Владимир Стојановић

7 MATHEMATISKOP 7

Мазеоши

МАТЕМАТИКА ЗА МАТУРАНТЕ

ПРИПРЕМА ЗА

УПИС НА ФАКУЛТЕТ

Треће издање

МАТЕМАТИСКОП Београд 1996.

Владимир Стојановић: MATHEMATISKOP 7
МАТЕМАТИКА ЗА МАТУРАНТЕ - *треће издање*

Рецензент
Мирјана Јовчић, проф. Железничке школе у Београду

Издавач ИП МАТЕМАТИСКОП, н.х. Т. Томшича 6, Београд

За издавача
Нада Стојановић, директор

Уредник
Павле Миличић

Слике и корице
Нада Стојановић

Компјутерска обрада текста
Душан Стојановић
Бошко Цветковић
Никола Стојановић

CIP – Каталогизација у публикацији
Народна библиотека Србије, Београд

51(079.1)

СТОЈАНОВИЋ, Владимир
Математика за матуранте : припрема за упис на факултет / Владимир Стојановић.–Београд : Математископ, 1996 (Бор : Бакар).– 480 стр.; 24 cm. – (Mathematiskop ; 7)

Тираж 2000.
ISBN 86-7076-001-0

а) Математика–Задаци
ИД - 32784140

Тираж 2000
Штампа: Штампарско издавачко предузеће ,,Бакар”, Бор

ПРЕДГОВОР

Овај **Приручник** представља *репетиториј средњошколске математике* . Његова намена је не само да подсети **матуранте** на градиво које су учили током четворогодишњег школовања, већ и да укаже на неопходан ниво и ширину знања "старог" градива. Укуси и убеђења су различити, па свако може ставити примедбе да је *"ово"* требало обрадити шире, а *"оно"* уже или чак да *"оно"* није ни требало обрађивати, јер "није потребно". Тешко је свима угодити, али аутор се нада да ће успети да задовољи и укусе и потребе већине читалаца – ученика и наставника.

Пажљивом читаоцу неће промаћи чињеница да је градиво *IV* разреда обрађено са најмање детаља, а градиво *II* разреда са највише детаља. Градиво *IV* разреда је "овогодишње", дакле још свеже из редовне наставе, па је у **Приручнику** максимално сажето у теоретском делу, а тежиште је дато на задатке. Градиву *II* разреда овде је посвећено више пажње због чињенице да оно представља највећи део подлоге за даље студирање на већини факултета, на којима математика има значаја. Из истих разлога је са доста детаља и примера обрађено градиво *III* разреда. У **Петој глави** дат је широк избор задатака који су на већем броју факултета претходних година задавани *за проверу знања и квалификацију будућих студената.* На крају су дати *прошлогодишњи тестови - класификациони испити за упис на техничке факултете, математички, физички и физичко-хемијски факултет.*

Овај **Приручник** представља практично пет књига - унију четири уџбеника и једне збирке задатака. Теоријско градиво, са неопходним дефиницијама и доказима, илустровано је са око 500 *примера*, детаљно урађених, са свим неопходним објашњенима. Читаоцу се пружа прилика да научи све оно што је из било којих разлога пропустио у току ранијег школовања. Овде је **срж** средњошколске математике. За вежбање је дато око 1000 пажљиво одабраних задатака и *сви су они детаљно решени* у ШЕСТОЈ ГЛАВИ. То ће омогућити читаоцу да постепено, упорним вежбањем (може и самостално), надокнади раније пропуштено.

Приручник је ослобођен баласта мање битних чињеница, али *гарантује пажљивом кориснику да ће положити* и МАТУРУ и ПРИЈЕМНИ ИСПИТ за упис на жељени факултет.

При писању **Приручника** аутор је користио пре свега материјале из својих раније написаних уџбеника.

Аутор са задовољством и захвалношћу констатује да је рецензент, *Мирјана Јовчић*, пажљиво прегледала рукопис и својим примедбама допринела квалитету књиге.

Комуникација наставник – ученик и аутор – читалац даје праве резултате само ако је двосмерна и ако се заснива на принципу узвраћене љубави. Искрена жеља и труд да се знање пренесе, односно прихвати, равни су настојањима да се угоди вољеној особи. Овај приручник је оплемењен и инспирисан љубављу писца и надамо се да ће га читаоци на такав начин доживети.

Мом вољеном ученику
аутор

САДРЖАЈ

ПРВА ГЛАВА

1.1 Основи математичке логике 7
1.2 Скупови 10
1.3 Размере и пропорције 16
ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ (1 - 10) 20
1.4 Рационални алгебарски изрази 21
ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ (11 - 20) 30
1.5 Линеарна функција 32
1.6 Линеарне једначине 33
1.7 Линеарне неједначине 39
1.8 Неке неједнакости 41
ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ (21 - 30) 43
1.10 Геометрија 44
1.11 Подударност 47
1.12 Појам вектора 50
1.13 Примене подударности на многоуглове 51
1.14 Круг 60
ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ (31 - 45) 62
1.15 Изометријске трансформације 63
1.16 Конструктивни задаци 69
ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ (46 - 55) 73
1.17 Хомотетија 74
1.18 Сличност 76
ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ (56 - 60) 82

ДРУГА ГЛАВА

2.1 Корени 84
ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ (61 - 65) 88
2.2 Комплексни бројеви 89
ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ (66 - 68) 92
2.3 Квадратне једначине с једном непознатом 92
ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ (69 - 84) 98
2.4 Квадратне функције и неједначине 100
ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ (85 - 92) 103
2.5 Нелинеарни системи једначина 104
ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ (93) 106
2.6 Ирационалне једначине и неједначине 106
ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ (94 - 95) 111
2.7 Полиноми на пољу комплексних бројева 111
ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ (96 - 103) 114
2.8 Експоненцијалне функције 114
ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ (104 - 105) 118
2.9 Логаритми 118
ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ (106 - 110) 124
2.10 Тригонометрија 125
2.11 Тригонометријске функције 126

2.12 Адиционе и сличне формуле ... 130
2.13 Тригонометријске функције углова ... 134
2.14 Графици тригонометријских функција ... 136
2.15 Трансформације производа и збира тригон. функција ... 138
ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ (111 - 116) ... 141
2.16 Тригонометријске једначине и неједначине ... 142
2.17 Примене тригонометријских функција углова ... 149
2.18 Тригонометријски облик комплексног броја ... 152
2.19 Инверзне тригонометријске функције ... 155
ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ (117 - 120) ... 158

ТРЕЋА ГЛАВА

3.1 Полиедри ... 163
3.2 Површине и запремине неких полиедара ... 170
ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ (121 - 155) ... 176
3.3 Обртна тела ... 179
ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ (156 - 184) ... 191
3.4 Детерминанте ... 193
ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ (185 - 188) ... 199
3.5 Вектори ... 200
ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ (189 - 194) ... 210
3.6 Права у равни ... 211
ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ (195 - 201) ... 218
3.7 Криве другог реда ... 218
ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ (202 - 210) ... 228
3.8 Скуп целих бројева. Математичка индукција ... 229
ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ (211 - 217) ... 232
3.9 Бројни низови. Гранична вредност низа ... 233
ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ (218 - 234) ... 241

ЧЕТВРТА ГЛАВА

4.1 Комбинаторика ... 243
ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ (235 - 245) ... 252
4.2 Реалне функције. Граничне вредности ... 253
ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ (246 - 247) ... 263
4.3 Изводи функција ... 263
ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ (248 - 255) ... 272
4.4 Испитивање функција. Цртање графика ... 273
ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ (256) ... 279
4.5 Неодређени интеграли ... 279
ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ (257 - 259) ... 289
4.6 Одређени интеграли ... 290
ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ (260 - 265) ... 299
4.7 Примери матурских писмених задатака (266 - 280) ... 300

ПЕТА ГЛАВА

5.1 Програм математике за класификациони испит ... 304
5.2 Задаци са ранијих испита (281 - 761) ... 305

ШЕСТА ГЛАВА

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ЗА ВЕЖБАЊЕ (1 - 761) ... 349

ПРВА ГЛАВА

1.1 ОСНОВИ МАТЕМАТИЧКЕ ЛОГИКЕ

Размотрићемо неке логичке операције са *исказима.* Под исказом подразумевамо неко тврђење*) које може бити само *или тачно, или нетачно.* Нпр. исказ је тврђење: $2+3=6$, и то *нетачан*, а није исказ: $x+3=6$. Ако уведемо ознаку p за формулу $2+3=6$, можемо записати да је $\tau(p)=\perp$, што значи: "исказ p је нетачан". Симбол $\perp$ се чита "нете" и означава *нетачну истинитосну вредност* исказа. Тачна вредност се означава симболом $\top$ ("те"). Нпр. за исказ (q): "$2\cdot 3=6$ и $2+3=5$" важи: $\tau(q)=\top$, тј. исказ q је тачан. "Те" и "нете", тј. $\top$ и $\perp$, су такозване *логичке константе.* Тврђење $x+3=6$ није исказ, јер се не може тврдити ни да је тачан, ни да је нетачан. Заправо, ако је $x=3$ ово тврђење је тачно, а ако је $x\neq 3$ тврђење је нетачно. Оваква тврђења (са неком "променљивом") су формуле за које не можемо тврдити ни да су тачне, ни да су нетачне. Касније ћемо их детаљније проучити.

Горе наведени исказ p је тзв. *прост* (елементаран) *исказ.* Други наведени исказ q је сачињен од два елементарна исказа: "$2\cdot 3=6$" и "$2+3=5$", па је то *сложен исказ.* Сложене исказе формирамо од простих разним *логичким операцијама.* Овде ћемо поменути: *негацију, конјункцију, дисјункцију, искључну дисјункцију, импликацију* и *еквиваленцију.*

Негација исказа p, у ознаци $\neg p$, је исказ који је тачан ако и само ако је исказ p нетачан (види таблицу *а*). Користи се и ознака $\overline{p}$. (Читамо : *није* p.)

Због практичности и прегледности истинитосне вредности исказа приказујемо *истинитосним таблицама.*

Конјункција исказа p и q, у ознаци $p\wedge q$, је исказ који је тачан ако и само ако су оба исказа p и q тачна. ($p\wedge q$ читамо: "p и q") Конјункцији одговара таблица *б*).

Дисјункција исказа p и q је исказ који је нетачан ако и само ако су оба исказа p и q нетачна. Користимо ознаку $p\vee q$, која се чита "*p или q*". Дисјункцији одговара таблица *в*).

Искључна дисјункција исказа p и q је исказ који је тачан ако и само ако је један од исказа p, q тачан, а други нетачан. Ознака је $p\underline{\vee}q$ и чита се "*или p или q*".Одговарајућа таблица је *г).*

Импликација исказа p и q је исказ који је нетачан ако и само ако је први исказ тачан и други исказ нетачан (таблица *д*). Ознака

---

*) Овде се подразумева да је реч о *математичким тврђењима* , тј. о математичким "формулама", а не конверзацијским свакодневним реченицама.

је $p \Rightarrow q$ и чита се најчешће као: "*p повлачи q*, или "*Из p следи q*", или "*Ако p, онда q*". Исто значење имају и реченице: "*p је довољан услов за q*" и "*q је потребан услов за p*".

негација

p	$\neg p$
$\top$	$\bot$
$\bot$	$\top$

а)

конјункција

$\wedge$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\bot$

б)

дисјункција

$\vee$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\bot$

в)

искљ. дисјункција

$\underline{\vee}$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\bot$

г)

импликација

$\Rightarrow$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\top$

д)

еквиваленција

$\Leftrightarrow$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\top$

ђ)

истинитосне таблице логичких операција

Еквиваленција исказа p и q је исказ који је тачан ако и само ако оба исказа p и q имају једнаке истинитосне вредности (таблица ђ). Ознаку $p \Leftrightarrow q$ читамо "*p је еквивалентно са q*". Исто значе и следеће реченице: "*p ако и само ако q*", "*p је потребан и довољан услов за q*", "*из p следи q и из q следи p*", "*p ако q и q ако p*", "*p повлачи q и q повлачи p*".

Формирање нових исказа врши се по следећем принципу.

Ако су p и q искази, тада су искази и: $\neg p$, $\neg q$, $p \wedge q$, $p \vee q$, $p \underline{\vee} q$, $p \Rightarrow q$, $p \Leftrightarrow q$.

Заграде користимо или изостављамо на уобичајене начине.

Посебно су значајни искази који су тачни за све истинитосне вредности $p, q, \ldots$ Такви искази су *таутологије*. Неке таутологије су посебно важне и називамо их *законима логичког закључивања*. Такве су, на пример, таутологије:

Де Морганови закони: $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$ (1)

$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$ (2)

Закон контрапозиције: $(\neg q \Rightarrow \neg p) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$ (3)

Закон свођења на противречност: $\neg p \Rightarrow (q \wedge \neg q) \Leftrightarrow p$ (4)

Закон modus ponens: $p \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow q$ (5)

Закон логичког мишљења можемо и овако записивати: $\dfrac{A, B, C}{D}$, што значи $A \wedge B \wedge C \Rightarrow D$. На пример, закон *modus ponens* записујемо: $\dfrac{A, A \Rightarrow B}{B}$.

Теореме (ставови) се најчешће могу изразити као импликације (потребан услов, довољан услов) или као еквиваленције (потребан и довољан услов). Доказују се коришћењем разних логичких закона. На пример, у геометрији се често користе закони (3) и (4).

Пример 1. Нека су p, q, r, s следећи искази:

p: Збир унутрашњих углова сваког троугла је 180^0.

q: Симетрале страница сваког троугла имају заједничку тачку.

r: Сваки троугао је централно симетричан.

s: У сваки троугао се може уписати круг.

Одредити истинитосне вредности исказа:
а) $((p \wedge q) \Rightarrow \neg(r \Leftrightarrow s)) \vee \neg r$; *б)* $(r \underline{\vee} (s \Rightarrow p)) \Leftrightarrow (\neg q \wedge (r \Leftrightarrow p))$.

Решење.*) Искази p, q, s су тачни и $\tau(r) = \perp$.
а) $((\top \wedge \top) \Rightarrow \neg(\perp \Leftrightarrow \top)) \vee \neg\perp = (\top \Rightarrow \neg\perp) \vee \top = \top$.
б) $(\perp \underline{\vee} (\top \Rightarrow \top)) \Leftrightarrow (\neg\top \wedge (\perp \Leftrightarrow \top)) = (\perp \underline{\vee} \top) \Leftrightarrow (\perp \wedge \perp) = \top \Leftrightarrow \perp = \perp$. $\spadesuit$

Пример 2. Доказати да су следећи искази (формуле) таутологије:
а) $(\perp \vee p) \Leftrightarrow p$; *б)* $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$.

Решење. Састављањем одговарајућих истинитосних таблица уверићемо се да ови искази имају увек истинитосну вредност $\top$.

а)

p	$\perp \vee p$	$(\perp \vee p) \Leftrightarrow p$
$\top$	$\top$	$\top$
$\perp$	$\perp$	$\top$

б)

p	q	$\neg p$	$p \Rightarrow q$	$\neg p \vee q$	f**)
$\top$	$\top$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\top$
$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\perp$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$

Напомена. У случају *а)* прва колона таблице су све могућности истинитосне вредности исказа p, а у случају *б)* прве две колоне обухватају све могућности парова истинитосних вредности исказних слова p и q. $\spadesuit$

Као што смо на почетку навели, тврђење $x + 3 = 6$ није исказ. Али, ако бисмо рекли: "За *неки* x је $x+3 = 6$", или "*Постоји тачно један* x такав да је $x + 3 = 6$", или "За *сваки* x је $x + 3 = 6$", онда бисмо добили исказе. У наведеном случају су прва два тачна, а трећи је нетачан. Ближе одређивање у оваквим (тзв. предикатским) формулама врши се *кванторима* (квантификаторима): *неки* (постоји) - у ознаци $\exists$, *постоји тачно један* (постоји један и само један) - у ознаци $\exists_1$ и *сваки* - у ознаци $\forall$. Тако наведене предикатске формуле записујемо: $(\exists x)(x + 3 = 6)$, затим $(\exists_1 x)(x + 3 = 6)$, односно $(\forall x)(x + 3 = 6)$.

Ако на кванторе $\exists$ (егзистенцијални) и $\forall$ (универзални) делујемо негацијом, добијамо следеће формуле:

$$\boxed{\neg(\forall x)A \Leftrightarrow (\exists x)\neg A} \tag{6}$$

(7) $$\boxed{\neg(\exists x)A \Leftrightarrow (\forall x)\neg A}$$

*)Убудуће знаком $\spadesuit$ означаваћемо *крај решења*, или *доказа* у примерима.
**)f, тј. "формула", је скраћено означена формула из конкретног задатка

(7) $$\boxed{\neg(\exists x)A \Leftrightarrow (\forall x)\neg A}$$

где је A неко тврђење које садржи променљиву x. Истакнимо да формуле (6) и (7) припадају класи тзв. *ваљаних формула*, тј. *увек тачних* формула.

Пример 3. Од наведених формула издвојити тачне.

а) $(\forall x \in Z)(\forall y \in Z)\ x^2 + y^2 \geq 0$; *б)* $(\forall x \in N)(\exists y \in R)\ 3x + y = 1$

в) $(\forall a, b \in R)\ a^4 + b^2 > 0$; *г)* $(\exists m \in N)\ m + 3 \leq 0$.

Слова N, Z, R су редом ознаке за скупове природних, целих, реалних бројева.

Решење. Формуле *а)* и *б)* су тачне. Формула *в)* није тачна, јер за $a = 0$ и $b = 0$ није $a^4 + b^2 > 0$. Формула *г)* није тачна, јер важи: $(\forall m \in N)\ m + 3 > 0$. ♠

Пример 4. Дата је формула: $\neg(\forall x)(x \leq 5 \land x > 1)$. Које од доле наведених формула су еквивалентне са датом формулом:

а) $(\forall x)\neg(x \leq 5 \land x > 1)$; *б)* $(\exists x)(x \leq 5 \land x > 1)$; *в)* $(\exists x)(1 < x \leq 5)$;
г) $(\exists x)(x \in [1,\ 5))$; *д)* $(\forall x)(x \notin (1,\ 5])$; *ђ)* $(\exists x)(x \leq 1 \lor x > 5)$.

Решење. Користећи формуле (6) и (1), закључујемо да је датој формули еквивалентна само формула *ђ)*. ♠

1.2 СКУПОВИ

Подсетићемо се на основне појмове и операције. Скуп је одређен својим елементима. На пример: $A = \{3, 4, 5, 6\}$, а то се може и овако записати: $A = \{x \mid 3 \leq x \leq 6\}$. Пишемо нпр. $3 \in A$ (број 3 је елемент скупа A), или $8 \notin A$ (8 није елемент скупа A). Скуп без елемената је *празан скуп*, у ознаци $\emptyset$.

Ако за скупове A и B важи услов $(\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in B)$, тада кажемо да је A *подскуп* скупа B, у ознаци $A \subset B$, односно да је B *надскуп* скупа A, што означавамо са $B \supset A$.

Ако за скупове A и B важи услов $(\forall x)(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$,тада кажемо да су скупови A и B *једнаки*, тј. $A = B$. Дакле, ако је $A = B$, онда је $A \subset B$ и $B \subset A$, а важи и обрнуто.

Поменимо и следеће операције са скуповима.

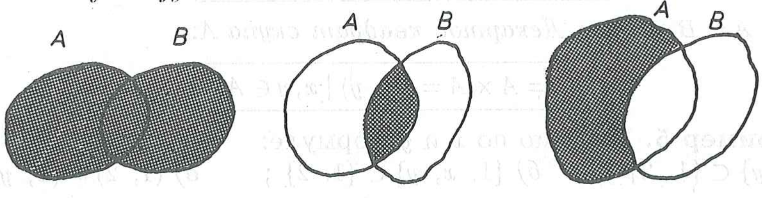
(8) *Пресек:* $A \cap B = \{x \mid x \in A \land x \in B\}$

(9) *Унија:* $A \cup B = \{x \mid x \in A \lor x \in B\}$

(10) *Разлика:* $A \backslash B = \{x \mid x \in A \land x \notin B\}$

На сл. 1 видимо графички приказ ових операција, помоћу Ојлер-Венових дијаграма.

За два скупа A и B без заједничких елемената, дакле $A \cap B = \emptyset$, кажемо да су *дисјунктни*.



$A \cup B$ $\quad$ $A \cap B$ $\quad$ $A \backslash B$

Сл. 1

У вези са разликом скупова је и *комплемент* скупа. Ако је $A \subset S$, тада скуп $S \backslash A$ називамо *комплементом скупа* A *у односу на* S и означавамо са $\overline{A}_S$ или само са $\overline{A}$, односно A', ако је јасно шта представља скуп S.*)

Нећемо доказивати особине операција на скуповима, али наводимо најважније.

$A \cap B = B \cap A$ (комутативност пресека)
$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (асоцијативност пресека)
$A \cup B = B \cup A$ (комутативност уније)
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (асоцијативност уније)
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (дистрибутивност)
$A \cap (B \backslash C) = (A \cap B) \backslash (A \cap C)$
$\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$ (Де Морганови закони)
$\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$

Посебан појам чини тзв. *уређен скуп*. За разлику од "обичних" скупова, о којима је до сада било говора, код уређеног скупа није битан само састав, већ и редослед набрајања елемената. Према броју елемената уређене скупове називамо: *уређена двојка* (уређени пар), *уређена тројка*, итд, у ознаци $(a,\ b)$, $(a,\ b,\ c)$, итд. Услови под којим су два уређена скупа једнака још више истичу различитост у односу на "обичне" скупове. Тако је, нпр. $(a,\ b,\ c) = (x,\ y,\ z) \Leftrightarrow (a = x \wedge b = y \wedge c = z)$. По дефиницији важи једнакост: $\{1,\ 1,\ 2\} = \{1,\ 2,\ 2\}$, али $(1,\ 1,\ 2) \neq (1,\ 2,\ 2)$.

Уређен пар $(x,\ y)$ има геометријску интерпретацију у Декартовом правоуглом координатном систему. Пару $(x,\ y)$, за $x, y \in R$, одговара тачно једна тачка којој је x прва, а y друга координата.

За скупове A и B дефинишемо тзв. *Декартов производ*, у ознаци $A \times B$, на следећи начин:

---

*) Ако није договорено да $\overline{A}$ значи $\overline{A}_S$, тј. ако није јасно шта је скуп S, тада се под $\overline{A}$ подразумева скуп "*није* A", тј. $x \in \overline{A} \Leftrightarrow x \notin A$.

(11) $$\boxed{A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}}$$

Ако је $A = B$ имамо *Декартов квадрат скупа* A:

(12) $$\boxed{A^2 = A \times A = \{(x, y) \mid x, y \in A\}}$$

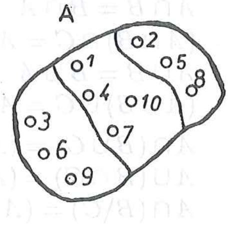
Пример 5. Решимо по x и y формуле:
а) $\{x,\ y\} \subset \{1,\ 2\}$; *б)* $\{1,\ x,\ y\} \subset \{1,\ 2\}$; *в)* $(1,\ 2) = (x,\ y)$.

Решење. *а)* и *б)* Решења су $x = 1$ и $y = 1$, или $x = 2$ и $y = 2$, или $x = 1$ и $y = 2$, или $x = 2$ и $y = 1$. *в)* $x = 1$ и $y = 2$. ♠

Пример 6. Доказати да за произвољне скупове A, B, C важи: $(A \cap B) \backslash C = A \cap (B \backslash C)$.

Доказ ћемо извести помоћу таблице, слично решењу *примера* 2, само што ће уместо знакова $\top$ и $\perp$ бити $\in$ и $\notin$. (Односи се на било које елементе датих скупова)

A	B	C	$A \cap B$	$B \backslash C$	$(A \cap B) \backslash C$	$A \cap (B \backslash C)$
$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$
$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$
$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$
$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$
$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$
$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$
$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$
$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$



сл. 2

На основу идентичности задњих двеју колона закључујемо да је дата једнакост тачна. ♠

Сваки подскуп ϱ Декартовог производа $A \times B$, тј. $\varrho \subset (A \times B)$, назива се *релацијом* између елемената скупова A и B. Са $a\varrho b$ означавамо да је "*a у релацији* ϱ *са b*". Нас овде занимају релације међу елементима једног скупа. То су подскупови Декартовог квадрата: $\varrho \subset (A \times A)$. Многе од тих релација су нам познате и по именима, као "једнакост" $(x = y)$, "дељивост" ($x \mid y$ - тј. x "се садржи" у y, односно x "дели" y), релација $\leq$, и сл.

Међу разним особинама произвољних релација, посебно су интересантне:

(R) $x\varrho x$ (рефлексивност)
(S) $x\varrho y \Rightarrow y\varrho x$ (симетричност)
(A) $x\varrho y \wedge y\varrho x \Rightarrow x = y$ (антисиметричност)
(T) $x\varrho y \wedge y\varrho z \Rightarrow x\varrho z$ (транзитивност)

Оне релације које се одликују особинама (R, A, T) су тзв. *релације поретка*. Такве су релације $x \leq y$, $x \mid y$, $A \subset B$, и сл.

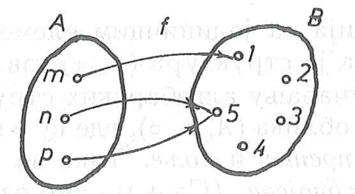
Релације са особинама (R, S, T) називамо *релацијама еквиваленције* . Такве су, на пример, $x = y$, $a \parallel b$ (права a је паралелна правој b), $x \cong y$, и сл.

Релација еквиваленције дели скуп на којем је дефинисана на тзв. *класе еквиваленције* . То су дисјунктни подскупови, а сваки од њих се састоји од елемената који су сви једни с другима у релацији.

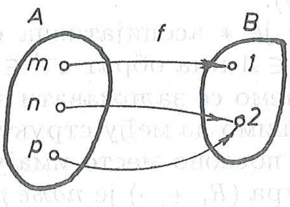
Пример 7. Одредити класе еквиваленције скупа $A = \{a \mid a \in N \wedge a \leq 10\}$, одређене релацијом $x\varrho y \Leftrightarrow x \equiv y (mod\ 3)$.

Решење. $x \equiv y(mod\ 3)$ означава да бројеви x и y имају исти остатак дељења са 3, тј. да је $x - y = 3k$, $k \in Z$. Тражене класе уочавамо на слици 2. ♠

Подскуп f Декартовог производа $A \times B$, такав да сваком елементу a скупа A одговара тачно један уређени пар $(a,\ b)$, $b \in B$, такав да је $(a,\ b) \in f$, називамо *пресликавањем (функцијом)* скупа A у скуп B. То означавамо са $f\ :\ A \mapsto B$. Једно такво пресликавање приказано је на сл. 3.

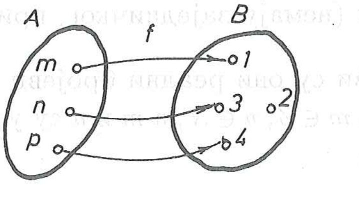


сл. 3

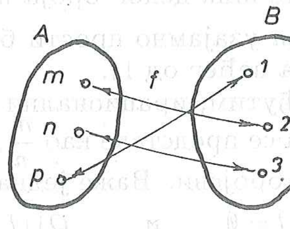


сл. 4

У случају $(a,\ 1) \in f$ пишемо $f(a) = 1$. Овде је такође $f(A) \subset B$. Уопште, за $(a,\ b) \in f$, тј. за $f(a) = b$, је $a \in A$ *оригинал* (лик), а, $b \in B$ је *слика*, док је $f(A)$ скуп слика. Скуп A је *домен*, а скуп $f(A)$ је *кодомен* функције f. Ако је $f(A) = B$, тада је f *пресликавање скупа A на скуп B (сирјекција)*, сл. 4.



сл. 5



сл. 6

Ако важи импликација $a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$, тада је f пресликавање *један - један (инјекција)*, - сл. 5. Ако је при томе $f(A) = B$ и $B = \{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$, тада n називамо *кардиналним бројем* скупа A, у ознаци: $cardA = n$. Ако је пресликавање *на* и *један - један*, онда је то *бијекција* и постоји *инверзно* (обратно) пресликавање скупа B на скуп A, сл. 6. То означавамо са $B = f^{-1}(A)$.

Композиција (производ) пресликавања f и g скупа A на скуп C је $g \circ f(A) = C \Leftrightarrow f(A) = B \wedge g(B) = C$. То се може и овако записати: $g \circ f(A) = g(f(A))$.

Свако пресликавање скупа $A \times A$ у скуп A називамо *бинарном операцијом* у скупу A. Уствари, ако за сваки $x, y \in A$ постоји $z \in A$, тако да $(x,\ y) \mapsto z$, кажемо да је z резултат примене *операције* $*$ на елементе x и y. То другачије записујемо $x * y = z$ и кажемо да је скуп A *затворен* у односу на операцију $*$.

Ако је $(\forall x, y \in A)(x * y = y * x)$, операција $*$ је *комутативна*, а ако је $(\forall x, y, z \in A)(x * (y * z) = (x * y) * z)$, операција $*$ је *асоцијативна.*

Ако постоји $e \in A$, тако да је $e * a = a * e = a$, за сваки $a \in A$, тада је e *јединични* (неутрални) елемент операције $*$.

Ако за $a \in A$ постоји $b \in A$, тако да је $a * b = b * a = e$, тада је b *инверзни* елемент (обрат) елемента a и означавамо га са a^{-1}.

Скуп A снабдевен операцијом $*$ чини тзв. алгебарску структуру $(A,\ *)$.

Ако је $*$ асоцијативна операција са јединичним елементом и сваки $a \in A$ има обрат $a^{-1} \in A$, онда је структура $(A,\ *)$ тзв. *група.*

Нећемо се задржавати на проучавању алгебарских структура. Напоменимо да међу структурама облика $(A,\ *,\ \circ)$, где су $*$ и $\circ$ операције, посебно место имају тзв. *прстен* и *поље.* Тако на пример структура $(R,\ +,\ \cdot)$ је *поље реалних бројева.* (Са $+$ и $\cdot$ смо означили "обично" сабирање и "обично" множење).

Кад је реч о скуповима бројева, истичемо као најважније: скуп *природних* бројева, скуп *целих* бројева, скуп *рационалних* бројева, скуп *ирационалних* бројева. Унија ових скупова је скуп *реалних* бројева.

Напоменимо да се сваки рационални број може представити као количник целог броја m и природног броја n, тј. као $\frac{m}{n}$, где су m и n узајамно прости бројеви (немају заједничког, природног делиоца већег од 1).

Међутим, ирационални бројеви су они реални бројеви који не могу да се представе као $\frac{m}{n}$, где је $m \in Z$, $n \in N$, а m и n су узајамно прости бројеви. Важе једнакости:

$$Q \cap I = \emptyset \qquad \text{и} \qquad Q \cup I = R\ ,$$

где Q означава скуп рационалних, а I скуп ирационалних бројева.

У историји математике значајно место заузима доказ да је $\sqrt{2}$ ирационалан број. Посебно је значајан, до тада непознат, начин доказивања.

Пример 8. Доказати да је $\sqrt{2}$ ирационалан број.

Доказ. Користићемо закон контрапозиције (формула (3) стр. 8). Претпоставимо да тврђење није тачно, што би значило да постоје узајамно прости природни бројеви m и n, такви да је $\sqrt{2} = \dfrac{m}{n}$.

Квадрирањем ове једнакости добијамо да $\dfrac{m^2}{n^2} = 2$, односно $m^2 = 2n^2$. Последња једнакост показује да је m^2 дељиво са 2, па је m паран број, тј. $m = 2p$. Заменом у последњој једнакости добијамо: $4p^2 = 2n^2$, односно $2p^2 = n^2$. Значи, и n^2 је дељиво са 2, па је и n паран број: $n = 2q$. Закључак би био да узајамно прости бројеви m и n имају заједнички делилац 2, што је, наравно, немогуће. Дакле, претпоставка да је $\sqrt{2}$ могуће представити као количник два узајамно проста природна броја, $\sqrt{2} = \dfrac{m}{n}$, је неодржива. Дакле, $\sqrt{2}$ је ирационалан број. ♠

Читаоцима се препоручује да сами докажу да су ирационални бројеви: $\sqrt{6}$, $2-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}+\sqrt{3}$. (За други и трећи број доказ се своди на случајеве $\sqrt{2}$ и $\sqrt{6}$.)

Сваки реалан број, осим нуле, одликује се јединственим знаком: + (ако је већи од нуле), или − (ако је мањи од нуле). У вези са знаком постоји функција реалног броја x:

$$sgn(x)^{*)} = \begin{cases} 1, & за\ x > 0 \\ 0, & за\ x = 0 \\ -1, & за\ x < 0 \end{cases}$$

Реалан број има и тзв, *апсолутну вредност*. За број a то је већи од бројева a и $-a$, тј. $|a| = max\{a, -a\}$. Одавде се лако закључује да је $|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a \leq 0 \end{cases}$, односно да је $|a| = a \cdot sgn(a)$. Такође нам је познато да важи и једнакост $\sqrt{a^2} = |a|$.

Рационални бројеви се могу представити *тачно* у децималном облику, са коначним бројем децимала или као бесконачно периодични децимални број.

Ирационални бројеви се могу представити као децимални бројеви са грешком, тј. као *приближне вредности*.

Приближне вредности су у пракси често, готово редовно, присутне због немогућности тачног мерења. Због тога је битна процена учињене грешке. Ако је a тачна и a' приближна вредност, тада број Δ, $\Delta = |a - a'|$, називамо *апсолутном грешком*, а број

*) *sgn* је скраћеница латинске речи *signum* што значи *знак*.

ϱ, $\varrho = \dfrac{\triangle}{a}$ је *релативна грешка*. Кажемо да је неки број изражен у виду децималног броја са k тачних децимала ако $\triangle < 0.5 \cdot 10^{-(k+1)}$.

1.3 РАЗМЕРЕ И ПРОПОРЦИЈЕ

Размера је количник два броја различита од нуле, написан као $a : b$ или $\dfrac{a}{b}$, $ab \neq 0$. Размера се може проширивањем и скраћивањем (слично разломцима) упростити. Настојаћемо да размере упрошћавамо до количника два узајамно проста броја. На пример: $7\dfrac{7}{8} : 11\dfrac{1}{4} = \dfrac{63}{8} : \dfrac{45}{4} = 63 : 90 = 7 : 10$ (Прво смо проширили са 8, па скратили са 9).

Уочимо да је $24 : 10 = 2.4$ и $36 : 15 = 2.4$, па је $24 : 10 = 36 : 15$. Последња једнакост је тзв. *пропорција*. Уопште, пропорција је једнакост двеју једнаких размера. Записујемо је као $a : b = c : d$ или као $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$, $abcd \neq 0$. Бројеви a и d су *спољашњи*, а b и c *унутрашњи* чланови пропорције. Важи особина:

$$\boxed{a : b = c : d \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c} \tag{13}$$

Ова особина се најчешће користи при израчунавању евентуалног непознатог члана пропорције.

Ако је $a : x = x : b$ или $x : a = b : x$, односно $x^2 = a \cdot b$, тада број x називамо *геометријском средином* бројева a и b.

Једнакост више од две једнаке размере представља *продужену пропорцију*. На пример: $a : x = b : y = c : z$, односно $\dfrac{a}{x} = \dfrac{b}{y} = \dfrac{c}{z}$. По договору записујемо краће са $a : b : c = x : y : z$. Сматрајући да је при томе $\dfrac{a}{x} = k$, закључујемо из наведене пропорције да је $a = kx$, $b = ky$, $c = kz$.

Пример 9. Три села (A, B, C) су изградила заједнички мост. Трошкови изградње од 76000 динара подељени су сразмерно броју становника. Колико је платило свако село ако имају редом 1500, 2400, 1800 становника.

Решење. Из $A : B : C = 1500 : 2400 : 1800$, после скраћивања са 300 добијамо: $A : B : C = 5 : 8 : 6$, па је $A = 5k, B = 8k$ и $C = 6k$. Како је $A + B + C = 76000$, односно $19k = 76000$, налазимо да је $k = 4000$. Дакле, три села су сносила трошкове: $A = 20000$ динара, $B = 32000$ динара и $C = 24000$ динара. ♠

Продужену пропорцију можемо у неким случајевима добити и из више обичних пропорција, које се делимично односе на заједничке величине.

Пример 10. Одредити непознате величине из услова $a : b = 7 : 8$, $c : d = 5 : 4$, $b : d = 4 : 5$ и $a - 2b + d = 10$.

Решење. Из $a : b = 7 : 8$, $b : d = 4 : 5$ добићемо продужену пропорцију облика $a : b : d = \dots$, када обезбедимо да у обе дате пропорције слову b "одговара" исти број с десне стране једнакости. Утом циљу другу проширимо са 2. Добијамо $a : b = 7 : 8$, $b : d = 8 : 10$, па је $a : b : d = 7 : 8 : 10$. Ако ово проширимо са 2 и $c : d = 5 : 4$ проширимо са 5, добићемо $a : b : d = 14 : 16 : 20$ и $c : d = 25 : 20$, одакле је $a : b : c : d = 14 : 16 : 25 : 20$. Уводећи број k добијамо: $a = 14k$, $b = 16k$, $c = 25k$ и $d = 20k$, па услов $a - 2b + d = 10$ постаје: $2k = 10$, одакле је $k = 5$. Дакле: $a = 70$, $b = 80$, $c = 125$ и $d = 100$. ♠

Неку непознату величину можемо израчунати на основу њене *сразмерности* (управне или обрнуте) са другим познатим величинама. Подсетимо се да пропорција $a : b : c = 3 : 5 : 7$ означава да су величине a, b, c *управно* (директно) *сразмерне* бројевима 3, 5, 7, а пропорција $a : b : c = \frac{1}{3} : \frac{1}{5} : \frac{1}{7}$ означава да су величине a, b, c *обрнуто* (индиректно) *сразмерне* бројевима 3, 5, 7 (Случај $a : b = \frac{1}{x} : \frac{1}{y}$ своди се на $a : b = y : x$).

Пример 11. Од 35 kg брашна добија се 50 kg хлеба. Колико брашна треба за 60 kg хлеба?

Решење. *За више* хлеба *треба више* брашна. То значи да су овде управно сразмерне величине. То смо на следећој шеми означили стрелицама истог смера. Смер стрелица одређује редослед писања бројева у размерама.

$$\begin{array}{l} \uparrow 35\ kg \text{ брашна } \uparrow 50\ kg \text{ хлеба} \\ \mid\ x\ kg \text{ брашна } \mid 60\ kg \text{ хлеба} \\ \hline \end{array}$$

$$x : 35 = 60 : 50 \Rightarrow 50x = 35 \cdot 60$$

$$x = \frac{35 \cdot 60}{50} = 42\ kg \text{ брашна. } ♠$$

Пример 12. Ученик је прочитао једну књигу за 20 дана, тако што је сваког дана читао 45 минута. За колико дана ће прочитати исту такву књигу (истог броја страна), ако дневно чита по 1 сат?

Решење. Ако сваког дана за читање троши *више времена* требаће *мање дана* да се књига прочита. То су обрнуто пропорционалне величине, па су стрелице на шеми окренуте у супротним смеровима.

$$\begin{array}{l} \uparrow 20 \text{ дана} \mid 45 \text{ минута дневно} \\ \mid x \text{ дана} \downarrow 60 \text{ минута дневно} \end{array}$$

$$x : 20 = 45 : 60 \Rightarrow x = \frac{20 \cdot 45}{60} = 15 \text{ дана.} \spadesuit$$

Пример 13. Радећи дневно 8 часова 20 радника је зарадило 12000 динара за 15 дана. Колико часова дневно треба да раде 40 радника да би за 10 дана зарадили 10000 динара?

Решење.

$$\begin{array}{l} \uparrow 8 \text{ часова дневно} \mid 20 \text{ радника} \uparrow 12000 \text{ дин.} \mid 15 \text{ дана} \\ \mid x \text{ часова дневно} \downarrow 40 \text{ радника} \mid 10000 \text{ дин.} \downarrow 10 \text{ дана} \end{array}$$

Стрелице се одређују *у односу на непознату величину.* (*Више часова* дневно ради *мање радника*; радећи *више часова* дневно зарадиће *више динара*; ако раде *више часова* дневно радиће *мање дана.*)

$$\left.\begin{array}{l} x : 8 = 20 : 40 \\ \quad = 10000 : 12000 \\ \quad = 15 : 10 \end{array}\right\} \Rightarrow x : 8 = (20 \cdot 10000 \cdot 15) : (40 \cdot 12000 \cdot 10)^{*})$$

$$x = \frac{8 \cdot 20 \cdot 10000 \cdot 15}{40 \cdot 12000 \cdot 10} = 5 \text{ часова дневно.} \spadesuit$$

Пропорције се често користе за решавање задатака са *процентима.* Проценат, у ознаци 1%, је број $\frac{1}{100}$, односно 0.01. Користимо га за изражавање релативних промена. Основна величина (чије промене пратимо) назива се *главница* - она представља 100% (односно $100 \cdot 0.01 = 1$, тј. целину). Промену означавамо са P (процентни износ), а релативну промену означавамо бројем процената (p %). Ове величине везане су пропорцијом:

$$\boxed{G : P = 100 : p} \tag{14}$$

Пример 14. Увоз неке робе је повећан за 30% и износи 16640 тона. За колико је тона повећан увоз?

Решење. *Први начин.* Тражимо G, а знамо да 130% износи 16640 тона:

$$G : 16640 = 100 : 130 \Rightarrow G = \frac{16640 \cdot 100}{130} = 12800 \text{ тона}$$

Извоз је повећан за 3840 тона ($16640 - 12800 = 3840$).

*) Ово је правило тзв. *сложеног сразмерног рачуна:* Спољашњи члан x је количник производа свих унутрашњих чланова, са производом свих спољашњих чланова пропорција.

Други начин. $1.30G = 16640 \Rightarrow G = 16640 : 1.30 = 12800$ тона, итд. ♠

Пример 15. Возач је због лошег коловоза смањио брзину за 20%. За колико ће процената повећати нову брзину када поново буде возио ранијом брзином?

Решење. Ако се првобитно кретао брзином v, онда је нова брзина $0.8v$. Сада је $G = 0.8v$, $P = v$, а тражи се p %:

$$0.8v : v = 100 : p \ \Rightarrow \ p \ = \frac{100v}{0.8v} = 125\%.$$

Нову брзину треба повећати за 25%. ♠

Пример 16. Морска вода садржи 5% соли. Колико чисте воде треба додати у 40 литара морске воде да се добије раствор који садржи 1% соли?

Решење. У 40 литара морске воде има 5% соли. Из $40 : P = 100 : 5$ добијамо $P = 2$, тј. у 40 литара морске воде има 2 kg соли. У новом раствору ова 2 kg треба да буду 1%. Дакле:

$$G : 2 = 100 : 1 \Rightarrow G = 200.$$

Значи, на 200 литара раствора имаћемо 1% соли. Треба додати 160 литара чисте воде. ♠

Пропорције користимо и у тзв. *промилном рачуну* користећи се пропорцијом:

$$\boxed{G : P = 1000 : p} \qquad (15)$$

Промил је $\dfrac{1}{1000} = 0.001$ и означавамо га са 1‰ .

