ги употребиме ознаките $O(x^k) = s_k$ и $O(x^{2k}) = s_{2k}$, формулата (***) го добива обликот $O(x^k y^k) = \frac{1}{2}(s_k^2 - s_{2k})$.

Бидејќи секоја степена сума $s_l, l \in \mathbb{N}$ може да се претстави како полином од елементарните симетрични полиноми $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, добиваме дека секоја орбита $O(x^k y^l)$ може да се претстави како полином од $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

Орбитите од облик $O(x^k y^l z^m)$ имаат посложена структура од орбитите од облик $O(x^k y^l)$.

За орбитите од облик $O(x^k y^l z^m)$, кога $k \neq l \neq m \neq k$ можен е еден од трите случаи:

1. $m < k, m < l$. Тогаш орбитата $O(x^k y^l z^m)$ можеме да ја претставиме во облик

$$\begin{aligned}O(x^k y^l z^m) = x^m y^m z^m (&x^{k-m} y^{l-m} + x^{k-m} z^{l-m} + x^{l-m} y^{k-m} + x^{l-m} z^{k-m} +\\ &+ y^{k-m} z^{l-m} + y^{l-m} z^{k-m}) = (xyz)^m O(x^{k-m} y^{l-m})\end{aligned}$$

2. $k < m, k < l$. Тогаш орбитата $O(x^k y^l z^m)$ можеме да ја претставиме во облик

$$\begin{aligned}O(x^k y^l z^m) &= x^k y^k z^k (y^{l-k} z^{m-k} + y^{m-k} z^{l-k} + x^{l-k} z^{m-k} +\\ &\quad + x^{l-k} y^{m-k} + x^{m-k} z^{l-k} + x^{m-k} y^{l-k})\\ &= (xyz)^k O(x^{l-k} y^{m-k})\end{aligned}$$

3. $l < k, l < m$. Во овој случај орбитата можеме да ја претставиме во облик

$$\begin{aligned}O(x^k y^l z^m) &= x^l y^l z^l (x^{k-l} z^{m-l} + x^{k-l} y^{m-l} + y^{k-l} z^{m-l} +\\ &\quad + y^{m-l} z^{k-l} + x^{m-l} y^{k-l} + x^{m-l} z^{k-l})\\ &= (xyz)^l O(x^{k-l} y^{m-l})\end{aligned}$$

За орбитите од облик $O(x^k y^k z^m)$ можен е еден од следните два случаи:

1. $k < m$. Тогаш орбитата $O(x^k y^k z^m)$ може да се претстави во облик

$$\begin{aligned}O(x^k y^k z^m) &= x^k y^k z^k (z^{m-k} + y^{m-k} + x^{m-k})\\ &= (xyz)^k (z^{m-k} + y^{m-k} + x^{m-k}) = (xyz)^k s_{m-k}\end{aligned}$$

2. $m < k$. Во овој случај орбитата можеме да ја претставиме во облик

$$O(x^k y^k z^m) = x^m y^m z^m (x^{k-m} y^{k-m} + x^{k-m} z^{k-m} + y^{k-m} z^{k-m}) \\ = (xyz)^m O(x^{k-m} y^{k-m}).$$

Секоја орбита од облик $O(x^k y^l)$ за произволни вредности на степените k, l може да се претстави како полином од степени суми а секоја степена сума може да се претстави како полином од елементарните симетрични полиноми $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, добиваме дека секоја орбита од облик $O(x^k y^l z^m)$ за $k, l, m \in \mathbb{N}$ може да се претстави како полином од $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

Бидејќи секој симетричен полином е збир на орбити помножени со константи, докажана е следната:

Теорема. Секој симетричен полином $P = P(x, y, z)$ може да се претстави како полином од $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

Од вкупните претходни излагања јасно е дека можеме да развиеме потполно определена постапка за претставување на симетричен полином преку елементарните симетрични полиноми $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

Пример. Полиномот

$$P(x, y, z) = 3x^3 yz + x^3 + 3xy^3 z + z^3 + 2x^2 y^2 + 3xyz^3 + 2x^2 z^2 + y^3 + 2y^2 z^2$$

претстави го како полином од елементарните симетрични полиноми $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