У банкарским пословима користи се *каматни* (интересни) рачун. То је специфично израчунавање процената уз уважавање фактора *време*. Познато је да се уложен (или позајмљен) новац повећава (или умањује) за *камату* (интерес). Камата се означава са I, уложен новац (*капитал*) са K, а време са g (у годинама), m (у месецима) или d (у данима). Одговарајуће пропорције су:

$$\boxed{\begin{array}{c} K : I = 100 : pg \\ K : I = 1200 : pm \\ K : I = 36000 : pd \ ^{*)} \end{array}} \qquad (16)$$

Са p % означавамо колико динара камате донесе капитал од 100 динара за годину дана - то је *каматна* (интересна) *стопа*.

Пример 17. Неко је узео кредит (зајам) од 60000 динара са годишњом каматом од 40%. Колико ће дужник вратити

а) ако дуг враћа за 8 месеци,

б) ако је зајам узет 15. априла, а враћен 27. јуна?

---

*) При израчунавању броја дана рачуна се да сваки месец има по 30 дана.

Решење. а) $K = 60000$, $p = 40\%$, $m = 10$, $I = ?$ Из $K : I = 1200 : pm$, добијамо $I = \dfrac{K \cdot p \cdot m}{1200} = \dfrac{60000 \cdot 40 \cdot 8}{1200} = 16000$. Дужник је вратио 76000 динара.

б) $K = 60000$, $p = 40\%$, $d = 72$, $I = ?$ Из последње од формула (16) добијамо: $I = \dfrac{K \cdot p \cdot d}{36000} = \dfrac{60000 \cdot 40 \cdot 72}{36000} = 4800$. Дужник је вратио 64800 динара. ♠

ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Од наведених формула утврдити које су таутологије.

а) $(p \Rightarrow p) \Leftrightarrow \neg p$ *б)* $p \Rightarrow (p \vee q)$ *в)* $(p \wedge \neg q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow \neg q)$

г) $(p \vee (q \wedge r)) \Leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$ *д)* $(\neg q \Rightarrow p) \Rightarrow q$

2. Одредити истинитосне вредности исказних слова p и q из формула: $\tau((q \vee \neg q) \Rightarrow p) = \perp$ и $\tau(\neg(q \wedge q)) = \perp$, па израчунати истинитосну вредност формуле: $F(p,\ q) = (\neg(p \Rightarrow \perp) \vee ((\neg q \wedge p) \Rightarrow \neg p)) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (\neg q \vee ((p \wedge \top) \vee \neg(q \Leftrightarrow p)))$.

3. Ако је $F(p,\ q) = (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q)$, доказати да формула $F(p,\ q) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \neg F(\neg p,\ \neg q)$ није таутологија.

4. Дати су скупови $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}$ и $B =$ $= \{2,\ 4,\ 5,\ 6,\ 8,\ 9\}$. Одредити скуп X тако да је $A \cap X = \{3,\ 4\}$, $B \cup X = \{2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$ и $X \backslash B = \{3,\ 7\}$.

5. Одредити $cardA$ и $cardB$ ако је $card(A \backslash B) = 10 \wedge card(A \cap B) =$ $= 7 \wedge card(A \cup B) = 24$.

6. На школској табли су написани сви природни бројеви мањи од 500. Један ученик је најпре избрисао све бројеве који се завршавају цифром 0. После је други ученик избрисао све бројеве који су дељиви са 4, а затим је трећи ученик избрисао бројеве дељиве са 6. Колико је бројева остало на табли?

7. Планирано је да 5 радника изврши попис робе за 4 дана, радећи 8 часова дневно. Међутим, другог дана због болести на посао не дођу 2 радника, па се остали договоре да сваког дана раде по 2 сата дуже. Да ли је попис завршен на време?

8. Свеже грожђе садржи 80%, а суво 12% воде. Колико свежег грожђа треба за 16 kg сувог грожђа?

9. Трећина робе је продата по цени која је за 10% виша од планиране, а половина те робе продата је за 15% јефтиније од планиране цене. Са колико је процената изнад планиране цене продат остатак робе, кад је на крају наплаћен износ који би се добио када би укупна количина робе била продата по планираној цени?

10. Пре осам месеци је уложена у банку извесна сума, а месец дана пре тог рока уложено је 2000 динара више. Данас се камате на ове суме разликују за 120 динара. Које су суме уложене и колико процената годишње плаћа банка, ако је укупна камата 600 динара, а каматна стопа је иста у оба случаја?

1.4 РАЦИОНАЛНИ АЛГЕБАРСКИ ИЗРАЗИ

Да би смо могли успешно решавати разне сложене алгебарске проблеме, морамо имати солидну технику *сређивања алгебарских израза.* У овом одељку подсетићемо се на *рационалне изразе* и операције са њима. Дајемо најпре дефиницију.

(a) Символи реалних бројева су рационални алгебарски изрази. (Нпр. 3, $\frac{2}{5}$, -0.1, $\sqrt{3}$, ... итд.)

($б$) Символи променљивих и константи су рационални алгебарски изрази. (Нпр. $a, b, \ldots, x, y, \ldots, \pi, g$ (гравитација), ... итд.)

($в$) Ако су P и Q рационални алгебарски изрази , онда су $P+Q$, $P-Q$, $P \cdot Q$ и $\frac{P}{Q}$ такође рационални алгебарски изрази.

($г$) Сви рационални алгебарски изрази се добијају искључиво на описани начин и коначним бројем операција из $в$).

Посебну врсту рационалних алгебарских израза чине тзв. *цели рационални изрази - полиноми.* Настају кад се од поступака $в$) изостави операција $\frac{P}{Q}$ у случајевима када Q садржи променљиву. Ако у полиному нема сабирања и одузимања, тада имамо *моном.* Истицање променљиве у полиному вршимо стављањем променљиве у заграду, нпр.: $P(x) = 2x^2 - 3$, $Q(x,y) = 3x^2 - 2xy^2 + ay^2 - 2$. Бројеви испред променљивих су *коефицијенти.* Вредности полинома за утврђене вредности променљивих добијамо непосредном заменом променљиве датом константом. На пример: $P(-5) = 2 \cdot (-5)^2 - 3 = 50 - 3 = 47$.

Степен полинома је највиши од степена променљивих код његових монома. Нпр. степен поменутог полинома $P(x)$ је 2, због $2x^2$. Степен полинома $Q(x,y)$ је 3, само због монома $-2xy^2$, јер се изложиоци од x и y^2 сабирају.

Два полинома су идентички једнака ако имају једнаке све одговарајуће коефицијенте (коефицијенте уз једнаке степене променљивих).

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 \equiv b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1x + b_0 \Leftrightarrow$$

(17) $$\Leftrightarrow a_n = b_n \wedge a_{n-1} = b_{n-1} \wedge \ldots \wedge a_1 = b_1 \wedge a_0 = b_0$$

Ако се ради о полиномима више променљивих, као што је $Q(x,\ y)$, одговарајући коефицијенти множе једнаке мономе (којима су једнаки степени сваке променљиве појединачно).

Међу целим рационалним алгебарским изразима истичемо *степене са целим изложиоцима* (производе једнаких чинилаца). Подсетимо се на правила рачунања са степенима.

(18)
$$\boxed{\begin{array}{c}
m,n \in N : a^m \cdot a^n = a^{m+n} \\
a^0 = 1,\ a \neq 0 \\
(a^m)^n = a^{m \cdot n} \\
\left(\dfrac{a \cdot b}{c}\right)^n = \dfrac{a^n \cdot b^n}{c^n},\ c \neq 0 \\
a^m : a^n = \dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n},\ a \neq 0 \\
a^{-m} = \dfrac{1}{a^m},\ \dfrac{1}{a^{-n}} = a^n,\ a \neq 0 \\
a^m + a^n,\ \text{не сабира се за } m \neq n \\
a^m + b^m,\ \text{не сабира се за } a \neq b
\end{array}}$$

Ове формуле, као и оне које ћемо касније изложити у вези са рационалним изразима, сматрамо екиваваленцијама, па се могу примењивати и "здесна налево".

Пример 18. Упростити израз: $R = \dfrac{(a^2b^{-3})^2 \cdot (a^{-2}c^3)^{-1}}{(b^2c)^{-2} \cdot (a^{-2})^{-3}}$.

Решење. $R = \dfrac{a^4b^{-6}a^2c^{-3}}{b^{-4}c^{-2}a^6} = a^6b^{-6}c^{-3} \cdot b^4c^2a^{-6} = a^0b^{-2}c^{-1} = \dfrac{1}{b^2c}$.
(Уместо дељења са $b^{-4}c^{-2}a^6$, применили смо шесту од формула (18). Практично смо b^{-4}, c^{-2} и a^6 "подигли" у бројилац, променивши им при томе знак изложиоца.) ♠

По дефиницији, израз $P(x) = (x-2)(x^2+4x+4) + 4(2+x)$ је полином, али није *у сређеном облику. Сређивање полинома* подразумева да се изврше све операције из *в*). При томе користимо формуле (18), дистрибутивни закон и све договоре о брисању заграда. У наведеном примеру је $P(x) = x^3 + 4x^2 + 4x - 2x^2 - 8x - 8 + 8 + 4x$, односно $P(x) = x^3 + 2x^2$.

Ради подсећања наводимо формуле које ћемо користити за тзв. *идентичке трансформације полинома* из датог облика у облик какав нам у датом случају одговара.

(19)
$$a(b+c) = ab + ac$$
$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

$$
\begin{aligned}
&(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2\\
&(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2\\
&(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\\
&(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3\\
&(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc \qquad (19)\\
&a^2-b^2 = (a-b)(a+b)\\
&a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)\\
&a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)\\
&a^n-b^n = (a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\ \ldots\ +ab^{n-2}+b^{n-1})\\
&a^{2k+1}+b^{2k+1} = (a+b)(a^{2k}-a^{2k-1}b+a^{2k-2}b^2-\ \ldots\ -ab^{2k-1}+b^{2k})
\end{aligned}
$$

Све ове формуле важе и ако су уместо a, b, c, d изрази. Можемо их такође читати (и примењивати) здесна налево.

Ако се неки полином $P(x)$ напише у облику производа, нпр. $P(x) = Q_1(x)\cdot Q_2(x)\cdot Q_3(x)$, тада кажемо да је $P(x)$ *растављен на чиниоце.* Ако при томе ни један од чинилаца $Q_1(x)$, $Q_2(x)$, $Q_3(x)$, не може даље да се раставља, онда је $P(x)$ *растављен на просте чиниоце.* Ради конкретности договарамо се да целе коефицијенте делимо само са њиховим целим делиоцима. На пример, писаћемо $2a^2b-4ab^2 = 2ab(a-2b)$, а не $2a^2b-4ab^2 = 4ab(\frac{a}{2}-b)$.

Поступке за растављање полинома на просте чиниоце требало би добро савладати, јер они чине основу за многе чак и веома сложене операције. Стога, треба запамтити све формуле (19).

Пример 19. Раставити на просте чиниоце следеће полиноме:
а) $5ax^2-10ax-bx+2b-x+2$,
б) $(x-1)(x-2)(x-3)+(x-1)(x-2)-(x-1)$, *в)* $81a^4-1$,
г) a^7-a, *д)* $a^5-a^4-a^2+a$.

Решење. *а)* Вршимо *груписање* одговарајућих чланова.
$5ax(x-2)-b(x-2)-(x-2) = (x-2)(5ax-b-1)$.
б) $(x-1)((x-2)(x-3)+(x-2)-1) = (x-1)((x-2)(x-3)+(x-3)) = (x-1)(x-3)((x-2)+1) = (x-1)^2(x-3)$.
в) $(9a^2-1)(9a^2+1) = (3a-1)(3a+1)(9a^2+1)$. Бином $(9a^2+1)$ је тзв. збир квадрата, који се у скупу реалних бројева не раставља на чиниоце.
г) $a(a^6-1) = a(a^3-1)(a^3+1) = a(a-1)(a^2+a+1)(a+1)(a^2-a+1)$.
д) $a^4(a-1)-a(a-1) = a(a-1)(a^3-1) = a(a-1)(a-1)(a^2+a+1) = a(a-1)^2(a^2+a+1)$. ♠

Често да би се могло извршити груписање, треба неки моном написати као збир или разлику других монома, или се пак, дода и одузме исти моном.

Пример 20. Раставити на просте чиниоце полиноме:

а) $2x^2-5x+2$, *б)* n^4+n^2-2, *в)* $a^3+8a^2+19a+12$,
г) x^4+64, *д)* $a^{10}+a^5+1$, *ђ)* $x^3+y^3+z^3-3xyz$.

Решење. *а)* $2x^2-4x-x+2=2x(x-2)-(x-2)=(x-2)(2x-1)$.
б) $n^4-n^2+2n^2-2=n^2(n^2-1)+2(n^2-1)=(n^2-1)(n^2+2)=(n-1)(n+1)(n^2+2)$.
в) $a^3+4a^2+4a^2+16a+3a+12=a^2(a+4)+4a(a+4)+3(a+4)=(a+4)(a^2+$ $+4a+3)=(a+4)(a^2+3a+a+3)=(a+4)(a(a+3)+(a+3))=(a+4)(a+3)(a+1)$.
г) $x^4+16x^2+64-16x^2=(x^2+8)^2-16x^2=(x^2+8-4x)(x^2+8+4x)$.
д) $a^{10}+a^9+a^8-(a^9+a^8+a^7)+a^7+a^6+a^5-(a^6+a^5+a^4)+a^5+a^4+a^3-$ $-(a^3+a^2+a)+a^2+a+1=(a^8-a^7+a^5-a^4+a^3-a+1)(a^2+a+1)$.
ђ) $x^3+3x^2y+3xy^2+y^3+z^3-3xyz-3x^2y-3xy^2=(x+y)^3+z^3-3xy(x+y+z)=$ $=(x+y+z)((x+y)^2-z(x+z)+z^2)-3xy(x+y+z)=(x+y+z)(x^2+2xy+$ $+y^2-xz-yz+z^2-3xy)=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-xz)$. ♠

Пример 21. Раставити на просте чиниоце следеће полиноме:

а) $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3$, *б)* $b^2c^2(b-c)+a^2c^2(c-a)+a^2b^2(a-b)$,
в) $(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)+1$.

Решење. *а)* $((a+b+c)^3-a^3)-(b^3+c^3)=(a+b+c-a)((a+b+c)^2+a(a+$ $+b+c)+a^2)-(b+c)(b^2-bc+c^2)=(b+c)(a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc+a^2+ab+ac+$ $+a^2-b^2+bc-c^2)=(b+c)(3a^2+3ab+3ac+3bc)=(b+c)(3a(a+b)+3c(a+b))=$ $=3(a+b)(b+c)(a+c)$.
б) $b^3c^2-b^2c^3+a^2c^3-a^3c^2+a^2b^2(a-b)=c^3(a^2-b^2)-c^2(a^3-b^3)+a^2b^2(a-b)=(a-$ $-b)(c^3(a+b)-c^2(a^2+ab+b^2)+a^2b^2)=(a-b)(ac^3+bc^3-a^2c^2-abc^2-b^2c^2+a^2b^2)=$ $=(a-b)(b^2(a^2-c^2)-ac^2(a-c)-bc^2(a-c))=(a-b)(a-c)(b^2(a+c)-ac^2-bc^2)=$ $=(a-b)(a-c)(ab^2+b^2c-ac^2-bc^2)=(a-b)(a-c)(a(b^2-c^2)+bc(b-c))=$ $=(a-b)(a-c)(b-c)(ab+ac+bc)$.
в) $((n+1)(n+4))\cdot((n+2)(n+3))+1=(n^2+5n+4)\cdot(n^2+5n+6)+1=$ $=(n^2+5n+4)\cdot((n^2+5n+4)+2)+1=(n^2+5n+4)^2+2(n^2+5n+4)+1=$ $=((n^2+5n+4)+1)^2=(n^2+5n+5)^2$. ♠

У вези са полиномима истичемо још највећи заједнички делитељ, у означи D, и најмањи заједнички садржалац, у означи S.

Највећи заједнички делитељ за два (или више) датих полинома је полином највишег степена, који је чинилац датих полинома.

Најмањи заједнички садржалац датих полинома је полином најнижег степена, такав да су сви полиноми његови чиниоци.

Пример 22. *а)* Наћи највећи заједнички делитељ (D) за полиноме:

1^0 $12x^2yz,\ 9x^3y^3z^2,\ 24x^2yz^3$;

2^0 $9x^2-12x+4,\ 27x^3-8,\ 4-9x^2,\ 4-6x$.

б) Наћи најмањи заједнички садржалац (S) за полиноме:
1^0 $3ab^2,\ 6a^2b,\ 4a^3$;
2^0 $bx-by,\ a^2x^2-2a^2xy+a^2y^2,\ bx^2+2bxy+by^2,\ b^2y^2-b^2x^2$.

Решење. *а)* 1^0 $D(12x^2yz,\ 9x^3y^3z^2,\ 24x^2yz^3)=3x^2yz$.
2^0 $9x^2-12x+4=(3x-2)^2$, $27x^3-8=(3x-2)(9x^2+6x+4)$,
$4-9x^2=(2-3x)(2+3x)=-(3x-2)(2+3x)$, $4-6x=-2(3x-2)$,
па добијамо: $D=3x-2$.

б) 1^0 $S(3ab^2,\ 6a^2b,\ 4a^3)=12a^3b^2$.
2^0 $bx-by=b(x-y)$, $a^2x^2-2a^2xy+a^2y^2=a^2(x^2-2xy+y^2)=a^2(x-y)^2$,
$bx^2+2bxy+by^2=b(x^2+2xy+y^2)=b(x+y)^2$, $b^2y^2-b^2x^2=-b^2(x^2-y^2)=$
$=-b^2(x-y)(x+y)$, па је $S=a^2b^2(x-y)^2(x+y)^2$. ♠

У вези са дељењем полинома важан је и *Безуов став*:

Остатак дељења полинома $P(x)$ са $(x-a)$ је $R=P(a)$. Специјално, ако је $P(a)=0$, полином $P(x)$ је дељив са $(x-a)$.

Доказ. Ако је R остатак дељења $P(x)$ са $(x-a)$, онда важи једнакост: $P(x)=(x-a)\cdot Q(x)+R$, где је $Q(x)$ добијени количник. Одавде непосредном заменом добијамо: $P(a)=(a-a)\cdot Q(a)+R=$ $=0\cdot Q(a)+R=R$. ♠

Дељење полинома можемо вршити непосредно, слично дељењу бројева, или користећи се идентичном једнакошћу полинома (*метода непознатих коефицијената*).

Пример 23. Полином $P(x)=x^3-x^2+3x+1$ поделити полиномом $D(x)=x^2+x+2$.

Решење. *Први начин.*

$$
\begin{array}{l}
(x^3-x^2+3x+1):(x^2+x+2)=x-2\\
\underline{-x^3-x^2-2x\qquad\qquad}\\
\quad -2x^2+\ x+1\\
\quad\ \underline{\ 2x^2+2x+4}\\
\qquad\qquad 3x+5\ =\ R \text{ (остатак дељења)}
\end{array}
$$

Дакле: $x^3-x^2+3x+1=(x^2+x+2)\cdot(x-2)+3x+5$

Објашњење поступка. Количник одређујемо дељењем "најстаријих" чланова. Тако имамо најпре:"x^2 у x^3 иде x пута" (јер је $x^2\cdot x=x^3$). Сада множимо $D(x)$ са $(-x)$ и добијемо $-x^3-x^2-2x$, па то потпишемо испод $P(x)$. Испод подвучене црте је збир полинома $P(x)$ и $(-x^3-x^2-2x)$. Тај збир $(-2x^2+x+1)$ сада делимо са $D(x)$ на исти начин као у предходном случају. ("x^2 у $-2x^2$ иде -2 пута", затим $D(x)$ помножимо са $-(-2)$, тј. са $+2$ и добијемо $2x^2+2x+4$). Испод црте је збир ове два полинома, а то је остатак дељења, јер се x^2 не садржи у $3x$.)

Други начин. Остатак дељења са полиномом n-тог степена је полином $(n-1)$-ог степена (или мањег степена). Тако при дељењу са $D(x)=x^2+x+2$ остатак је полином првог степена: $R=Mx+N$, где су M и N за сада непознати коефицијенти. Количник $Q(x)$ такође за сада не знамо, али кад се дели полином трећег степена полиномом другог степена добиће се количник првог степена. Овде имамо: $Q(x)=x+A$. A, M и N одредимо из једнакости:

$$x^3-x^2+3x+1=(x^2+x+2)\cdot(x+A)+Mx+N$$

Сређивањем десне стране добијамо:

$$x^3-x^2+3x+1=x^3+(A+1)x^2+(A+M+2)x+2A+N$$

Сада на основу формуле (17) имамо једнакости $A+1=-1$, $A+M+$ $+2=3$ и $2A+N=1$. Одавде добијамо: $A=-2, M=3$ и $N=5$. Дакле:

$$x^3-x^2+3x+1=(x^2+x+2)\cdot(x-2)+3x+5. \spadesuit$$

Погледајмо још пар примера у вези са полиномима.

Пример 24. Неки полином при дељењу са $x-1$ даје остатак 2, а при дељењу са $x+2$ даје остатак -7. Одредити остатак дељења овог полинома са x^2+x-2.

Решење. Уочимо да је $x^2+x-2=(x-1)(x+2)$. Остатак дељења нашег полинома $P(x)$ са x^2+x-2 је $R=Mx+N$, па је $P(x)=(x^2+$ $+x-2)Q(x)+Mx+N=(x-1)(x+2)Q(x)+Mx+N$. Применом Безуовог става на дате услове добијамо: $P(1)=2$ и $P(-2)=-7$. Отуда имамо једнакости: $2=0\cdot Q(x)+M+N$, тј. $2=M+N$ и $-7=0\cdot Q(x)-2M+N$, тј. $-7=-2M+N$. Решење добијеног система једначина је $M=3$ и $N=-1$. Тражени остатак је $R=3x-1$. $\spadesuit$

Пример 25. Ако је n природан број доказати да је $P(n)=n^3+5n$ дељиво са 6.

Решење. Користићемо познату особину да је од било којих k узастопних природних бројева увек један дељив са k. Трансформишимо дати полином: $P(n)=n^3-n+6n=n(n^2-1)+6n=(n-1)n(n+1)+6n$. Моном $6n$ је дељив са 6, а $(n-1)n(n+1)$ је производ 3 узастопна природна броја, од којих један мора бити дељив са 3 и бар један мора бити паран број, тј. дељив са 2. Дакле, овај производ је дељив са 6, па је и $P(n)$ дељиво са 6. $\spadesuit$

Пример 26. Израчунати $x^4+y^4+z^4$ ако је $x+y+z=0$ и $x^2+y^2+z^2=1$.

Решење. Из $(x+y+z)^2=0$ добијамо: $x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx=0$, па је $1+2xy+2yz+2zx=0$, одакле је $xy+yz+zx=-\frac{1}{2}$. Даље, из $(x^2+y^2+z^2)^2=1$, добијамо: $x^4+y^4+z^4+2x^2y^2+2y^2z^2+2x^2z^2=1$. Сем тога је: $(xy+yz+xz)^2=\frac{1}{4}$, па: $x^2y^2+y^2z^2+x^2z^2+2xy^2z+2xyz^2+$ $+2x^2yz=\frac{1}{4}$, односно: $x^2y^2+y^2z^2+x^2z^2+2xyz(x+y+z)=\frac{1}{4}$. Сада заменимо $x+y+z=0$, па добијамо $x^2y^2+y^2z^2+x^2z^2=\frac{1}{4}$. Коначно, из $x^4+y^4+z^4+2(x^2y^2+y^2z^2+x^2z^2)=1$, добијамо: $x^4+y^4+z^4+2\cdot\frac{1}{4}=1$, одакле је тражени збир: $x^4+y^4+z^4=\frac{1}{2}$. ♠

Разломљеним алгебарским изразима називамо рационалне алгебарске изразе облика $\frac{A}{B}$, $B\neq 0$, где су A и B такође рационални изрази. Зваћемо их још и *алгебарским разломцима.* Наводимо следеће операције (правила):

$$\frac{A}{B}=\frac{A\cdot C}{B\cdot C},\ B\neq 0 \text{ и } C\neq 0 \text{ (проширивање)}$$
$$\frac{A\cdot D}{B\cdot D}=\frac{A}{B},\ B\neq 0 \text{ и } D\neq 0 \text{ (скраћивање)}$$
$$\frac{A}{B}\cdot\frac{C}{D}=\frac{A\cdot C}{B\cdot D},\ B\neq 0 \text{ и } D\neq 0 \text{ (множење)} \qquad (20)$$
$$\frac{A}{B}:\frac{C}{D}=\frac{A}{B}\cdot\frac{D}{C}=\frac{A\cdot D}{B\cdot C},\ B\neq 0,\ C\neq 0 \text{ и } D\neq 0 \text{ (дељење)}$$
$$\frac{A}{B}+\frac{C}{B}=\frac{A+C}{B},\ B\neq 0 \text{ (сабирање)}$$
$$\frac{A}{B}+\frac{C}{D}=\frac{AD}{BD}+\frac{BC}{BD}=\frac{AD+BC}{BD},\ B\neq 0 \text{ и } D\neq 0 \text{ (довођење имениилаца на НЗС и сабирање)}$$
$$\frac{\frac{A}{B}}{\frac{C}{D}}=\frac{A}{B}:\frac{C}{D}=\frac{A\cdot D}{B\cdot C},\ B\neq 0,\ C\neq 0 \text{ и } D\neq 0 \text{ (двојни разломак)}$$

Било коју операцију да изводимо, сем проширивања, трудићемо се да дате изразе максимално упростимо, између осталог (и нарочито) операцијом скраћивања. Такође је неопходно водити рачуна о редоследу операција. Наиме, множење и дељење су "старије" операције и обављају се пре сабирања и одузимања. Ако постоје разлози за другачији редослед рачунања, тада се постављају заграде, па се прво врше операције у загради. У случају вишеструких заграда, предност има унутрашња.

Пример 27. Скратити разломке:

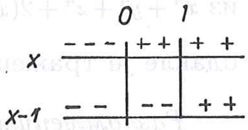
$а)\ \dfrac{a^2-3ab+ac+2b^2-2bc}{a^2-b^2+2bc-c^2}$; $\quad б)\ \dfrac{|\,x-1\,|+|\,x\,|+x}{3x^2-4x+1}$.

Решење. $а)\ \dfrac{a^2-2ab-ab+2b^2+ac-2bc}{a^2-(b^2-2bc+c^2)}=$

$$=\frac{a(a-2b)-b(a-2b)+c(a-2b)}{a^2-(b-c)^2}=\frac{(a-2b)(a-b+c)}{(a-b+c)(a+b-c)}=\frac{a-2b}{a+b-c},$$

$a-b+c\neq 0$ и $a+b-c\neq 0$.

$б)\ |\,x\,|$ и $|\,x-1\,|$ захтевају дискусију по вредности променљиве x. Прикажимо шемом промене знака израза x и $(x-1)$, сл. 7. Очигледно морамо размотрити дати разломак за три различита случаја.



сл. 7

1^0 $x\le 0$. Тада је $|\,x\,|=-x$ и $|\,x-1\,|=-(x-1)$, па добијамо:

$$\frac{-(x-1)-x+x}{3x^2-3x-x+1}=\frac{-(x-1)}{3x(x-1)-(x-1)}=\frac{-(x-1)}{(x-1)(3x-1)}=\frac{1}{3x-1}.$$

2^0 $x\in(0,\frac{1}{3})\cup(\frac{1}{3},1)$. Тада је $|\,x\,|=x$ и $|\,x-1\,|=-(x-1)$, па имамо:

$$\frac{-(x-1)+x+x}{3x^2-4x+1}=\frac{x+1}{(x-1)(3x-1)}.$$

3^0 $x>1$. Тада је $|\,x\,|=x$ и $|\,x-1\,|=x-1$, па је:

$$\frac{x-1+x+x}{3x^2-4x+1}=\frac{3x-1}{(x-1)(3x-1)}=\frac{1}{x-1}.\ \spadesuit$$

Пример 28. Израчунати:

$$\left(\frac{x^3+2x^2-x-2}{a+1}:\frac{x^2+4x+4}{x^2-4}\right):\frac{x^3-2x^2-x+2}{a^2+a}.$$

Решење. $\left(\dfrac{x^2(x+2)-(x+2)}{a+1}\cdot\dfrac{(x-2)(x+2)}{(x+2)^2}\right):\dfrac{x^2(x-2)-(x-2)}{a(a+1)}=$

$$=\frac{(x+2)(x^2-1)}{a+1}\cdot\frac{x-2}{x+2}\cdot\frac{a(a+1)}{(x-2)(x^2-1)}=a\ ;\ x\neq\pm 1,\ x\neq\pm 2,\ a\neq -1,$$

$a\neq 0$. $\spadesuit$

Пример 29. Израчунати: $а)\ \dfrac{2}{5a}+\dfrac{9a-2b}{15ab}-\dfrac{a+b}{10a^2}+\dfrac{b^2-6a^2}{10a^2b}$,

$б)\ \dfrac{x^2+y^2}{xy}-\dfrac{x^2}{xy+y^2}-\dfrac{y^2}{x^2+xy}$, $\quad в)\ \dfrac{a^2-a-6}{a^2-4}-2-\dfrac{a-1}{2-a}$,

$г)\ \dfrac{1}{a(a+1)}+\dfrac{1}{(a+1)(a+2)}+\dfrac{1}{(a+2)(a+3)}+\dfrac{1}{(a+3)(a+4)}+\dfrac{1}{(a+4)(a+5)}$.

Решење. $а)\ \dfrac{12ab+2a(9a-2b)-3b(a+b)+3(b^2-6a^2)}{30a^2b}=$

$$=\frac{12ab+18a^2-4ab-3ab-3b^2+3b^2-18a^2}{30a^2b}=\frac{5ab}{30a^2b}=\frac{1}{6a}\ ,\ a\neq 0 \text{ и } b\neq 0.$$

б) $$\frac{x^2+y^2}{xy}-\frac{x^2}{y(x+y)}-\frac{y^2}{x(x+y)}=\frac{(x^2+y^2)(x+y)-x^3-y^3}{xy(x+y)}=$$

$$=\frac{x^3+x^2y+xy^2+y^3-x^3-y^3}{xy(x+y)}=\frac{x^2y+xy^2}{xy(x+y)}=\frac{xy(x+y)}{xy(x+y)}=1\ ,$$

$x\neq 0,\ y\neq 0,\ x+y\neq 0.$

в) $$\frac{a^2-a-6}{(a-2)(a+2)}-2+\frac{a-1}{a-2}=\frac{a^2-a-6-2(a-2)(a+2)+(a-1)(a+2)}{(a-2)(a+2)}=$$

$$=\frac{a^2-a-6-2a^2+8+a^2-a+2a-2}{(a-2)(a+2)}=\frac{0}{(a-2)(a+2)}=0, \text{ за } a\neq 2 \text{ и}$$

$a\neq -2.$

г) Први начин. Прво сабирамо први са другим и трећи са четвртим:

$$\frac{a+2+a}{a(a+1)(a+2)}+\frac{a+4+a+2}{(a+2)(a+3)(a+4)}+\frac{1}{(a+4)(a+5)}=$$

$$=\frac{2(a+1)}{a(a+1)(a+2)}+\frac{2(a+3)}{(a+2)(a+3)(a+4)}+\frac{1}{(a+4)(a+5)}=$$

$$=\frac{2}{a(a+2)}+\frac{2}{(a+2)(a+4)}+\frac{1}{(a+4)(a+5)}=\frac{2(a+4)+2a}{a(a+2)(a+4)}+\frac{1}{(a+4)(a+5)}=$$

$$=\frac{4(a+2)}{a(a+2)(a+4)}+\frac{1}{(a+4)(a+5)}=\frac{4}{a(a+4)}+\frac{1}{(a+4)(a+5)}=\frac{4(a+5)+a}{a(a+4)(a+5)}$$

$$=\frac{5(a+4)}{a(a+4)(a+5)}=\frac{5}{a(a+5)}\ ,\ a\notin\{-5,-4,-3,-2,-1,\ 0\}.$$

Други начин. У сваком разломку је разлика чинилаца у имениоцу једнака 1, па имамо:

$$\frac{(a+1)-a}{a(a+1)}+\frac{(a+2)-(a+1)}{(a+1)(a+2)}+\frac{(a+3)-(a+2)}{(a+2)(a+3)}+\frac{(a+4)-(a+3)}{(a+3)(a+4)}+$$

$$+\frac{(a+5)-(a+4)}{(a+4)(a+5)}=\frac{a+1}{a(a+1)}-\frac{a}{a(a+1)}+\frac{a+2}{(a+1)(a+2)}-\frac{a+1}{(a+1)(a+2)}+$$

$$+\frac{a+3}{(a+2)(a+3)}-\frac{a+2}{(a+2)(a+3)}+\frac{a+4}{(a+3)(a+4)}-\frac{a+3}{(a+3)(a+4)}+\frac{a+5}{(a+4)(a+5)}$$

$$-\frac{a+4}{(a+4)(a+5)}=\frac{1}{a}-\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a+1}-\frac{1}{a+2}+\frac{1}{a+2}-\frac{1}{a+3}+\frac{1}{a+3}-\frac{1}{a+4}+$$

$$+\frac{1}{a+4}-\frac{1}{a+5}=\frac{1}{a}-\frac{1}{a+5}=\frac{5}{a(a+5)}.\ ♠$$

Пример 30. Упростити израз:

$$A=\left(\frac{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}}{\frac{a}{b}-\frac{b}{a}}+\frac{1}{1+\frac{b}{a}}-\frac{1}{1-\frac{b}{a}}\right):\frac{1-\frac{a-3b}{a+b}}{\frac{3a+b}{a-b}-3}.$$

Решење. $A=\left(\frac{\frac{a^2+b^2}{ab}}{\frac{a^2-b^2}{ab}}+\frac{1}{\frac{a+b}{a}}-\frac{1}{\frac{a-b}{a}}\right):\frac{\frac{a+b-(a-3b)}{a+b}}{\frac{3a+b-3(a-b)}{a-b}}=$

$$=\left(\frac{a^2+b^2}{(a-b)(a+b)}+\frac{a}{a+b}-\frac{a}{a-b}\right):\frac{\frac{4b}{a+b}}{\frac{4b}{a-b}}=$$

$$=\frac{a^2+b^2+a(a-b)-a(a+b)}{(a-b)(a+b)}:\frac{a-b}{a+b}=\frac{a^2-2ab+b^2}{(a-b)(a+b)}\cdot\frac{a+b}{a-b}=$$

$=\frac{(a-b)^2}{(a-b)^2}=1,\ a\neq 0,\ b\neq 0,\ a-b\neq 0$ и $a+b\neq 0$. ♠

Пример 31. Израчунати вредност израза

$$R(a,b,c)=\frac{\frac{1}{a}-\frac{1}{b+c}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b+c}}:\frac{\frac{a-b-c}{abc}}{1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}},$$ за $a=0.02,\ b=-11.05,\ c=1.07$.

Решење. Најпре ћемо упростити дати израз.

$$R(a,b,c)=\frac{\frac{b+c-a}{a(b+c)}}{\frac{b+c+a}{a(b+c)}}:\frac{\frac{a-b-c}{abc}}{\frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{2bc}}=\frac{b+c-a}{a+b+c}:\frac{2(a-b-c)}{a((b+c)^2-a^2)}=$$

$$=\frac{b+c-a}{a+b+c}\cdot\frac{a(b+c+a)(b+c-a)}{-2(b+c-a)}=\frac{a(b+c-a)}{-2}=\frac{0.02}{-2}(-11.05+1.07-0.02)=$$

$=-0.01\cdot(-10)=0.1.$ ♠

Да бисмо стекли солидну технику сређивања алгебарских израза, неопходно је решити самостално известан број задатака, сличних примерима из овог одељка.

ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

11. Доказати идентичности:

а) $(ax+by)^2+(ay-bx)^2=(a^2+b^2)(x^2+y^2)$,

б) $(x^2+xy+y^2)^2-(x^2-xy+y^2)^2=4xy(x^2+y^2)$,

в) $(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3=3(a-b)(b-c)(c-a)$.

12. Раставити на просте чиниоце полиноме:

а) x^6-64 , *б)* $x^2y^2-a^2y^2-4b^2x^2+4a^2b^2$,

в) $x^5-x^4-2x^3+2x^2+x-1$, *г)* n^4+n^2+1 ,

д) $ab(a-b)-ac(a+c)+bc(2a+c-b)$.

13. Доказати да израз $P(n)=\dfrac{n^5}{120}+\dfrac{n^4}{12}+\dfrac{7n^3}{24}+\dfrac{5n^2}{12}+\dfrac{n}{5}$ има целобројну вредност за сваки природан број n.

14. Одредити a и b тако да полином $6x^4-7x^3+ax^2+3x+2$ буде дељив са x^2-x+b.

15. Полином $P(x)=2x^3-12x^2+27x-19$ написати у облику збира степена облика $(x-2)^n$, $n\in N$.

16. Ако су m, n, p цели бројеви и $m+n+p=0$, доказати да је $m^3+n^3+p^3$ дељиво са 3.

17. Скратити разломке: *а)* $\dfrac{x^3-x^2-x+1}{x^4-x^3-3x^2+5x-2}$,

б) $\dfrac{8a^{n+2}+a^{n-1}}{16a^{n+4}+4a^{n+2}+a^n}$, *в)* $\dfrac{|\,k\,|\cdot|\,k-1\,|}{k^2-k+1-|\,k\,|}$.

18. Израчунати: *а)* $\left(\dfrac{x^2+2x-3}{x^2+3x-10}:\dfrac{x^2+7x+12}{x^2-9x+14}\right):\dfrac{x^2-x}{x^2+4x}$;

б) $\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\right)\cdot\dfrac{1}{x^2-y^2}-\left(\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}\right):(x^2-2xy+y^2)$;

в) $\dfrac{a^2\left(\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{c}\right)+b^2\left(\dfrac{1}{c}-\dfrac{1}{a}\right)+c^2\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right)}{\dfrac{a}{bc}(c-b)+\dfrac{b}{ac}(a-c)+\dfrac{c}{ab}(b-a)}$;

г) $\dfrac{4}{(a-x)(c-x)}-\dfrac{3}{(a-x)(c-a)}+\dfrac{3}{(a-c)(x-c)}$;

д) $\dfrac{8a^7}{a^8+b^8}+\dfrac{4a^3}{a^4+b^4}+\dfrac{2a}{a^2+b^2}+\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{a-b}$.

19. Израчунати:

а) $\dfrac{\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}+2\right)\cdot\left(\dfrac{a+b}{2a}-\dfrac{b}{a+b}\right)}{\left(a-2b+\dfrac{b^2}{a}\right)\cdot\left(\dfrac{a}{a+b}+\dfrac{b}{a-b}\right)}$, за $a=0.75$ и $b=1\dfrac{1}{3}$.

б) $\dfrac{1-\dfrac{1}{(m+x)^2}}{\left(1-\dfrac{1}{m+x}\right)^2}\cdot\left(1-\dfrac{1-(m^2+x^2)}{2mx}\right)$, ако је $x=\dfrac{1}{m-1}$, $m\neq 1$.

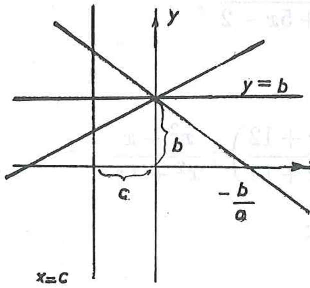
20. Одредити непознате коефицијенте A, B, C, тако да буде:

а) $\dfrac{4x}{x^2-1}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x+1}$; *б)* $\dfrac{x^2+5}{x^3-3x+2}=\dfrac{A}{x+2}+\dfrac{B}{(x-1)^2}+\dfrac{C}{x-1}$;

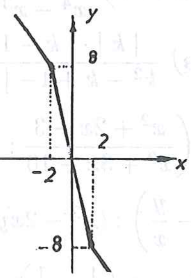
(тзв. Кошијев проблем).

1.5 ЛИНЕАРНА ФУНКЦИЈА

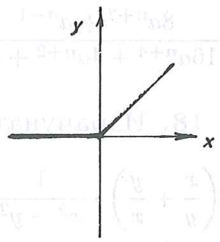
Још из основне школе знамо да је $y = ax + b$ *линеарна функција*. За $a \neq 0$ она је бијекција. Њен график је права која сече y-осу у тачки $(0,\ b)$. За $a > 0$ је *растућа*, а за $a < 0$ је *опадајућа* функција. За $a = 0$ имамо праву $y = b$, паралелну x-оси. Напоменимо да и једначини $x = c$ одговара у координатном систему права, овог пута паралелна y-оси. Све ове случајеве видимо на сл. 8.



Сл. 8



Сл. 9



Сл. 10

Тачка у којој график сече осу Ox назива се нула функције и добија се: за $y = 0$ је $x = -\dfrac{b}{a}$.

Нешто сложеније графике добијамо за функције које садрже апсолутне вредности и своде се на линеарне функције.

Нацртајмо график функције:

$y = |\,2-x\,| \;\; -2x \; - |\,x+2\,|$

Ради ослобађања од знака апсолутне вредности, уочимо знаке израза $(2-x)$ и $(x+2)$:

	-2		2	
$2-x$	$++$	$++++$		$--$
$x+2$	$--$	$++++$		$++$

Дакле имаћемо:

$$y=\begin{cases} 2-x-2x+(x+2), & \text{за} \quad x\le -2 \\ 2-x-2x-(x+2), & \text{за} \; -2\le x\le 2 \\ -(2-x)-2x-(x+2), & \text{за} \quad x\ge 2 \end{cases} = \begin{cases} -2x+4, & x\le -2 \\ -4x, & -2\le x\le 2 \\ -2x-4, & x\ge 2 \end{cases}$$

График је на сл. 9.

Нацртајмо сад функцију $y = \frac{1}{2}(x+\sqrt{x^2})$. Како је $\sqrt{x^2} = |\,x\,|$, биће:
$y = \begin{cases} 0, & за\ x \leq 0 \\ x, & за\ x \geq 0 \end{cases}$. График је на сл. 10.

1.6 ЛИНЕАРНЕ ЈЕДНАЧИНЕ

Линеарна једначина по x је свака једначина која је еквивалентна једначини облика $ax = b$. Нећемо се много задржавати на линеарним једначинама. Само ћемо се подсетити на неколико проблема. Најпре ћемо решити неки пример линеарних једначина са једном непознатом.

Пример 32. Одредити параметар a тако да буду еквивалентне (имају иста решења) једначине:

$$\frac{x-a}{3} = \frac{x-3}{a} \quad и \quad \frac{x-2a}{x+3a} = 3 - \frac{2x^2-13a^2}{x^2-9a^2}.$$

Решење. Прва једначина даје:

$$a(x-a) = 3(x-3) \Leftrightarrow x(a-3) = a^2-9 \Leftrightarrow x = \frac{(a-3)(a+3)}{a-3} \Leftrightarrow x = a+3,$$

за $a \neq 3$.

Друга једначина даје: $\frac{x-2a}{x+3a} = 3 - \frac{2x^2-13a^2}{(x-3a)(x+3a)} / \cdot (x-3a)(x+3a) \neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \neq 3a \wedge x \neq -3a$

$\Leftrightarrow (x-2a)(x-3a) = 3(x-3a)(x+3a) - 2x^2 + 13a^2$
$\Leftrightarrow x^2 - 5ax + 6a^2 = 3x^2 - 27a^2 - 2x^2 + 13a^2$
$\Leftrightarrow -5ax = -20a^2$
$\Leftrightarrow x = 4a$, за $a \neq 0$

Дакле за $a \neq 0$, $a \neq 3$, $x \neq 3a$, $x \neq -3a$ имамо заједничко решење: $a + 3 = 4a$, одакле је $a = 1$. ♠

Пример 33. Решити једначину:
$|\,x+1\,| - |\,x\,| + 3\,|\,x-1\,| - 2\,|\,x-2\,| = x+2$.

Решење. Одредимо знак сваког израза под апсолутном вредношћу, сл. 11.
Разликујемо 5 случајева.

1^0 $x \leq -1$:
$-(x+1) + x - 3(x-1) + 2(x-2) = x+2$
$\Leftrightarrow 2x = -4$
$\Leftrightarrow \boxed{x = -2} \leq -1$, јесте решење.

2^0 $x \in [-1,\ 0]$
$(x+1) + x - 3(x-1) + 2(x-2) = x+2$
$\Leftrightarrow 0 = 2$ што је немогуће, па нема решења.

	−1	0	1	2	
$x+1$	− −	+	+	+	+
x	− −	−	+	+	+
$x-1$	− −	−	−	+	+
$x-2$	− −	−	−	−	+

Сл. 11

3^0 $x \in [0,\ 1]$

$x + 1 - x - 3(x-1) + 2(x-2) = x + 2$

$\Leftrightarrow 2x = -2$

$\Leftrightarrow x = -1 \notin [0,\ 1]$, па није решење.

4^0 $x \in [1,\ 2]$

$x + 1 - x + 3(x-1) + 2(x-2) = x + 2$

$\Leftrightarrow 4x = 8$

$\Leftrightarrow \boxed{x = 2} \in [1,\ 2]$, јесте решење.

5^0 $x \geq 2$

$x + 1 - x + 3(x-1) - 2(x-2) = x + 2$

$\Leftrightarrow 0 = 0$

$\Leftrightarrow \boxed{x \geq 2}$

Дакле, решења дате једначине су $x = -2$ и $x \geq 2$. ♠

Једначина облика $ax = b$ нема увек решења, а може имати неограничен број решења. Наиме

1^0 $a \neq 0:\ ax = b \Leftrightarrow x = \dfrac{b}{a}$ *(јединствено решење)*

2^0 $a = 0$ и $b \neq 0$: $ax = b \Leftrightarrow 0 \cdot x \neq 0$ - ово је немогуће, па ова *једначина нема решења.*

3^0 $a = 0$ и $b = 0$: $ax = b \Leftrightarrow 0 \cdot x = 0$, а ово важи за $\forall x$, тј. *решења има неограничен број.*

Пример 34. Решити и дискутовати једначину:

$$a^3 - \frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{x} = \frac{a^3}{bx} - \frac{ab}{x} + ab^2$$

Решење. Помножимо једначину са $bx \neq 0$ (тј. $b \neq 0$ и $x \neq 0$):

$a^3bx - a^2b + b^3 = a^3 - ab^2 + ab^3x$

$\Leftrightarrow a^3bx - ab^3x = a^3 - b^3 + a^2b - ab^2$

$\Leftrightarrow abx(a^2 - b^2) = (a-b)(a^2 + ab + b^2) + ab(a-b)$

$\Leftrightarrow ab(a-b)(a+b)x = (a-b)(a+b)^2$.

Дискусија: 1^0 За $a \neq 0$, $a - b \neq 0$ и $a + b \neq 0$ (приликом ослобађања од разломка увели смо услов: $b \neq 0$), једначина *има јединствено решење*: $x = \dfrac{(a-b)(a+b)^2}{ab(a-b)(a+b)} = \dfrac{a+b}{ab}$.

2^0 Ако је $a = 0$, тада због $b \neq 0$ је $a - b \neq 0$ и $a + b \neq 0$, па је дата једначина еквивалентна са: $0 \cdot x \neq 0$, што је немогуће. У том случају *нема решења.*

3^0 Ако је $a - b = 0$ или $a + b = 0$, једначина је еквивалентна са: $0 \cdot x = 0$, што важи за свако x. У том случају једначина *има бесконачно много решења.* ♠

Што се тиче решавања система линеарних једначина са две непознате, само се подсећамо да смо их до сада решавали најчешће *методом замене* , *методом супротних коефицијената* и *графичком методом* . Осим ових метода упознали смо *Гаусову методу* и решавање помоћу детерминанти (*Крамерово правило*).Понекад се систем најпре трансформише у погодан облик увођењем смене (неке погодно изабране изразе узимамо за нове непознате).

Сада ћемо, решавајући систем линеарних једначина са три непознате, комбиновати разне методе.

Пример 35. Решити систем једначина:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2y+z-2}-\frac{3}{x+z-5}+\frac{1}{x+2y+2}&=-1\\
\frac{2}{2y+z-2}-\frac{5}{x+z-5}-\frac{3}{x+2y+2}&=-6\\
\frac{5}{2y+z-2}+\frac{2}{x+z-5}-\frac{1}{x+2y+2}&=\ \ 6
\end{aligned}$$

Решење. Сменом уводимо нове непознате: $a=\dfrac{1}{2y+z-2}$, $b=\dfrac{1}{x+z-5}$, $c=\dfrac{1}{x+2y+2}$, па имамо:

$$\begin{aligned}
a-3b+\ c&=-1\\
2a-5b-3c&=-6\\
5a+2b-\ c&=\ \ 6
\end{aligned}$$

За одеђивање решења по a, b, c навешћемо два начина.

Први начин. Из прве једначине је $a=3b-c-1$. Заменом a у друге две једначине добијамо:

$$\begin{aligned}
2(3b-c-1)-5b-3c&=-6\\
5(3b-c-1)+2b-\ c&=\ \ 6
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} b-5c=-4 & /\cdot(-17)\\ 17b-6c=11\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} b-5c=-4\\ 79c=79\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\quad c=1 \text{ и } b=1$$

Сада је $a=3\cdot 1-1-1=1$

Други начин. (Гаусова метода)

$$\begin{aligned}
a-3b+\ c&=-1 \quad /\cdot(-2)\ /\cdot(-5)\\
2a-5b-3c&=-6\\
5a+2b-\ c&=\ \ 6
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a-3b+\ \ c=-1 \\ \quad\ \ b-5c=-4 \quad / \cdot (-17) \\ \quad 17b-6c=11 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a-3b+\ \ c=-1 \\ \quad\ \ b-5c=-4 \\ \qquad\quad 79c=79 \end{cases}$$

одавде је $c=1$, $b=1$ и $a=1$.

Вратимо се на првобитне променљиве:

$$1=\frac{1}{2y+z-2}$$
$$1=\frac{1}{x+z-5}$$
$$1=\frac{1}{x+2y+2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \quad 2y+z-2=1 \\ x \qquad +z-5=1 \\ x+2y \qquad +2=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \quad 2y+z=3 \\ x \qquad +z=6 \qquad (*) \\ x+2y \qquad =-1 \end{cases}$$

Последњи систем ћемо решити једноставно на следећи начин: саберемо све три једначине и добијемо $2(x+2y+z)=8$, одакле је $x+2y+z=4$. Одузимајући од последње једначине редом једначине система означеног са $(*)$, добијамо:

$(x+2y+z)-(2y+z)=4-3 \Rightarrow \boxed{x=1}$,

$(x+2y+z)-(x+z)=4-6 \Rightarrow 2y=-2 \Rightarrow \boxed{y=-1}$,

$(x+2y+z)-(x+2y)=4+1 \Rightarrow \boxed{z=5}$. ♠

Размотримо још дискусију система две линеарне једначине с две непознате. Нека је дат систем једначина:

$$\begin{aligned} a_1x+b_1y&=c_1 \\ a_2x+b_2y&=c_2 \end{aligned} \tag{21}$$

1^0 *Систем је одређен* (сагласан) ако је $\dfrac{a_1}{a_2}\neq\dfrac{b_1}{b_2}$, тј. кад је $a_1b_2\neq$ $\neq a_2b_1$. Тада има јединствено решење.

2^0 *Систем није сагласан*, тј. нема решења ако је $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}\neq\dfrac{c_1}{c_2}$.

3^0 Ако је испуњен услов $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$, систем је еквивалентан са $0 \cdot x + 0 \cdot y = 0 \ \land \ a_1x + b_1y = c_1$, тј. еквивалентан је првој једначини. Тада, ако је $a_1 = b_1 = 0$ и $c_1 \neq 0$ систем је немогућ, а ако је $a_1 = b_1 = c_1 = 0$ или бар један од коефицијената a_1 или b_1 није једнак нули, систем има бесконачно много решења (*неодређен је*).

Решавање и дискусију система једначина можемо извршити на разне начине. Препоручујемо Гаусову методу, јер релативно једноставним начином долазимо до "видљивих" закључака.

Пример 36. Решити систем једначина:

$$\begin{aligned} \frac{x-a}{b} + \frac{y-b}{a} &= 1 \\ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \qquad &= 1 \quad , ab \neq 0. \end{aligned}$$

Решење. Трансформацијом прве једначине добијамо еквивалентан систем.

$$\begin{aligned} \frac{x}{b} + \frac{y}{a} &= 1 + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \\ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} &= 1 \end{aligned}$$

(Прву једначину помножимо са $\left(-\dfrac{b}{a}\right)$ и додамо другој) .

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{b} + \dfrac{y}{a} = 1 + \dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} \\ y\left(\dfrac{1}{b} - \dfrac{b}{a^2}\right) = -\dfrac{b}{a} - \dfrac{b^2}{a^2} \end{cases}$$

Друга једначина је сада еквивалентна са: $y(a^2 - b^2) = -ab^2 - b^3$, односно са $(a-b)(a+b)y = -b^2(a+b)$.

1^0 Ако је $a - b \neq 0$ и $a + b \neq 0$, систем има јединствено решење: $y = -\dfrac{b^2}{a-b}$ и $x = \dfrac{a^2}{a-b}$. (Вредност за x добијамо када у другој једначини полазног система заменимо добијену вредност за y.)

2^0 Ако је $a - b = 0$, тада је $a + b \neq 0$ (због $ab \neq 0$), па је друга једначина еквивалентна са $0 \cdot y \neq 0$, па нема решења и систем није сагласан.

3^0 Ако је $a + b = 0$, тада је друга једначина еквивалентна са $0 \cdot y = 0$, која је задовољена за свако y. Решења система су парови $\left(\dfrac{a}{b}(b-y),\ y\right)$. ♠

Систем једначина се згодно решава и *методом детерминанти*. Детерминанта другог реда је полином $AD - BC$, који се записује у виду квадратне шеме:

$$AD - BC = \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}$$

(Помножимо по дијагоналама и добијене производе одузмемо.) На пример:

$$\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 5 \cdot (-2) - ((-3) \cdot 4) = -10 + 12 = 2.$$

Решавањем система једначина (21), добијамо:

$$x = \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1},\ y = \frac{c_2 a_1 - c_1 a_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1},\ \text{за } a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0,$$

што се може записати и помоћу детерминанти:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}.$$

Уводећи скраћене ознаке добијамо:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta},\ y = \frac{\Delta_y}{\Delta},\ \text{за } \Delta \neq 0.$$

Уствари, решавањем система утврдићемо да је он еквивалентан са: $x \cdot \Delta = \Delta_x \wedge y \cdot \Delta = \Delta_y$, где важе закључци као 1^0, 2^0, 3^0 из дискусије. Погледајмо то на следећем примеру.

Пример 37. Решити систем једначина:

$$\begin{aligned} a^2x - \ y &= a - b \\ b^3x + ay &= b^2. \end{aligned}$$

Решење. Израчунајмо најпре детерминанте.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a^2 & -1 \\ b^3 & a \end{vmatrix} = a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2),$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} a-b & -1 \\ b^2 & a \end{vmatrix} = a^2 - ab + b^2,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a^2 & a-b \\ b^3 & b^2 \end{vmatrix} = a^2b^2 - ab^3 + b^4 = b^2(a^2 - ab + b^2).$$

1^0 Ако је $\Delta \neq 0$, тј. ако је $a + b \neq 0 \wedge a^2 - ab + b^2 \neq 0$, систем има јединствено решење $\left(\dfrac{1}{a+b},\ \dfrac{b^2}{a+b}\right)$.

2^0 Ако је $a = 0 \wedge b = 0$, онда је $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0$, па су решења система сви парови $(x,\ 0)$.

3^0 Ако је $a + b = 0 \wedge ab \neq 0$, тада је $\Delta = 0$, а $\Delta_x \neq 0 \wedge \Delta_y \neq 0$,*) па је систем еквивалентан са $0 \cdot x \neq 0 \wedge 0 \cdot y \neq 0$, што није могуће. ♠

Погледајмо још један пример система од три једначине са три непознате.

---

*) $a^2 - ab + b^2 = (a - \frac{b}{2})^2 + \frac{3}{4}b^2$, па је $a^2 - ab + b^2 = 0$ само за $a = b = 0$.

Пример 38. Решити систем једначина:

$$\begin{aligned} x+\ \ y+kz&=1\\ x+ky+z&=1\\ kx+\ \ y+z&=1 \end{aligned}$$

Решење. Применићемо Гаусову методу. (Помножимо прву једначину са (-1) и додамо другој и помножимо прву једначину са $(-k)$ и додамо трећој). Полазни систем је еквивалентан са:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+\quad y+\qquad kz=1\\ (k-1)y+\ (1-k)z=0\\ (1-k)y+(1-k^2)z=1-k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+\quad y+\qquad kz=1\\ (k-1)y+\ (1-k)z=0\\ \qquad (1-k)(2+k)z=1-k \end{cases}$$

Ради добијања крајњег облика система додали смо другу једначину трећој једначини.

1^0 За $(1-k)(2+k)\neq 0$, тј. $k\neq 1\wedge k\neq -2$, трећа једначина даје: $z=\dfrac{1}{2+k}$. Заменом ове вредности у другу једначину добијамо: $y=\dfrac{1}{2+k}$ и даље из прве је $x=\dfrac{1}{2+k}$. Дакле, за $k\neq 1\wedge k\neq -2$ имамо јединствено решење: $\left(\dfrac{1}{2+k},\ \dfrac{1}{2+k},\ \dfrac{1}{2+k}\right)$.

2^0 За $k=1$, систем је еквивалентан са:

$$\begin{aligned} x+y+\quad z&=1\\ 0\cdot y+0\cdot z&=0\\ 0\cdot z&=0\ , \end{aligned}$$

тј. систем је еквивалентан првој једначини. Тада систем има бесконачно много решења: $(1-y-z,\ y,\ z)$, где су y и z произвољни.

3^0 За $k=-2$, систем је еквивалентан са :

$$\begin{aligned} x+\quad y-2z&=1\\ -3y+3z&=0\\ 0\cdot z&=3\ . \end{aligned}$$

Како је трећа једначина немогућа, то систем није сагласан и нема решења. ♠

1.7 ЛИНЕАРНЕ НЕЈЕДНАЧИНЕ

Овде ћемо размотрити само линеарне неједначине с једном непознатом и графичко тумачење линеарних неједначина с две непознате.

Ако се неједначина трансформише множењем (дељењем) леве и десне стране негативним бројем, тада знак неједнакости мења смер.

Све линеарне неједначине с једном непознатом сводимо на један од еквивалентних облика:

$ax > b\ ,\qquad ax \geq b\ ,\qquad ax < b\ ,\qquad ax \leq b\ ,$

чија решења зависе од вредности a и b. На пример, за први од наведених случаја добијамо:

1^0 За $a > 0$, $ax > b \Leftrightarrow x > \dfrac{b}{a}$ $\qquad$ 2^0 За $a < 0$, $ax > b \Leftrightarrow x < \dfrac{b}{a}$

3^0 За $a = 0$ и $b \geq 0$, неједначина $0 \cdot x > b,\ b \geq 0$ нема решења

4^0 За $a = 0$ и $b < 0$, неједначина $0 \cdot x > b,\ b < 0$ важи за свако реално x.

Пример 39. Решити по x неједначине:

а) $\dfrac{1}{3}x - \dfrac{x-2}{2} > \dfrac{x+2}{2} - \dfrac{2x-6}{3}$; $\qquad$ *б)* $2x(x+4) \leq (x-2)(x+2) + (x+4)^2$;

в) $\dfrac{ax}{a-2} - \dfrac{x-1}{3} < \dfrac{2x+3}{4}$, $a \neq 2$.

Решење *а)* Помножимо неједначину са 6, и добијемо:

$2x - 3(x-2) > 3(x+2) - 2(2x-6) \Leftrightarrow 0 \cdot x > 12$.

Дата неједначина нема решења.

б) Дата неједначина је еквивалентна са $0 \cdot x \leq 12$, па је решење сваки реалан број x.

в) Ако су у имениоцима разломака изрази са променљивом (непозната или параметар), тада "ослобађање" од разломака захтева дискусију. Ми ћемо разломке задржати, а дискусију извести на крају. Дата неједначина има смисла за $a \neq 2$ и еквивалентна је са:

$$\frac{ax}{a-2} - \frac{x}{3} + \frac{1}{3} < \frac{x}{2} + \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{ax}{a-2} - \frac{x}{3} - \frac{x}{2} < \frac{3}{4} - \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{x(a+10)}{6(a-2)} < \frac{5}{12} .$$

За $a = -10$, неједначина је еквивалентна са $0 \cdot x < \dfrac{5}{12}$, што важи за свако реално x . Ако је $a \neq -10$, решења зависе од знака разломка $\dfrac{a+10}{a-2}$. Овај знак ћемо одредити комбиновањем знакова бројиоца и имениоца, сл. 12.

		-10		2	
$a+10$	$- -$		$+ +$		$+ +$
$a-2$	$- -$		$- -$		$+ +$
$\dfrac{a+10}{a-2}$	$+$		$-$		$+$

Сл. 12

Према слици закључујемо:

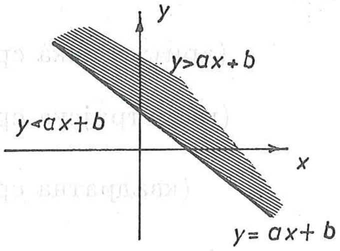
1^0 За $-10 < a < 2$, решење неједначине је $x > \dfrac{5(a-2)}{2(a+10)}$.

2^0 За $a < -10$ или $a > 2$, решење је $x < \dfrac{5(a-2)}{2(a+10)}$. ♠

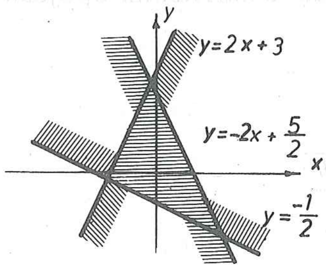
Линеарне неједначине са две непознате решавамо графичком методом. Наиме, као што смо видели у *одељку* 1.5, тачке које задовољавају једнакост $y = ax + b$ припадају правој – графику одговарајуће линеарне функције. Тачке чије су координате веће од $ax + b$ су у полуравни "изнад" графика функције, а ако је $y < ax + b$, тачке су "испод" графика функције, сл. 13. Решење система линеарних неједначина са две непознате биће у координатној равни представљено као пресек одговарајућих полуравни. Такво решење може бити угао, многоугао, и сл.

Пример 40. Решити графички систем линеарних неједначина: $2x - y + 3 \geq 0 \ \wedge \ x + 2y + 2 \geq 0 \ \wedge \ 4x + 2y - 5 \leq 0$.

Решење. Решавајући сваку од датих неједначина по y, добијамо: $y \leq 2x + 3 \ \wedge \ y \geq -\dfrac{1}{2}x - 1 \ \wedge \ y \leq -2x + \dfrac{5}{2}$. Пресек одговарајућих полуравни одређује решење система, приказано на сл. 14 осенченим троуглом. ♠



Сл. 13



Сл. 14

1.8 НЕКЕ НЕЈЕДНАКОСТИ

Полазећи од очигледних неједнакости, можемо добити низ значајних и корисних неједнакости. На пример, на основу особина операције множења реалних бројева, знамо да за сваки реалан број a важи неједнакост $a^2 \geq 0$. Знак "=" важи само ако је $a = 0$. Исти закључци важе и ако је a израз. Тако, полазећи од очгледне неједнакости $(a - b)^2 \geq 0$, долазимо до тзв. Кошијеве неједнакости:

$$\boxed{a^2 + b^2 \geq 2ab}\ , \tag{22}$$

а знак "=" важи само за $a = b$.

На основу ове неједнакости лако се доказује да је:

$$\boxed{a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac}\ . \tag{23}$$

Заиста, ако применимо три пута Кошијеву неједнакост на бројеве a, b, c, имаћемо:

$$a^2+b^2 \geq 2ab$$
$$b^2+c^2 \geq 2bc$$
$$a^2+c^2 \geq 2ac$$

Сабирањем ових неједнакости добијамо:

$$2(a^2+b^2+c^2) \geq 2(ab+bc+ac)\ ,$$

одакле следи неједнакост (23).

Пример 41. Доказати да за бројеве a и b, такве да је $ab>0$, важи неједнакост:

$$\boxed{\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geq 2} \tag{24}$$

Доказ. Ако Кошијеву неједнакост (22) поделимо са ab, добијамо неједнакост (24). Знак "=" важи ако је $a=b$. ♠

Значајне су неједнакости међу *срединама.* Подсетимо се на неке средине позитивних бројева a и b.

$\frac{a+b}{2}$ (аритметичка средина)

$\sqrt{ab}$ (геометријска средина)

$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ (квадратна средина)

$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ (хармонијска средина)

За позитивне бројеве a, b, c истичемо:

$\frac{a+b+c}{3}$ (аритметичка средина)

$\sqrt[3]{abc}$ (геометријска средина)

Пример 42. Доказати да за позитивне бројеве a, b, c важе неједнакости:

$$a)\ \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\ ; \qquad б)\ \frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}.$$

Доказ. *а)* Полазимо од Кошијеве неједнакости: $a^2+b^2 \geq 2ab$. Додамо левој и десној страни a^2+b^2. Добијамо $2(a^2+b^2) \geq a^2+$ $+2ab+b^2$ и после дељења са 4: $\frac{a^2+b^2}{2} \geq \frac{(a+b)^2}{4}$. Како су обе стране неједнакости позитивне, можемо их кореновати, па је:

$\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}} \geq \dfrac{a+b}{2}$.

Нека је $x=\sqrt{a}$ и $y=\sqrt{b}$, тада на основу Кошијеве неједнакости добијамо: $x^2+y^2 \geq 2xy$, односно $\dfrac{x^2+y^2}{2} \geq xy$, одакле, за $x=\sqrt{a}$ и $y=\sqrt{b}$, добијамо: $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

Уочимо следеће: $\dfrac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}} = \dfrac{2\sqrt{ab}}{\sqrt{\dfrac{b}{a}}+\sqrt{\dfrac{a}{b}}} \leq \dfrac{2\sqrt{ab}}{2} = \sqrt{ab}$,

(прво смо прошириили са $\sqrt{ab}$, а онда искористили чињеницу да је на основу (24): $\sqrt{\dfrac{b}{a}}+\sqrt{\dfrac{a}{b}} \geq 2$), па је $\sqrt{ab} \geq \dfrac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}$.

б) Нека је $x=\sqrt[3]{a}$, $y=\sqrt[3]{b}$, $z=\sqrt[3]{c}$. Према неједнакости (23) је: $x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+xz$. Ако ову неједнакост помножимо са $(x+y+z)$, добићемо: $x^3+y^3+z^3 \geq 3xyz$. Поделимо са 3 и заменимо: $x=\sqrt[3]{a}$, $y=\sqrt[3]{b}$, $z=\sqrt[3]{c}$, па је: $\dfrac{a+b+c}{3} \geq \geq \sqrt[3]{abc}$. ♠

Слично, за позитивне бројеве a, b, c, d важи: $\dfrac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}$.

ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

21. Представити графички функцију: $y=\dfrac{x^2-3x+2}{|\,x-2\,|}$, $x \neq 2$.

22. Решити једначину:

$$\frac{x-5}{1995}+\frac{x-4}{1996}+\frac{x-3}{1997}+\frac{x-2}{1998}=\frac{x-1995}{5}+\frac{x-1996}{4}+\frac{x-1997}{3}+\frac{x-1998}{2} .$$

23. У скупу природних бројева решити једначину:

$$\frac{2x-5}{3}+\sqrt{x^2-8x+16}=\frac{2}{3}+\frac{x-2}{6}-\frac{x-4}{2} .$$

24. Решити и дискутовати једначине:

а) $(a^2-5a+6)x=a-3$, *б)* $\dfrac{a}{c}-\dfrac{ax}{cx-1}=\dfrac{c}{a}-\dfrac{cx}{ax-1}$.

25. Решити системе једначина:

а) $\dfrac{1}{x-y+2}+\dfrac{1}{1-x-y}=0.1$ *б)* $x \ \ - |\,y-4\,| = 4$

$\dfrac{1}{x-y+2}+\dfrac{1}{x+y-1}=0.3$ $|\,x-3\,|+|\,y-4\,|=3$

в) $\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{y+2}+\dfrac{1}{z}=1$ *г)* $3xy=2(x+y)$

$\dfrac{2}{x-2}-\dfrac{3}{y+2}+\dfrac{1}{z}=-2$ $5yz=6(y+z)$

$\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{5}{y+2}-\dfrac{7}{z}=3$ $4zx=3(z+x)$

26. Решити и дискутовати систем једначина:

а) $ax-3y=a$, $(a-4)x+(a-7)y=-6$ *б)* $x+ky=1$, $kx-3ky=2k+3$ *в)* $ax+y+z=1$, $x+ay+z=a$, $x+y+az=a^2$

27. Решити неједначине:

а) $|x+1|>2|x-2|$, *б)* $|x^2-2x-3|<3x-3$

в) $\dfrac{x+1}{2x-3}<\dfrac{2}{3}$, *г)* $\dfrac{x+1}{x+2}<\dfrac{x}{x+1}$.

28. Решити по x неједначине:

а) $a(x-1)>x-2$, *б)* $\dfrac{x}{a}+\dfrac{1-3x}{2}>\dfrac{x+2}{4a}$.

29. Ако су a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 позитивни бројеви, такви да је $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=1$, доказати да је:

$$\left(\frac{1}{a_1}-1\right)\cdot\left(\frac{1}{a_2}-1\right)\cdot\left(\frac{1}{a_3}-1\right)\cdot\left(\frac{1}{a_4}-1\right)\cdot\left(\frac{1}{a_5}-1\right)\geq 1024 .$$

30. Наћи највећу вредност израза $\dfrac{x}{9x^2+4}$.

1.10 ГЕОМЕТРИЈА

При изучавању геометрије треба у дозираној мери користити "очигледност и непосредност" многих фигура и њихових особина. Јер, ако се превише ослонимо на "очигледност", то нас може одвести на странпутицу. Очигледан пример, који нас наводи на максималну опрезност, јесте Еуклидов V постулат, односно аксиома паралелности. Прихватање "очигледне чињенице" да се *кроз дату тачку може поставити тачно једна права паралелна са датом правом*, навело је многе истакнуте и многе друге математичаре на погрешне закључке. Међутим, захваљујући тој заблуди, дошло се и до крупних закључака. Тако су Лобачевски, Гаус и Риман утврдили да могу постојати логички засноване геометрије (нееуклидске) у којима нема паралелних правих или кроз једну тачку можемо поставити две различите праве паралелне са датом правом. Геометрија коју ми проучавамо прихвата Еуклидов V постулат као аксиому и због тога је називамо *еуклидском геометријом.*

Овде нећемо наводити систем основних ставова (*аксиома*). Читаоцу предлажемо да те детаље прочита у уџбенику за I разред средње школе.*) За основне појмове уводили смо: *тачку, праву, раван, између и подударно.*

Систематско излагање геометрије водило би нас у писање новог уџбеника, а то нам није намера. Стога ћемо углавном истицати битне особине и то кроз доказе неких значајнијих теорема и кроз илустративне, комплетно решене примере. Скренућемо пажњу и на неке дефиниције. На пример:

Две праве a и b су паралелне ако је $a = b$ или a и b припадају једној равни и $a \cap b = \emptyset$.

Слично за две равни важи: $\alpha \parallel \beta \Longleftrightarrow (\alpha = \beta \vee \alpha \cap \beta = \emptyset)$.

На почетку излагања подсетимо се како се користе аксиоме у доказивању теорема. У следећем примеру користићемо ове аксиоме:

(а) *Свака права садржи најмање две различите тачке. Постоје три неколинеарне тачке.*

(б) *Сваке три неколинеарне тачке одређују једну раван.* (Одређују једну и само једну раван.)

(в) *Свака права , која са неком равни има две заједничке тачке, припада тој равни.*

Пример 43. (*Теорема о одређености равни*). Права и тачка ван ње одређују једну раван.

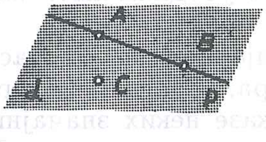
Доказ. Треба доказати две чињенице. *Прво*: постоји нека раван α која садржи дату праву и дату тачку (рецимо праву p и тачку C, $C \notin p$). *Друго*: α је једина таква раван.

Прво: Према аксиоми (a) на правој p постоје две различите тачке, рецимо A и B, сл. 15. Сада су A, B, C три неколинеарне тачке (јер $C \notin p$), па према аксиоми *(б)* постоји јединствена раван која садржи тачке A, B, C. Нека је то раван α. Раван α садржи тачку C, а да ли садржи и праву p? Ова раван садржи тачке A и B, а како су A и B тачке праве p, то α садржи и ову праву, по аксиоми *в)*. Значи, α је тражена раван.

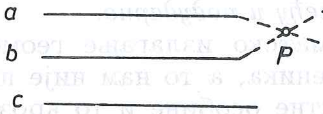
Друго: Ако би постојала још нека раван, рецимо β, која садржи праву p и тачку C, она би онда садржала тачке A, B, C. Међутим,

*) Аутори овог уџбеника су: П. Миличић, В. Стојановић, З. Каделбург и Б. Боричић.

како и α садржи тачке A, B, C то не може бити $\alpha \neq \beta$, због аксиоме *б)*. Дакле, $\beta = \alpha$, што значи да је α јединствена раван одређена правом p и тачком C. ♠



Сл. 15



Сл. 16

Према аксиоми *б)*, сваке три неколинеарне тачке одређују једну раван, а према последњем примеру, свака права и тачка ван ње такође одређују једну раван. Али, раван одређују и две праве које се секу, као и две различите паралелне праве.*) То се може лако доказати.

Два *мимоилазне праве* не могу одредити једну раван, јер оне по дефиницији *не могу припадати једној равни.*

На пример, 3 паралелне праве p, q, r и 4 тачке A, B, C, D могу одредити највише 19 равни. (Ако су p, q, r различите праве, имамо 3 равни: $(p,\ q)$, $(p,\ r)$ и $(q,\ r)$. Даље, права p са сваком тачком одређују раван, дакле ту су највише 4 равни: $(p,\ A)$, $(p,\ B)$, $(p,\ C)$ и $(p,\ D)$. Слично добијамо комбинујући праве q, r са тачкама, а то је још 8 равни. Коначно, сваке три тачке одређују по једну раван, а то је 4 равни: $(A,\ B,\ C)$, $(A,\ B,\ D)$, $(A,\ C,\ D)$ и $(B,\ C,\ D)$.)

Погледајмо још један пример доказивања теореме, овог пута коришћењем *аксиоме паралелности*, која тврди:

Постоји тачно једна права која садржи дату тачку и паралелна је датој правој.

Пример 44. Ако су a, b, c праве једне равни, такве да је $a \parallel c$ и $b \parallel c$, доказати да је $a \parallel b$.

Доказ. Пошто су a и b праве једне равни, оне су или паралелне, или се секу. Ако би се секле, имале би тачно једну заједничку тачку, рецимо тачку P, сл. 16. Ово није могуће, јер бисмо тада имали две различите праве које садрже тачку P и паралелне су са c, што је супротно аксиоми паралелности. Дакле, a и b се не секу, па је $a \parallel b$. ♠

Ово је била *теорема о транзитивности паралелних правих*, за случај правих у једној равни.

---

*) Две праве a и b се секу ако имају тачно једну заједничку тачку, што подразумева да су то две различите праве.

1.11 ПОДУДАРНОСТ

Релација подударности се односи на парове тачака. За пар тачака $\{A,\ B\}$ сматрамо да је подударан пару тачака $\{C,\ D\}$ ако је растојање $d(A,\ B)$ једнако растојању $d(C,\ D)$. О аксиомама подударности доста је написано у уџбенику за I разред гимназије. Напоменимо да релацију подударности на скупу дужи ($AB = CD \Longleftrightarrow \{A,\ B\} \cong \{C,\ D\}$) има особине које је сврставају у релације еквиваленције (релација РСТ). Затим, на полуправој Op постоји јединствена тачка A, таква да је дуж OA подударна датој дужи a (пишемо: $OA = a$). Збир дужи дефинишемо на следећи начин: за $B \in AC$ и $AB = a$ и $BC = b$ је $AC = a + b$.

Релација *подударности фигура* уводи се помоћу *изометрија. Изометрије су пресликавања "један-један" геометријских фигура, којим се дужи пресликавају на подударне дужи.* Познато нам је (доказује се) да изометрије "чувају" колинеарност и распоред тачака.

Подударност углова,*) али и подударност осталих фигура, је релација еквиваленције. По дефиницији су две фигуре подударне ако постоји изометрија којом се једна пресликава у другу.

У вези са угловима подсећамо се на следеће:

– опружени углови су једнаки (подударни) међу собом;

– унакрсни углови су једнаки;

– сви прави углови су једнаки међу собом;

– углови суплементни (или комплементни) једнаким угловима једнаки су међу собом;

– углови са нормалним крацима су једнаки или суплементни;

– сагласни углови су једнаки;**)

– наизменични углови су једнаки.

Мерење углова у степенима упознали смо још у основној школи (прав угао има 90^0, опружен 180^0, итд). У II разреду средње школе уводи се тзв. *лучна мера угла*, која је заснована на чињеници да је обим сваког круга 2π пута већи од полупречника ($\pi = 3.14159\ldots$). За јединицу је узет угао којем одговара лук дужине једнаке полупречнику. То је *радијан*: $1\ rad = 57^0 17' 45''$. Добро је запамтити да је $\pi\ rad = 180^0$, а самим тим: $\frac{\pi}{2}\ rad = 90^0$, $\frac{\pi}{3}\ rad = 60^0$, $\frac{\pi}{4}\ rad = 45^0$, $\frac{\pi}{6}\ rad = 30^0$, итд. Уводећи оријентацију угла и уопштавајући угао (као меру обртања тачке око координатног почетка), долазимо до негативних ($-60^0, -\pi\ rad$) и углова већих од пуног ($750^0, 9\pi\ rad$).

*) *Конвексан угао* је пресек две полуравни једне равни са непаралелним ивицама, а *нековексан угао* је унија две такве полуравни.

**) Дефиниције разних углова (унакрсни, суплементни, комплементни, сагласни, наизменични и сл.) налазе се у уџбенику.

За изучавање подударности фигура и значајних особина фигура важно је најпре проучити подударност троуглова.

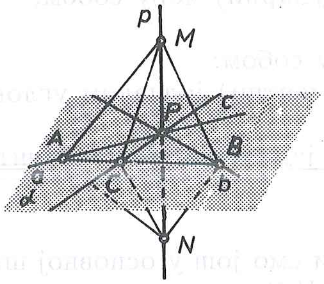
Подударни троуглови имају једнаке одговарајуће углове. Минимални услови за доказивање подударности троуглова садржани су у четири става подударности. Наводимо само њихове кратке ознаке: СУС (страница-угао-страница), УСУ, ССС и ССУ.

Користећи се овим ставовима доказаћемо важну *теорему о нормалности правих и равни.* Знамо да је права a нормална на раван α ако је нормална на све праве равни α, које садрже тачку продора праве a и равни.

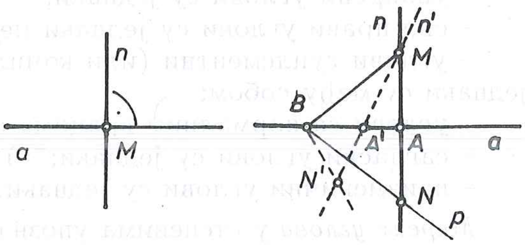
Пример 45. *(Кошијева теорема).* Права p је нормална на раван α, ако је нормална на две различите праве те равни.*)

Доказ. Нека је $p \cap \alpha = \{P\}$ и нека су a и b праве равни α, такве да је $a \cap b = P$, $a \perp p$ и $b \perp p$, сл. 17. Треба доказати да је права p нормална на сваку праву равни α, која садржи тачку P.

Уочимо било коју праву c равни α, кроз тачку P. Нека су A и B тачке правих a и b, такве да дуж AB сече праву c у тачки C. Одредимо на правој p тачке M и N, са разних страна тачке P, такве да је $MP = NP$.



Сл. 17



Сл. 18

Како је $MP = PN$, $AP = AP$ и $\sphericalangle MPA = \sphericalangle NPA = 90^0$, то је $\Delta MPA \cong \Delta NPA$ (по ставу СУС). Одатле следи: $AM = AN$. Слично доказујемо да је $\Delta MPB \cong \Delta NPB$, па је $BM = BN$. Како је и $AB = AB$, на основу става ССС је $\Delta ABM \cong \Delta ABN$. Због тога је $\sphericalangle MAC = \sphericalangle NAC$, па је по ставу СУС $\Delta MAC \cong \Delta NAC$. Из ове подударности следи да је $MC = NC$. Сем тога је $MP = NP$ и $PC = PC$, па је по ставу ССС: $\Delta MPC \cong \Delta NPC$. Одавде излази да је $\sphericalangle MPC = \sphericalangle NPC$, па су ово два права угла. Отуда је $p \perp c$, па како је c произвољна права равни α кроз P, следи да је права p нормална на α. ♠

*) По дефиницији, права m је *нормална* на праву n, у ознаци $m \perp n$, *ако и само ако се m и n* секу *под правим углом.*

У вези са нормалношћу правих значајна је следећа теорема.

Пример 46. *(Теорема о јединости нормале).* Ако је a права равни α, тада се кроз било коју тачку M те равни може поставити тачно једна нормала на праву a. Доказати.

Доказ. Разликоваћемо два случаја: $M \in a$ и $M \notin a$.

1^0 Ако је дата тачка M праве a, тада, по теореми постоји тачно једна полуправа Mn са дате стране праве a, таква да је $\sphericalangle Man = 90^0$, одакле следи да је нормала из M на a јединствена, сл. 18.

2^0 Нека је M тачка равни α, ван праве a и B произвољна тачка праве a. Може се десити да је $MB \perp a$, па је права MB тражена нормала, чију јединост треба доказати. Овај део доказа се изводи слично случају када права MB није тражена нормала. Ако MB није нормално на a, уочимо полуправу Bp која је са оне стране праве a са које није M и која са a одређује угао једнак углу између правих BM и a. На Bp уочимо тачку N тако да је $BN = BM$, сл. 18. Означимо праву MN са n, $n \cap a = \{A\}$. Доказаћемо да је n јединствена нормала. Како је $BM = BN$, $BA = BA$ и $\sphericalangle MBA = \sphericalangle NBA$, биће $\triangle ABM \cong \triangle ABN$, по ставу СУС. Отуда произлази да је $\sphericalangle MAB = \sphericalangle NAB$, па су, по дефиницији, ови углови прави, па је n нормала праве a. Докажимо њену јединственост.

Претпоставимо да постоји права n', $n' \ni M$ и $n' \perp a$ и $n' \neq n$. Нека $n' \cap a = \{A'\}$ и нека је A' средиште дужи MN'. Тада су троуглови $A'BM$ и $A'BN'$ подударни (став СУС) па је $\sphericalangle A'BM = \sphericalangle A'BN'$. Раније смо доказали да је $\sphericalangle ABM = \sphericalangle ABN$, па због транзитивности подударности је $\sphericalangle A'BN' = \sphericalangle ABN$, па мора бити $N' \in Bp$. Како је и $BN' = BM$, закључујемо да је $BN' = BN$, одакле следи $N' = N$. Отуда (по аксиоми) је и $MN' = n$. Значи, $n' = n$ и n је јединa нормала кроз M. ♠

Слично се доказује јединост нормале из ма које тачке P, $P \notin a$, на дату праву a, као и јединост нормале на дату раван.

Истичемо још један важан појам: *угао између праве и равни.*

> *Ако је права n нормална на раван α, тада је угао између n и α прав. Ако n није нормална на α, тада оштар угао између праве n и њене нормалне пројекције на дату раван називамо углом између дате праве и дате равни.*

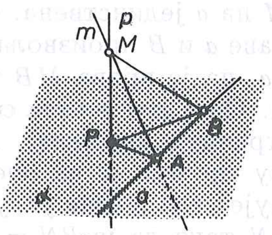
Сада се може доказати да сваки угао има тачно једну симетралу (располовицу) и да свака дуж има тачно једно средиште.

За проучавање односа у простору важна је особина:

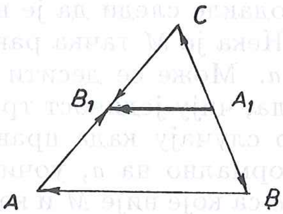
(Теорема о три нормале). Нека су дате права a и раван α, $a \subset \alpha$. Ако је права p нормална на α у тачки P, $P \notin a$, и ако је тачка A

подножје нормале из тачке P на праву a, тада је свака права, која садржи тачку A и сече праву p, нормална на правој a.

Доказ. За произвољну тачку M праве p, $M \neq P$, треба доказати да је $MA = m \perp a$. Нека је $B \in a$, тако да је $AB = MP$, сл. 19. Правоугли троуглови APM и PAB су подударни (СУС), па је $AM = BP$. Сада једноставно закључујемо да су троуглови MPB и BAM подударни (ССС). Како је $p \perp \alpha$, то је угао BPM прав, па је и угао BAM прав. Дакле, $m \perp a$. ♠



Сл. 19



Сл. 20

1.12 ПОЈАМ ВЕКТОРА

У геометрији модел вектора је *усмерена дуж*. Користећи се особинама аритметичких операција са векторима (сабирање, одузимање, множење вектора бројем) долазимо до важних особина геометријских фигура.

Пример 47. (*Теорема о средњој линији троугла*). Ако су A_1 и B_1 средишта страница BC и AC троугла ABC, доказати да је дуж A_1B_1 паралелна са AB и $A_1B_1 = \frac{1}{2}AB$.

Доказ. Према сл. 20 имамо:

$\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{A_1C} + \overrightarrow{CB_1}$ и $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{A_1B} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB_1}$. Сабирањем ових двеју једнакости добијамо: $2\,\overrightarrow{A_1B_1} = (\overrightarrow{A_1C} + \overrightarrow{A_1B}) + \overrightarrow{BA} + (\overrightarrow{CB_1} + \overrightarrow{AB_1})$. Збирови у обе заграде су $\overrightarrow{0}$ (збирови супротних вектора), па је $2\,\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{BA}$, одакле извлачимо тражене закључке. ♠

Слично се доказује да је средња линија трапеза (дуж чији су крајеви средишта кракова) паралелна основицама и једнака полузбиру основица. Имајмо на уму и следеће чињенице.

$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} = k \cdot \vec{b},\ k \in R,\ k \neq 0$ (услов колинеарности)

$\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ компланарни $\Leftrightarrow \vec{c} = \alpha\,\vec{a} + \beta\,\vec{b},\ \alpha \neq 0 \lor \beta \neq 0,\ \alpha, \beta \in R$

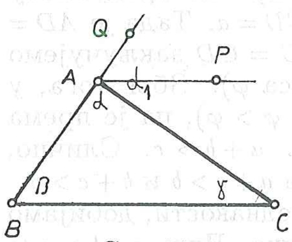
$\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \cdots + \overrightarrow{A_{n-1}A_n} + \overrightarrow{A_nA_1} = \overrightarrow{0}$. (Збир вектора који, надовезани један за другим затварају многоугао, је $\overrightarrow{0}$.)