Решение.Полиномот можеме да го претставиме во облик

$$P(x, y, z) = 3x^3 yz + x^3 + 3xy^3 z + z^3 + 2x^2 y^2 + 3xyz^3 + 2x^2 z^2 + y^3 + 2y^2 z^2 \\ = O(x^3) + 2O(x^2 y^2) + 3O(x^3 yz).$$

Ако ги употребиме формулите (*), (**), (***)

$$O(x^3 yz) = xyzO(x^2) = \sigma_3 s_2 , \; O(x^3) = s_3 ,$$

$$O(x^2 y^2) = O(x^2)O(x^2) - O(x^4) = s_2^2 - s_4 ,$$

и ако од таблица ги употребиме вредностите за s_2, s_3, s_4 :

$$s_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2 , \; s_3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3 , \; s_4 = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2 + 4\sigma_1\sigma_3 ,$$

добиваме

$$P(x, y, z) = O(x^3) + 2O(x^2 y^2) + 3O(x^3 yz) = s_3 + 2s_2^2 - 2s_4 + 3\sigma_3 s_2 \\ = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3 + 2(\sigma_1^2 - 2\sigma_2)^2 - 2(\sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2 + 4\sigma_1\sigma_3) + 3\sigma_3(\sigma_1^2 - 2\sigma_2) \\ = \sigma_1^3 + 4\sigma_2^2 + 3\sigma_1^2\sigma_3 - 3\sigma_1\sigma_2 - 8\sigma_1\sigma_3 - 6\sigma_2\sigma_3 + 3\sigma_3.$$

Секако дека во последниот полином бројот на собироци е помал од бројот на собироци во почетниот полином и неговиот степен е исто така помал за два.

Задачи

Изрази ги преку σ_1, σ_2 и σ_3 следните симетрични полиноми

1. $x^4+y^4+z^4-2x^2y^2-2x^2z^2-2y^2z^2$

2. $x^5y^2+x^5z^2+x^2y^5+x^2z^5+y^5z^2+y^2z^5$

3. $(x+y)(y+z)(z+x)$.

4. $(x^2+y^2)(y^2+z^2)(z^2+x^2)$.

5. $(x-y)^2(y-z)^2(z-x)^2$.

6. $x^6+y^6+z^6+2x^5y+2x^5z+2xy^5+2xz^5+2y^5z+2yz^5-3x^4y^2-$
$-3x^4z^2-3x^2y^4-3x^2z^4-3y^4z^2-3y^2z^4+x^3y^3+y^3z^3+z^3x^3$

7. Ако $a+b+c=0$, докажи дека

а) $\frac{a^7+b^7+c^7}{7}=\frac{a^5+b^5+c^5}{5}\cdot\frac{a^2+b^2+c^2}{2}$,

б) $(\frac{a^7+b^7+c^7}{7})^5=(\frac{a^5+b^5+c^5}{5})^2\cdot\frac{a^4+b^4+c^4}{2}$,

со претставување на степените суми преку елементарните симетрични полиноми $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

8. Реши го системот $\begin{cases} x+y+z=2 \\ x^2+y^2+z^2=6 \\ x^3+y^3+z^3=8 \end{cases}$.

9. Упрости го изразот $\dfrac{a^3+b^3+c^3-3abc}{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}$,

Со помош на претставување на симетричен полином преку елементарните симетрични полиноми $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

Во вкупното претходно разгледување е очигледно дека единствени алгебарски операции кои се употребени се собирање,одземање и множење.Понатаму ќе видиме дека бројот на задачи кои на едноставен начин можеме да ги решиме со претходно развиената техника на претставување на симетричен полином преку елементарните симетрични полиноми не е мал, и е многу корисен.

Јасно е дека за било кој симетричен полином, користејќи ги формулите (*), (**), (***) и s_o, s_1, s_2 секој симетричен полином можеме да го изразиме преку елементарните симетрични полиноми σ_1, σ_2 и σ_3. Како и во други случаи, основно прашање е дали постои скратена постапка за пресметување на s_k. Одговорот е позитивен.

Статијата прв пат е објавена во списанието СИГМА на Сојузот на математичарите на Македонија