1.13 ПРИМЕНЕ ПОДУДАРНОСТИ НА МНОГОУГЛОВЕ

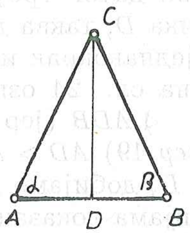
Наводимо најпре најважније особине троуглова.

Пример 48. *(Теорема о збиру унутрашњих углова троугла).* Збир унутрашњих углова у сваком троуглу једнак је опруженом углу.

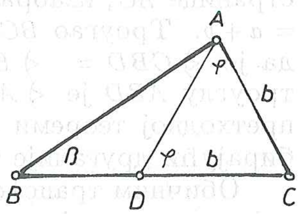
Доказ. Одредимо тачке P и Q, као што је приказано на сл. 21, тако да је $AP \parallel BC$. Тада је $\sphericalangle PAC = \sphericalangle ACB = \gamma$ (наизменични углови) и $\sphericalangle QAP = \sphericalangle ABC = \beta$ (сагласни углови), па како је $\sphericalangle BAC + \sphericalangle QAP + \sphericalangle PAC = 180^o$, то је $\alpha + \beta + \gamma = 180^o$. ♠



Сл. 21



Сл. 22



Сл. 23

Угао QAC на сл. 21 је спољашњи угао датог троугла, па према изложеном доказу закључујемо да је $\alpha_1 = \beta + \gamma$. Слично је $\beta_1 = \alpha + \gamma$ и $\gamma_1 = \alpha + \beta$.

У сваком троуглу између страница и одговарајућих углова важе релације:

– Насправам једнаких страница су једнаки углови (и обрнуто).

– Насправам веће странице је већи угао (и обрнуто).

– Збир било које две странице је већи од треће.

– Разлика било које две странице је мања од треће.

Прва особина се односи на тзв. једнакокраки троугао (са две једнаке странице) и доказује се једноставно. (Према сл. 22, ако је $AC = BC$, онда је $\triangle ABC \cong \triangle BAC$, по ставу ССС, па је $\alpha = \beta$). Једнакокраки троугао има особину да му је висина на основицу (на сл. 22 то је CD) уједно и тежишна линија и симетрала основице и симетрала угла код врха.

Докажимо и остале наведене особине.

Пример 49. *(Теорема о односу углова и страница троугла).* У сваком троуглу насправам веће странице је већи угао.

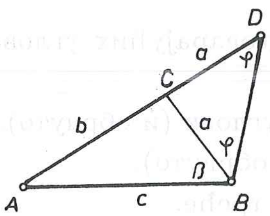
Доказ. Нека је у троуглу ABC испуњен услов $a > b$. Треба доказати да је тада $\alpha > \beta$, сл. 23. На страници BC одредимо тачку D, такву да је $CD = b$. Тада је троугао ADC једнакокрак и $\sphericalangle CAD = \sphericalangle CDA = \varphi$. Због $b < a$ је тачка D између B и C, па је крак AD угла CAD у углу α и $\alpha > \varphi$. У троуглу ABD је угао CDA спољашњи, па је $\sphericalangle CDA = \beta + \sphericalangle BAD$, што значи да је $\varphi > \beta$. Сада на основу транзитивности неједнакости закључујемо да је $\alpha > \beta$. ♠

Није тешко уверити се да важи и обрнуто, нпр. ако је $\alpha > \beta$, онда је и $a > b$.

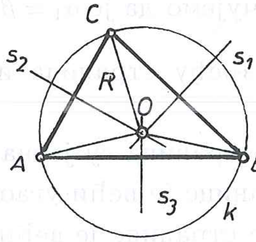
Пример 50. *(Теорема о неједнакости троугла).* У сваком троуглу је збир било које две странице већи од треће, а разлика било које две странице мања од треће.

Доказ. Нека је у равни датог троугла, нпр. на продужетку странице AC, изабрана тачка D, таква да је $CD = a$. Тада је $AD = a + b$. Троугао BCD је једнакокрак и из $BC = CD$ закључујемо да је $\sphericalangle CBD = \sphericalangle BDC$ (на сл. 24 означен са φ). Због тога, у троуглу ABD је $\sphericalangle ABD > \sphericalangle ADB$ (јер је $\beta + \varphi > \varphi$), па је према претходној теореми (*пример* 49) $AD > AB$, тј. $a + b > c$. Слично, бирајући другачије тачку D, добијамо да је и $a + c > b$ и $b + c > a$.

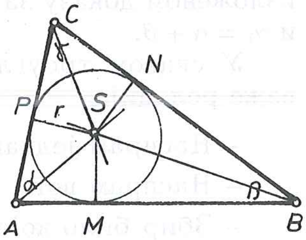
Обичним трансформацијама доказаних неједнакости, добијамо неједнакости које се односе на разлике страница. Нпр. $a + b > c \Leftrightarrow a > c - b \Leftrightarrow b > c - a$, и слично. ♠



Сл. 24



Сл. 25



Сл. 26

За сваки троугао карактеристичне су тзв. *значајне тачке.* То су: *центар описаног круга, центар уписаног круга, ортоцентар* и *тежиште.* О томе говоре следеће теореме.

Пример 51. *(Теорема о описаном кругу троугла).* Око сваког троугла се може описати круг.

Доказ. Означимо са O пресечну тачку симетрала s_1 и s_2 страница BC и AC произвољног троугла ABC, сл. 25. На основу особина симетрале дужи, из $O \in s_1$ закључујемо да је $OB = OC$, а из $O \in s_2$ да је $OC = OA$. Дакле, и $OB = OC = OA$, па постоји круг k са центром O и полупречником OA, који садржи темена A, B, C троугла. ♠

Како је доказано: $OA = OB$, следи да $O \in s_3$, (s_3 је симетрала странице AB), па закључујемо *да се симетрале страница секу у једној тачки* .

Слично се доказује да се симетрале унутрашњих углова троугла секу у једној тачки. То је тврђење следеће теореме.

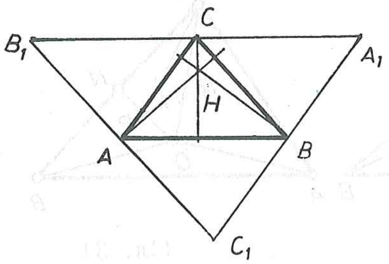
Пример 52. *(Теорема о уписаном кругу троугла.)* У сваки троугао се може уписати круг.

Доказ се изводи тако што се за нормале SM, SN, SP, из пресечне тачке S симетрала углова α и β на странице троугла, утврди да су једнаке међу собом, сл. 26. S је центар, а нормале полупречници уписаног круга. ♠

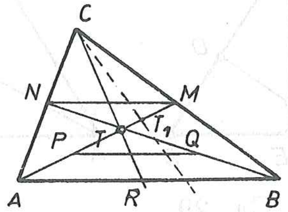
Користећи се доказом теореме о описаном кругу, доказујемо и следећу теорему.

Пример 53. *(Теорема о ортоцентру троугла.)* У сваком троуглу висине имају заједничку тачку. (Ову тачку називамо *ортоцентром.*)

Доказ. Кроз темена A, B, C конструишемо праве паралелне наспрамним страницама, које се две и две секу, одређујући троугао $A_1B_1C_1$, као на сл. 27. Користећи се једнакошћу углова са паралелним крацима, лако се доказује да су троуглови A_1CB, CB_1A и BAC_1 подударни са троуглом ABC, одакле следи да је нпр. $A_1C = CB_1$, па је висина h_c троугла ABC истовремено симетрала странице A_1B_1 троугла $A_1B_1C_1$. Слично утврдимо да је h_a симетрала странице B_1C_1 и h_b симетрала странице A_1C_1. Онда, на основу теореме о описаном кругу троугла, висине h_a, h_b и h_c имају заједничку тачку, коју смо на сл. 27 означили са H. ♠



Сл. 27



Сл. 28

Пример 54. *(Теорема о тежишту троугла).* У сваком троуглу тежишне линије имају једну заједничку тачку *(тежиште)*, која дели сваку тежишну линију у размери 2 : 1.

Доказ се састоји из два дела. *Прво*: Сваке две тежишне линије деле једна другу у размери 2 : 1. Нека су M и N средишта страница

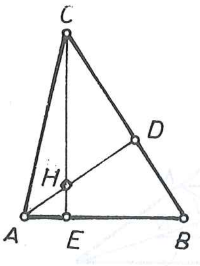
BC и AC произвољног троугла ABC, сл. 28, и нека се тежишне линије AM и BN секу у T. Означимо са P и Q средишта дужи AT и BT. По теореми о средњој линији троугла, у троуглу ABC је $MN = \dfrac{1}{2}AB$, а у троуглу ABT је $PQ = \dfrac{1}{2}AB$, па је $MN = PQ$ и $MN \parallel PQ \parallel AB$. Троуглови MNT и PQT су подударни по ставу УСУ (углови код M и N су *наизменични* са угловима код P и Q) па је $MT = PT$ и $NT = QT$. Отуда следи да је нпр. $MT = \dfrac{1}{3}AM$ и $AT = \dfrac{2}{3}AM$, па је $AT : TM = 2 : 1$. Слично је и $BT : TN = 2 : 1$.

Друго: Нека је T заједничка тачка тежишних линија AM и BN. Доказаћемо да и трећа тежишна линија CR садржи тачку T. Претпоставимо да то није тачно и да CR сече AM у T_1, сл. 28. Према *првом* доказу, тада је $AT = \dfrac{2}{3}AM$, али из истих разлога је и $AT_1 = \dfrac{2}{3}AM$, па је $AT = AT_1$. Због тога, на основу аксиома подударности,*) мора бити $T = T_1$. Тиме је доказ завршен. ♠

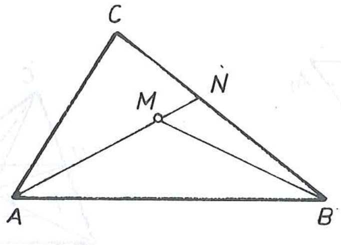
У вези са доказаним особинама решићемо неколико примера.

Пример 55. *У оштроуглом троуглу ABC висине AD и CE секу у H, тако да је $AB = CH$. Израчунати у степенима угао ACB.*

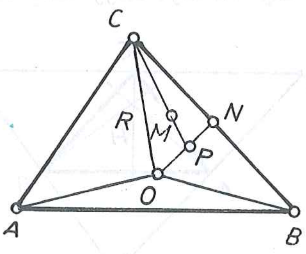
Решење. Правоугли троуглови ABD и CHD су подударни по ставу УСУ (оштри углови једног троугла једнаки су одговарајућим угловима другог, као углови са нормалним крацима), сл. 29. Следи да је $AD = CD$, па је троугао ACD правоугли једнакокраки и $\measuredangle ACB = 45^o$. ♠



Сл. 29



Сл. 30



Сл. 31

Пример 56. *У троуглу ABC изабрана је произвољна тачка M. Доказати да је: а) $\measuredangle AMB > \measuredangle ACB$, б) $AM + MB < AC + CB$.*

Доказ. *а)* Продужимо дуж AM до пресека N са страницом BC, сл. 30. Тада је $\measuredangle AMB$ спољашњи угао троугла BMN и због тога

*) На полуправој Oa постоји тачно једна тачка M, таква да је OM једнака датој дужи m.

је $\measuredangle AMB > \measuredangle ANB$. Слично утврдимо да у троуглу ACN важи: $\measuredangle ANB > \measuredangle ACN$. Отуда следи да је $\measuredangle AMB > \measuredangle ACB$.

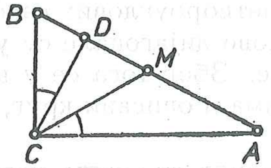
б) На основу *неједнакости троугла*, из троугла MBN закључујемо: $MB < MN + NB$. Кад овој неједнакости додамо AM на леву и десну страну, добијамо $AM + MB < AM + MN + NB$ и, пошто је $AM + MN = AN$, биће: $AM + MB < AN + NB$. Из троугла ANC добијамо: $AN < AC + CN$, па када на обе стране неједнакости додамо NB, тада због $CN + NB = CB$, добијамо: $AN + NB < AC + CB$. На основу транзитивности неједнакости закључујемо: $AM + MB < AN + NB$ и $AN + NB < AC + CB \Rightarrow AM + MB < AC + CB$. ♠

Пример 57. Дата је произвољна тачка M у троуглу ABC. Доказати да је најмања од дужи AM, BM, CM мања или једнака полупречнику описаног круга троугла ABC.

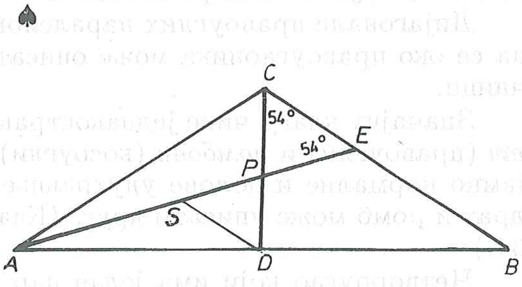
Доказ. Нека је O центар описаног круга, сл. 31. Ако је $M = O$, онда је $AM = BM = CM = R$, где је R полупречник описаног круга. Ако је M тачка једног од полупречника OA, OB или OC, тврђење је очигледно. Ако M није на неком од полупречника, тада је у једном од троуглова AOB, BOC или COA. Нека је M у троуглу BOC и нека је ON висина тог троугла. Ради конкретности, нека је M у троуглу OCN, као на слици, и нека CM сече ON у P. (Може бити $M = P$). Угао OPC је спољашњи за правоугли троугао CNP, па је $\measuredangle OPC > 90^o$. Због тога је $\measuredangle OPC$ највећи унутрашњи угао троугла OCP, па је $OC > OP$, а самим тим и $CM < OC = R$. ♠

Пример 58. У правоуглом троуглу ABC дуж CD је хипотенузина висина, а дуж CM хипотенузина тежишна линија. Доказати да је $\measuredangle BCD = \measuredangle ACM$.

Доказ. Означимо са α и β оштре углове датог правоуглог троугла, сл. 32. Тада је $\measuredangle BCD = \alpha$, јер је комплементан углу β у правоуглом троуглу BCD. Знамо да је средиште M хипотенузе центар описаног круга правоуглог троугла, па је $CM = AM$. Дакле, троугао ACM је једнакокрак, па је $\measuredangle MCA = \alpha$. Како је и $\measuredangle BCD = \alpha$ следи $\measuredangle MCA = \measuredangle BCD$. ♠



Сл. 32



Сл. 33

Пример 59. *У једнакокраком троуглу ABC је угао при врху 108^o. На краку BC дата је тачка E, таква да права AE полови угао BAC. Доказати да је $AE = 2CD$, где је CD висина на основицу датог троугла.*

Доказ. Угао на основици је $\sphericalangle BAC = 36^o$, па је $\sphericalangle CAE = 18^o$ и $\sphericalangle CEA = 54^o$, сл. 33. И $\sphericalangle BCD = 54^o$, као половина угла при врху, па је троугао CEP једнакокрак. (P је пресечна тачка дужи CD и AE.) Означимо са S средиште дужи AE. Тада је дуж DS средња линија троугла ABE (јер висина полови основицу једнакокраког троугла), па је $DS \parallel BC$. Због тога су углови PDS и PSD једнаки, као наизменични са угловима PCE и PEC, па је и троугао PDS једнакокрак и $PD = PS$. Сада је $CD = ES$ ($CP + PD = EP + PS$), тј. $CD = \frac{1}{2}AE$, па је $AE = 2CD$. ♠

Међу *четвороугловима* истичемо *паралелограме*, који имају два пара паралелних страница. Без доказа наводимо важну *теорему о паралелограму:*

Четвороугао је паралелограм ако и само ако важи било који од наведених услова:

а) Углови на свакој страници су суплементни.

б) Оба пара наспрамних углова су парови једнаких углова.

в) Оба пара наспрамних страница су парови једнаких страница.

г) Дијагонале се узајамно полове.

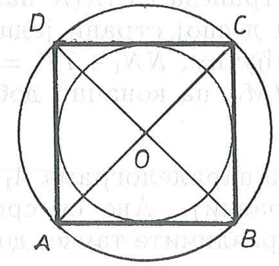
Докази ових теорема су заиста једноставни, па их препуштамо читаоцима.

Ако паралелограм има један угао прав, онда су му прави сви углови и називамо га *правоугаоником.* Остале паралелограме називамо *косоуглим* или *ромбоидима.*

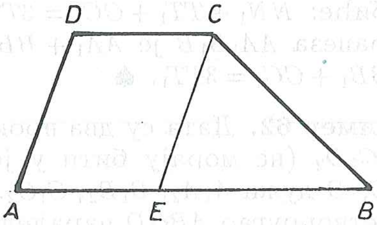
Дијагонале правоуглих паралелограма су једнаке међу собом, па се око правоугаоника може описати круг, а дијагонале су пречници.

Значајну класу чине једнакостранични четвороуглови: *квадрати* (правоугли) и *ромбови* (косоугли). Њихове дијагонале су узајамно нормалне и полове унутрашње углове. Због тога се у квадрат и ромб може уписати круг. (Квадрат има и описани круг, сл. 34.)

Четвороугао који има један пар паралелних страница назива се *трапез*, сл. 35. Зависно од углова на основици разликујемо правоугле и косоугле трапезе, а зависно од кракова - једнакокраке и неједнакокраке. Корисно је имати на уму да се трапез може разложити на један паралелограм и један троугао, као што је приказано на сл. 35.



Сл. 34

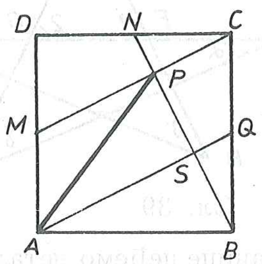


Сл. 35

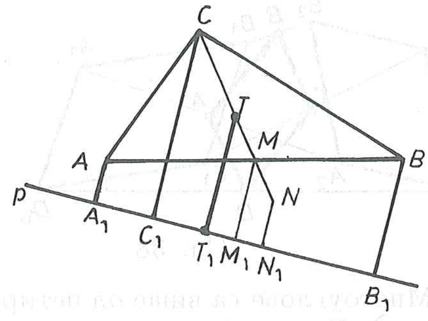
Збир унутрашњих углова сваког простог четвороугла је 360^o.

Пример 60. Нека су M и N средишта страница AD и CD квадрата $ABCD$. Дужи BN и CM се секу у P. Доказати да је $AP = AB$.

Доказ. Правоугли троуглови BCN и CDM су подударни по ставу СУС, сл. 36, па је $\measuredangle CNB = \measuredangle CMD$. Како је $\measuredangle CMD + \measuredangle DCM = 90^o$, то је и $\measuredangle CNB + \measuredangle DCM = 90^o$, па је троугао CNP правоугли и $CM \perp BN$. Нека је Q средиште странице BC. Четвороугао $AMCQ$ је паралелограм па је $AQ \parallel CM$, а самим тим и $AQ \perp BN$. Ако је $AQ \cap BN = \{S\}$, тада је QS средња линија троугла BCP и $BS = PS$. Због тога су правоугли троуглови ASP и ASB подударни (по ставу СУС), па је $AP = AB$. ♠



Сл. 36



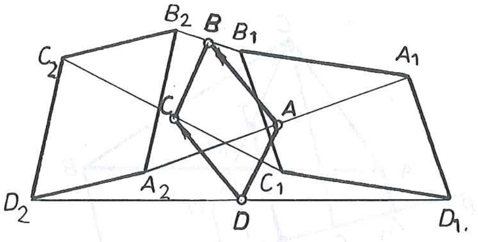
Сл. 37

Пример 61. У равни датог троугла ABC дата је права p. Ако је T тежиште датог троугла и A_1, B_1, C_1, T_1 подножја нормала из A, B, C, T на праву p, доказати да је $AA_1 + BB_1 + CC_1 = 3TT_1$.

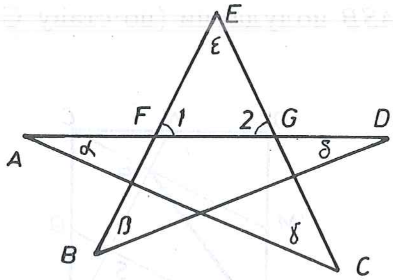
Доказ. Нека је CM тежишна линија, N тачка иза M у односу на C, таква да је $MN = MT$ и N_1 подножје нормале из N на p, сл. 37. Користићемо особину да је средња линија трапеза једнака полузбиру основица. Уочимо правоугле трапезе CC_1N_1N, TT_1N_1N и AA_1B_1B. ($CT = \frac{2}{3}CM = TN$, па је T средиште крака CN, а још је M средиште дужи TN и дужи AB.) Из трапеза CC_1N_1N налазимо да је $NN_1 + CC_1 = 2TT_1$. Додамо левој и десној страни једнакости TT_1 и биће: $NN_1 + TT_1 + CC_1 = 3TT_1$. Међутим, $NN_1 + TT_1 = 2MM_1$, а из трапеза AA_1B_1B је $AA_1 + BB_1 = 2MM_1$, па коначно добијамо: $AA_1 + BB_1 + CC_1 = 3TT_1$. ♠

Пример 62. Дата су два произвољна паралелограма $A_1B_1C_1D_1$ и $A_2B_2C_2D_2$ (не морају бити у једној равни). Ако су средишта A, B, C, D дужи A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2, D_1D_2 различите тачке, доказати да је четвороугао $ABCD$ паралелограм.

Доказ. На основу особина паралелограма закључујемо да је $\overrightarrow{A_1B_1}=\overrightarrow{D_1C_1}$ и $\overrightarrow{A_2B_2}=\overrightarrow{D_2C_2}$, сл. 38. Поступајући слично *примеру* 47, израчунавамо: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{B_1B}$ и $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AA_2} + \overrightarrow{A_2B_2} + \overrightarrow{B_2B}$. Како је $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AA_2}=\overrightarrow{0}$ и $\overrightarrow{B_1B} + \overrightarrow{B_2B}=\overrightarrow{0}$ (супротни вектори), то сабирањем једнакости добијамо: $2\,\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{A_2B_2}$. Поступајући слично добијамо: $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DD_1} + \overrightarrow{D_1C_1} + \overrightarrow{C_1C}$ и $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DD_2} + \overrightarrow{D_2C_2} + \overrightarrow{C_2C}$,одакле је $2\,\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{D_1C_1} + \overrightarrow{D_2C_2}$. Због $\overrightarrow{A_1B_1}=\overrightarrow{D_1C_1}$ и $\overrightarrow{A_2B_2}=\overrightarrow{D_2C_2}$ је и $\overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{A_2B_2}=\overrightarrow{D_1C_1} + \overrightarrow{D_2C_2}$, па је $2\,\overrightarrow{AB} = 2\,\overrightarrow{DC}$, тј. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$. Отуда је, на основу дефиниције једнаких вектора, четвороугао $ABCD$ паралелограм. ♠



Сл. 38



Сл. 39

Многоуглове са више од четири странице нећемо детаљно проучавати. Подсетићемо се на неке битне чињенице.

Многоугао је *правилан* ако има једнаке све странице и једнаке све унутрашње углове. У ранијем излагању срели смо два правилна многоугла: једнакостраничан троугао и квадрат. Од осталих, посебно је занимљив правилан шестоугао, по томе што се може разложити на шест једнакостраничних троуглова.

За конвексне многоуглове важе формуле:

– $S_n = (n-2)\cdot 180^o$ (збир унутрашњих углова)

– $S = 360^o$ (збир спољашњих углова)

– $\alpha_n = \dfrac{(n-2)\cdot 180^o}{n}$ (унутр. угао правилног многоугла) (25)

– $\beta_n = \dfrac{360^o}{n}$ (спољ. угао правилног многоугла)

– $D_n = \dfrac{n(n-3)}{2}$ (број дијагонала)

Природан број n, $n \geq 3$, означава број страница многоугла.

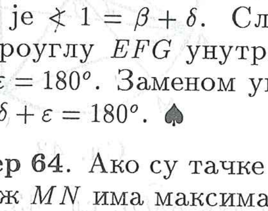
Многоугао код кога се неке несуседне странице секу зове се *сложеним*. Такви су нпр. звездасти многоуглови или *звезде*. Остали многоуглови су *прости*.

Пример 63. Израчунати збир унутрашњих углова петокраке звезде на сл. 39.

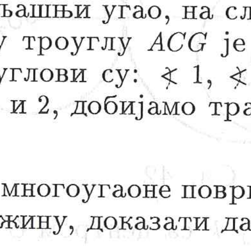
Решење. Троугао BFD има спољашњи угао, на слици означен са $\sphericalangle\ 1$, па је $\sphericalangle\ 1 = \beta + \delta$. Слично, у троуглу ACG је $\sphericalangle\ 2 = \alpha + \gamma$. Даље, у троуглу EFG унутрашњи углови су: $\sphericalangle\ 1$, $\sphericalangle\ 2$ и ε, па је $\sphericalangle\ 1 + \sphericalangle\ 2 + \varepsilon = 180^o$. Заменом углова 1 и 2, добијамо тражени збир: $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon = 180^o$. ♠

Пример 64. Ако су тачке M и N многоугаоне површи изабране тако да дуж MN има максималну дужину, доказати да су тачке M и N темена многоугла.

Доказ. Тачке M и N морају бити на контури многоугла, а не у унутрашњости. (Нпр. за тачке M_1 и N_1 на сл. 40 важи: $M_2N_2 > M_1N_1$.) Претпоставимо да тачке M и N нису темена (на слици су то M_2 и N_2). Тада бар један од углова N_2M_2M и N_2M_2P није оштар. Ако нпр. није оштар угао N_2M_2M, тада је он највећи унутрашњи угао троугла N_2M_2M, па је $MN_2 > M_2N_2$. Дакле тачка M мора бити теме. Сада бар један од углова MN_2N и MN_2Q није оштар, рецимо угао MN_2N. Тада је овај угао највећи у троуглу MN_2N, па је $MN > MN_2$. Значи, и N мора бити теме многоугла. ♠



Сл. 40

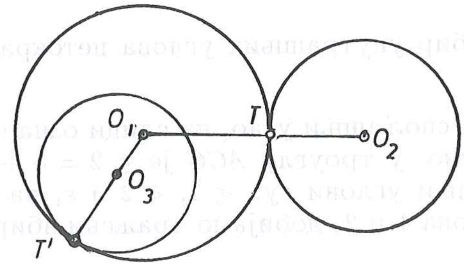


Сл. 41

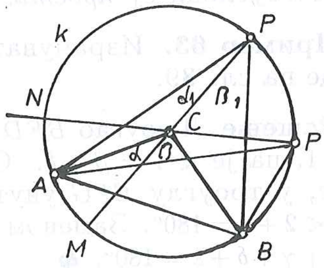
1.14 КРУГ

Круг је једна од најзначајнијих геометријских фигура у равни. Ако је p права у равни круга, тада нормалу из центра на праву називамо *централним растојањем* праве. (На сл. 41 то је дуж OS. Тачка S је средиште тетиве AB.) Ако је $OS < r$, права p је *сечица* круга. Ако је централно растојање једнако полупречнику, онда је та права *тангента* круга. (На сл. 41 права t је тангента.)

Дуж која спаја центре два круга је њихово централно растојање. Два круга *се додирују споља* ако је $O_1O_2 = r_1 + r_2$, а *додирују се изнутра* ако је $O_1O_3 = r_1 - r_3$, сл. 42. У оба случаја су центри кругова и додирна тачка колинеарни.



Сл. 42



Сл. 43

На кругу k са центром C уочимо лук $A\overset{\frown}{M}B$, сл. 43. Угао под којим се овај лук види из центра круга, $\sphericalangle ACB$, називамо *централним углом* који одговара луку $A\overset{\frown}{M}B$ (или тетиви AB). Ако је P тачка круга k, ван лука $A\overset{\frown}{M}B$ тада $\sphericalangle APB$ називамо периферијским (тетивним) углом који одговара луку $A\overset{\frown}{M}B$ (тетиви AB).

Наводимо важну теорему.

Пример 65. *(Теорема о централном и периферијском углу)* Централни угао је два пута већи од одговарајућег периферијског угла.

Доказ. Нека је центар круга у области периферијског угла APB, сл. 43, и нека је PM пречник. Уведимо за централне углове ознаке α и β, а за периферијске α_1 и β_1, као на слици. Троугао ACP је једнакокрак, па је $\alpha = 2\alpha_1$, као спољашњи угао код врха овог троугла. Слично је и $\beta = 2\beta_1$, па је $\alpha + \beta = 2(\alpha_1 + \beta_1)$, тј. $\sphericalangle ACB = = 2 \sphericalangle APB$, што се и тврдило.

Слично се доказује и у случају угла $AP'B$, само што тада користимо разлику углова NCB и NCA. ♠

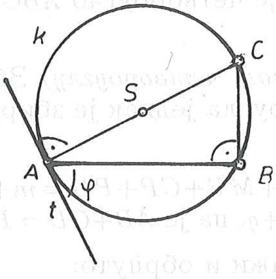
Важна последица ове теореме је:

Периферијски угао над пречником је прав.

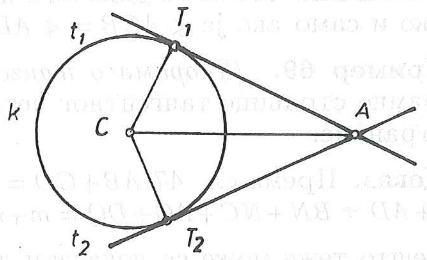
Угао између тангенте и тетиве, којој је један крај додирна тачка тангенте, назива се *тангентни угао* (угао φ на сл. 44). Каква је веза између тангентног и периферијског угла видећемо из наредне теореме. Периферијски угао *одговара тангентном углу* ако му је теме на оном луку круга који није у унутрашњој области тангентног угла.

Пример 66. *(Теорема о тангентном углу)* Тангентни угао је једнак одговарајућем периферијском углу.

Доказ. Нека је SA додирни полупречник круга k и тангенте t и φ тангентни угао са тетивом AB, сл. 44, и нека је AC пречник. Тада је $\sphericalangle ABC = 90^o$, као периферијски угао над пречником. Како је и $SA \perp t$, то је $\sphericalangle ACB = \varphi$ (углови са нормалним крацима). ♠



Сл. 44



Сл. 45

Нека су t_1 и t_2 тангенте из тачке A на круг k, са додирним тачкама T_1 и T_2. Дужи AT_1 и AT_2 називамо *тангентним дужима* из тачке A на круг k, сл. 45.

Пример 67. *(Теорема о тангентним дужима)* Тангентне дужи из једне тачке на дати круг једнаке су међу собом.

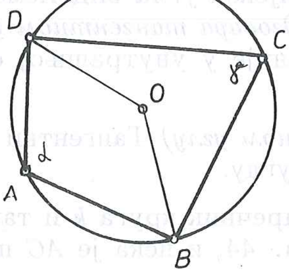
Доказ. Правоугли троуглови ACT_1 и ACT_2 су подударни по ставу ССУ, па је $AT_1 = AT_2$. ♠

Сада можемо утврдити важне особине четвороугла уписаног у круг *(тетивног)* и четвороугла описаног око круга *(тангентног)*.

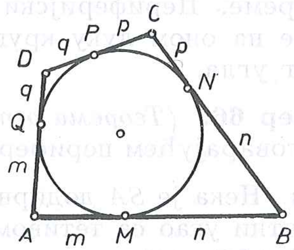
Пример 68. *(Теорема о тетивном четвороуглу)* Ако је четвороугао уписан у круг, онда су му наспрамни углови суплементни.

Доказ. Нека је $ABCD$ четвороугао уписан у круг k са центром O, сл. 46. Периферијском углу α над луком $\widehat{BCD}$ одговара неконвексан централни угао BOD, а периферијском углу γ одговара конвексан централни угао BOD. Збир ова два централна угла је 360^o, па је, према *примеру 65*, $\alpha + \gamma = 180^o$. Слично је $\beta + \delta = 180^o$. ♠

Није тешко доказати да важи и обрнуто: ако су два наспрамна угла четвороугла суплементна, онда је тај четвороугао тетиван.



Сл. 46



Сл. 47

Напомена. Може се доказати и да је четвороугао $ABCD$ тетиван ако и само ако је $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB$.

Пример 69. *(Теорема о тангентном четвороуглу)* Збир две наспрамне странице тангентног четвороугла једнак је збиру друге две странице.

Доказ. Према сл. 47 $AB+CD = AM+MB+CP+PD = m+n+p+q$ и $BC+AD = BN+NC+AQ+DQ = m+n+p+q$, па је $AB+CD = BC+AD$.

Нешто теже може се доказати да важи и обрнуто:
ако је $AB + CD = BC + AD$, четвороугао $ABCD$ је тангентан.

ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

31. На хипотенузи BC правоуглог троугла ABC дате су тачке D и E, такве да је $BE = AB$ и $CD = AC$. Израчунати у радијанима угао DAE.

32. Нека је D тачка на страници BC датог троугла ABC, таква да је $DC = 2BD$. Одредити унутрашње углове троугла ако је $\sphericalangle ABC = 45^o$ и $\sphericalangle ADC = 60^o$.

33. На симетрали спољашњег угла код темена C троугла ABC бирамо произвољну тачку M. Доказати да је $MA + MB > AC + BC$.

34. У правоуглом троуглу ABC конструисана је висина CD. Ако је M средиште дужи CD и N средиште дужи BD, доказати да је $AM \perp CN$.

35. Нека су тачке K, L, M средишта страница BC, AC, AB троугла ABC, а P, Q, R средишта изломљених линија BAC, ACB, CBA. Доказати да се праве KP, LR и MQ секу у једној тачки.

36. У правоуганику $ABCD$ страница BC је два пута већа од странице AB. Из тачке M странице BC виде се под једнаким угловима дужи AB и AD. Колики је угао AMD?

37. Симетрале двају углова, које образују по две наспрамне странице тетивног четвороугла секу се под правим углом. Доказати.

38. Оштроугли троугао ABC има ортоцентар H. Тачке M, N, P, Q су средишта дужи BH, CH, AC, AB. Доказати да је четвороугао $MNPQ$ правоугаоник.

39. Доказати да бар једно од подножја нормала, спуштених из произвољне унутрашње тачке конвексног многоугла на његове странице, лежи на самој страници, а не на њеном продужетку.

40. Доказати да је збир дијагонала конвексног петоугла већи од обима петоугла.

41. Кругови k_1 и k_2 се додирују у тачки A. Сечица a, која садржи тачку A, сече k_1 и k_2 у тачкама T_1 и T_2. Доказати да су тангенте ових кругова у тачкама T_1 и T_2 паралелне међу собом.

42. Три угла једног четвороугла су тупи. Доказати да је већа она дијагонала која садржи теме оштрог угла.

43. Два круга са центрима O_1 и O_2 имају заједничке тачке A и B. Права p, која садржи тачку A, сече дате кругове у тачкама M_1 и M_2. Доказати да је $\sphericalangle O_1M_1B = \sphericalangle O_2M_2B$.

44. Два једнака круга се секу у A и B. Произвољни круг k са центром A сече прва два круга. Доказати да је тачка B колинеарна са паром пресечних тачака круга k са датим круговима.

45. Дат је троугао ABC и круг k који садржи тачке A и B и сече странице AC и BC у тачкама M и N. Доказати да је права MN паралелна тангенти t описаног круга троугла ABC, која је постављена у тачки C.

1.15 ИЗОМЕТРИЈСКЕ ТРАНСФОРМАЦИЈЕ

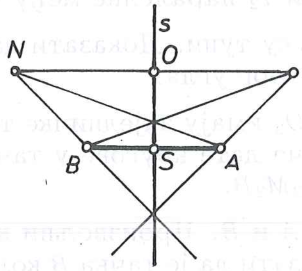
Говорећи о подударности фигура, у *одељку* 1.11, дефинисали смо изометријске трансформације и поменули њихове опште особине. Овде ћемо се кратко осврнути на неке значајне *трансформације равни*, које су изометрије, а познате су и корисне и у свакодневном животу.

За геометрију су изузетно значајне *осне симетрије* (осне *рефлексије*). Нека је дата дуж AB и њена симетрала s, сл. 48. По дефиницији права s је нормална на AB и полови AB, тј. $AS = SB$. За тачке A и B кажемо да су симетричне једна другој, у односу на праву s. По овом моделу можемо дефинисати *пресликавање* (трансформацију) *равни на саму себе.*

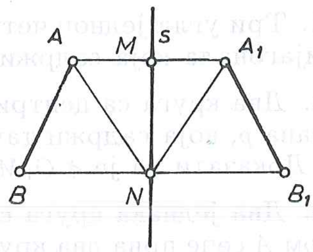
Нека је α раван правих AB и s и нека је N произвољна тачка равни, ван праве s. На правој n, кроз N, нормалној на s, $n \cap s = \{O\}$, одредимо тачку N_1, $N_1 \neq N$, такву да је $NO = ON_1$. На тај начин се свака тачка N равни α преслика у тачку N_1 исте равни, симетричну са N у односу на праву s. За тачке праве s кажемо да су саме себи симетричне. Сада можемо рећи:

> *Пресликавање $\Im_s$ равни α у саму себе, којим се свака тачка N пресликава у тачку N_1, симетричну са N у односу на дату праву s исте равни, назива се осна рефлексија равни α у односу на праву s. Права s се назива оса рефлексије $\Im_s$.*

Ако се фигура F овом рефлексијом пресликава у фигуру F_1, кажемо да су ове две фигуре *симетричне у односу на праву s.*



Сл. 48



Сл. 49

Пример 70. *(Теорема о осној рефлексији)* Осна рефлексија је изометрија. Доказати.

Доказ. Треба доказати да се произвољна дуж AB пресликава у подударну дуж A_1B_1.

Нека су M и N средишта дужи AA_1 и BB_1, сл. 49, за тачке A и B ван дате осе s. Правоугли троуглови AMN и A_1MN су подударни по ставу СУС ($AM = A_1M$, $MN = MN$), па је $AN = A_1N$ и $\sphericalangle ANM = \sphericalangle A_1NM$. Комплементи ових углова такође су једнаки, $\sphericalangle ANB = \sphericalangle A_1NB_1$, па су и троуглови ANB и A_1NB_1 подударни по ставу СУС. Отуда следи да је $AB = A_1B_1$. Слично се доказује ако је нека од тачака A, B на оси s (она се пресликава у саму себе). ♠

Тачке које се пресликавају у саме себе називамо *непокретним* или *инваријантним.* Све непокретне тачке осне рефлексије су тачке саме осе. Постоје и фигуре које се рефлексијом пресликавају у себе. То су *осно симетричне фигуре.* Такве су, н.пр. све праве које су нормалне на осу s. Од раније проучаваних фигура, симетричне су: једнакокраки троугао и једнакокраки трапез, као и делтоид (једна оса симетрије), правоугаоник, ромб (две осе симетрије), једнакостраничан троугао (три осе симетрије), квадрат (четири осе симетрије) и круг (сваки пречник је оса симетрије).

Занимљиво је да је $\Im_s(A) = B \Rightarrow \Im_s(B) = A$, тј. $\Im_s(\Im_s(A)) = A$. То важи за сваку тачку, па је *осна рефлексија сама себи инверзна.* То записујемо и овако: $\Im_s^2 = \Im_1$ ($\Im_1$ је идентично пресликавање- све су тачке инваријантне). Пресликавања која задовољавају последњу једнакост називају се *инволутивним.*

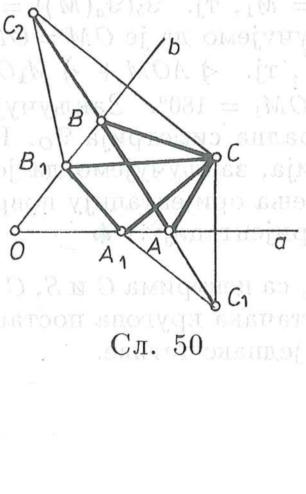
Осна рефлексија спада у тзв. *индиректне изометрије* (које мењају оријентацију површи), али се том особином нећемо посебно бавити.

Према слици 48 видимо још једну особину осне рефлексије: осно симетричне праве се секу на оси (на сл. 48, праве AN и BN_1, односно BN и AN_1) или су паралелне оси и међу собом.

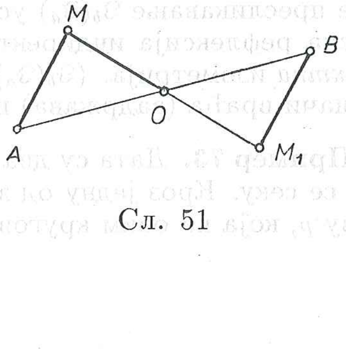
Пример 71. Дат је оштар угао Oab и у његовој унутрашњој области тачка C. Одредити тачке A и B, $A \in Oa$ и $B \in Ob$, такве да троугао ABC има минималан обим.

Решење. Одредимо тачку C_1 симетричну са C у односу на a и тачку C_2 симетричну са C у односу на b. Тражене тачке A и B су пресечне тачке дужи C_1C_2 са крацима датог угла.

Доказаћемо да је обим троугла ABC минималан. Нека су A_1 и B_1 тачке на крацима датог троугла, такве да је $A \neq A_1$ или $B \neq$ $\neq B_1$ (или су обе различите, као на сл. 50). Тада су следеће дужи једнаке (јер су симетричне): $AC_1 = AC$, $BC_2 = BC$, $A_1C_1 =$ $= A_1C$ и $B_1C_2 = B_1C$. Одавде следи да је $AB + BC + CA = C_1C_2$, а $A_1B_1 + B_1C + CA_1 = C_1A_1 + A_1B_1 + B_1C_2$, па како је дужина изломљене линије $C_1A_1B_1C_2$ већа од дужи C_1C_2, то значи да је обим троугла A_1B_1C већи од обима троугла ABC (и то важи увек). ♠



Сл. 50



Сл. 51

Посматрајмо сада следеће пресликавање равни у саму себе. Нека је O дата тачка равни и A, B тачке исте равни, такве да је O средиште дужи AB, сл. 51. Тада кажемо да су тачке A и B једна другој *централно симетричне* у односу на дату тачку O. Тачка O је сама себи симетрична - *инваријантна*. Било којој другој тачки M можемо одредити симетричну тачку M_1, као на сл. 51, тако што нађемо тачку M_1 иза O у односу на M, такву да је $OM = OM_1$. Тиме смо одредили још једно пресликавање равни у саму себе.

> *Пресликавање $\Im_O$ равни α у саму себе, којим се свака тачка M те равни пресликава у тачку M_1 симетричну у односу на дату тачку O равни α, назива се централном симетријом са центром O.*

Центар је једина инваријантна тачка централне симетрије. Очигледно је да се праве које садрже центар O пресликавају у саме себе, тј. те праве су централно симетричне. Постоје и централно симетричне фигуре, као круг (у односу на свој центар), паралелограм (у односу на пресечну тачку дијагонала), и сл.

По дефиницији и према сл. 51, видимо да су симетричне дужи (нпр. AM и BM_1) наспрамне странице паралелограма. (Четвороуглу $AMBM_1$ се дијагонале полове.) Отуда закључујемо да су централно симетричне праве паралелне међу собом и да су симетричне дужи подударне.

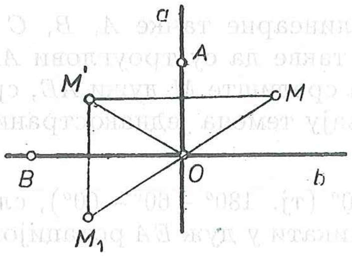
Централна симетрија је инволутивно пресликавање, јер за било коју тачку A важи: $\Im_O(\Im_O(A)) = A$, тј. $\Im_O^2(A) = A$, или $\Im_O = \Im_O^{-1}$.

Пример 72. Централна симетрија равни је директна изометрија.

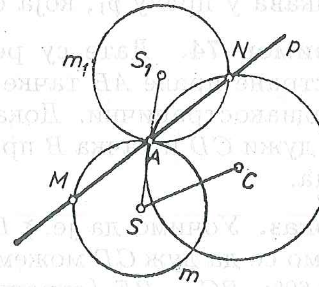
Доказ. Нека су a и b праве равни α које се секу под правим углом у тачки O, сл. 52. Пресликавањем произвољне тачке M равни α добијамо: $\Im_a(M) = M'$, $\Im_b(M') = M_1$, тј. $\Im_b(\Im_a(M)) = M_1$. На основу особина осне симетрије закључујемо да је $OM = OM_1$ и $\measuredangle AOM = \measuredangle AOM'$, $\measuredangle M_1OB = \measuredangle BOM'$, тј. $\measuredangle AOM + \measuredangle M_1OB = = \measuredangle AOM' + \measuredangle BOM' = 90^o$, па је $\measuredangle MOM_1 = 180^o$. Закључујемо да је пресликавање $\Im_b(\Im_a)$ уствари централна симетрија $\Im_O$. Како је осна рефлексија индиректна изометрија, закључујемо да је $\Im_O$ *директна* изометрија. ($\Im_b(\Im_a)$ два пута мења оријентацију површи, то значи враћа (задржава) првобитну оријентацију.) ♠

Пример 73. Дата су два круга k и m, са центрима C и S, $C \neq S$, који се секу. Кроз једну од заједничких тачака кругова поставити праву p, која на овим круговима одсеца једнаке тетиве.

Решење. Нека је A заједничка тачка кругова. Треба одредити тачке M и N, $M \in m$ и $N \in k$, такве да је A средиште дужи MN. То значи да су M и N централно симетричне у односу на A.



Сл. 52

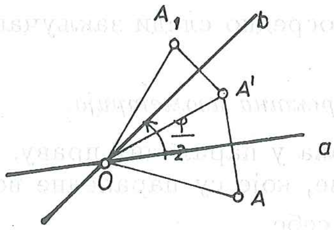


Сл. 53

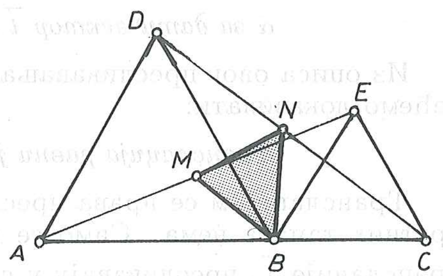
Конструишемо круг m_1, $m_1 = \Im_A(m)$. (Прво одредимо тачку S_1, $S_1 = \Im_A(S)$, па конструишемо круг $m_1(S_1, r)$, сл. 53.) Тражена тачка N је пресечна тачка кругова k и m_1, а тражена права је $p = AN$. ♠

Уочимо две праве a, b равни α, које одређују оријентисани угао $\overrightarrow{Oab} = \frac{1}{2}\vec{\varphi}$, сл. 54. Пресликајмо тачку A равни α изометријом $\Im_b(\Im_a)$. Добијамо тачке $\Im_a(A) = A'$, $\Im_b(A') = A_1$, тј. $\Im_b(\Im_a(A)) = A_1$. Према особинама осне рефлексије закључујемо да је $OA = OA_1$ и $\sphericalangle\overrightarrow{AOA_1} = \vec{\varphi}$. Овакво пресликавање називамо *централном ротацијом* око тачке O за оријентисани угао $\vec{\varphi}$. Сматрамо да се при томе тачка O пресликава у саму себе (једина инваријантна тачка).

Пресликавање $\Re_{O,\vec{\varphi}}$ равни α на саму себе, којим се свака тачка M пресликава на тачку M_1, тако да је $OM_1 = OM$ и $\sphericalangle\overrightarrow{MOM_1} = \vec{\varphi}$, назива се централном ротацијом равни α са центром O, за угао $\vec{\varphi}$.



Сл. 54



Сл. 55

Из начина на који смо дефинисали ову трансформацију, следи закључак:

Централна ротација равни је директна изометрија.

Приметимо да се произвољна права p централном ротацијом пресликава у праву p_1, која сече p под углом ротације.

Пример 74. Дате су редом колинеарне тачке A, B, C и са једне стране праве AB тачке D и E, такве да су троуглови ABD и BCE једнакостранични. Доказати да средиште M дужи AE, средиште N дужи CD и тачка B представљају темена једнакостраничног троугла.

Доказ. Уочимо да је $\measuredangle DBE = 60^o$ (тј. $180^o - 60^o - 60^o$), сл. 55. Уверимо се да дуж CD можемо пресликати у дуж EA ротацијом око B за $+60^o$: $BC = BE$ (странице једнакостраничног троугла BCE) и $\measuredangle CBE = +60^o$ и слично: $BD = BA$, $\measuredangle DBA = +60^o$. Због тога се истом ротацијом средиште N дужи CD пресликава у средиште M дужи EA, па је $BN = BM$ и $\measuredangle NBM = 60^o$. Дакле, $\triangle BMN$ је једнакостраничан. ♠

Нека су a и b паралелне праве, A тачка праве a и B подножје нормале из A на b, сл. 56. Пресликајмо тачку M изометријом $\Im_b(\Im_a)$. Добијамо: $\Im_a(M) = M'$, $\Im_b(M') = M_1$, тј. $\Im_b(\Im_a(M)) = M_1$. Приметимо да је $MM_1 \parallel AB$ и $MM_1 = 2AB$. (Према слици је $MC = = CM'$ и $DM_1 = DM'$, тј. $MM' = 2CM'$ и $M_1M' = 2DM'$, па је $MM_1 = = 2CM' - 2DM' = 2CD = 2AB$.) Уводећи ознаку $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{t}$, закључујемо да је $\overrightarrow{MM_1} = \overrightarrow{t}$. Пресликавање произвољне тачке M у тачку M_1, тако да је $\overrightarrow{MM_1} = \overrightarrow{t}$, означвамо са $T_{\overrightarrow{t}}$ и називамо *транслацијом*:

> *Пресликавање равни α у саму себе којим се произвољна тачка M пресликава у M_1, тако да је $\overrightarrow{MM_1} = \overrightarrow{t}$ и вектор $\overrightarrow{t}$ је паралелан са α, назива се транслацијом равни α за дати вектор $\overrightarrow{t}$.*

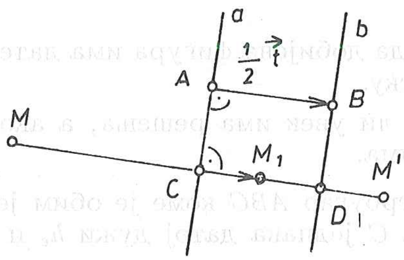
Из описа овог пресликавања непосредно следи закључак, који нећемо доказивати:

Транслација равни је директна изометрија.

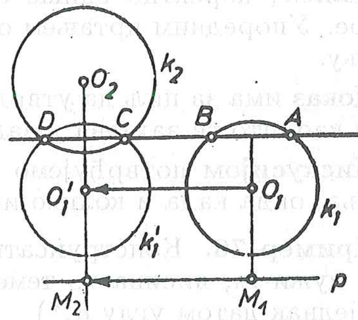
Транслацијом се права пресликава у паралелну праву. Непокретних тачака нема. Само се праве, које су паралелне вектору транслације $\overrightarrow{t}$, пресликавају у саме себе.

Пример 75. Дата су два круга k_1 и k_2 са центрима O_1 и O_2, $O_1 \neq O_2$, и права p. Конструисати праву q, паралелну са p, такву да на круговима k_1 и k_2 одсеца две једнаке тетиве.

Решење. Означимо са AB и CD тражене једнаке тетиве. Пошто су оне паралелне, постоји транслација за вектор $\overrightarrow{AC}$, којом се AB пресликава у CD. При томе ће се k_1 пресликати у k_1', сл. 57. Вектор транслације биће једнак вектору $\overrightarrow{O_1O_1'}$, а овај је једнак вектору $\overrightarrow{M_1M_2}$, где су M_1 и M_2 подножја нормала из O_1 и O_2 на p. Према томе, конструишемо најпре M_1 и M_2, затим O_1', тако да је $\overrightarrow{O_1O_1'}=\overrightarrow{M_1M_2}$, па круг k_1', подударан са k_1, и добијамо тачке C и D у пресеку k_1' и k_2. Сада имамо $q = CD$. ♠



Сл. 56



Сл. 57

Од описаних изометрија само је осна рефлексија индиректна. Централна симетрија, централна ротација и транслација су директне изометрије (не мењају оријентацију пресликане површи).

Напоменимо још да је осна рефлексија потпуно одређена осом, централна симетрија центром, транслација вектором транслације, а централна ротација центром и углом ротације.

1.16 КОНСТРУКТИВНИ ЗАДАЦИ

Кад кажемо да *треба конструисати* неку фигуру са неким датим елементима, то не значи (као што се најчешће сматра) да ту фигуру треба *нацртати*. Слику је пожељно нацртати, али то *није решење задатка.*

Конструисати неку фигуру значи утврдити да постоји фигура са траженим особинама, затим објаснити како се она може добити унијама , пресецима и разликама неких правих и кругова (коришћењем лењира и шестара) и на крају доказати да "добијена" фигура испуњава постављене захтеве.

Ако има више фигура које испуњавају постављене услове, различитим решењима се сматрају неподударне фигуре (осим ако се тражи нека тачка или права).

Овде ћемо задатке решавати кроз четири фазе: *анализу, конструкцију, доказ* и *дискусију*.

Анализа је тражење решења. Уочавањем особина тражене фигуре и повезивањем са датим елементима тражимо идеју за решавање задатка. Анализу не вршимо ако је решење познато.

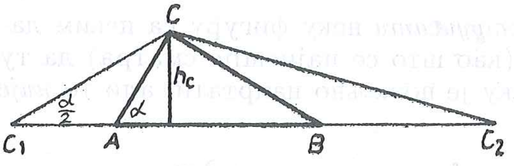
Конструкција се састоји у томе, да се на основу закључака из анализе, коректно опише сваки корак у дефинисању тражене фигуре. Упоредним цртањем олакшавамо и конкретизујемо пут ка решењу.

Доказ има за циљ да утврди да добијена фигура има дате елементе као што се захтева у задатку.

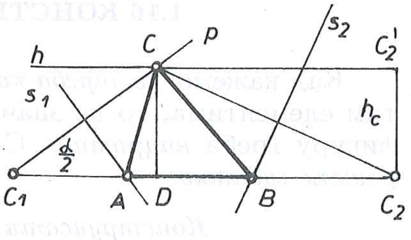
Дискусијом потврђујемо да ли увек има решења, а ако има решења, онда када и колико их има.

Пример 76. Конструисати троугао ABC коме је обим једнак датој дужи $2s$, висина из темена C једнака датој дужи h_c и угао BAC једнак датом углу α.*)

Анализа. Одредимо тачке C_1 и C_2 на правој AB, као на сл. 58, тако да је $AC_1 = AC$ и $BC_2 = BC$. Тада је $C_1C_2 = 2s$. Троугао ACC_1 је једнакокрак са основицом CC_1 и једнаким угловима на основици. Како је дати угао α спољашњи за троугао ACC_1 и једнак збиру углова код C и C_1, следи да је $\sphericalangle CC_1A = \dfrac{\alpha}{2}$. Сада уочавамо да можемо конструисати троугао CC_1C_2.



Сл. 58



Сл. 59

Конструкција. Према опису који следи цртамо онако како је приказано на сл. 59. Успут поредимо са сл. 58.

---

*) Уобичајено је да се задатак формулише кратко: " Конструисати троугао ако му је дато: s, h_c, α."

Конструишемо дуж C_1C_2 једнаку датој дужи $2s$, затим нормалу C_2C_2' на праву C_1C_2, тако да је C_2C_2' једнака датој дужи h_c. Кроз C_2' конструишемо праву h, паралелну са C_1C_2. Конструишемо полуправу C_1p, са оне стране праве C_1C_2 са које је и права h, тако да она са C_1C_2 одређује угао једнак половини датог угла α. Нека је C пресечна тачка праве h и полуправе C_1p. Означимо са A пресечну тачку симетрале s_1 дужи CC_1 са C_1C_2, а са B пресечну тачку симетрале s_2 дужи CC_2 са C_1C_2.

Доказаћемо да је ABC тражени троугао.

Доказ. Нека је тачка A између B и C_1. Конструишимо из C нормалу CD на C_1C_2. То је висина из темена C. По конструкцији је четвороугао CDC_2C_2' правоугаоник, па је $CD = C_2C_2'$, а како је $C_2C_2' = h_c$, то је и висина CD троугла ABC једнака датој дужи h_c. Угао BAC је спољашњи угао једнакокраког троугла ACC_1 (тачка A је на симетрали дужи CC_1), па је једнак двоструком углу AC_1C, тј. једнак је $2\cdot\frac{1}{2}\alpha = \alpha$.

Тачка B је на симетрали s_2 дужи CC_1, па је $BC = BC_2$. Такође је и $AC = AC_1$, па је $CA + AB + BC = C_1A + AB + BC_2 = C_1C_2 = 2s$, што значи да је обим троугла ABC једнак датој дужи $2s$.

Дакле, троугао ABC испуњава сва три постављена услова. Конструисали смо једно од могућих решења.

Дискусија. Како је збир углова у троуглу једнак 180^o, задатак нема решења за $\alpha \geq 180^o$. Ако је $\alpha < 180^o$, могуће је конструисати троугао CC_1C_2. Ако тачке A и B добијемо тако да је A између C_1 и B, задатак има јединствено решење. Ако је B између C_1 и A, задатак нема решења. ♠

Следеће примере нећемо решавати овако детаљно и нећемо обавезно описати све четири фазе решавања.

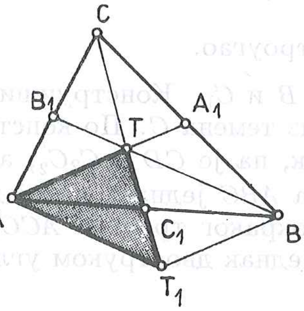
Пример 77. Конструисати троугао ABC коме су тежишне линије једнаке датим дужима t_a, t_b, t_c.

Анализа. Нека је T тежиште троугла ABC, сл. 60. Према теореми о тежишту је $AT = \frac{2}{3}t_a$, $BT = \frac{2}{3}t_b$ и $TC_1 = \frac{1}{3}t_c$. Иза C_1 у односу на T одредимо тачку T_1, тако да је $C_1T_1 = C_1T$, тј. да је $TT_1 = \frac{2}{3}t_c$. Дијагонале четвороугла AT_1BT се полове, па је он паралелограм и $AT_1 = BT$. Сада се може конструисати троугао ATT_1, осенчен на слици.

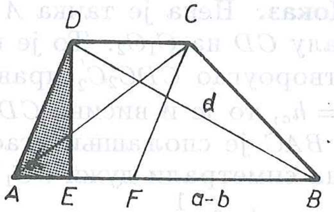
Конструкцију, доказ и дискусију препуштамо читаоцу. ♠

Пример 78. Конструисати трапез ако му је дата већа дијагонала $BD = d$, висина, разлика основица $a - b$, $a > b$ и угао α.

Анализа. Нека је DE висина трапеза $ABCD$, сл. 61. Очигледно се може одмах конструисати троугао ADE. (Прво се конструише α са теменом A, па се теме D добија коришћењем висине h, слично *примеру* 76). Пресек круга $k(D, d)$ и праве AE одређује теме B. Даље је $BF = a - b$ и угао BFC је α, итд. ♠



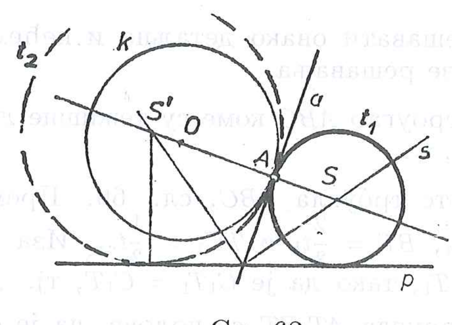
Сл. 60



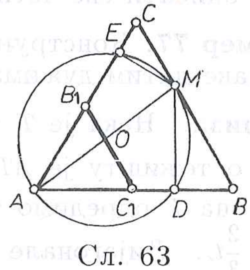
Сл. 61

Пример 79. Конструисати круг који додирује дату праву p и дати круг k додирује у датој тачки A.

Анализа. Тангента a датог круга у тачки A биће заједничка тангента датог и траженог круга. Центар траженог круга је на правој OA, где је O центар датог круга, сл. 62. Како круг додирује праве a и p, центар му припада симетрали једног од углова одређених правим a и p. Задатак има два решења, на сл. 62 кругови t_1 и t_2. ♠



Сл. 62



Сл. 63

Пример 80. Из произвољне тачке M странице BC једнакостраничног троугла ABC, конструисане су нормале MD и ME на странице AB и AC. Одредити скуп центара свих кругова описаних око троугла ADE.

Анализа. Круг пречника AM садржи тачке D и E (угао над пречником је прав), па је то описани круг троугла ADE, сл. 63. Центар O овог круга, средиште дужи AM, припада траженом скупу тачака. Ма како изабрали тачку M на страници BC, тачка O ће бити средиште дужи AM. Дакле, тражени скуп центара је средња линија B_1C_1 датог троугла.

Код извођења **доказа** треба утврдити: *прво:* да свака тачка средње линије B_1C_1 припада траженом скупу центара; *друго:* да ни једна тачка ван дужи B_1C_1 нема тражену особину. ♠

ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

46. Дат је правоугаоник $ABCD$ ($AB > BC$) и тачка B_1 симетрична са B у односу на праву AC. Нека се праве AB_1 и CD секу у E. Доказати да је троугао ACE једнакокрак.

47. Дате су неколинеарне тачке O, M, N. Конструисати квадрат $ABCD$, тако да O буде пресечна тачка дијагонала, тачка M припада правој AB и тачка N припада правој CD.

48. Дат је угао Abc и у његовој унутрашњој области тачка M. Конструисати троугао ABC, тако да $B \in b$, $C \in c$, а дуж AM је тежишна линија.

49. Конструисати паралелограм $ABCD$ тако да су два његова темена две дате тачке A и B, а друга два темена припадају датом кругу k.

50. Конструисати једнакостраничан троугао ABC, коме је дато теме A, а темена B и C припадају датим правим b и c.

51. Конструисати једнакокраки троугао коме су дате висине.

52. Конструисати троугао ABC ако су му дати елементи: a, α, t_a.

53. Конструисати квадрат $ABCD$ ако му је дато теме A, произвољна унутрашња тачка M странице BC и произвољна унутрашња тачка N странице CD.

54. Дат је круг k и тачка A у истој равни. Конструисати скуп средишта свих тетива одређених пресецима датог круга и правих које садрже тачку A.

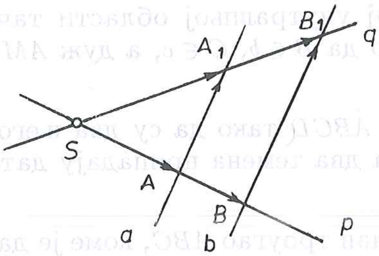
55. Кроз теме A у равни датог троугла ABC повући праву p, која не садржи унутрашње тачке троугла, тако да збир растојања тачака B и C од праве p буде највећи.

1.17 ХОМОТЕТИЈА

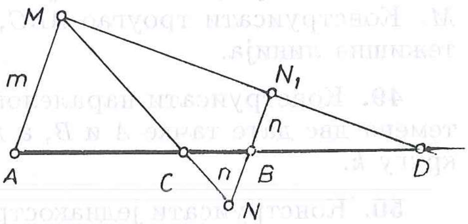
Под размером две дужи подразумевамо размеру њихових дужина. Ако је дата дуж AB, тачка C дужи AB и тачка D иза B у односу на A, тако да је $AC : BC = AD : BD$, односно $\dfrac{AC}{BC} = \dfrac{AD}{BD}$, тада кажемо да тачке C и D деле дуж AB *хармонијски.* Такође кажемо да су $(A,\ B)$ и $(C,\ D)$ *два пара хармонијских* тачака.

Ако су $\vec{a}$ и $\vec{b}$ две паралелне оријентисане дужи, тада је $\vec{a}= k\cdot \vec{b}$. Тада кажемо да је $\vec{a}:\vec{b}= k$. Размера оријентисаних дужи може имати и негативну вредност (ако су $\vec{a}$ и $\vec{b}$ паралелне у супротном смеру). У сваком случају, ако су a и b дужине оријентисаних дужи $\vec{a}$ и $\vec{b}$, тада из $\vec{a}:\vec{b}= k$ закључујемо да је $a : b =| k |$.

Ако је $a : b = c : d$, кажемо да су дужи $a,\ b,\ c,\ d$ пропорционалне. Пропорционалност дужи је директно повезана са паралелношћу. О томе говори следећа теорема.



Сл. 64



Сл. 65

Пример 81. *(Талесова теорема)* Ако паралелне праве a и b секу праву p у тачкама A и B и праву q у тачкама A_1 и B_1 и ако је S пресечна тачка правих p и q, тада важи: $\dfrac{AA_1}{BB_1} = \dfrac{SA}{SB} = \dfrac{SA_1}{SB_1}$.

Доказ. Вектори $\overrightarrow{AA_1}$ и $\overrightarrow{BB_1}$ су колинеарни, па је $\overrightarrow{AA_1}= k\cdot \overrightarrow{BB_1}$, одакле је $\dfrac{AA_1}{BB_1} = k$, сл. 64. Из троуглова SAA_1 и SBB_1 налазимо да је: $\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{SA_1} - \overrightarrow{SA}$ и $\overrightarrow{BB_1}=\overrightarrow{SB_1} - \overrightarrow{SB}$. Заменом у прву једнакост добијамо: $\overrightarrow{SA_1} - \overrightarrow{SA}= k\cdot(\overrightarrow{SB_1} - \overrightarrow{SB})$, одакле је $\overrightarrow{SA_1} -k\cdot \overrightarrow{SB_1}=\overrightarrow{SA} -k\cdot \overrightarrow{SB}$. Вектор на левој страни једнакости је клинеаран са q, а вектор на десној страни је колинеаран са p. Како праве p и q нису паралелне, ово је могуће само ако су оба вектора $\vec{0}$. На основу тога добијамо: $\overrightarrow{SA_1} -k\cdot \overrightarrow{SB_1}=\vec{0}\Rightarrow\overrightarrow{SA_1}= k\cdot \overrightarrow{SB_1}$, и слично $\overrightarrow{SA}= k\cdot \overrightarrow{SB}$, па је $\dfrac{SA_1}{SB_1} = k =$

$= \dfrac{SA}{SB}$. Тиме је тврђење доказано. ♠

Може се доказати и обрнута теорема, која тврди да су праве a и b паралелне ако су одговарајући одсечци из претходне теореме пропорционални. (Обрнута Талесова теорема).

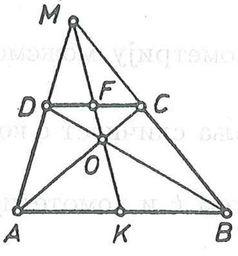
Из Талесове теореме закључујемо, ако су две праве пресечене са више паралелних правих и одсечци на једној од њих једнаки, тада су одсечци и на другој правој једнаки. Ово користимо при подели дате дужи на једнаке делове.

Пример 82. Дату дуж AB поделити хармонијски тачкама C и D, тако да је $\dfrac{AC}{BC} = \dfrac{m}{n}$, где су m и n дате дужи.

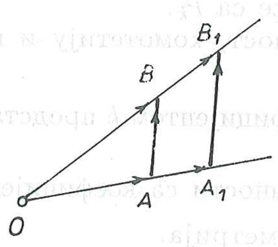
Решење. Конструишемо паралелне дужи $AM = m$, $BN = BN_1 = n$, као на сл. 65, и у пресецима правих MN и MN_1 са правом AB добијамо тачке C и D. ♠

Пример 83. Доказати да права, која је одређена пресечном тачком дијагонала и пресечном тачком продужетака кракова трапеза, полови основице трапеза.

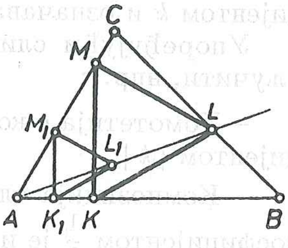
Доказ. Због $AB \parallel CD$ је $\dfrac{AK}{DF} = \dfrac{MK}{MF} = \dfrac{BK}{CF}$, тј. $\dfrac{AK}{DF} = \dfrac{BK}{CF}$, сл. 66. Слично је $\dfrac{AK}{CF} = \dfrac{BK}{DF}$. Множећи ове две једнакости добијамо: $\dfrac{AK^2}{CF \cdot DF} = \dfrac{BK^2}{CF \cdot DF}$, па је $AK^2 = BK^2$, одакле је $AK = BK$. Дакле, K је средиште основице AB. Прва пропорција, због $AK = BK$, даје: $DF = CF$, па је F средиште основице CD. ♠



Сл. 66



Сл. 67



Сл. 68

Сада ћемо дефинисати једно пресликавање које није изометрија. Нека је дата тачка O и број k, $k \neq 0$. Ако је $\overrightarrow{OA_1} = k \cdot \overrightarrow{OA}$, тада кажемо да се тачка A *хомотетијом* пресликава у тачку A_1. Хомотетија је одређена центром O и коефицијентом k, па је означавамо са $H_{O,\,k}$, сл. 67.

Из $\overrightarrow{OA_1} = k \cdot \overrightarrow{OA}$, добијамо: $\overrightarrow{OA} = \frac{1}{k}\,\overrightarrow{OA_1}$. Значи $H^{-1}_{O,\,k} = H_{O,\,\frac{1}{k}}$ представља инверзну хомотетију. Ако је $k = 1$ имамо идентично пресликавање (коинциденцију), а ако је $k = -1$ имамо централну симетрију.

Према сл. 67 је и $\overrightarrow{OB_1} = k \cdot \overrightarrow{OB}$, па је $\overrightarrow{OB_1} - \overrightarrow{OA_1} = k \cdot (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})$, тј. $\overrightarrow{A_1B_1} = k \cdot \overrightarrow{AB}$. Дакле, вектор се хомотетијом пресликава у паралелан вектор.

Уопште, можемо доказати да хомотетија чува колинеарност, распоред тачака, паралелност и једнакост углова, а не чува подударност дужи (права се пресликава у паралелну праву).

Искористићемо хомотетију за решавање неких конструктивних задатака.

Пример 84. У дати троугао ABC уписати једнакостраничан троугао KLM, тако да $K \in AB$, $L \in BC$, $M \in AC$ и $MK \perp AB$.

Решење. Одредимо на AC и AB тачке M_1 и K_1, тако да је $M_1K_1 \perp AB$. Затим одредимо тачку L_1, тако да је троугао $K_1L_1M_1$ једнакостраничан, сл. 68. Овај троугао се може пресликати у тражени троугао хомотетијом са центром A. Тако, најпре полуправом AL_1 пресликамо L_1 на дуж BC. Сада кроз L повучемо $KL \parallel K_1L_1$ и $LM \parallel L_1M_1$. ♠

1.18 СЛИЧНОСТ

Пресликавање равни α у саму себе, којим се произвољна дуж AB пресликава у дуж A_1B_1, тако да је $A_1B_1 = k \cdot AB$, где је k дати позитиван број, назива се *трансформацијом сличности* са коефицијентом k и означава се са P_k.

Упоређујући сличност, хомотетију и изометрију можемо закључити, нпр. :

– Хомотетија с коефицијентом k представља сличност с коефицијентом $|\,k\,|$.

– Композиција сличности са коефицијентом k и хомотетије са коефицијентом $\frac{1}{k}$ је изометрија.

– Сличност је композиција једне хомотетије и једне изометрије.

Из последњег тврђења произлази да сличност чува колинеарност, распоред тачака и подударност углова.

Ако се фигура F пресликава у фигуру F_1 трансформацијом сличности, тада кажемо да су F и F_1 сличне фигуре и пишемо: $F \sim F_1$. Сличност фигура је релација еквиваленције.

Ако су два троугла ABC и $A_1B_1C_1$ слични, $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$, тада је $a:b:c = a_1:b_1:c_1$ и $\alpha = \alpha_1$, $\beta = \beta_1$, $\gamma = \gamma_1$.

Код сличних троуглова су пропорционалне и одговарајуће висине, одговарајуће тежишне линије и сл: $\dfrac{h}{h_1} = \dfrac{t}{t_1} = \dfrac{r}{r_1} = k$. Такође важе следеће пропорције: $O : O_1 = k$, $P : P_1 = k^2$, односно $O : O_1 = a : a_1$ и $P : P_1 = a^2 : a_1^2$.

Минимални услови за доказивање сличности троуглова дати су у четири става. Два троугла су слична ако и само ако су:

– два угла једног троугла једнака са два одговарајућа угла другог (нпр. $\alpha = \alpha_1$ и $\beta = \beta_1$).

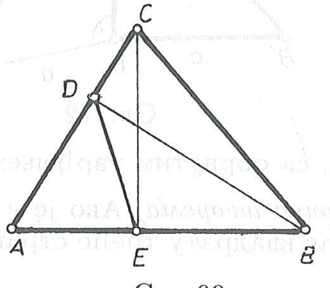
– све странице ових троуглова пропорционалне ($a:b:c = a_1:b_1:c_1$, односно $a:a_1 = b:b_1 = c:c_1 = k$).

– две странице једног троугла пропорционалне одговарајућим страницама другог, а углови захваћеним овим страницама једнаки (нпр. $b:c = b_1:c_1$ и $\alpha = \alpha_1$).

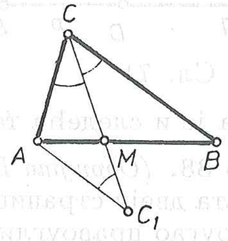
– две странице једног троугла пропорционалне одговарајућим страницама другог, углови наспрам једног пара одговарајућих страница су једнаки, а наспрам другог пара одговарајућих страница су оба угла оштра, или оба права, или оба тупа.

Пример 85. У троуглу ABC дужи BD и CE су висине. Доказати да је $\measuredangle ADE = \measuredangle ABC$.

Решење. Правоугли троуглови ABD и ACE су слични, јер поред правих углова имају и заједнички угао α, сл. 69. Због тога је $AB : AC = AD : AE$. Али сада троуглови ABC и ADE имају пропорционалне странице које захватају заједнички угао α, па су и они слични: $\triangle ABC \sim \triangle ADE$. Због тога је $\measuredangle ABC = \measuredangle ADE$. ♠



Сл. 69



Сл. 70

Напомена. Из сличности троуглова ABD и ACE на сл. 69 можемо закључити такође да је $AB : AC = BD : CE$, тј. $c : b = h_b : h_c$, а то значи да су у троуглу *две странице обрнуто пропорционалне одговарајућим висинама.*

Пример 86. *(Теорема о симетрали унутрашњег угла троугла.)* Тачка M странице AB троугла ABC припада симетрали унутрашњег угла ACB ако и само ако је $AM : MB = AC : CB$, (тј. $AM : MB = b : a$).

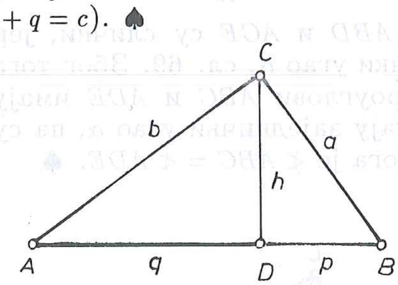
Доказ. Нека је права CM симетрала угла ACB и C_1 тачка симетрале, таква да је $AC_1 \parallel BC$, сл. 70. Према Талесовој теореми је $AM : MB = AC_1 : BC$. Међутим $\sphericalangle AC_1C = \sphericalangle BCC_1$ (наизменични углови), па је $\sphericalangle AC_1C = \sphericalangle ACC_1 = \frac{1}{2} \sphericalangle ACB$. Дакле, троугао ACC_1 је једнакокрак, $AC_1 = AC$, па је $AM : MB = AC : CB$.

Обрнуто, ако важи дата пропорција, тада је AM симетрала угла ACB, што треба доказати. Ми ћемо тај доказ изоставити. ♠

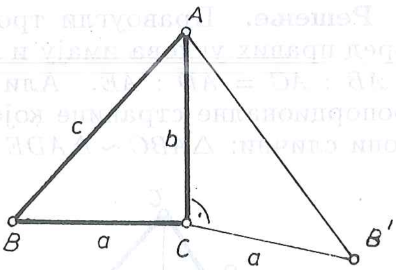
Применом сличности на правоугле троуглове доказаћемо познату теорему о односу катета и хипотенузе правоуглог троугла.

Пример 87. *(Питагорина теорема).* Ако је ABC правоугли трогао са правим углом ACB, тада је $BC^2 + AC^2 = AB^2$, односно $a^2 + b^2 = c^2$.*)

Доказ. Означимо са $p = BD$ и $q = AD$ одсечке које на хипотенузи гради висина CD, сл. 71. Правоугли троугао BCD је сличан датом троуглу BAC (имају заједнички оштар угао β), па је $a : p = c : a$, одакле је $a^2 = cp$. Слично, из троуглова ACD и ABC добијамо: $b^2 = cq$, па имамо: $a^2 + b^2 = cp + cq = c(p+q) = c^2$ (јер је $p + q = c$). ♠



Сл. 71



Сл. 72

Значајна је и следећа теорема, са обрнутим тврђењем.

Пример 88. *(Обрнута Питагорина теорема)* Ако је у троуглу збир квадрата двеју страница једнак квадрату треће странице, онда је тај троугао правоугли.

Доказ. Нека у троуглу ABC на сл. 72 важи: $a^2 + b^2 = c^2$. Одредимо тачку B', такву да је $BC = B'C$ и $\sphericalangle ACB' = 90^o$. Према

*) Честа је следећа формулација Питагорине теореме: *Квадрат хипотенузе* (правоуглог троугла) *једнак је збиру квадрата катета.*

Питагориној теореми, за троугао ACB' важи: $AC^2 + B'C^2 = AB'^2$, односно $b^2+a^2 = d^2$, где смо са d означили страницу AB'. Међутим, како је по претпоставци $a^2+b^2 = c^2$, следи да је $d^2 = c^2$, односно $d = c$. Због тога је $\triangle ABC \cong AB'C$ (по ставу ССС) па је $\sphericalangle BCA = \sphericalangle B'CA = 90^o$ (по конструкцији). Дакле, ABC је правоугли троугао. ♠

Често се ова теорема погрешно користи. Заправо, многи је поистовећују са Питагорионом теоремом. Нпр. неко изведе овакав закључак: "Како је $BC^2 + AC^2 = AB^2$, *на основу Питагорине теореме*, следи да је троугао ABC правоугли". Ово је погрешан закључак. Наиме, наведено тврђење следи *на основу обрнуте Питагорине теореме.*

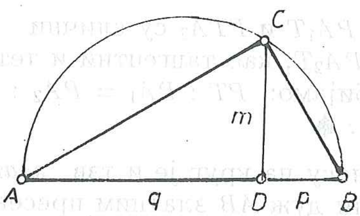
Пример 89. Дате су дужи p и q. Конструисати дуж m, која је геометријска средина датих дужи.

Решење. *Анализа.* Тражи се дуж m, таква да је $m^2 = pq$, односно да је $m : p = q : m$.

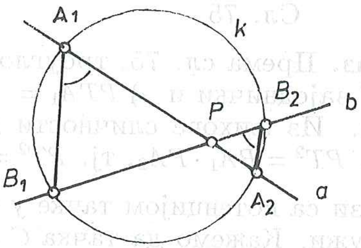
Уочимо на сл. 71 троуглове BCD и CAD. Они су слични, према доказу Питагорине теореме, и отуда закључујемо да је $CD : BD = AD : CD$, тј. $h_c : p = q : h_c$. Дакле, h_c је геометријска средина дужи p и q. То ћемо искористити за тражену конструкцију.

Конструишемо колинеарне тачке A, D, B, тим редом, тако да је $AD = q$ и $DB = p$. Затим конструишемо полукруг пречника AB, сл. 73. Нормала праве AB у тачки D сече полукруг у тачки C, тако да је $m = CD$ тражена дуж.

Како је угао ACB прав (периферијски угао над пречником), *доказ* конструкције следи из анализе. ♠



Сл. 73



Сл. 74

Због веза између периферијских, централних и тангентних углова, сличност има велику примену код круга.

Уочимо сечице a и b круга k на сл. 74, које се секу у P. Дуж којој је један крај тачка P, а други крај пресечна тачка сечице и круга, назваћемо *одсечком сечице на кругу.* Тако сечице a и b одређују одсечке PA_1, PA_2, PB_1 и PB_2. Троуглови PA_1B_1 и PB_2A_2 на сл. 74 су слични, јер $\sphericalangle A_1PB_1 = \sphericalangle B_2PA_2$ (унакрсни) и $\sphericalangle B_1A_1P = \sphericalangle A_2B_2P$ (над истим луком), па је $PA_1 : PB_1 = PB_2 : PA_2$, одакле је $PA_1 \cdot PA_2 = PB_1 \cdot PB_2$.

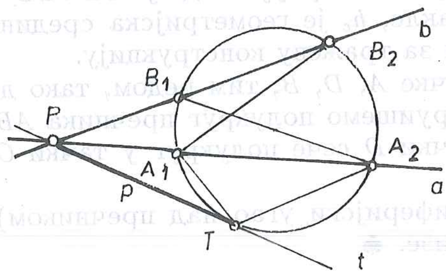
Слично, ако је тачка P ван круга, из сличности троуглова A_1B_2P и B_1A_2P, добијамо исти закључак: $PA_1 \cdot PA_2 = PB_1 \cdot PB_2$, сл. 75.

Ако је тачка P на кругу, тада је $A_1 = B_1 = P$, па су ова два производа једнака нули. Отуда извлачимо важан закључак:

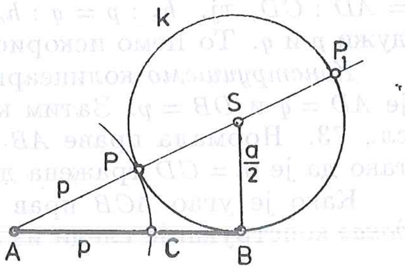
Ако је k дати круг и P дата тачка у истој равни, тада производ одсечака било које сечице датог круга повучене из тачке P, има сталну вредност. Ту вредност називамо **потенцијом тачке** *P у односу на круг k у ознаци p^2:*

$$p^2 = PA_1 \cdot PA_2$$

Пример 90. *(Теорема о потенцији тачке)* Ако је тачка P ван круга k, у равни тог круга, тада је потенција ове тачке у односу на круг k једнака квадрату одговарајуће тангентне дужи.



Сл. 75



Сл. 76

Доказ. Према сл. 75, троуглови PA_1T и PTA_2 су слични ($\sphericalangle A_1PT$ заједнички и $\sphericalangle PTA_1 = \sphericalangle PA_2T$, као тангентни и тетивни угао). Из њихове сличности добијамо: $PT : PA_1 = PA_2 : PT$, односно: $PT^2 = PA_1 \cdot PA_2$, тј. $PT^2 = p^2$. ♠

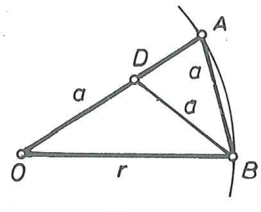
У вези са потенцијом тачке у односу на круг је и тзв. *златни пресек* дужи. Кажемо да тачка C дели дуж AB златним пресеком, ако је $AC : AB = BC : AC$, или ако уведемо ознаке: $AB = a$, $AC = p$, тада је $p : a = (a - p) : p$. На сл. 76 је приказана конструкција тачке C за дату дуж $AB = a$. Прво се конструише нормала $BS = \frac{a}{2}$, затим круг $k(S, \frac{a}{2})$ и сечица AS. Тада је $AP = p = AC$. Доказ конструкције следи из последње теореме. Наиме, из $AB^2 = AP \cdot AP_1$, тј. из $a^2 = p(p+a)$, добијамо $p^2 = a^2 - pa$, односно $p^2 = a(a-p)$. Одавде добијамо пропорцију: $p : a = (a - p) : p$.

Антички архитекти су сматрали да правоугаони облици грађевина имају изузетан естетски изглед ако су им димензије одређене златним пресеком. Чак су веровали да је златни пресек божански дар и да грађевине које имају те особине имају посебан магични утицај на људе у њима. О златном пресеку се посебно водило рачуна при грађењу храмова.

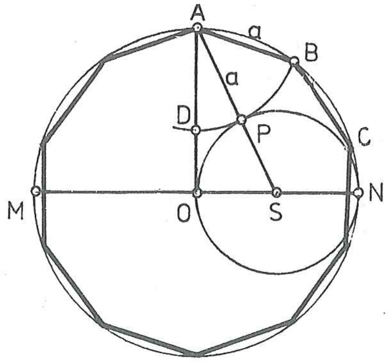
Златни пресек користимо при конструисању правилног десетоугла и правилног петоугла.

Пример 91. Конструисати правилни десетоугао (петоугао) уписан у дати круг k.

Решење. *Анализа.* Ако је AB страница правилног десетоугла уписаног у круг са центром O, тада је OAB једнакокраки троугао са углом код врха $\sphericalangle AOB = 36^o$ и угловима на основици по 72^o, сл. 77. Нека је D тачка полупречника OA, таква да је $\sphericalangle ABD = 36^o$. Тада су троуглови ABD и OBD једнакокраки и $AB = BD = OD = a$, а троугао ABD је сличан са AOB. Ако означимо $OA = OB = r$, имамо пропорцију: $AB : OB = AD : AB$, тј. $a : r = (r - a) : a$. Дакле, ако одредимо тачку D, тако да она полупречник OA дели златним пресеком, већи одсечак (на сл. 77 то је OD) једнак је страници траженог десетоугла.



Сл. 77



Сл. 78

Конструкција. Нека је MN пречник и OA полупречник датог круга, тако да је $OA \perp MN$, сл. 78. Поделимо полупречник OA златним пресеком. (Тачку D на сл. 78 смо добили конструкцијом као на сл. 76). Тада је дуж $AB = AD$ страница правилног десетоугла.

За конструкцију правилног петоугла, одредимо AB као у предходном случају, затим $BC = AB$. Страница правилног петоугла је тетива AC. ♠

Дајемо још неколико задатака за вежбање.

ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

56. У дати полукруг уписати квадрат, тако да два темена квадрата припадају пречнику, а друга два кружном луку.

57. Дат је круг k и тачка P ван круга. Конструисати сечицу p датог круга, $P \in p$, тако да је добијена тетива два пута већа од одсечка праве p између тачке P и датог круга.

58. Симетрала правог угла у троуглу ABC дели хипотенузу AB у односу $m : n$. Доказати да хипотенузина висина дели хипотенузу овог троугла у односу $m^2 : n^2$.

59. Доказати да су тежишне линије правоуглог троугла везане релацијом $t_a^2 + t_b^2 = 5t_c^2$, где је C теме правог угла.

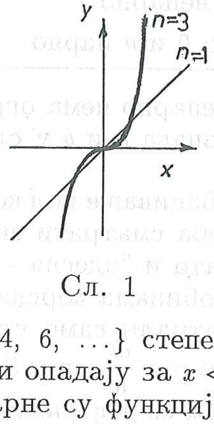
60. Дат је круг $k(S,\ r)$ и тачка P ван њега. На дужи PS конструисати тачку Q, такву да је дуж PQ једнака тангентној дужи конструисаној из тачке Q на круг k.

ДРУГА ГЛАВА

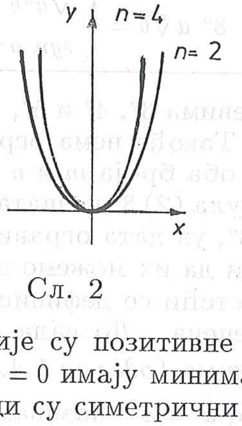
У овој глави ћемо најпре допунити сазнања о реалним бројевима, чиме ћемо проширити неке теме из ПРВЕ ГЛАВЕ. Стога ћемо се подсетити на степену функцију облика $y = x^n$, $n \in N$. Затим ћемо се упознати са коренима. После упознавања са комплексним бројевима, обрадићемо квадратне једначине, функције и неједначине, затим ирационалне, експоненцијалне и логаритамске једначине и неједначине. После тригонометријских функција, једначина и неједначина и инверзних тригонометријских функција, обрадићемо тригонометријски облик комплексног броја (тема из програма *III* разреда).

Што се тиче степене функције $y = x^n$, $n \in N$, користећи се графицима за непарно n, сл. 1, и за парно n, сл. 2, само ћемо набројати основне особине. Нећемо се упуштати у доказивања и анализирање последица.

За $n \in \{1, 3, 5, \ldots\}$ степене функције представљају пресликавање *један – један* у скупу R. То су непарне (графици симетрични у односу на координатни почетак), растуће функције, позитивне за $x > 0$, негативне за $x < 0$, сл. 1.



Сл. 1



Сл. 2

За $n \in \{2, 4, 6, \ldots\}$ степене функције су позитивне за $x \neq 0$. Расту за $x > 0$ и опадају за $x < 0$, а за $x = 0$ имају минималну вредност $y = 0$. Парне су функције (графици су симетрични у односу на y-осу), сл. 2.

2.1 КОРЕНИ

Под n-тим кореном из a подразумевамо реалан број $\sqrt[n]{a}$, $n \in N$, такав да важе следеће једнакости:

$$(1) \quad \boxed{\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a, \text{ за } n = 2k - 1 \text{ и } a \in R} \qquad \boxed{\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a, \text{ за } n = 2k \text{ и } a \geq 0}$$

На пример: $\sqrt[3]{64} = 4$, $\sqrt[5]{-243} = -3$, $\sqrt[4]{16} = 2$ и важи: $4^3 = 64$, $(-3)^5 = -243$, $2^4 = 16$. Ако је $n = 2$, изложилац корена не пишемо. Нпр. $\sqrt{441} = 21$, јер је $21^2 = 441$.

Може се доказати да под условима (1) $\sqrt[n]{a}$ постоји и јединствен је. Наводимо без доказа основна својства корена са природним изложиоцем n, за реалне бројеве a и b.

(2)

1^o $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$, ако је n непаран или $a \geq 0$

2^o $\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a & \text{, ако је } n \text{ непаран} \\ |a| & \text{, ако је } n \text{ паран} \end{cases}$

(специјално: $\sqrt{a^2} = |a|$)

3^o $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$, за $a \geq 0$ и $b \geq 0$

4^o $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, за $a \geq 0$ и $b > 0$

5^o $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$, за $a \geq 0$ и $m \in N$

6^o $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$, $a \geq 0$ и $m \in N$

7^o $\sqrt[n]{a} = \sqrt[mn]{a^m}$, $a \geq 0$ и $m \in N$

8^o $a\sqrt[n]{b} = \begin{cases} \sqrt[n]{a^n b} & \text{, } n \text{ непарно} \\ sgn\ a \sqrt[n]{a^n b} & \text{, } b > 0 \text{ и } n \text{ парно} \end{cases}$

У случајевима 3^o, 4^o и 5^o, ако је n непарно нема ограничења знака за a и b. Такође нема ограничења знака a и b у случајевима 6^o и 7^o ако су оба броја m и n непарна.

Формула (2) 8^o позната је као "убацивање под корен". Формуле (2), 3^o - 8^o, уз дата ограничења, треба сматрати еквиваленцијама, што значи да их можемо примењивати и "здесна - налево ".

Користећи се дефиницијом и особинама корена, проширићемо појам степена. До сада смо разматрали само степене са целим изложиоцима (*одељак* 1.4.). Нека је $r = \dfrac{m}{n}$, $m \in Z$, $n \in N$ и $a > 0$. Тада број $a^r = a^{\frac{m}{n}}$ називамо *степеном са рационалним изложиоцем* и дефинишемо као

$$\boxed{a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m},\ a > 0} \qquad (3)$$

Ако су m и n узајамно прости бројеви и $n = 2k - 1$, тада нема ограничења знака за број a.

На степене са рационалним изложиоцима примењујемо све формуле наведене овде и у *одељку* 1.4.

Корени су најчешће ирационални бројеви, па често отежавају израчунавање вредности појединих израза. Стога са често указује потреба да се неки корен "премести" на место које нам више одговара. На пример, често примењујемо поступак премештања корена из имениоца у бројилац разломка (вршимо *рационалисање имениоца*). Од облика имениоца зависи какав ћемо поступак применити. То ћемо видети у следећем задатку.

Пример 1. Рационалисати имениоце следећих разломака:

а) $\dfrac{2}{3\sqrt{6}}$; *б)* $\dfrac{x}{\sqrt[3]{2x^2}},\ x \neq 0$; *в)* $\dfrac{6}{3-\sqrt{5}}$; *г)* $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}-\sqrt{2}}$; *д)* $\dfrac{1}{2-\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

ђ) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}$; *е)* $\dfrac{a^2-1}{\sqrt[3]{a}+1},\ a \neq -1$.

Решење. *а)* Проширимо разломак са $\sqrt{6}$ и добијамо:

$$\frac{2}{3\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{3\cdot 6} = \frac{\sqrt{6}}{9}.$$

б) Слично претходном: $\dfrac{x}{\sqrt[3]{2x^2}} \cdot \dfrac{\sqrt[3]{4x}}{\sqrt[3]{4x}} = \dfrac{x\sqrt[3]{4x}}{2x} = \dfrac{\sqrt[3]{4x}}{2}.$

в) Користимо правило разлике квадрата: $\dfrac{6}{3-\sqrt{5}} \cdot \dfrac{3+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} =$

$$= \frac{6(3+\sqrt{5})}{9-5} = \frac{3(3+\sqrt{5})}{2}.$$

г) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}-\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{2}{4-2} = 1.$

д) Користимо разлику квадрата: $\dfrac{1}{2-\sqrt{2}+\sqrt{3}} \cdot \dfrac{(2-\sqrt{2})-\sqrt{3}}{(2-\sqrt{2})-\sqrt{3}} =$

$$= \frac{2-\sqrt{2}-\sqrt{3}}{(2-\sqrt{2})^2-3} = \frac{2-\sqrt{2}-\sqrt{3}}{3-4\sqrt{2}} = \frac{(2-\sqrt{2}-\sqrt{3})(3+4\sqrt{2})}{(3-4\sqrt{2})(3+4\sqrt{2})} =$$

$$= \frac{-2+5\sqrt{2}-3\sqrt{3}-4\sqrt{6}}{-23}.$$

ђ) Користимо разлику кубова: $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}} \cdot \dfrac{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}} =$

$$= \frac{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}{3-2} = \sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}.$$

е) Слично претходном: $\dfrac{a^2-1}{\sqrt[3]{a}+1}\cdot\dfrac{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{a}+1}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{a}+1}=$
$=\dfrac{(a-1)(a+1)(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{a}+1)}{a+1}=(a-1)(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a}+1).$ ♠

У наредним задацима користићемо формуле (1), (2) и (3).

Пример 2. Шта је веће: *а)* $\sqrt{2}$ или $\sqrt[3]{3}$; *б)* $3\sqrt{5}$ или $5\sqrt{3}$; *в)* $\sqrt{2+\sqrt{2}}$ или $\sqrt[3]{3+\sqrt{3}}$?

Решење. *а)* Према особини (2) 7^o је $\sqrt{2}=\sqrt[6]{2^3}=\sqrt[6]{8}$, а $\sqrt[3]{3}$ је $\sqrt[6]{3^2}=\sqrt[6]{9}$, па је $\sqrt[3]{3}>\sqrt{2}$.
б) $(3\sqrt{5})^2=9\cdot5=45$, а $(5\sqrt{3})^2=25\cdot3=75$, па је $5\sqrt{3}>3\sqrt{5}$.

в) $\sqrt{2+\sqrt{2}}=\sqrt[6]{(2+\sqrt{2})^3}=\sqrt[6]{20+14\sqrt{2}}>\sqrt[6]{30}$, а $\sqrt[3]{3+\sqrt{3}}=$
$=\sqrt[6]{(3+\sqrt{3})^2}=\sqrt[6]{12+6\sqrt{3}}<\sqrt[6]{30}$, па је $\sqrt{2+\sqrt{2}}>\sqrt[3]{3+\sqrt{3}}$. ♠

Пример 3. Израчунати: *а)* $\sqrt{12}+3\sqrt{75}-2\sqrt{48}-5\sqrt{3}$;
б) $\sqrt{17-4\sqrt{9+4\sqrt{5}}}$; *в)* $(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-2)\sqrt{\sqrt{3}+2}$;
г) $\sqrt{8-2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}-\sqrt{8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$,
односно, упростити дате изразе.

Решење. *а)* $\sqrt{4\cdot3}+3\sqrt{25\cdot3}-2\sqrt{16\cdot3}-5\sqrt{3}=2\sqrt{3}+15\sqrt{3}-8\sqrt{3}-5\sqrt{3}=$
$=4\sqrt{3}$.

б) $\sqrt{17-4\sqrt{4+4\sqrt{5}+5}}=\sqrt{17-4\sqrt{(2+\sqrt{5})^2}}=\sqrt{17-4(2+\sqrt{5})}=$
$=\sqrt{9-4\sqrt{5}}=\sqrt{4-4\sqrt{5}+5}=\sqrt{(2-\sqrt{5})^2}=\sqrt{5}-2.$

в) $(\sqrt{6}+\sqrt{2})\cdot(-1)\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}\cdot\sqrt{\sqrt{3}+2}=$
$=-(\sqrt{6}+\sqrt{2})\sqrt{2-\sqrt{3}}\cdot\sqrt{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}=-\sqrt{(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2}\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}}\cdot1=$
$=-\sqrt{8+4\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}}=-\sqrt{4(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}=-2.$

г) Нека је $A=\sqrt{8-2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}-\sqrt{8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}<0$. Тада је $A^2=$
$=8-2\sqrt{10+2\sqrt{5}}-2\sqrt{(8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}})(8-2\sqrt{10+2\sqrt{5}})}+8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}=$
$=16-2\sqrt{64-4(10+2\sqrt{5})}=16-2\sqrt{4(6-2\sqrt{5})}=16-4\sqrt{5-2\sqrt{5}+1}=$
$=16-4\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}=16-4(\sqrt{5}-1)=20-4\sqrt{5}$, па је $A=-\sqrt{20-4\sqrt{5}}$. ♠

Пример 4. Упростити изразе: *а)* $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}-\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$, $x\geq1$; *б)* $\sqrt[4]{x^{-1}-x^{-3}}\cdot\sqrt{\dfrac{x^2}{1-x^{-2}}}\cdot\sqrt[4]{x-x^{-1}}$, $x>1$;

в) $\left(\dfrac{\left(a^{\frac{3}{2}}-\sqrt{8}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{2}\right)}{a+\sqrt{2a}+2}\right)^2+\sqrt{(a^2+4)^2-16a^2},\ a>0.$

Решење. *а)* $\sqrt{x-1+2\sqrt{x-1}+1}-\sqrt{x-1-2\sqrt{x-1}+1}=$ $=\sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2}-\sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2}=\sqrt{x-1}+1-\mid\sqrt{x-1}-1\mid$. За $x\geq 2$ имамо: $\sqrt{x-1}+1-\sqrt{x-1}+1=2$ и за $1\leq x<2$ биће: $\sqrt{x-1}+1+$ $+\sqrt{x-1}-1=2\sqrt{x-1}$.

б) $\sqrt[4]{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^3}}\cdot\sqrt{\dfrac{x^2}{1-\dfrac{1}{x^2}}}\cdot\sqrt[4]{x-\dfrac{1}{x}}=\sqrt[4]{\dfrac{x^2-1}{x^3}\cdot\dfrac{x^8}{(x^2-1)^2}\cdot\dfrac{x^2-1}{x}}=x.$

в) $\left(\dfrac{((\sqrt{a})^3-(\sqrt{2})^3)\left(\sqrt{a}+\sqrt{2}\right)}{a+\sqrt{2a}+2}\right)^2+\sqrt{a^4-8a^2+16}=$

$$=\left(\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{2})(a+\sqrt{2a}+2)(\sqrt{a}+\sqrt{2})}{a+\sqrt{2a}+2}\right)^2+\sqrt{(a^2-4)^2}=(a-2)^2+\mid a^2-4\mid=$$

$$=\begin{cases}2a^2-4a & ,\ \text{за } a\geq 2\\ 8-4a & ,\ \text{за } 0<a\leq 2\end{cases}.\ \spadesuit$$

Пример 5. Израчунати дате изразе за дате вредности променљивих:

а) $\dfrac{2\sqrt{c-d}}{c^2\sqrt{2c}}\left(\sqrt{\dfrac{c-d}{c+d}}+\sqrt{\dfrac{c^2+cd}{c^2-cd}}\right)$, за $c=8,\ d=1$.

б) $\dfrac{\sqrt{z^2-1}}{\sqrt{z^2-1}-z},\ z=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{m}+\dfrac{1}{\sqrt{m}}\right),\ m>0.$

в) $\dfrac{(x+1)^{-\frac{1}{2}}}{(x-1)^{-\frac{1}{2}}-(x+1)^{-\frac{1}{2}}}$, за $x=\dfrac{a^2+1}{2a},\ a>0.$

Решење. *а)* $\dfrac{2\sqrt{c-d}}{c^2\sqrt{2c}}\cdot\dfrac{c-d+c+d}{\sqrt{(c+d)(c-d)}}=\dfrac{4}{c\sqrt{2c}\sqrt{c+d}}=\dfrac{1}{24}.$

б) Према неједнакости из *примера* 41, *одељак* 1.8, $z\geq 1$. Сређивањем израза за z добијамо: $z=\dfrac{m+1}{2\sqrt{m}}$, а $z^2-1=\dfrac{(m+1)^2}{4m}-1=\dfrac{(m-1)^2}{4m}$. Дати израз, после рационалисања постаје: $-\sqrt{z^2-1}(\sqrt{z^2-1}+z)=$

$$=-\sqrt{\frac{(m-1)^2}{4m}}\left(\sqrt{\frac{(m-1)^2}{4m}}+\frac{m+1}{2\sqrt{m}}\right)=-\frac{\mid m-1\mid}{2\sqrt{m}}\left(\frac{\mid m-1\mid}{2\sqrt{m}}+\frac{m+1}{2\sqrt{m}}\right)=$$

$$=\frac{-\mid m-1\mid(\mid m-1\mid+m+1)}{4m}=\begin{cases}\dfrac{m-1}{2m} & ,\ \text{за } 0<m\leq 1\\[2mm] \dfrac{1-m}{2} & ,\ \text{за } m\geq 1\end{cases}$$

в) Према Кошијевој неједнакости (*одељак* 1.8) је $x \geq 1$. Даље је $x+1=\dfrac{a^2+1}{2a}+1=\dfrac{a^2+1+2a}{2a}=\dfrac{(a+1)^2}{2a}$ и $x-1=\dfrac{(a-1)^2}{2a}$. Дати израз трансформишемо: $\dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}}{\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}-\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}}=\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}=$

$$=\frac{\dfrac{|\,a-1\,|}{\sqrt{2a}}}{\dfrac{a+1-|\,a-1\,|}{\sqrt{2a}}}=\frac{|\,a-1\,|}{a+1-|\,a-1\,|}=\begin{cases}\dfrac{1-a}{2a}, & \text{за } 0<a<1\\[2mm] \dfrac{a-1}{2}, & \text{за } a\geq 1\end{cases}.\ \spadesuit$$

ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

61. Израчунати: *а)* $(2\sqrt{150}-3\sqrt{54}+\sqrt{96})\cdot\sqrt{2}$;
б) $\dfrac{\sqrt{7-4\sqrt{3}}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}}$; *в)* $\sqrt{3-\sqrt{5}}(3+\sqrt{5})(\sqrt{10}-\sqrt{2})$;
г) $\sqrt{4+\sqrt{4+2\sqrt{3}}+\sqrt{4-2\sqrt{3}}}$ *д)* $(4+\sqrt{15})(\sqrt{10}-\sqrt{6})\sqrt{4-\sqrt{15}}$.

62. Упростити изразе: *а)* $\sqrt{6-2\sqrt{5}}-\sqrt{6+2\sqrt{5}}$;
б) $\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{13+4\sqrt{3}}}}$; *в)* $\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}$;
г) $\dfrac{\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}\cdot(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{3}}$.

63. Упростити изразе:

а) $\left((1-x)\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}+1-x\right)\left(\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}-1\right)$, $-1\leq x<1$;

б) $\left(\dfrac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x-a}}+\dfrac{x-a}{\sqrt{x^2-a^2}-x+a}\right):\sqrt{\dfrac{x^2}{a^2}-1}$, $x>a>0$;

в) $1-\dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{a-1}}-\sqrt{a+1}}{\dfrac{1}{\sqrt{a+1}}-\dfrac{1}{\sqrt{a-1}}}:\dfrac{\sqrt{a+1}\cdot\sqrt{a^2-1}}{(a-1)\sqrt{a+1}-(a+1)\sqrt{a-1}}$, $a>1$.

64. Израчунати збир $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$.

65. Израчунати дате изразе за дате вредности променљивих:

а) $\dfrac{1+\sqrt{1+x}}{x+1}+\dfrac{1+\sqrt{1-x}}{x-1}$, за $x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

б) $\left(\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x-1}}+\sqrt[3]{\dfrac{x-1}{x+1}}-2\right)^{\frac{1}{2}}$, за $x=\dfrac{a^3+1}{a^3-1}$, $a>0$ и $a\neq 1$.

2.2 КОМПЛЕКСНИ БРОЈЕВИ

Скуп реалних бројева, у којем смо до сада решавали проблеме, није довољан да реши елементарну једначину другог степена. Наиме, полином $P(x)=x^2+1$ у скупу реалних бројева има увек позитивну вредност, $P(x)\geq 1$, па нема нула. Једначина $x^2+1=0$, односно $x^2=-1$, нема решења у скупу $\Re$, јер за сваки реалан број x важи $x^2\geq 0$. Слично, једначина $x^2+4=0$ даје $x^2=-4$, односно $x^2=2^2\cdot(-1)$. Дакле, за решавање једначина облика $x^2+a^2=0$, односно $x^2=a^2\cdot(-1)$, неопходан је број чији је квадрат једнак -1. Такав број не постоји у скупу реалних бројева, па његово увођење доводи до неопходног проширивања скупа реалних бројева. Проширење које уводимо садржаће скуп $\Re$ као подскуп, а структуре скупа $\Re$ неће се мењати.

Нека су x и y реални бројеви. Симболом i означићемо број који има особину да је $i^2=-1$. Дакле $i\notin\Re$. Изразе облика $x+iy$ означићемо са z и даћемо им следеће особине:

Нека је $z_1=x_1+iy_1$ и $z_2=x_2+iy_2$. Тада:

$$\begin{aligned} z_1=z_2 &\Leftrightarrow (x_1=x_2)\wedge(y_1=y_2)\\ z_1+z_2&=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2) \qquad (4)\\ z_1\cdot z_2&=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1)\end{aligned}$$

Није тешко уверити се да овако уведени изрази за случај $y=0$, тј. изрази $x+i\cdot 0$, имају све особине реалних бројева. Између израза $z=x+iy$ и уређених парова $(x,\ y)$ може се успоставити обострано једнозначно пресликавање, уз поштовање особина (4):

$(x,\ y)\in\Re\times\Re\wedge(x,\ y)\longleftrightarrow(x+iy)$, тако да:

$$\begin{aligned} (x_1,\ y_1)=(x_2,\ y_2)&\Leftrightarrow(x_1=x_2\wedge y_1=y_2)\\ (x_1,\ y_1)+(x_2,\ y_2)&=(x_1+x_2,\ y_1+y_2) \qquad (4')\\ (x_1,\ y_1)\cdot(x_2,\ y_2)&=(x_1x_2-y_1y_2,\ x_1y_2+x_2y_1)\end{aligned}$$

Уређени парови $(x,\ 0)$ имају такве особине да се могу идентификовати са реалним бројевима x. Слично, изразе $z=iy$, којима одговарају парови $(0,\ y)$, назваћемо *имагинарним бројевима.* Број $(0,\ 1)$ има особину да је $(0,\ 1)\cdot(0,\ 1)=(-1,\ 0)$, па га називамо *имагинарном јединицом* $(i^2=-1)$.

За изразе облика $z=x+iy$ уводимо назив *комплексни бројеви.* Према интерпретацији $(4')$ можемо рећи да скуп C комплексних бројева представља $C=\Re\times\Re$. Ако скуп имагинарних бројева означимо са $\Im$, тада важе релације: $(\Re \cup \Im) \subset C$ и $\Re \cap \Im = \{(0,\ 0)\}$. Пар $(0,\ 0)$ се идентификује са бројем 0.

За комплексан број $z = x + iy$ уводимо ознаке $x = Re\ z$ (или $x = Re\{z\}$) и $y = Im\ z$ (или $y = Im\{z\}$). Број x називамо *реалним делом*, а y *имагинарним делом* комплексног броја z.

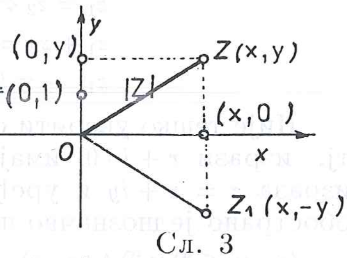
За овако уведен скуп C, и операције $+$ и $\cdot$, уређена тројка $(C,\ +,\ \cdot)$ *има структуру поља*, тј. $(C,\ +)$ и $(C \backslash \{(0,\ 0)\},\ \cdot)$ су комутативне групе и важе дистрибутивни закони: $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$ и $(z_2 + z_3) \cdot z_1 = z_2 \cdot z_1 + z_3 \cdot z_1$. Неутрални елемент за сабирање је $(0,\ 0)$, а за множење $(1,\ 0)$. Супротни елемент за $(x,\ y)$ је $(-x,\ -y)$, а инверзни елемент за $(x,\ y) \neq (0,\ 0)$ је $\left(\dfrac{x}{x^2 + y^2}, -\dfrac{y}{x^2 + y^2}\right)$.

За комплексан број $z = x + iy$ (или $z = (x,\ y)$) са $\mid z \mid$ означавамо тзв. *модуо* и израчунавамо га са:

$$\boxed{\mid z \mid = \sqrt{x^2 + y^2}} \tag{5}$$

За број $z = x + iy$ уводимо $\overline{z} = x - iy$. Бројеве z и $\overline{z}$ називаћемо *паром конјуговано комплексних бројева* (имају једнаке реалне и супротне имагинарне делове). Иначе, израз $z = x + iy$ називамо *алгебарским обликом* комплексног броја.

Сваком пару $z = (x,\ y)$ одговара тачно једна тачка $Z(x,\ y)$ у координатној равни, сл. 3. Реалним бројевима одговарају тачке на x–оси (реална оса), а имагинарним бројевима тачке на y– оси (имагинарна оса). То је геометријска интерпретација комплексних бројева , а координатна раван на коју пресликавамо скуп C назива се *комплексна раван*.



Сл. 3

У овој интерпретацији $\mid z \mid$ је дужина дужи OZ. Бројевима z и $\overline{z}$ одговарају тачке Z и Z_1 симетричне у односу на осу Ox.

Размотримо пажљивије операције $+$ и $\cdot$ у скупу C. Ако водимо рачуна о чињеници да је по дефиницији $i^2 = -1$, тада сабирање и множење комплексних бројева, датих у алгебарском облику, вршимо по правилима за сређивање полинома. (Одузимање дефинишемо са $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$.)

Пример 6. Ако је $z = x + iy$, израчунати $z + \overline{z}$, $z - \overline{z}$ и $z \cdot \overline{z}$.

Решење. $z + \overline{z} = x + iy + x - iy = 2x = 2Re\ z$.

$z - \overline{z} = x + iy - (x - iy) = 2iy = 2iIm\ z$.

$z \cdot \overline{z} = (x + iy) \cdot (x - iy) = x^2 - i^2y^2 = x^2 - (-1)y^2 = x^2 + y^2 = \mid z \mid^2$. ♠

Из овог примера закључујемо да је, нпр. $Re\ z = \frac{1}{2}(z+\overline{z})$, а $Im\ z = \frac{1}{2i}(z-\overline{z}) = \frac{i}{2i^2}(z-\overline{z}) = -\frac{i}{2}(z-\overline{z})$.

Последњи пример нас упућује на неопходност проучавања двеју чињеница:

- како објаснити израз $\frac{z_1}{z_2}$, и

- испитати степене имагинарне јединице i.

Питање *количника комплексних бројева* решићемо *рационалисањем имениоца*, користећи резултат из *примера* 6: $z\cdot\overline{z} = x^2+y^2$.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2} = \frac{(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)}{(x_2+iy_2)(x_2-iy_2)} = \frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2} + i\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}.$$

Што се тиче степена имагинарне јединице, лако је закључити да се вредност i^n, $n\in N$, периодично понавља: $i^1=i$, $i^2=-1$, $i^3=i^2\cdot i=-i$, $i^4=i^2\cdot i^2=1$, $i^5=i^4\cdot i$, итд. Даље, по дефиницији је $i^0=1$, затим $i^{-1}=\frac{1}{i}=\frac{i}{i^2}=-i$, $i^{-2}=\frac{1}{i^2}=-1$, итд. Можемо закључити:

$$\boxed{i^{4k+n}=i^n,\quad k\in Z,\ n\in N.} \tag{6}$$

Пример 7. Упростити израз:

а) $\frac{(1+i)^3}{(2-3i)^2}\cdot\left(\frac{3-i}{2+i}-\frac{2-i}{3+i}\right)$; *б)* $(1+i\sqrt{3})^{15}$.

Решење. *а)* $(1+i)^2 = 1+2i+i^2 = 1+2i-1 = 2i$, па је $(1+i)^3 = (1+i)^2\cdot(1+i) = 2i(1+i) = 2i+2i^2 = 2i-2$. Тако добијамо:

$$\frac{2i-2}{4-12i+9i^2}\left(\frac{(3-i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}-\frac{(2-i)(3-i)}{(3+i)(3-i)}\right) = \frac{2(i-1)}{-5-12i}\left(\frac{5-5i}{5}-\frac{5-5i}{10}\right) =$$

$$= \frac{2(i-1)(-5+12i)}{(-5-12i)(-5+12i)}\cdot\frac{1-i}{2} = \frac{(-5+12i)\cdot 2i}{169} = -\frac{24}{169}-\frac{10}{169}i.$$

б) $(1+i\sqrt{3})^2 = 1+2i\sqrt{3}+3i^2 = -2+2i\sqrt{3} = -2(1-i\sqrt{3})$. Затим $(1+i\sqrt{3})^3 = (1+i\sqrt{3})^2(1+i\sqrt{3}) = -2(1-i\sqrt{3})(1+i\sqrt{3}) = -2\cdot(1+3) = -8$. Због тога је $(1+i\sqrt{3})^{15} = \left((1+i\sqrt{3})^3\right)^5 = -8^5 = -32768$. ♠

Пример 8. Одредити комплексан број z, $z=x+iy$, из услова:

а) $(2+3i)\cdot\overline{z} = 11-16i$; *б)* $z+|\,z\,| = 2+i$.

Решење. *а)* Стављајући $\overline{z}=x-iy$ и користећи дефиницију једнакости комплексних бројева, имаћемо: $(2+3i)(x-iy)=11-16i$, одакле, после сређивања добијамо: $(2x+3y)+i(3x-2y) = 11-16i \Leftrightarrow 2x+3y=11 \wedge 3x-2y=-16$. Решавањем система линеарних једначина добијамо $(x,\ y)=(-2,\ 5)$. Тражени број је $z=-2+5i$.

б) $x+iy+\sqrt{x^2+y^2}=2+i \Leftrightarrow x+\sqrt{x^2+y^2}=2 \wedge y=1 \Rightarrow \sqrt{x^2+1}=$
$=2-x \wedge x<2 \Rightarrow x^2+1=4-4x+x^2 \Rightarrow x=\dfrac{3}{4}$.

Тражени број је $z=\dfrac{3}{4}+i$. ♠

Пример 9. Нека је $z=\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ и $P(x)=x^4-2x^3+3x^2-2x+1$. Израчунати $P(z)$.

Решење. Приметимо да је $z^2=\left(\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}+i^2\dfrac{3}{4}=$
$=-\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, па је $z^2-z=-1$, односно $z^2-z+1=0$. Дати полином трансформишемо: $P(z)=(z^4-z^3+z^2)-(z^3-z^2+z)+z^2-z+1=$
$=z^2(z^2-z+1)-z(z^2-z+1)+(z^2-z+1)=(z^2-z+1)^2=0$. ♠

Приметимо још да имагинарне бројеве добијамо у случају $\sqrt{a}$, за $a<0$.

ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

66. Израчунати: *а)* $\dfrac{5-2i}{1-i}$; *б)* $\dfrac{3-i}{(2-3i)^2}$; *в)* $\left(\dfrac{1-i}{2+2i}\right)^3$;
г) $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{208}$; *д)* $\left(\dfrac{5i}{1-2i}-\dfrac{1-3i}{1+i}\right)\cdot\dfrac{3+i}{2-i}$; *ђ)* $\dfrac{z}{\overline{z}}$.

67. Одредити комплексан број z, $z=x+iy$, из услова:
а) $\dfrac{z}{4-2i}=5-4i$; *б)* $3iz-z(1+i)-4i=0$; *в)* $z+2\overline{z}=3+2i$.

68. Израчунати $R(z)$ ако је:

а) $R(x)=(x-x^2+2x^3)(2-x+x^2)$ и $z=\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$;

б) $R(x)=1+x+x^2+\cdots+x^{19}$ и $z=\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$;

в) $R(x)=448\cdot\dfrac{(1-x+2x^2)^4}{(1+5x-x^2)^5}$ и $z=-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

2.3 КВАДРАТНЕ ЈЕДНАЧИНЕ С ЈЕДНОМ НЕПОЗНАТОМ

Једначина са једном непознатом, која је еквивалентна једначини облика:

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0 \quad , a \neq 0} \tag{7}$$

назива се квадратном једначином са једном непознатом. Ако је $b = 0$ или $c = 0$, једначина је *непотпуна*.

Ако је $b = 0$, то је тзв. чиста квадратна једначина. Решавамо је слично линеарним једначинама.

$$ax^2 + c = 0 \Leftrightarrow x^2 = -\frac{c}{a} \Leftrightarrow x = \sqrt{-\frac{c}{a}} \ \vee \ x = -\sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

Ако је $-\frac{c}{a} \geq 0$ решења су реална, а ако је $-\frac{c}{a} < 0$ решења су имагинарна.

Ако је $b \neq 0$ и $c = 0$, једначину решавамо на следећи начин:

$$ax^2 + bx = 0 \Leftrightarrow x(ax + b) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee ax + b = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -\frac{b}{a}.$$

Овде смо користили својство реалних бројева: $p \cdot q = 0 \Leftrightarrow p = 0 \vee q = 0$.

Ако су сви коефицијенти a, b, c различити од нуле, имамо посла са *потпуном квадратном једначином*. Наћићемо њена решења. Најпре ћемо је помножити са $4a$ (јер је $a \neq 0$):

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow 4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0 \Leftrightarrow 4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$$

$$\Leftrightarrow (2ax + b)^2 = b^2 - 4ac \Leftrightarrow 2ax + b = \sqrt{b^2 - 4ac} \ \vee \ 2ax + b = -\sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \ \vee \ x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ова решења кратко записујемо:

$$\boxed{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} \tag{8}$$

За b парно, $b = 2b_1$, једначина $ax^2 + 2b_1x + c = 0$ даје:

$$\boxed{x_{1,2} = \frac{-b_1 \pm \sqrt{b_1^2 - ac}}{a}} \tag{8'}$$

Пример 10. Решити једначине:

а) $\dfrac{x}{x+1} - \dfrac{9}{4} = \dfrac{x}{1-x}$; *б)* $(2x + 3)(x - 3) - x(5x + 7) + 9 = 0$;

в) $\dfrac{3x}{x-1} - \dfrac{2x}{x+2} = \dfrac{3x-6}{x^2+x-2}$; *г)* $\dfrac{2x-1}{x+2} = \dfrac{4x+3}{2x+1} - 2$;

д) $\dfrac{m+x}{m-x} - \dfrac{x-m}{x+m} = \dfrac{2mx}{m^2-x^2}$, $m \neq 0$.

Решење. *а)* После сређивања (за $x \neq \pm 1$), добијамо еквивалентну једначину: $x^2 - 9 = 0$, чија су решења $x_1 = 3$, $x_2 = -3$.

б) Једначина је еквивалентна са $-3x^2 - 10x = 0$, а њена решења су $x_1 = 0$, $x_2 = -\dfrac{10}{3}$.

в) Једначина нема смисла за $x = 1$ и за $x = -2$. Ако је $x \neq 1$ и $x \neq -2$, једначину помножимо са $(x-1)(x+2)$ и, после ослобађања од разломака и од заграда, добијамо једначину: $x^2 + 5x + 6 = 0$. Примењујући формулу (8) добијамо $x_1 = -2$, $x_2 = -3$. Међутим, како је $x \neq -2$, то је једино решење полазне једначине $x = -3$. (Она је еквивалентна линеарној једначини: $x + 3 = 0$.)

г) Решења су $x_1 = 1$, $x_2 = -\dfrac{3}{4}$.

д) Једначина има смисла за $x \neq \pm m$. Ослобађањем од разломака и сређивањем, долазимо до једначине: $x^2 - mx + m^2 = 0$. Применом формуле (8) добијамо:

$$x_{1,2} = \frac{m \pm \sqrt{-3m^2}}{2} = \frac{m}{2}\left(1 \pm i\sqrt{3}\right). \spadesuit$$

Решавајући последњи пример видели смо да решења квадратне једначине не морају бити реална. Очигледно је да о *природи решења* одлучује поткорена величина у формули (8). Ту величину називамо *дискриминантом* и означавамо је са D, $D = b^2 - 4ac$. Обзиром на познату чињеницу да је $\sqrt{D}$, за $D < 0$, имагинаран број, а за $D \geq 0$ реалан број, можемо закључити следеће:

Квадратна једначина $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, има:

- два реална различита решења, $x_1 \neq x_2$, за $D > 0$

- два конјуговано комплексна решења, $x_{1,2} = \alpha \pm \beta i$, за $D < 0$

- једно реално (двоструко) решење, $x_1 = x_2$, за $D = 0$. Тада је квадратна једначина еквивалентна линеарној једначини $2ax + b = 0$.

У последњем случају користимо особину реалних бројева: $a^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0$.

Ако у једначини имамо коефицијенте са реалним *параметрима*, тада је неопходно *дискутовати решења*, тј. утврдити за које вредности параметара дата једначина има два реална решења, једно (двоструко) реално решење или конјуговано комплексна решења.

Пример 11. Не решавајући једначине испитати природу решења: *а)* $-x^2 - 8x + 2 = 0$; *б)* $2x^2 - 5x \pm 3 = 0$; *в)* $x^2 + 2x + 5 = 0$; *г)* $4x^2 + 12x + 9 = 0$.

Решење. *а)* $D = (-8)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 2 = 64 + 8 = 72 > 0$, решења су реална и различита.

б) $D = 25 \pm 24 > 0$, решења су реална и различита.

в) $D = -16 < 0$, решења су конјуговано комплексни бројеви.

г) $D = 0$, једначина је еквивалентна линеарној једначини, тј. има једно (двоструко) решење. $\spadesuit$

Пример 12. Дискутовати решења једначина, у зависности од вредности реалних параметара (одредити природу решења).

а) $x^2 - 2x + k - 2 = 0$; *б)* $ax^2 - 8x + 3 = 0$;
в) $(m-1)x^2 - 2(m+1)x + m - 2 = 0$; *г)* $x^2 - (p+2)x + 2p = 0$.

Решење. *а)* $D = 4 - 4(k-2) = 12 - 4k$. За $k = 3$ једначина има једно (двоструко) реално решење ; за $k < 3$ је $D > 0$, па су решења реална и различита ; за $k > 3$ је $D < 0$ и решења су конјуговано комплексна.

б) $D = 64 - 12a$. За $a = \dfrac{16}{3}$ је $D = 0$ и једначина има једно реално решење ; за $a > \dfrac{16}{3}$ је $D < 0$, па су решења конјуговано комплексна и за $a < \dfrac{16}{3}$ је $D > 0$ и једначина има два реална различита решења.

в) $D = 4(m+1)^2 - 4(m-1)(m-2) = 20m - 4$. За $m = \dfrac{1}{5}$ је $D = 0$ и решења су реална и једнака (има једно решење) ; за $m > \dfrac{1}{5}$ је $D > 0$ и решења су реална и различита, а за $m < \dfrac{1}{5}$ је $D < 0$ и решења су два конјугована комплексна броја.

г) $D = p^2 - 4p + 4 = (p-2)^2 \geq 0$, па су решења увек реална, а још су и једнака ако је $p = 2$. ♠

Пример 13. Који услов мора задовољити цео број k, да решења једначине $kx^2 - (1-2k)x + k - 2 = 0$ буду рационални бројеви?

Решење. Решења ће бити рационални бројеви ако је дискриминанта квадрат целог броја: $D = 4k + 1 = m^2$, $m \in Z$. Нпр. за $k = 2$ је $D = 9 = 3^2$, и сл. ♠

Пример 14. За коју вредност параметра m једначине
$2x^2 - (3m+2)x + 12 = 0$ и $4x^2 - (9m-2)x + 36 = 0$
имају заједничко решење?

Решење. Изразимо m из прве једначине преко x:
$m = \dfrac{2x^2 - 2x + 12}{3x}$, $x \neq 0$, и заменимо у другу. Добијамо услов:
$x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = 4$. За $x = 0$ не постоји m, а за $x = 4$ је $m = 3$.

Дакле, за $m = 3$ обе дате једначине имају решење $x = 4$. ♠

Ако је дата једначина $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, тада према формули (8) имамо:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{и} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Ако најпре саберемо, па помножимо x_1 и x_2, добићемо:

$$\boxed{x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad , \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.} \tag{9}$$

Ово су тзв. *Виетове везе* (правила).

На основу ових правила добијамо:

$$ax^2+bx+c = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) = a(x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2) = a(x^2-x_1x-x_2x+$$
$$+x_1x_2) = a(x(x-x_1)-x_2(x-x_1)) = a(x-x_1)(x-x_2).$$ То даје могућност да се тзв. квадратни полином растави на просте чиниоце ако знамо x_1 и x_2:

$$\boxed{ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)} \tag{10}$$

На пример, једначина $2x^2+5x+2=0$ има решења $x_1=-2$ и $x_2=-\dfrac{1}{2}$, па је $2x^2+5x+2 = 2(x+2)(x+\dfrac{1}{2}) = (x+2)(2x+1)$.

Пример 15. Дата је једначина: $x^2-3x-10=0$. Саставити једначину чија су решења:

а) за 3 већа од решења дате једначине ;

б) по апсолутној вредности упола мања од апсолутних вредности решења дате једначине ;

в) реципрочне вредности решења дате једначине ;

г) бројеви 2 и $\dfrac{1}{5}$;

д) комплексна, и то $-3-2i$ је једно од решења.

Решење. Према Виетовим правилима, решења дате једначине дају услове: $x_1+x_2=3$ и $x_1\cdot x_2=-10$. Нека је тражена једначина: $y^2+py+q=0$. Овде су Виетове везе: $y_1+y_2=-p$ и $y_1\cdot y_2=q$.

а) Треба да буде: $y_1=x_1+3$ и $y_2=x_2+3$. Тада је $y_1+y_2 = x_1+x_2+ +6 = 3+6 = 9$, а $y_1\cdot y_2 = (x_1+3)(x_2+3) = x_1x_2+3(x_1+x_2)+9 = -10+9+9 = 8$. Дакле $p=-9$ и $q=8$. Тражена једначина је: $y^2-9y+8=0$.

б) Тражи се: $y_1=\dfrac{x_1}{2}$ и $y_2=\dfrac{x_2}{2}$. Тада је $p=-(y_1+y_2)=-\dfrac{x_1+x_2}{2}= =-\dfrac{3}{2}$ и $q=y_1\cdot y_2=\dfrac{x_1\cdot x_2}{4}=-\dfrac{5}{2}$, па је тражена једначина: $y^2-\dfrac{3}{2}y-\dfrac{5}{2}=0$, тј. $2y^2-3y-5=0$.

в) Треба да је $y_1=\dfrac{1}{x_1}$ и $y_2=\dfrac{1}{x_2}$. Због тога је: $p=-\left(\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}\right)= =-\dfrac{x_1+x_2}{x_1\cdot x_2}=\dfrac{3}{10}$ и $q=\dfrac{1}{x_1\cdot x_2}=-\dfrac{1}{10}$. Тражена једначина је: $y^2+\dfrac{3}{10}y-\dfrac{1}{10}=0$, тј. $10y^2+3y-1=0$.

г) $p=-(y_1+y_2)=-\left(2+\dfrac{1}{5}\right)=-\dfrac{11}{5}$ и $q=y_1\cdot y_2=\dfrac{2}{5}$, па је:

$y^2 - \dfrac{11}{5}y + \dfrac{2}{5} = 0$, тј. $5y^2 - 11y + 2 = 0$.

д) Како је $y_1 = -3-2i$, то је $y_2 = -3+2i$, па је: $p = -(-3-2i-3+2i) = = 6$ и $q = (-3-2i)(-3+2i) = 9 + 4 = 13$. Тражена једначина је : $y^2 + 6y + 13 = 0$. ♠

Пример 16. У једначини $x^2 + kx + k - 1 = 0$ одредити реалан параметар k, тако да решења задовољавају услов: *а)* $x_1 = -2x_2$; *б)* $x_1 - 2x_2 = 4$; *в)* $x_1^2 + x_2^2 = -x_1 - x_2$; *г)* $x_1^3 + x_2^3 = -1$.

Решење. Из дате једначине налазимо да је $x_1 + x_2 = -k$ и $x_1 \cdot x_2 = k - 1$.

а) Датом услову $x_1 = -2x_2$ прикључимо једнакост $x_1 + x_2 = -k$ и решимо по x_1 и x_2. Добијемо $x_2 = k$ и $x_1 = -2k$. Заменимо у $x_1 \cdot x_2 = k - 1$ и биће: $-2k^2 = k - 1$. Решења ове једначине по k су $k_1 = \dfrac{1}{2}$ и $k_2 = -1$.

б) Из $x_1 + x_2 = -k$ и $x_1 - 2x_2 = 4$ добијамо: $x_1 = \dfrac{4-2k}{3}$ и $x_2 = \dfrac{-k-4}{3}$.

Замена у $x_1 \cdot x_2 = k - 1$ даје једначину по k: $\dfrac{4-2k}{3} \cdot \dfrac{-k-4}{3} = k - 1$, односно, после сређивања: $2k^2 - 5k - 7 = 0$. Решења су $k_1 = \dfrac{7}{2}$ и $k_2 = -1$.

в) Дати услов можемо трансформисати, тако да можемо применити Виетова правила: $x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 = -x_1 - x_2 + 2x_1x_2$, односно: $(x_1 + x_2)^2 = -(x_1 + x_2) + 2x_1x_2$. Заменом $x_1 + x_2 = -k$ и $x_1 \cdot x_2 = k - 1$, добијамо: $k^2 = k + 2(k - 1)$, односно $k^2 - 3k + 2 = 0$. Ова једначина има решења $k_1 = 1$ и $k_2 = 2$.

г) $x_1^3 + x_2^3 = -1 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2) = -1 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)((x_1 + x_2)^2 - -3x_1x_2) = -1$. Заменом, као у претходним случајевима добијамо: $-k(k^2 - 3(k-1)) = -1$, одакле, после сређивања имамо: $-k^3 + 3k^2 - 3k + 1 = 0$, тј. $(1-k)^3 = 0$, па је $k = 1$. ♠

Неке једначине вишег степена можемо решити тако што их, погодно изабраном сменом облика $f(x) = t$, сводимо на квадратне једначине.

Пример 17. Решити једначине:

а) $(x+2)^2(x+1)^2 - 8(x-1)(x+4) = 36$;

б) $x^4 - (a^2 - 4)x^2 - 4a^2 = 0$ (биквадратна) ;

в) $4x^4 - 12x^3 - 47x^2 - 12x + 4 = 0$ (симетрична) ;

г) $12x^5 - 23x^4 - 135x^3 + 135x^2 + 23x - 12 = 0$ (кососиметрична).

Решење. *а)* $(x+2)(x+1) = x^2 + 3x + 2$, а $(x-1)(x+4) = x^2 + 3x - 4 = = x^2 + 3x + 2 - 6$. Стављајући $x^2 + 3x + 2 = t$, добићемо: $t^2 - 8(t-6) = 36$, односно $t^2-8t+12=0$. Одавде је $t_1=2$ и $t_2=6$. Сада имамо две једначине по x: $x^2+3x+2=2$ и $x^2+3x+2=6$. Прва даје $x_1=0$, $x_2=-3$, а друга $x_3=1$, $x_4=-4$.

б) Сменом $x^2=t$, добијамо: $t^2-(a^2-4)t-4a^2=0$, одатле је $t_1=a^2$ и $t_2=-4$. Из $x^2=a^2$ и $x^2=-4$, добијамо: $x_{1,2}=\pm a$ и $x_{3,4}=\pm 2i$.

в) Једначина има симетричне коефицијенте (крајњи су 4, до њих су -12). Решење ове једначине је, заправо, упутство за решавање симетричних једначина: $x=0$ није решење дате једначине, па сматрајући да је $x\neq 0$, поделимо са x^2. Добићемо: $4(x^2+\frac{1}{x^2})-12(x+\frac{1}{x})-47=0$. Ако уведемо смену $x+\frac{1}{x}=t$, биће $(x+\frac{1}{x})^2=t^2$, одакле је $x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2$. Сада наша једначина постаје $4(t^2-2)-12t-47=0$, односно $4t^2-12t-55=0$, чија су решења: $t_1=-\frac{5}{2}$, $t_2=\frac{11}{2}$. Из $x+\frac{1}{x}=-\frac{5}{2}$ добијамо $x_1=-2$, $x_2=-\frac{1}{2}$, а из $x+\frac{1}{x}=\frac{11}{2}$ добијамо $x_{3,4}=\frac{11\pm\sqrt{105}}{4}$.

г) Коефицијенти на симетричним местима се разликују само у знаку($+12$ и -12, -23 и $+23$, -135 и $+135$). Ако леву страну једначине означимо са $P(x)$, због наведених коефицијената је: $P(1)=0$, па је $P(x)$ дељиво са $(x-1)$ (по Безуовом ставу - *одељак* 1.4, страна 25). Сада поделимо $P(x):(x-1)=12x^4-11x^3-146x^2-11x+12$, па имамо: $(x-1)(12x^4-11x^3-146x^2-11x+12)=0$. Одавде $x_1=1$, а симетрична једначина $12x^4-11x^3-146x^2-11x+12=0$, решава се као претходни случај и решења су: $x_2=4$, $x_3=\frac{1}{4}$, $x_4=-3$ и $x_5=-\frac{1}{3}$. ♠

ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

69. Решити по x једначине: *а)* $x^2-2ax+a^2-9=0$;
б) $\frac{a}{bx-x}-1=\frac{a-1}{x^2-2bx^2+b^2x^2}$; *в)* $\frac{21}{x^2-4x+10}-x^2+4x=6$;
г) $4x^4+3x^3-14x^2+3x+4=0$; *д)* $2x^5+x^4-19x^3+19x^2-x-2=0$;
ђ) $2x^5+5x^4-13x^3-13x^2+5x+2=0$.

70. Скратити разломке: *а)* $\frac{2x^2+5x+2}{x^2-x-6}$; *б)* $\frac{3x^3-5x^2+2x}{2x^2-5x+3}$.

71. Дискутовати решења квадратних једначина у зависности од вредности реалног параметра.
а) $mx^2-2(m+3)x+m+4=0$; *б)* $x^2-2x+m-3=0$.

72. Једначина $(5k-1)x^2-(5k+2)x+3k-2=0$ има тачно једно решење по x. Одредити x и k.

73. Ако реални бројеви x, y, z испуњавају услове: $x+y+z=5$ и $xy+yz+xz=8$, доказати да сваки од њих има вредности из интервала $\left[1, \frac{7}{3}\right]$.

74. Одредити вредност реалног параметра, тако да дате једначине имају заједничко решење:

а) $3x^2-4x+p-2=0$ и $x^2-2px+5=0$;

б) $x^2-(2p+3)x+10=0$ и $x^2-(p+3)x+6=0$.

75. Ако једначине $ax^2+bx+c=0$ и $cx^2+bx+a=0$, $a \neq c$, имају заједничко решење, доказати да је $(a+c)^2=b^2$.

76. За које вредности целог броја k једначина $x^2-(2k-2)x-k-2=0$ има цела решења?

77. Одредити вредности реалног параметра m, за које су решења једначине $x^2+2x+m+3=0$ негативна.

78. У каквој вези, независној од m, стоје решења x_1 и x_2 једначине:

а) $(m-1)x^2+(2m-1)x+m-4=0$; *б)* $x^2-6x+5+m(x^2-5x+6)=0$?

79. У једначини $(m+1)x^2-2mx+m-1=0$ одредити реалан параметар m, тако да збир квадрата решења једначине буде $\frac{10}{9}$.

80. Одредити m, тако да решења једначине $3x^2-2mx+m-2=0$ задовољавају услов: $x_1^3+3x_1^2x_2+3x_1x_2^2+x_2^3=64$.

81. Дата је једначина $x^2-2(k+1)x+3k+2=0$, k је реалан параметар.

а) За коју вредност k су решења реална?

б) Наћи везу између x_1 и x_2 независну од k.

в) Користећи резултат из *б)* одредити решења једначине, тако да једно буде два пута веће од другог.

г) Одредити цео број k, тако да збир решења дате једначине буде једнак збиру њихових кубова.

82. Одредити реалан број m, тако да једно решење једначине $4x^2-15x+\frac{m^3}{2}=0$ буде квадрат другог решења.

83. Одредити бројеве p и q, тако да они буду решења једначине $x^2+px+q=0$.

84. Наћи решења једначине: $\frac{x}{a+b}+\frac{2a-x}{a-b}-\frac{a+b}{x}=1$, $a, b \in \Re$.

2.4 КВАДРАТНЕ ФУНКЦИЈЕ И НЕЈЕДНАЧИНЕ

График квадратне функције $y = x^2$ дали смо на сл. 2, на почетку ове главе. То је тзв. квадратна парабола. У ТРЕЋОЈ ГЛАВИ ове књиге биће поново расправљано о параболи, али са другог аспекта. Овде ћемо се подсетити на *квадратну функцију* општег облика:

(11) $$\boxed{y = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0}$$

Трансформисаћемо ову формулу на облик из којег се лако уочавају особине функције:

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c \text{ и коначно:}$$

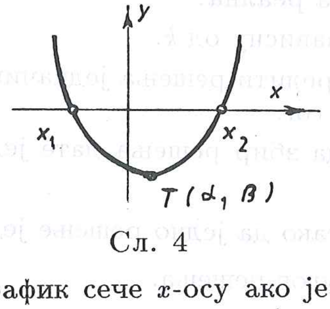
(12) $$\boxed{y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}}$$

Ово је тзв. *канонични облик* функције (11). Уводећи ознаке: $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$, $\beta = \dfrac{4ac - b^2}{4a}$, формула добија једноставнији облик:

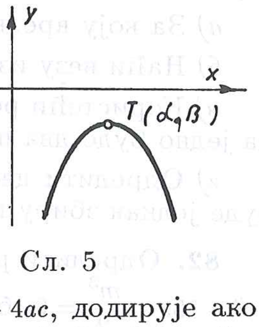
$$y = a(x - \alpha)^2 + \beta$$

Одавде, с обзиром да је $(x-\alpha)^2 \geq 0$, долазимо до важних закључака.

Ако је $a > 0$, функција има минималну вредност $y_{min} = \beta$, за $x = \alpha$, сл. 4, а ако је $a < 0$, функција има максимум $y_{max} = \beta$, за $x = \alpha$, сл. 5. Дакле, тачка $T(\alpha, \beta)$ је теме параболе. Због тога је отвор параболе окренут навише за $a > 0$, а парабола подсећа на чашу окренуту наопако за $a < 0$.



Сл. 4



Сл. 5

График сече x-осу ако је $D > 0$, $D = b^2 - 4ac$, додирује ако је $D = 0$ и са x-осом нема заједничких тачака, ако је $D < 0$, сл. 5.

Нуле функције су решења x_1 и x_2 једначине $ax^2 + bx + c = 0$.

Истичемо, као врло важну чињеницу, зависност знака квадратне функције од знака коефицијента a. На основу података о темену и нулама функције, можемо закључити следеће:

1^o Ако је $D < 0$ знак функције је исти као знак коефицијента a, за свако x.

2^o Ако је $D = 0$ функција има исти знак као a, за свако $x \neq \alpha$ $(\alpha = -\dfrac{b}{2a})$.

3^o Функција мења знак ако је $D > 0$, и то: $sgn\ y = -sgn\ a$ за $x \in (x_1,\ x_2)$.*)

Наведене податке о знаку квадратне функције искористићемо при решавању неједначина.

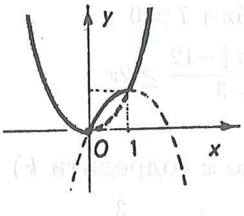
Напоменимо да се проблем максимума и минимума квадратних (и других) функција разматра и ефикасно решава у ГЛАВИ ЧЕТВРТОЈ, у одељку о примени извода.

Пример 18. Приказати графички у координатној равни скупове тачака $(x,\ y)$, који задовољавају услове:

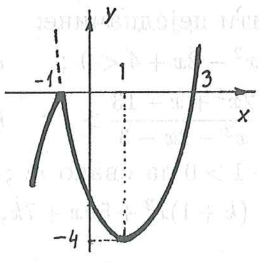
а) $y = x + |\, x^2 - x \,|$; *б)* $y = (x-3)\,|\, x+1 \,|$; *в)* $|\, y \,| = x^2 + 2x$.

Решење. *а)* Како је $x^2 - x \leq 0$ за $x \in [0,\ 1]$, то је $|\, x^2 - x \,| = x - x^2$ за $x \in [0,\ 1]$, а $|\, x^2 - x \,| = x^2 - x$ за $x < 0 \vee x > 1$. Због тога је $y = \begin{cases} 2x - x^2 & ,\ x \in [0,\ 1] \\ x^2 & ,\ x < 0 \vee x > 1 \end{cases}$. График је приказан на сл. 6.

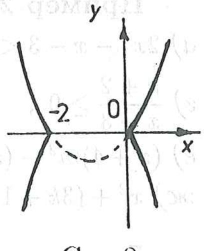
б) $y = \begin{cases} (x-3)(x+1) & ,\ x \geq -1 \\ -(x-3)(x+1) & ,\ x \leq -1 \end{cases}$, видети сл. 7.



Сл. 6



Сл. 7



Сл. 8

в) Због $|\, y \,| \geq 0$, мора бити $x^2 + 2x \geq 0$, а то је за $x < -2 \vee x > 0$. Тада је $y = \pm(x^2 + 2x)$, сл. 8. ♠

Пример 19. Формулом $y = x^2 + 2(k+1)x + 3k - 1$, $k \in \Re$, дат је скуп парабола.

а) Доказати да све ове параболе имају заједничку тачку.

б) Која од ових парабола има минимум у заједничкој тачки?

в) Одредити (једначином) скуп темена свих ових парабола.

*) sgn (сигнум) - знак

г) За које вредности k ове параболе немају заједничких тачака са осом Ox ?

Решење. *а)* Ако дату функцију напишемо у облику: $y = x^2 + 2x - 1 + k(2x + 3)$, видимо да вредност функције не зависи од k, ако је $x = -\frac{3}{2}$. Како је $y\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{7}{4}$, то је заједничка тачка скупа парабола $P\left(-\frac{3}{2}, -\frac{7}{4}\right)$.

б) Апсциса тачке минимума је $-\frac{b}{2a} = -\frac{3}{2}$, тј. $-k - 1 = -\frac{3}{2}$, одакле је $k = \frac{1}{2}$. Заменом вредности k у скуп парабола, добијамо: $y = x^2 + 3x + \frac{1}{2}$.

в) Нека је теме $T(\alpha, \beta)$. За дати скуп парабола је $\alpha = -k - 1$ и $\beta = -k^2 + k - 2$ (формула (12)). Из прве везе $k = -\alpha - 1$ заменимо у другу и добијемо зависност β од α: $\beta = -\alpha^2 - 3\alpha - 4$. Значи, тражени скуп темена припада једној параболи.

г) Парабола нема са x - осом заједничких тачака само ако је $D < 0$. У нашем случају је : $D = 4(k+1)^2 - 4(3k-1) = 4(k^2 - k + 2)$. Међутим, трином $k^2 - k + 2$ нема реалних нула и како је $a = 1 > 0$, овај трином је стално позитиван: $D > 0$ за свако k. Према томе, свака од парабола датог скупа мора сећи x - осу. ♠

Пример 20. Решити неједначине:

а) $2x^2 - x - 3 < 0$; *б)* $x^2 - 2x + 4 < 0$; *в)* $2x^2 + 5x + 7 > 0$;

г) $\frac{x+2}{x-3} \geq 0$; *д)* $\frac{2x^2 + x - 13}{x^2 - 2x - 3} > 1$; *ђ)* $\frac{x^2 - |\,x\,| - 12}{x - 3} \geq 2x$;

е) $(x+4)m^2 - (x+1)m + 1 > 0$ за свако m ;

ж) $x^2 + (3k+1)x + 5k > (k+1)x^2 + 5kx + 7k$, за свако x (одредити k).

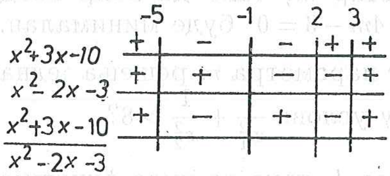
Решење. *а)* Решења једначине $2x^2 - x - 3 = 0$ су $x_1 = \frac{3}{2}$, $x_2 = -1$, па је $2x^2 - x - 3 < 0$ за $-1 < x < \frac{3}{2}$.

б) $D = -12 < 0$ и $a = 1 > 0$, па је $x^2 - 2x + 4 > 0$ за $\forall x$, а дата неједначина нема решења.

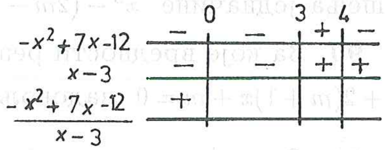
в) $D = -31 < 0$ и $a = 2 > 0$. Неједнакост је тачна за свако x.

г) Дату неједначину напишемо у облику: $\frac{(x+2)(x-3)}{(x-3)^2} \geq 0$, $x \neq 3$. Именилац је облика $a^2 > 0$, па не утиче на знак разломка. Бројилац је квадратни трином, $x_1 = -2$, $x_2 = 3$ и $a = 1 > 0$, па је решење неједначине $x \leq -2 \vee x > 3$.

д) Десну страну неједначине сведемо на нулу: $\dfrac{2x^2+x-13}{x^2-2x-3}-1>0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2+3x-10}{x^2-2x-3}>0$. Знак разломка одредићемо комбиновањем знака бројиоца и имениоца, сл. 9. Коначно, решење неједначине је $x\in(-\infty,\ -5)\cup(-1,\ 2)\cup(3,\ +\infty)$.



Сл. 9



Сл. 10

ђ) Неједначина је еквивалентна са $\dfrac{-x^2-\mid x\mid+6x-12}{x-3}\geq 0,\ x\neq 3$. За $x\leq 0$ је $\dfrac{-x^2+7x-12}{x-3}\geq 0$, а за $x\geq 0$ је $\dfrac{-x^2+5x-12}{x-3}\geq 0$. У првом случају, поступајући слично претходном задатку, добијамо решење приказано на сл. 10: $x\leq 0$. У другом случају, неједначина је еквивалентна са $x-3<0$, јер је бројилац негативан за свако x ($D=-23<0$ и $a=-1<0$), па је $0\leq x<3$. Узимајући оба случаја у обзир, решење неједначине је $x<3$ (унија два решења).

е) Мора бити $x+4>0$ и $D=(x+1)^2-4(x+4)<0$, односно $x>-4$ и $x^2-2x-15<0$. Слично претходном задатку, налазимо да је $x\in(-3,\ 5)$.

ж) Имамо неједначину: $kx^2+(2k-1)x+2k<0$, па мора бити $k<0$ и $(2k-1)^2-8k^2<0$. Дата неједначина је задовољена за свако x, ако је $k<-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. ♠

ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

85. Решити неједначине: *а)* $\dfrac{x^2+1}{x-1}>\dfrac{1}{x}$;

б) $-2<\dfrac{-x^2+5x-7}{x-4}\leq 1$; *в)* $-1\leq\dfrac{2x}{x^2+1}\leq 1$; *г)* $\dfrac{\mid x-3\mid}{x^2-5x+6}\geq 2$.

86. Дат је скуп парабола: $y=(k+1)x^2-2(k-1)x+k-5$, $k\neq -1$, $k\in\Re$. Доказати да све параболе пролазе кроз једну заједничку тачку и да та тачка није теме неке од ових парабола.

87. Дата су два скупа парабола: $y=x^2-(k-3)x+k-1$ и

$y = kx^2 - 4x + k - \frac{1}{k}$. Одредити две параболе из ова два скупа, тако да оне имају минимум у истој тачки. Наћи ту тачку.

88. Одредити p тако да за свако реално x буде $(p-2)x^2 - 2px + 2p - 3 < 0$.

89. Одредити реалан параметар m, тако да збир квадрата решења једначине $x^2 - (2m-1)x - 4m - 3 = 0$ буде минималан.

90. За које вредности реалног параметра m решења једначине $x^2 + 2(m+1)x + m = 0$ задовољавају услов: $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} > 8$?

91. Одредити реалан параметар k, тако да нуле функције $f(x) = x^2 - 6kx + 9k^2 - 2k + 2 = 0$ буду веће од 3.

92. Ако функција $f(x) = x^2 - 2(m-1)x + m + 5$ сече x осу, доказати да само једна пресечна тачка може бити у интервалу $(-2, 3)$.

2.5 НЕЛИНЕАРНИ СИСТЕМИ ЈЕДНАЧИНА

Интересују нас само реална решења система једначина.

Систем једначина, којег чине једна линеарна и једна нелинеарна једначина, решавамо тако што из линеарне једначине изразимо једну непознату преко друге и заменимо у нелинеарну. Сада ова нелинеарна једначина садржи само једну непознату.

Пример 21. Решити систем једначина:

$$x - 2y = 1$$
$$2y^2 - x + 2y - 1 = 0$$

Решење. Из прве једначине је $x = 1 + 2y$. Заменом у другу једначину добијамо:

$$2y^2 - (1+2y) + 2y - 1 = 0 \Leftrightarrow y^2 = 1 \Leftrightarrow y_1 = 1 \ \vee \ y_2 = -1.$$

Сада налазимо непознату x: $x_1 = 1 + 2 = 3$, $x_2 = 1 - 2 = -1$. Решења су $(3, 1)$ и $(-1, -1)$. ♠

Као што видимо, решавање оваквог система је прилично једноставно. Због тога ћемо настојати да сложеније системе сводимо на систем у којем има линеарних једначина.

Нека је једна једначина датог система тзв. *хомогена**). То је једначина облика: $Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 0$. Сменом $x = yz$, ова једначина се своди на $y^2(Az^2 + Bz + C) = 0 \Leftrightarrow y = 0 \ \vee \ Az^2 + Bz + C = 0$. Ако једначина $Az^2 + Bz + C = 0$ има решења $z = z_1$ и $z = z_2$, тада је

*) Без линеарних чланова, а слободан члан је нула.

$Az^2+Bz+C=0 \Leftrightarrow x=z_1y \vee x=z_2y$ (z_1 и z_2 су бројеви, а не променљиве). На тај начин хомогену једначину замењују две линеарне.

Пример 22. Решити систем једначина:

$$x^2-3xy+y^2=-5 \wedge x^2-xy+y^2=7.$$

Решење. Ако прву једначину помножимо са 7, а другу са 5, па добијене једначине саберемо, добићемо хомогену једначину:

$$\left.\begin{aligned} 7x^2-21xy+7y^2&=-35\\ 5x^2-\ \ 5xy+5y^2&=\ \ \ 35\end{aligned}\right\}+\ \Rightarrow 12x^2-26xy+12y^2=0,$$

односно: $6x^2-13xy+6y^2=0$. Заменимо: $x=yz$ и добијамо: $y^2(6z^2-$ $-13z+6)=0 \Leftrightarrow (y=0 \vee 6z^2-13z+6=0)$. Не може $y=0$ бити решење, јер заменом у прву једначину добијемо $x^2=-5$, а заменом у другу $x^2=7$, што не може бити истовремено.

Једначина $6z^2-13z+6=0$ даје решења $z_1=\dfrac{2}{3}$ и $z_2=\dfrac{3}{2}$. Враћајући се на x и y, добијамо две линеарне једначине: $x=\dfrac{2}{3}y$ и $x=\dfrac{3}{2}y$. Решења датог система добијамо из следећа два система:

$$1^o\quad \begin{array}{c} x=\dfrac{2}{3}y\\ \underline{x^2-3xy+y^2=-5}\end{array} \qquad\qquad 2^o\quad \begin{array}{c} x=\dfrac{3}{2}y\\ \underline{x^2-3xy+y^2=-5}\end{array}$$

Поступајући као у претходном примеру, добијамо решења $(2,\ 3)$ и $(-2,\ -3)$ из 1^o, а $(3,\ 2)$ и $(-3,\ -2)$ из 2^o. ♠

У највећем броју случајева, налажење линеарне једначине ради решавања система на што једноставнији начин, није могуће неким стандардним поступцима. Потребно је показати доста умешности, да би се то постигло. У сваком случају, лакше ћемо се снаћи ако имамо богатије искуство. Зато ћемо сада решити неколико поучних примера.

Пример 23. Решити следеће системе једначина:

$$a)\ \begin{array}{l} x^2+2y^2=17\\ \underline{2x^2-3y^2=\ 6}\end{array} \qquad б)\ \begin{array}{l} x^2+4y^2=13\\ \underline{xy\qquad =3}\end{array} \qquad в)\ \begin{array}{l} x^3-y^3=19(x-y)\\ \underline{x^3+y^3=\ 7(x+y)}\end{array}$$

Решење. *а)* Помножимо прву једначину са 2, другу са -1 и саберемо их. Добићемо: $7y^2=28$, а одавде је $y^2=4$, па је $y=2$ или $y=-2$. Сада заменимо y и добијамо $x^2=9$, одакле је $x=3$ или $x=-3$. Решења су $(3,\ 2)$, $(3,\ -2)$, $(-3,\ 2)$, $(-3,\ -2)$.

б) Помножимо другу једначину са 4. Затим првој једначини додамо и одузмемо другу једначину. Добићемо:

$$\begin{cases} x^2+4xy+4y^2=25\\ \underline{x^2-4xy+4y^2=\ 1}\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x+2y)^2 = 25 \\ (x-2y)^2 = 1 \end{cases}$$

Како је $(x+2y)^2 = 25 \Leftrightarrow (x+2y=5 \ \lor\ x+2y=-5)$ и $(x-2y)^2=1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (x-2y=1 \ \lor\ x-2y=-1)$, то је полазни систем еквивалентан са четири система линеарних једначина:

1^o $\begin{array}{l} x+2y=5 \\ x-2y=1 \end{array}$ $\quad 2^o$ $\begin{array}{l} x+2y=-5 \\ x-2y=1 \end{array}$ $\quad 3^o$ $\begin{array}{l} x+2y=5 \\ x-2y=-1 \end{array}$ $\quad 4^o$ $\begin{array}{l} x+2y=-5 \\ x-2y=-1 \end{array}$

Тако редом добијамо решења: $(3,\ 1)$, $\left(-2,\ -\frac{3}{2}\right)$, $\left(2,\ \frac{3}{2}\right)$, $(-3,\ -1)$.

в) $\begin{array}{l} (x-y)(x^2+xy+y^2)-19(x-y)=0 \\ (x+y)(x^2-xy+y^2)-7(x+y)=0 \end{array}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)(x^2+xy+y^2-19)=0 \\ (x+y)(x^2-xy+y^2-\ 7)=0 \end{cases}$$

Решење полазног система добија се из следећих комбинација:

1^o $\begin{array}{c} x-y=0 \\ x+y=0 \\ \Downarrow \\ (0,\ 0) \end{array}$ $\quad 2^o$ $\begin{array}{c} x-y=0 \\ x^2-xy+y^2-7=0 \\ \Downarrow \\ (\sqrt{7},\ \sqrt{7}),\ (-\sqrt{7},\ -\sqrt{7}) \end{array}$ $\quad 3^o$ $\begin{array}{c} x+y=0 \\ x^2+xy+y^2-19=0 \\ \Downarrow \\ (\sqrt{19},\ -\sqrt{19}), (-\sqrt{19},\ \sqrt{19}) \end{array}$

4^o $\begin{array}{l} x^2+xy+y^2=19 \\ x^2+xy+y^2=\ 7 \end{array}$ У случају 4^o до решења долазимо као у *примеру* 22. Решења су: $(2,\ 3)$, $(-2,\ -3)$, $(3,\ 2)$, $(-3,\ -2)$. ♠

ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

93. Решити системе једначина:

а) $\begin{array}{l} xy=2 \\ x+y=3 \end{array}$ $\quad$ *б)* $\begin{array}{l} x^2+xy+y^2=4 \\ x+xy+y=2 \end{array}$

в) $\begin{array}{l} x^2+x^2y^2+x^2y^4=525 \\ x+xy+xy^2=35 \end{array}$ $\quad$ *г)* $\begin{array}{l} x^3+y^3=19 \\ x^2+y^2=13 \end{array}$

2.6 ИРАЦИОНАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ И НЕЈЕДНАЧИНЕ

Ако се у једначини или неједначини неки израз који садржи непознату налази под кореном, таква једначина, односно неједначина, назива се *ирационалном* . При решавању ових једначина и неједначина прибегавамо најчешће степеновању, ради елиминисања корена. Често пре степеновања уводимо погодне замене. Степеновање вршимо поштујући ограничења из формула (1) и (2), *одељак* 2.1. Решења ћемо тражити искључиво у скупу реалних бројева. Најпре ћемо решавати ирационалне једначине.

Под реалним решењима једначине $\sqrt[n]{f(x)} = \varphi(x)$ подразумевамо сваки *реалан број* x_o, такав да је $\sqrt[n]{f(x_o)} = \varphi(x_o)$. Чињеница да уважавамо само реална решења, захтева увођење неопходних ограничења, јер, као што смо видели у *одељку* 2.2, корен реалног броја не мора бити реалан. Осим тога, степеновањем једначине можемо пореметити равнотежу једнакости. На пример $\sqrt{4} \neq -2$, а $(\sqrt{4})^2 = (-2)^2$.Водећи о свему овоме рачуна долазимо до закључка:

> Ако је изложилац n корена непаран ($n = 2k-1$):
> $\sqrt[n]{f(x)} = \varphi(x) \Leftrightarrow f(x) = (\varphi(x))^n,\ x \in \Re.$ (13)

> Ако је изложилац n корена паран ($n = 2k$):
> $\sqrt[n]{f(x)} = \varphi(x) \Leftrightarrow (\varphi(x) \geq 0\ \wedge\ f(x) = (\varphi(x))^n),\ x \in \Re.$ (14)

Специјално, за $n = 3$ имамо:

$$\sqrt[3]{f(x)} = \varphi(x) \Leftrightarrow f(x) = (\varphi(x))^3,\ x \in \Re,$$

а за $n = 2$ је:

$$\sqrt{f(x)} = \varphi(x) \Leftrightarrow \left(\varphi(x) \geq 0\ \wedge\ f(x) = (\varphi(x))^2\right),\ x \in \Re.$$

У наредним примерима конкретизоваћемо ове формуле.

Пример 24. Решити једначине:

а) $\sqrt{3x+7} - \sqrt{x+1} = 2$; *б)* $\sqrt{x+1} - \sqrt{3x+12} + \sqrt{4x+13} = 0$;

в) $\sqrt{x} - \sqrt{x+1} - \sqrt{x+4} + \sqrt{x+9} = 0$;

г) $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+3} + 2\sqrt{(x-1)(x+3)} = 4 - 2x$;

д) $\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{x-2} - \sqrt[3]{2x-3} = 0$; *ђ)* $\sqrt[7]{\dfrac{5-x}{x+3}} + \sqrt[7]{\dfrac{x+3}{5-x}} = 2$;

е) $\dfrac{\sqrt[5]{3+x}}{3} + \dfrac{\sqrt[5]{3+x}}{x} = \dfrac{64}{3}\sqrt[5]{x}$.

Решење. *а)* Једначина има смисла за $(3x+7 \geq 0\ \wedge\ x+1 \geq 0) \Leftrightarrow x \geq -1$. Сада једначину: $\sqrt{3x+7} = 2 + \sqrt{x+1}$ квадрирамо (обе стране једнакости су ненегативне): $3x+7 = \left(2+\sqrt{x+1}\right)^2 \Leftrightarrow 3x+7 = 4 + 4\sqrt{x+1} + x + 1 \Leftrightarrow 2\sqrt{x+1} = x+1$.Сада треба поново квадрирати. То можемо учинити, јер је $x+1 \geq 0$. Добијамо: $4(x+1) = (x+1)^2$, а одавде је $x_1 = -1$ и $x_2 = 3$. Како је $-1 \geq -1$ и $3 \geq -1$, то су оба броја, -1 и 3, решења дате једначине.

б) Мора бити $x+1 \geq 0 \ \wedge \ 3x+12 \geq 0 \ \wedge \ 4x+13 \geq 0$, а све је то испуњено за $x \geq -1$. Тада имамо:

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{4x+13}=\sqrt{3x+12} \Leftrightarrow x+1+2\sqrt{(x+1)(4x+13)}+4x+13 = $$
$$= 3x+12 \Leftrightarrow \sqrt{(x+1)(4x+13)} = -x-1$$

Последња једначина се може квадрирати уз услов: $-x-1 \geq 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow x \leq -1$. Како већ постоји обавезујуће ограничење $x \geq -1$, следи да може бити само $x=-1$. Непосредним проверавањем уверавамо се да је $x=-1$ једино решење дате једначине.

в) Из $x \geq 0 \ \wedge \ x+1 \geq 0 \ \wedge \ x+4 \geq 0 \ \wedge \ x+9 \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$. То је услов под којим су дефинисани сви корени у датој једначини. Тада имамо, према (14):

$$\begin{aligned}
&\sqrt{x}+\sqrt{x+9}=\sqrt{x+1}+\sqrt{x+4}\\
&\Leftrightarrow x+2\sqrt{x(x+9)}+x+9 = x+1+2\sqrt{(x+1)(x+4)}+x+4\\
&\Leftrightarrow \sqrt{x(x+9)}+2=\sqrt{(x+1)(x+4)}\\
&\Leftrightarrow x(x+9)+4\sqrt{x(x+9)}+4=(x+1)(x+4)\\
&\Leftrightarrow \sqrt{x(x+9)}=-4x
\end{aligned}$$

Одавде је $x \leq 0$, па због почетног услова, $x \geq 0$, следи да мора бити $x=0$. То јесте решење полазне једначине, и то једино.

г) Једначина има реална решења ако је $x-1 \geq 0 \ \wedge \ x+3 \geq 0 \ \wedge$ $\wedge \ (x-1)(x+3) \geq 0$, а то је испуњено за $x \geq 1$. Дату једначину можемо трансформисати: $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+3}+(x-1)+2\sqrt{(x-1)(x+3)}+(x+3) =$ $=6$, односно: $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+3}+\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+3}\right)^2=6$. Уведемо смену $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+3}=t$ (тада је сигурно $t>0$): $t+t^2=6$. Одавде је $t_1=2$ и $t_2=-3$. Случај $t=-3$ не задовољава услов $t>0$, па је $t=2$. Даље је: $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+3}=2 \Leftrightarrow x-1+2\sqrt{(x-1)(x+3)}+x+3=4$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)(x+3)}=1-x.$$

Слично претходном задатку закључујемо да је $x=1$ једино решење дате једначине.

д) $\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x-2}=\sqrt[3]{2x-3}$ (степенујемо *на трећи*)

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow x-1+3\sqrt[3]{(x-1)^2}\sqrt[3]{x-2}+3\sqrt[3]{x-1}\sqrt[3]{(x-2)^2}+x-2=2x-3\\
&\Leftrightarrow 3\sqrt[3]{x-1}\sqrt[3]{x-2}\left(\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x-2}\right)=0
\end{aligned}$$

Како је, према датој једначини: $\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x-2}=\sqrt[3]{2x-3}$, то је, даље, једначина еквивалентна са:

$$\sqrt[3]{x-1}\sqrt[3]{x-2}\sqrt[3]{2x-3}=0 \Leftrightarrow x=1 \ \vee \ x=2 \ \vee \ x=\frac{3}{2}.$$

ђ) Уводимо смену: $\sqrt[7]{\dfrac{5-x}{x+3}}=t$, па имамо једначину: $t+\dfrac{1}{t}=2$, која даје $t=1$. Сада из $\sqrt[7]{\dfrac{5-x}{x+3}}=1$, односно, из $\dfrac{5-x}{x+3}=1 \Rightarrow x=1$.

е) Трансформишемо дату једначину:

$$\frac{x\sqrt[5]{3+x}+3\sqrt[5]{3+x}}{3x}=\frac{64}{3}\sqrt[5]{x}\Leftrightarrow(x+3)\sqrt[5]{3+x}=64x\sqrt[5]{x}$$

$$\Leftrightarrow\ \sqrt[5]{(x+3)^6}=2^6\sqrt[5]{x^6}\qquad\text{(степенујемо)}$$

$$\Leftrightarrow(x+3)^6=2^{30}\cdot x^6\qquad\text{(коренујемо)}$$

$$\Leftrightarrow|\ x+3\ |=32\ |\ x\ |$$

$$\Leftrightarrow\left|\frac{x+3}{x}\right|=32\ \wedge\ x\neq 0$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{x+3}{x}=32\ \vee\ \frac{x+3}{x}=-32$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{3}{31}\ \vee\ x=-\frac{1}{11}.\ \spadesuit$$

Услови за решавање ирационалних неједначина делом се разликују од услова (13) и (14). У случају парног корена, ако је испред корена знак "+", а десна страна је негативна, неједначина ће бити задовољена за свако x, за које има смисла.

Ако је изложилац n корена непаран ($n=2k-1$)

$$\boxed{\sqrt[n]{f(x)}\geq\varphi(x)\Leftrightarrow f(x)\geq(\varphi(x))^n}\tag{15}$$

Исто важи и ако је знак неједнакости "$\leq$".

Ако је изложилац n корена паран ($n=2k$)

$$\boxed{\sqrt[n]{f(x)}\leq\varphi(x)\Leftrightarrow(f(x)\geq 0\ \wedge\ \varphi(x)\geq 0\ \wedge\ f(x)\leq(\varphi(x))^n)}\ ,\tag{16}$$

односно:

$$\boxed{\begin{array}{l}\sqrt[n]{f(x)}\geq\varphi(x)\Leftrightarrow((f(x)\geq 0\ \wedge\ \varphi(x)\leq 0)\ \vee\\ \vee\ (\varphi(x)\geq 0\ \wedge\ f(x)\geq\varphi^n(x))).\end{array}}\tag{17}$$

Конкретизоваћемо ове услове на следећим примерима.

Пример 25. Решити неједначине:

а) $\sqrt{x+3}+\sqrt{x-2}-\sqrt{2x+4}>0$; *б)* $x-3<\sqrt{x^2-9x+20}\leq\sqrt{2x^2+10}$;

в) $\sqrt{3x^2-2x-1}\geq 2(x-1)$; *г)* $\sqrt{\dfrac{x^2-4x+7}{x-2}}<2$;

д) $\sqrt{5x-x^2}<|\ 2-x\ |$; *ђ)* $\sqrt{3x+7}\geq 2x+3$.

Решење. *а)* Неједначина има смисла за $(x+3\geq 0\ \wedge\ x-2\geq$ $\geq 0\ \wedge\ 2x+4\geq 0)\Leftrightarrow x\geq 2$. Тада имамо: $\sqrt{x+3}+\sqrt{x-2}>\sqrt{2x+4}\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x+3+2\sqrt{(x+3)(x-2)}+x-2>2x+4\Leftrightarrow 2\sqrt{(x+3)(x-2)}>3\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4(x+3)(x-2) > 9 \Leftrightarrow 4x^2+4x-33 > 0$. Последња неједначина важи за $x < -\frac{1}{2}(\sqrt{34}+1) \lor x > \frac{1}{2}(\sqrt{34}-1)$. Како мора бити и $x \geq 2$, закључујемо да је решење $x > \frac{1}{2}(\sqrt{34}-1)$.

б) Ово је систем неједначина. Прва, $x-3 < \sqrt{x^2-9x+20}$, има смисла за $(x \leq 4 \lor x \geq 5)$. Ако је $x \leq 3$, лева страна није позитивна, а десна јесте, па је решење свако $x \leq 3$. Ако је $x > 3$, неједначина је еквивалентна са $x^2-9x+20 > (x-3)^2$, одакле је $x < \frac{11}{3}$, односно $x \in \left(3, \frac{11}{3}\right)$. Дакле, прва неједначина има решење $x < \frac{11}{3}$.

Друга неједначина, $\sqrt{x^2-9x+20} \leq \sqrt{2x^2+10}$, за $(x \leq 4 \lor x \geq 5)$ је еквивалентна са $x^2-9x+20 \leq 2x^2+10 \Leftrightarrow (x < -10 \lor x > 1)$. Решење друге неједначине је $x < -10 \lor x \in (1, 4] \lor x \geq 5$.

Решење система (заједничко) је $\left(x < -10 \lor x \in \left(1, \frac{11}{3}\right)\right)$.

в) Неједначина има смисла за $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right] \cup [1, +\infty)$. Како је $\sqrt{f(x)} \geq 0$, а $x-1 < 0$ ако је $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right]$, то је дата неједнакост испуњена за свако x из интервала $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right]$. Ако је $x \geq 1$, неједначина је еквивалентна са $(3x^2-2x-1) \geq 4(x-1)^2 \Leftrightarrow x^2-6x+5 \leq 0 \Leftrightarrow x \in [1, 5]$. Решење дате неједначине је $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right] \cup [1, 5]$.

г) Неједначина има смисла за $\frac{x^2-4x+7}{x-2} \geq 0$, а то је испуњено за $x > 2$. Тада је неједначина еквивалентна са $\frac{x^2-4x+7}{x-2} < 4$, одакле је $\frac{x^2-8x+15}{x-2} < 0$. Решење је $x \in (3, 5)$.

д) Неједначина има смисла за $5x - x^2 \geq 0$, тј. за $x \in [0, 5]$. Како је $|\,2-x\,| \geq 0$, из дате неједначине добијамо: $5x-x^2 < (2-x)^2$, тј. $-2x^2+9x-4 < 0$. Овај услов је испуњен за $x < \frac{1}{2}$ или $x > 4$. Решење дате неједначине је $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \cup (4, 5]$.

ђ) Према (17), први услов: $3x+7 \geq 0 \land 2x+3 \leq 0$, даје решење $x \in \left[-\frac{7}{3}, -\frac{3}{2}\right]$. Други услов: $3x+7 \geq 0$ и $3x+7 \geq (2x+3)^2$, даје решење $x \in \left[-2, -\frac{1}{4}\right]$. Решење задатка је $x \in \left[-\frac{7}{3}, -\frac{1}{4}\right]$. ♠

ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

94. Решити једначине:

а) $\sqrt{3-x}+\dfrac{6}{\sqrt{3-x}}=\sqrt{9-5x}$; *б)* $\sqrt{4x^2+9x+5}-\sqrt{2x^2+x-1}=\sqrt{x^2-1}$;

в) $\sqrt{x-2+\sqrt{2x-5}}+\sqrt{x+2+3\sqrt{2x-5}}=7\sqrt{2}$;

г) $\sqrt[4]{(x-1)^2}-\sqrt[4]{(x+1)^2}=\dfrac{3}{2}\sqrt[4]{x^2-1}$;

д) $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=x-1$;

ђ) $\sqrt[3]{(2-x)^2}+\sqrt[3]{(7+x)^2}-\sqrt[3]{(2-x)(7+x)}=3$.

95. Решити неједначине:

а) $\sqrt{x+3}-\sqrt{x-1}-\sqrt{x-2}<0$; *б)* $\dfrac{\sqrt{x^2-16}}{\sqrt{x-3}}+\sqrt{x-3}>\dfrac{5}{\sqrt{x-3}}$;

в) $\sqrt{\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{3}{4}}>\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{x}$; *г)* $\dfrac{6x}{x-2}-\sqrt{\dfrac{12x}{x-2}}-2\sqrt[4]{\dfrac{12x}{x-2}}>0$;

д) $x\sqrt{3x^2+5x-6}<x^2+2x$.

2.7 ПОЛИНОМИ НА ПОЉУ КОМПЛЕКСНИХ БРОЈЕВА*)

У претходној глави смо разматрали полиноме на пољу реалних бројева. Овде ћемо допунити претходна разматрања, од којих многа важе и на пољу комплексних бројева.

Под *полиномом на пољу комплексних бројева* подразумевамо пресликавање $P(z)$, којим се број z, $z\in C$, пресликава на број:

$$P(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\ldots\ +a_1z+a_0\ ,$$

где су $a_0,\ a_1,\ldots,a_n$ комплексни бројеви (коефицијенти). Сматрајући реалан број a комплексним бројем $a+0\cdot i$, овом дефиницијом смо обухватили и полиноме са реалним коефицијентима. Ако је $a_n\neq 0$, тада је P полином степена n.

Нула полинома $P(z)$ је свако решење једначине $P(z)=0$ (односно: $a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0=0$).

Безуов став и остала разматрања у вези дељивости и дељења полинома, из ПРВЕ ГЛАВЕ, важе и за полиноме $P(z)$.

Питање решавања једначина облика $P(z)=0$, успешније и комплетније се решава на пољу комплексних, него на пољу реалних бројева. На пример, једначина: $x^2+1=0$ нема решења, тј. полином $P(x)=x^2+1$ нема нула, на пољу реалних бројева. Међутим,

*) Ова тема се проучава у *III* разреду.

једначина $z^2+1=0$ има решења $z_1=i$ и $z_2=-i$, на пољу комплексних бројева. Полином z^2+1 има две нуле и разлаже се на чиниоце: $z^2+1=(z+i)(z-i)$.

Обрнуто, проблем *решавања неједначина* или *знака полинома*, на пољу реалних бројева, разрадили смо доста коректно. Али, на пољу комплексних бројева овај проблем је бесмислен: не може са говорити о некаквом знаку комплексног броја, нити о некаквој релацији $z_1 > z_2$ или $z_1 < z_2$, $z_1, z_2 \in C$.

Пре формулисања једне важне теореме подсетимо се: ако полином $P(z)$ има нулу $z=\alpha$, тада је $P(z)$ дељиво са $(z-\alpha)$ и важи: $P_n(z)=(z-\alpha)\cdot Q_{n-1}(z)$, n и $n-1$ су степени полинома P и Q. Ако је $P_n(z)=(z-\alpha)^k\cdot Q_{n-k}(z)$ и $Q_{n-k}(z)$ није дељив са $(z-\alpha)$, тада је α *нула* k - *тог реда* полинома $P_n(z)$ (вишеструка нула за $k>1$).

Основна теорема алгебре: *Сваки полином $P_n(z)$, $n \geq 1$, има бар једну нулу на пољу комплексних бројева.*

Навешћемо неке последице ове теореме.

1^o Сваки полином $P_n(z)$ има n нула на пољу комплексних бројева и може се записати:

$$\boxed{P_n(z)=a_n(z-\alpha_1)\dots(z-\alpha_n)}\ , \tag{18}$$

при чему неке нуле могу бити једнаке међу собом (вишеструке нуле).

2^o Сваки полином $P_n(z)$ може се на један и само један начин преставити у облику (18).

3^o Полином $P_n(z)$ може имати више од n нула ако и само ако је он идентички једнак нули, тј. ако је $a_n=a_{n-1}=\dots=a_1=a_0=0$.

На основу Виетових веза за полином другог степена (формула (9)) закључујемо:

4^o Ако полином другог степена са реалним коефицијентима има нулу z_0, он има и нулу $\overline{z_0}$. То значи да се комплексне нуле код полинома са реалним коефицијентима јављају у паровима ($z_{1,2}=$ $=\alpha \pm \beta \cdot i$). Отуда и следећи закључак.

5^o Сваки полином непарног степена са реалним коефицијентима има бар једну реалну нулу.

На основу формуле (18) можемо добити *Виетове везе* за полиноме степена 3 и више. На пример, за полином трећег степена добијамо:

$$az^3+bz^2+cz+d=a(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)(z-\alpha_3)=$$
$$=az^3-a(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)z^2+a(\alpha_1\alpha_2+\alpha_2\alpha_3+\alpha_3\alpha_1)z-a\alpha_1\alpha_2\alpha_3.$$

Одавде налазимо да за полином $P(z)=az^3+bz^2+cz+d$ важи:

$$\boxed{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=-\frac{b}{a}\ ;\quad \alpha_1\alpha_2+\alpha_2\alpha_3+\alpha_3\alpha_1=\frac{c}{a}\ ;\quad \alpha_1\alpha_2\alpha_3=-\frac{d}{a}} \tag{19}$$

(α_1, α_2, a_3 су нуле полинома $P(z)$)

Слично се налазе Виетове везе и за $n>3$.

Пример 26. Решити једначину: $z^3-6z^2+3z+10=0$, ако су њена решења везана релацијом: $z_1-z_2=z_2-z_3$.

Решење. Према Виетовим правилима (19) је $z_1+z_2+z_3=6$, а из датог услова добијамо: $z_1+z_3=2z_2$. Дакле: $3z_2=6\Rightarrow z_2=2$. Полином је дељив са $(z-2)$. Налазимо да је $z^3-6z^2+3z+10=$ $=(z-2)(z^2-4z-5)$. Одавде је $z_1=5$ и $z_3=-1$. ♠

Пример 27. Полином $P(z)=2z^4+z^3+2z^2+21z+10$ има две нуле, које су једна другој реципрочне. Одредити нуле полинома.

Решење. Нека је $\alpha_1=\alpha$ и $\alpha_2=\dfrac{1}{\alpha}$. Тада је $\alpha_1\cdot\alpha_2=1$. Према Виетовим везама, за дати полином важи: $\alpha_1\cdot\alpha_2\cdot\alpha_3\cdot\alpha_4=5$, па је $\alpha_3\cdot\alpha_4=5$. Нека је P_1 полином другог степена са нулама α_1 и α_2, а P_2 полином другог степена са нулама α_3 и α_4. Тада је $2\cdot P_1\cdot P_2=$ $=2z^4+z^3+2z^2+21z+10$, тј. $2(z^2+az+1)(z^2+bz+5)=2z^4+z^3+2z^2+21z+10$. Сређивањем добијамо: $2z^4+(2a+2b)z^3+(12+2ab)z^2+(2a+10b)z+10=$ $=2z^4+z^3+2z^2+21z+10$. Изједначимо коефицијенте уз z и z^3: $2a+10b=$ $=21\ \wedge\ 2a+2b=1$. Решење овог система једначина је $a=\dfrac{5}{2}$, $b=-2$. Дакле: $2P_1(z)=2z^2+5z+2$ и $P_2(z)=z^2-2z+5$. Решења једначина $P_1(z)=0$ и $P_2(z)=0$ дају тражене нуле полинома: $\alpha_1=2$, $\alpha_2=\dfrac{1}{2}$, $\alpha_{3,4}=1\pm 2i$. ♠

Пример 28. Решити систем једначина:

$$x+y+z=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{13}{3}$$

$$xyz=1.$$

Решење. На основу дате једначине $xyz=1$, закључујемо да је $x\neq 0$, $y\neq 0$, $z\neq 0$. Једначину $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{13}{3}$ можемо помножити са xyz и добићемо: $yz+xz+xy=\dfrac{13}{3}xyz=\dfrac{13}{3}$ (јер је $xyz=1$). Тако дати систем добија облик:

$$x+y+z=\frac{13}{3}$$

$$xy+yz+xz=\frac{13}{3}$$

$$xyz=1.$$

На основу Виетових веза из формуле (19) закључујемо да су x, y, z решења једначине:

$$3t^3 - 13t^2 + 13t - 3 = 0$$

Ово је кососиметрична једначина, па је $t_1 = 1$ једно њено решење. Дељењем са $(t-1)$ долазимо до једначине: $(t-1)(3t^2-10t+3) = 0$. Из $3t^2 - 10t + 3 = 0$ налазимо: $t_2 = 3$ и $t_3 = \frac{1}{3}$.

Свака од променљивих може бити једнака t_1, или t_2, или t_3. Дати систем има шест решења. То су све пермутације од бројева $1,\ 3,\ \frac{1}{3}$, дакле $\left(1,\ 3,\ \frac{1}{3}\right)$, $\left(1,\ \frac{1}{3},\ 3\right)$, итд. ♠

ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

96. Полином $P(z) = z^3 - (m^2 - m + 7)z - (3m^2 - 3m - 6) = 0$ има нулу $z_1 = -1$. Одредити m и остале нуле.

97. Доказати да међу решењима једначине: $z^4 + 5z^3 + 15z - 9 = 0$, само једно је позитивно и само једно је негативно.

98. Бројеви z_1, z_2 и z_3 су решења једначине: $z^3 + pz^2 + qz + r = 0$. Саставити једначину чија су решења: z_1z_2, z_2z_3 и z_3z_1.

99. Одредити коефицијенте a и b једначине

$$z^4 + z^3 - 18z^2 + az + b = 0,$$

ако је познато да је једно цело решење троструко.

100. Решити једначину $12z^3 + 4z^2 - 17z + 6 = 0$, ако је познато да су међу њеним решењима два броја реципрочних апсолутних вредности и супротног знака.

101. Решити једначину: $z^4 - 7z^3 + 3z^2 + 37z - 10 = 0$, ако знамо да има два узајамно реципрочна решења.

102. Решити једначину $2z^5 - z^4 - 2z^3 + z^2 - 4z + 2 = 0$ ако је познато да има два пара супротних корена.

103. Решити по x, y, z систем једначина:

$$x + ay + a^2z = a^3$$
$$x + by + b^2z = b^3$$
$$x + cy + c^2z = c^3.$$

2.8 ЕКСПОНЕНЦИЈАЛНЕ ФУНКЦИЈЕ

За $a > 0$, на почетку ове главе, дефинисали смо степен са рационалним изложиоцем $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, $m \in Z$, $n \in N$. Ако је s ирационалан број, тада је могуће одредити цео број m и природан број k, тако да је $\frac{m}{10^k} < s < \frac{m+1}{10^k}$. Ова неједнакост нам омогућава апроксимацију ирационалног броја s децималним бројем $\frac{m}{10^k}$ или $\frac{m+1}{10^k}$. На основу тога уводимо степен са ирационалним изложиоцем, a^s, $a > 0$, чија је апроксимација $a^{\frac{m}{10^k}}$ или $a^{\frac{m+1}{10^k}}$.

Сада можемо дефинисати функцију

$$y = a^x \ , \ a > 0 \ \wedge \ a \neq 1$$

којом скуп $\Re$ пресликавамо на скуп $\Re^+$, у складу са дефиницијама степена. Према аргументу, као експоненту, ова функција се назива *експоненцијалном* (са основом a).

Експоненцијална функција је бијекција. Уверићемо са да је то строго растућа (за $a > 1$) или строго опадајућа (за $0 < a < 1$) функција.

Докажимо да $x_2 > x_1 \Rightarrow y_2 > y_1$ ($a^{x_2} > a^{x_1}$), ако је $a > 1$. Из $x_2 > x_1$, следи да је $x_2 - x_1 = \varepsilon > 0$. Тада је $a^{x_2} - a^{x_1} = a^{x_1}(a^{\varepsilon} - 1)$. Како је $a > 1$, то је за $\varepsilon > 0$ и $a^{\varepsilon} > 1$, па је $a^{\varepsilon} - 1 > 0$. Сем тога је и $a^{x_1} > 0$, па је $a^{x_2} - a^{x_1} > 0$, односно $a^{x_2} > a^{x_1}$, или $y_2 > y_1$. То потврђује да је функција $y = a^x$, за $a > 1$, строго растућа. Знамо и да је $a^0 = 1$, јер је $a \neq 0$.

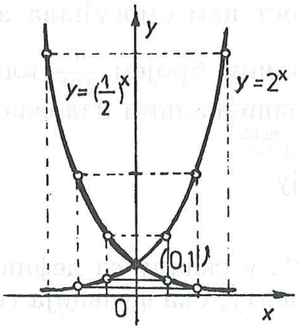
За $x < 0$, тј. $x = -\alpha$, $\alpha > 0$, је $a^x = a^{-\alpha} = \frac{1}{a^{\alpha}} < 1$, јер је $a^{\alpha} > 1$. Уколико се α драстично повећава, a^x ће се драстично смањивати. Можемо закључити да ће a^x тежити нули. Међутим, стално је $y > 0$. Дакле, ако је $a > 1$, функција $y = a^x$ је стално позитивна, мотоно растућа функција, која сече y - осу у тачки (0, 1). На сл. 11, дат је график функције $y = 2^x$, која испуњава све ове услове.

Ако је $0 < a < 1$, можемо узети $a = \frac{1}{b}$, $b > 1$, па ће функција $y = a^x = \frac{1}{b^x}$ имати, на неки начин, обрнуте карактеристике. Она је позитивна, сече y - осу у тачки (0, 1), као и у случају $a > 1$, али је монотоно опадајућа. Она расте неограничено када се x смањује. ($a^x \to +\infty$ кад $x \to -\infty$, ако је $0 < a < 1$, а ако је $a > 1$, тада $a^x \to +\infty$ кад $x \to +\infty$.) Ради илустрације ових тврђења приказан је график функције $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{2^x}$, сл. 11.

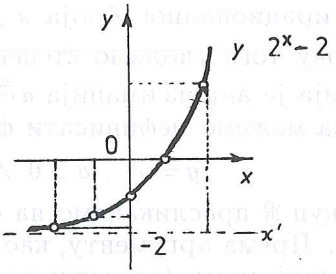
Обратимо пажњу и на следеће чињенице (видети сл. 11). Ако је $a > 1$, тада за $x > 0$ је $a^x > 1$, а за $x < 0$ је $0 < a^x < 1$.

Ако је $0 < a < 1$, тада за $x > 0$ је $0 < a^x < 1$ и за $x < 0$ је $a^x > 1$.

На сл. 12 је приказан график функције $y = 2^x - 2$. Ми смо користили координате тачака које смо израчунали за функцију $y = 2^x$, само смо праву x', $x' \parallel x$ (види слику), привремено искористили као апсцисну осу.



Сл. 11



Сл. 12

Графици на сл. 11 и сл. 12 се "приближавају" тзв. *асимптотама*, у овим случајевима оси Ox, односно правој x'. Хоризинтална асимптота је карактеристична за експоненцијалне функције.

Даље, проучићемо и *експоненцијалне једначине* и *неједначине*. Називамо их тако због непознате у изложиоцу (експоненту).

На основу особина експоненцијалне функције, једначине решавамо следећим принципом:

$$a^{f(x)} = a^{\varphi(x)} \iff f(x) = \varphi(x)$$
$$a^{f(x)} = b^{f(x)}\ ,\ a \neq b \iff f(x) = 0$$

Стога ћемо експоненцијалне једначине решавати или "свођењем на исте основе", или "свођењем на једнаке изложиоце". Често ћемо ове поступке олакшавати увођењем погодно одабраних смена.

Пример 29. Решити једначине:

а) $\sqrt{2^x\sqrt[3]{4^x\sqrt[x]{0.125}}} = 4\sqrt[3]{2}$; *б)* $3^{x+2} - 4\cdot 3^{x+1} + 3^{x-1} + 24 = 0$;
в) $9^{x^2-1} - 36\cdot 3^{x^2-3} + 3 = 0$; *г)* $\sqrt[x]{64} - 5\sqrt[x]{2^{x+3}} + 16 = 0$;
д) $3\cdot 16^x + 2\cdot 81^x = 5\cdot 36^x$; *ђ)* $\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^x + \left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^x = 10$;
е) $|\,x+2\,|^{x^2+3x} = (x+2)^{x+15}$.

Решење. *а)* Како је $4 = 2^2$ и $0.125 = \frac{1}{8} = 2^{-3}$, имаћемо: $\left(2^x\cdot\left(2^{2x}\cdot 2^{-\frac{3}{x}}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = 2^2\cdot 2^{\frac{1}{3}}$. После сређивања биће: $2^{\frac{5x^2-3}{6x}} = 2^{\frac{7}{3}}$, а одавде $\frac{5x^2-3}{6x} = \frac{7}{3}$. Даљим решавањем добијамо $x_1 = 3$, $x_2 = -\frac{1}{5}$.

б) $3^2\cdot 3^x - 4\cdot 3\cdot 3^x + \frac{3^x}{3} = -24$, односно $27\cdot 3^x - 36\cdot 3^x + 3^x = -72$, а одавде је $3^x = 9$, па је $x = 2$.

в) $\frac{9^{x^2}}{9} - 36 \cdot \frac{3^{x^2}}{3^3} + 3 = 0$. Уведемо смену: $3^{x^2} = t$. Како је $9 = 3^2$, то ће бити $9^{x^2} = t^2$. Сређивањем добијемо једначину: $t^2 - 12t + 27 = 0$, чија су решења $t_1 = 9$ и $t_2 = 3$. Сада из $3^{x^2} = 3^2$, добијемо $x^2 = 2$, тј. $x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$, а из $3^{x^2} = 3$, добијемо $x^2 = 1$, што даје $x_{3,4} = \pm 1$.

г) Знамо да је $64 = 2^6$, па имамо: $2^{\frac{6}{x}} - 5 \cdot 2^{\frac{x+3}{x}} + 16 = 0$, односно $2^{\frac{6}{x}} - 10 \cdot 2^{\frac{3}{x}} + 16 = 0$. Сменом $2^{\frac{3}{x}} = t$, добијамо: $t^2 - 10t + 16 = 0$, па је $t_1 = 2$ и $t_2 = 8$. Решења су $x_1 = 3$ и $x_2 = 1$.

д) Како је $16 = 2^4$, $81 = 3^4$ и $36 = 2^2 \cdot 3^2$, после дељења са $2^{2x} \cdot 3^{2x}$, добићемо: $3 \cdot \frac{2^{2x}}{3^{2x}} + 2 \cdot \frac{3^{2x}}{2^{2x}} = 5$. Сменом $\frac{2^{2x}}{3^{2x}} = t$, добијамо једначину: $3t + \frac{2}{t} = 5$, односно $3t^2 - 5t + 2 = 0$. Њена решења су $t_1 = 1$ и $t_2 = \frac{2}{3}$. Сада из $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} = 1$ добијамо $x_1 = 0$, а из $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} = \frac{2}{3}$, добијамо $x_2 = \frac{1}{2}$.

ђ) Видимо да је $\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^x \cdot \left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^x = \left(\sqrt{25-24}\right)^x = 1$. Одавде закључујемо да је $\sqrt{5-2\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{5+2\sqrt{6}}}$. Ако уведемо смену $\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^x = t$, добићемо: $t + \frac{1}{t} = 10$, итд. Решења су: $x_1 = 2$, $x_2 = -2$.

е) Решења добијамо: 1^o за $x + 2 = 1 \Rightarrow x_1 = 1$, јер је $1^n = 1$.
2^o за $x + 2 = 0 \ \wedge \ x^2 + 3x > 0 \ \wedge \ x + 15 > 0$, нема решења, јер за $x = -2$, лева страна има облик 0^{-2}, што је бесмислено.
3^o за $x + 2 = -1 \Rightarrow x = -3$, јер је $|-1|^0 = (-1)^{12}$
4^o $x^2 + 3x = x + 15 \ \wedge \ x + 2 \neq 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 15 = 0 \Rightarrow x_3 = 3$ и $x_4 = -5$. ♠

Приликом решавања *експоненцијалних неједначина*, морамо пазити да ли је основа степена $a > 1$ или $0 < a < 1$.

Пример 30. Решити неједначине

а) $\left(\frac{3}{5}\right)^{13x^2} \leq \left(\frac{3}{5}\right)^{x^4+36} < \left(\frac{3}{5}\right)^{12x^2}$; *б)* $8 \cdot 3^{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}} + 9^{\sqrt[4]{x}+1} \geq 9^{\sqrt{x}}$;

в) $\frac{1}{2^{2x}+3} \geq \frac{1}{2^{x+2}-1}$; *г)* $(x^2 - 8x + 15)^{x-6} < 1$.

Решење. *а)* Како је $\frac{3}{5} < 1$, биће $12x^2 < x^4 + 36 \leq 13x^2$. Резултат је: $-3 \leq x < -\sqrt{6} \ \vee \ -\sqrt{6} < x \leq -2 \ \vee \ 2 \leq x < \sqrt{6} \ \vee \ \sqrt{6} < x \leq 3$.

б) За $x \geq 0$ неједначину можемо написати у облику: $8 \cdot 3^{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}} + 9 \cdot 3^{2\sqrt[4]{x}} \geq 3^{2\sqrt{x}}$. Поделимо је са $3^{2\sqrt[4]{x}}$ и добићемо: $8 \cdot 3^{\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}} + 9 \geq 3^{2(\sqrt{x}-\sqrt[4]{x})}$. Уведимо смену: $3^{\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}} = t > 0$. Сада из $8t + 9 \geq t^2$, налазимо да је $0 < t \leq 9$, тј. $3^{\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}} \leq 9 = 3^2$. Одавде је $\sqrt{x} - \sqrt[4]{x} \leq 2$.

Ставимо $z = \sqrt[4]{x} > 0$, па је $z^2 - z \leq 2$. Решење ове неједначине је $0 \leq z \leq 2$, тј. $0 \leq \sqrt[4]{x} \leq 2$, па је коначно $0 \leq x \leq 16$.

в) Ако је $x < -2$, тада је $\dfrac{1}{2^{x+2}-1} < 0$ и неједначина је увек задовољена. Ако је $x > -2$, добијамо услов: $2^{2x} + 3 \leq 2^2 \cdot 2^x - 1$, односно, стављајући $2^x = t$, биће $t^2 - 4t + 4 \leq 0 \Leftrightarrow t = 2$. Одавде следи: $2^x = 2$, тј. $x = 1$. Решења су $x < -2 \ \vee \ x = 1$.

г) Неједначина има смисла за $0 < x^2 - 8x + 15 < 1$ или $x^2 - 8x + 15 > 1$. Случај $x^2 - 8x + 15 = 0$, тј. $x = 3 \ \vee \ x = 5$, није решење, јер даје $0^{-3} < 1 \ \vee \ 0^{-1} < 1$, што је бесмислено.

1^o $0 < x^2 - 8x + 15 < 1 \ \wedge \ x - 6 > 0$, нема решења

2^o $x^2 - 8x + 15 > 1 \ \wedge \ x - 6 < 0$, даје решења:
$x < 4 - \sqrt{2} \ \vee \ 4 + \sqrt{2} < x < 6$. ♠

ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

104. Решити једначине:

а) $2^{x^2-3} \cdot 5^{x^2-3} = 0.01 \cdot \left(10^{x-1}\right)^3$; *б)* $0.6^x \cdot \left(\dfrac{25}{9}\right)^{x^2-12} = \left(\dfrac{27}{125}\right)^3$;

в) $5^{2x-1} + 2^{2x} - 5^{2x} + 2^{2x+2} = 0$; *г)* $3 \cdot 4^x + \dfrac{1}{3} \cdot 9^{x+2} = 6 \cdot 4^{x+1} - \dfrac{1}{2} \cdot 9^{x+1}$;

д) $5^x - 5^{3-x} = 20$; *ђ)* $\left(\sqrt{7+\sqrt{48}}\right)^x + \left(\sqrt{7-\sqrt{48}}\right)^x = 14$;

е) $4^x + 9^x + 25^x = 6^x + 10^x + 15^x$; *ж)* $|\, 2^x - 1 \,| + |\, 2^x - 2 \,| = 1$;

з) $|\, x - 3 \,|^{x^2-x} = (x-3)^2$.

105. Решити неједначине:

а) $0.008^x + 5^{1-3x} + 0.04^{\frac{3}{2}(x+1)} < 30.04$; *б)* $0.5^{2\sqrt{x}} + 2 > 3 \cdot 0.5^{\sqrt{x}}$;

в) $2^x + 2^{-x+1} < 3$; *г)* $(x^2 + x + 1)^{\frac{x+5}{x+2}} > (x^2 + x + 1)^3$.

2.9 ЛОГАРИТМИ

Решавањем експоненцијалних једначина ми смо заправо увели нову операцију: тражимо изложилац којим треба степеновати основу да би се добила вредност степена. Ево кратког подсетника (са x ћемо означити број који треба израчунати):

1^o $2^5 = x$ $(x = 32$ - операција степеновања)

2^o $x^5 = 32$ $(x = \sqrt[5]{32} = 2$ - операција кореновања)

3^o $2^x = 32$ $(x = 5$ - уводимо нову операцију)

Нека је a реалан број, $a > 0$ и $a \neq 1$ и b позитиван број. Нека је x број, такав да је $a^x = b$. Овакав број x називамо *логаритам броја* b *за основу* a и означавамо: $x = \log_a b$. Дакле:

$$\boxed{a > 0 \ \wedge \ a \neq 1 \ , \ \text{за } b > 0 \quad \log_a b = x \ \Leftrightarrow \ a^x = b \ ,} \tag{20}$$

односно:

$$\boxed{a^{\log_a b} = b.} \tag{21}$$

Дакле, *логаритам броја* b (позитивног) *за основу* a *је изложилац којим треба степеновати основу* a, *да би се добио број* b (вредност степена - тзв. *логаритманд*).

Из дефиниције можемо закључити да је, нпр: $\log_a 1 = 0$, јер је $a^0 = 1$. Затим: $\log_a a = 1$, јер је $a^1 = a$, и сл. Логаритам се одликује многим важним особинама, од којих ћемо доказати најважније:

$$1^o \quad \boxed{a > 0 \text{ и } a \neq 1 \ , \ B > 0 \ , \ C > 0: \ \log_a B \cdot C = \log_a B + \log_a C} \tag{22}$$

$$2^o \quad \boxed{a > 0 \text{ и } a \neq 1 \ , \ b > 0 \ , \ \alpha, \ \beta \in \Re \ , \ \alpha \neq 0: \ \log_{a^\alpha} b^\beta = \frac{\beta}{\alpha} \log_a b} \tag{23}$$

$$3^o \quad \boxed{a > 0 \text{ и } a \neq 1 \ , \ c > 0 \text{ и } c \neq 1 \ , \ b > 0: \ \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}} \tag{24}$$

Доказ. 1^o По дефиницији је: $a^{\log_a BC} = BC = a^{\log_a B} \cdot a^{\log_a C} = a^{\log_a B + \log_a C} \Rightarrow \log_a BC = \log_a B + \log_a C$.

2^o Нека је $\log_{a^\alpha} b^\beta = M$. Тада је по дефиницији: $(a^\alpha)^M = b^\beta$, односно $a^{\alpha M} = b^\beta$, или $\left(a^{\frac{\alpha M}{\beta}}\right)^\beta = b^\beta$. Одавде закључујемо да је $a^{\frac{\alpha M}{\beta}} = b = a^{\log_a b} \Rightarrow \dfrac{\alpha}{\beta} M = \log_a b$, односно $M = \dfrac{\beta}{\alpha} \log_a b$. Заменимо M и добијамо тврђење 2^o.

3^o Уведимо ознаку $\beta = \log_a b$. По дефиницији је $a^{\log_a b} = b$, тј. $a^\beta = b$. Логаритмовањем ове једнакости по основи c, добијамо: $\log_c a^\beta = \log_c b$. Према особини 2^o $\log_c a^\beta = \beta \log_c a$, па имамо:

$$\beta \log_c a = \log_c b \Rightarrow \beta = \frac{\log_c b}{\log_c a}, \text{ тј. } \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}. \ \spadesuit$$

Као последице доказаних особина, можемо добити још неке формуле. При доказивању последње особине, видели смо да се из 2^o, узимајући $\alpha = 1$, добија:

$$\boxed{a > 0 \ \wedge \ a \neq 1 \ , \ b > 0 \ , \ \beta \in \Re: \ \log_a b^\beta = \beta \log_a b} \tag{25}$$

Ако у 2^o узмемо да је $\beta = \alpha$, добићемо:

$$\boxed{a > 0 \ \wedge \ a \neq 1 \ , \ b > 0 \ , \ \alpha \in \Re: \ \log_{a^\alpha} b^\alpha = \log_a b} \tag{26}$$

Такође из 2^o, за $\beta = 1$, добићемо:

$$a > 0 \ \wedge \ a \neq 1 \ , \ b > 0 \ , \ \alpha \neq 0 : \ \log_{a^\alpha} b = \frac{1}{\alpha} \log_a b \tag{27}$$

Комбинујући 1^o и 2^o, имамо: $\log_a AB^{-1} = \log_a A - \log_a B$, тј.

$$a > 0 \ \wedge \ a \neq 1 \ , \ A > 0 \ , \ B > 0 : \ \log_a \frac{A}{B} = \log_a A - \log_a B \tag{28}$$

Ако у 3^o заменимо $c = b$, тада због $\log_b b = 1$, имамо:

$$a > 0 \ \wedge \ a \neq 1 \ , \ b > 0 \ \wedge \ b \neq 1 : \ \log_a b = \frac{1}{\log_b a} \tag{29}$$

Све наведене формуле се сматрају еквиваленцијама и могу се користити слева надесно и здесна налево.

Из практичних и теоријских разлога постоје посебно одабране основе логаритама. Стандардно се користе *декадни* логаритами (са основом $a = 10$) и *природни* логаритми (којима је основа број e).*) Ознака за *декадни* логаритам је *log*, а за природни *ln*.

Пример 31. Израчунати:

а) $\log_6 16$, ако је $\log_{12} 2 = a$; *б)* $\log_{30} 8$, ако је $\log 5 = a$ и $\log 3 = b$;

в) $10^{0.5 - \log\,(0.375\sqrt{10})} - \log_2 0.0625$;

г) $\log_{a+b} m + \log_{a-b} m - 2 \log_{a+b} m \cdot \log_{a-b} m$, ако је $m^2 = a^2 - b^2$.

Решење. *а)* $\log_6 16 = \dfrac{\log_{12} 16}{\log_{12} 6} = \dfrac{\log_{12} 2^4}{\log_{12} \dfrac{12}{2}} = \dfrac{4a}{1-a}$.

б) $\log_{30} 8 = \dfrac{\log 8}{\log 30} = \dfrac{3 \log 2}{1 + \log 3} = \dfrac{3 \log \dfrac{10}{5}}{1 + \log 3} = \dfrac{3(1-a)}{1+b}$.

в) $10^{\frac{1}{2}} \cdot 10^{\log(0.375\sqrt{10})^{-1}} - \log_2 \dfrac{1}{16} = \dfrac{\sqrt{10}}{0.375\sqrt{10}} - \log_2 2^{-4} = \dfrac{8}{3} + 4 = \dfrac{20}{3}$.

г) Ради једноставнијег записивања замениђемо у погодном моменту: $\log_{a+b} m = P$ и $\log_{a-b} m = Q$:

$P + Q - (\log_{a+b} m^2) \cdot Q = P + Q - Q \cdot \log_{a+b}(a^2 - b^2) =$

$= P + Q - Q\left(\log_{a+b}(a-b) + 1\right) = P + Q - Q\left(\dfrac{\log_m(a-b)}{\log_m(a+b)} + 1\right) =$

$= P + Q - Q \cdot \dfrac{\log_{a+b} m}{\log_{a-b} m} - Q = P - Q \cdot \dfrac{P}{Q} = 0.$ ♠

---

*) Број e је ирационалан, $e = 2.718\ldots$ О њему ће посебно бити говора у ГЛАВИ ЧЕТВРТОЈ

Пример 32. Доказати да је:

а) $\log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \cdot \log_6 5 \cdot \log_7 6 \cdot \log_8 7 = \frac{1}{3}$;

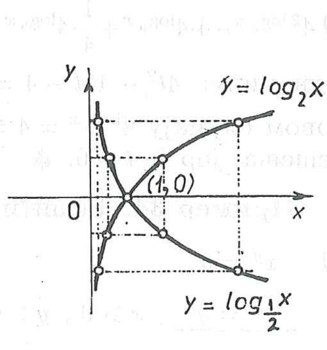
б) $a = 8^{\frac{1}{1-\log_8 c}}$, ако је $b = 8^{\frac{1}{1-\log_8 a}}$ и $c = 8^{\frac{1}{1-\log_8 b}}$;

в) $20^{\log 5} = 5^{\log 20}$; *г)* $(\log_2 3)^{-1} + (\log_4 3)^{-1} < 2$; *д)* $\dfrac{\log_a N}{\log_b N} = \log_a b$.

Решење. *а)* Применимо особину (24):
$$\frac{\log_2 2}{\log_2 3} \cdot \frac{\log_2 3}{\log_2 4} \cdot \frac{\log_2 4}{\log_2 5} \cdot \frac{\log_2 5}{\log_2 6} \cdot \frac{\log_2 6}{\log_2 7} \cdot \frac{\log_2 7}{\log_2 8} = \frac{\log_2 2}{\log_2 2^3} = \frac{1}{3}.$$
б) Логаритмујемо за основу 8, једнакости за a, b и c. Добићемо: $\log_8 a = \dfrac{1}{1-\log_8 c}$, $\log_8 b = \dfrac{1}{1-\log_8 a}$ и $\log_8 c = \dfrac{1}{1-\log_8 b}$. Уведимо ознаке $\log_8 a = A$, $\log_8 b = B$ и $\log_8 c = C$. Треба доказати да из $B = \dfrac{1}{1-A}$ и $C = \dfrac{1}{1-B}$, следи $A = \dfrac{1}{1-C}$. Заиста, ако B заменимо у $C = \dfrac{1}{1-B}$ и решимо по A, добићемо: $A = \dfrac{1}{1-C}$.
в) По дефиницији је $20^{\log 5} = 10^{\log 20^{\log 5}} = 10^{\log 5 \cdot \log 20} = \left(10^{\log 5}\right)^{\log 20} = 5^{\log 20}$.
г) $\dfrac{1}{\log_2 3} + \dfrac{1}{\log_4 3} = \log_3 2 + \log_3 4 = \log_3 8 < \log_3 9 = 2.$
д) Једнакост $b^{\log_b N} = N$ логаритмујемо по основи a: $\log_a b^{\log_b N} = \log_a N$, односно $\log_b N \cdot \log_a b = \log_a N$. Одавде је $\dfrac{\log_a N}{\log_b N} = \log_a b$. ♠

Као што смо се уверили у претходном одељку, експоненцијална функција $y = a^x$, $a > 0$ и $a \neq 1$, је строго монотона, па је инверзибилна. По дефиницији логаритма функцији $y = a^x$ инверзна је функција:
$$y = \log_a x \quad , \quad a > 0 \; , \; a \neq 1 \; .$$
То је *логаритамска функција.* Она је строго монотона, и то растућа за $a > 1$, а опадајућа за $0 < a < 1$. (На сл. 13 дати су графици функција $y = \log_2 x$ и $y = \log_{0.5} x$.)

Због $\log_a 1 = 0$, графици пролазе кроз тачку (1, 0). Особине ове функције уочавамо непосредно на графику . Користићемо их нарочито код решавања неједначина.



Сл. 13

За решавање *логаритамских је-*

днaчина користићемо се обилато особинама (20) – (29) . Неке експоненцијалне једначине, које садрже непознату у основи и у изложиоцу, логаритмовањем сводимо на логаритамске једначине. Често ћемо се користити и увођењем смене.

Пример 33. Решити једначине:

а) $\log_\pi \log_2 \log_7 x = 0$; *б)* $\log_{1-x} 3 - \log_{1-x} 2 - \frac{1}{2} = 0$;

в) $\log_x \sqrt{5} + \log_x 5x - 2\frac{1}{4} = (\log_x \sqrt{5})^2$; *г)* $x^{\log_{x^2}(x^2-1)} = 5$;

д) $\log_2 x + \log_3 x + \log_4 x = 1$; *ђ)* $4^{\log_5 x^2} - 4^{\log_5 x+1} + 4^{\log_5 x-1} = 1$.

Решење. *а)* $\log_2 \log_7 x = \pi^0 = 1 \Rightarrow \log_7 x = 2 \Rightarrow x = 49$.

б) За $1-x > 0$ и $x \neq 0$, тј. за $x \in (-\infty, 0) \cup (0, 1)$, имамо: $\log_{1-x} \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \sqrt{1-x} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{5}{4}$.

в) За $x > 0$ и $x \neq 1$ имамо: $\frac{1}{2}\log_x 5 + \log_x 5 + \log_x x - \frac{9}{4} = \frac{1}{4}\log_x^2 5$. Сменом $\log_x 5 = t$, добијамо $t^2 - 6t + 5 = 0$, одакле је $t_1 = 1$ и $t_2 = 5$. Из $\log_x 5 = 1$, добијамо $x_1 = 5$, а из $\log_x 5 = 5$, добијамо $x^5 = 5$, па је $x_2 = \sqrt[5]{5}$.

г) За $x > 1$ имамо: $\log_5 x^{\log_{x^2}(x^2-1)} = \log_5 5 \Leftrightarrow \log_{x^2}(x^2-1) \cdot \log_5 x = 1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \dfrac{\log_5(x^2-1)}{\log_5 x^2} \cdot \log_5 x = 1 \Leftrightarrow \dfrac{\log_5(x^2-1)}{2\log_5 x} \cdot \log_5 x = 1 \Leftrightarrow \log_5(x^2-1) = 2 \Leftrightarrow$ $x^2 - 1 = = 5^2$. Одавде је $x = \sqrt{26}$.

д) За $x > 0$, извучемо пред заграду $\log_4 x$ и добијемо:

$$\log_4 x \left(\frac{\log_2 x}{\log_4 x} + \frac{\log_3 x}{\log_4 x} + 1 \right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \log_4 x \left(\frac{\log_x 4}{\log_x 2} + \frac{\log_x 4}{\log_x 3} + 1 \right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \log_4 x(\log_2 4 + \log_3 4 + 1) = 1$$

$$\Leftrightarrow \log_4 x = \frac{1}{3 + 2\log_3 2} \Rightarrow x = 2^{\frac{2}{3+2\log_3 2}}.$$

ђ) $4^{2\log_5 x} - 4 \cdot 4^{\log_5 x} + \frac{1}{4} \cdot 4^{\log_5 x} = 1$, $x > 0$. Сменом $4^{\log_5 x} = t > 0$, добићемо једначину: $4t^2 - 15t - 4 = 0$, која даје решења $t_1 = 4$, $t_2 = -\frac{1}{4}$. У првом случају $4^{\log_5 x} = 4 \Rightarrow \log_5 x = 1 \Rightarrow x_1 = 5$. Други случај не даје решења, јер је $t > 0$. ♠

Пример 34. Решити систем једначина:

а) $x^y = y^x$, $x^3 = y^2$, $x > 0$, $y > 0$

б) $\log_y x - \log_x y = \frac{8}{3}$, $xy = 16$, $x > 0$, $y > 0$

Решење. *а)* Логаритмујемо са основом 10 обе једначине:

$$\frac{\begin{array}{c} y\log x = x\log y \\ 3\log x = 2\log y \end{array}}{}$$

Поделимо прву једначину другом: $\dfrac{y}{3} = \dfrac{x}{2}$, односно $y = \dfrac{3}{2}x$. Ово заменимо у другу једначину: $x^3 = \dfrac{9}{4}x^2 \Rightarrow x_1 = \dfrac{9}{4}$ и $y_1 = \dfrac{27}{8}$. Осим овога постоји и очигледно решење: $x_2 = y_2 = 1$.

б) Из прве једначине добијамо: $\log_y x - \dfrac{1}{\log_y x} = \dfrac{8}{3}$ одакле је $3\log_y^2 x - 8\log_y x - 3 = 0$. Одавде је: $\log_y x = 3$ или $\log_y x = -\dfrac{1}{3}$, тј. $x = y^3$ или $y = x^{-3}$. Заменимо у другу једначину и добијемо решења: $x_1 = 8$, $y_1 = 2$ и $x_2 = \dfrac{1}{4}$, $y_2 = 64$. ♠

Приликом решавања логаритамских неједначина водимо рачуна о рашћењу и опадању логаритамске функције за $a > 1$, односно за $0 < a < 1$. Тако имамо, ако је $0 < a < 1$:

$$\log_a f(x) < \log_a \varphi(x) \ \Leftrightarrow\ f(x) > \varphi(x) \ \wedge\ \varphi(x) > 0\ ;$$

ако је $a > 1$:

$$\log_a f(x) < \log_a \varphi(x) \ \Leftrightarrow\ f(x) < \varphi(x) \ \wedge\ f(x) > 0\ .$$

Пример 35. Решити неједначине:

а) $\dfrac{1-\log_4 x}{1+\log_2 x} \le \dfrac{1}{2}$, $x > 0$; *б)* $\log_x \log_2(4^x - 12) \le 1$;

в) $\log_{\frac{1}{2}}(x-3) - \log_{\frac{1}{2}}(x+3) - \log_{\frac{x+3}{x-3}} 2 > 0$; *г)* $\log_{x-3}(x^2 - 4x + 3) < 0$.

Решење. *а)* $\dfrac{1-\frac{1}{2}\log_2 x}{1+\log_2 x} \le \dfrac{1}{2}$. Уведемо смену: $\log_2 x = t$ и добијамо: $\dfrac{1-\frac{1}{2}t}{1+t} \le \dfrac{1}{2}$. Решење ове неједначине је $(t < -1 \ \vee\ t \ge \frac{1}{2})$, па је $\log_2 x < -1 \Leftrightarrow 0 < x < \dfrac{1}{2}$, а $\log_2 x \ge \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x \ge \sqrt{2}$.

б) Морају бити испуњени услови: $(x > 0,\ x \ne 1$ и $\log_2(4^x - 12) > > 0) \Leftrightarrow 4^x - 12 > 1 \Leftrightarrow x > \log_2\sqrt{13}$. Тада имамо: $\log_2(4^x - 12) \le x \Rightarrow \Rightarrow 4^x - 12 \le 2^x$. Уведемо смену $2^x = t$, па је $t^2 - t - 12 \le 0 \Leftrightarrow 0 < t \le 4$, итд. Решење је $\log_2\sqrt{13} < x \le 2$.

в) За $x > 3$, неједначина има смисла. Имамо $\log_{\frac{1}{2}} \dfrac{x-3}{x+3} - -\dfrac{1}{\log_2 \frac{x+3}{x-3}} > 0$, тј. $\log_2 \dfrac{x+3}{x-3} - \dfrac{1}{\log_2 \frac{x+3}{x-3}} > 0$. Стављајући $t = \log_2 \dfrac{x+3}{x-3}$, добијамо $t - \dfrac{1}{t} > 0$, итд. Решење је $3 < x < 9$.

г) Неједначина има смисла за $x \in (3,\ 4) \cup (4,\ +\infty)$ (јер је $x-3>0 \ \wedge \ x-3 \neq 0 \ \wedge \ x^2-4x+3>0$). Ако је $x \in (3,\ 4)$, добијамо $x^2-4x+3>1$, па су решења $x \in (2+\sqrt{2},\ 4)$. За $x>4$ нема решења. ♠

ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

106. Израчунати:

а) $\log_{\sqrt[3]{5}} 6.125$, ако је $\log_{25} 7 = a$ и $\log_2 5 = b$;

б) $\log_c x$, ако је $\log_a x = p$, $\log_b x = q$ и $\log_{abc} x = r$; *в)* $343^{1-2\log_{49}14}$.

107. Доказати:

а) Ако је $a>0$ и $b>0$, из $a^2+b^2=7ab$ следи: $\log\dfrac{a+b}{3} = \dfrac{1}{2}(\log a + \log b)$.

б) Ако су a, b, c позитивни бројеви различити од 1 и $ab \neq 1$, тада је: $\dfrac{\log_a c - \log_b c}{\log_a c + \log_b c} = \log_{ab}\dfrac{b}{a}$.

в) Ако су a, b, c, x позитивни бројеви различити од 1, тада је: $\log_a x \cdot \log_b x + \log_b x \cdot \log_c x + \log_c x \cdot \log_a x = \dfrac{\log_a x \cdot \log_b x \cdot \log_c x}{\log_{abc} x}$.

г) Ако је $\dfrac{\log_a x}{\log_c x} = \dfrac{\log_a x - \log_b x}{\log_b x - \log_c x}$, онда је $b^2 = a \cdot c$.

д) $(\log_2 \pi)^{-1} + (\log_5 \pi)^{-1} > 2$; *ђ)* $\log_7 8 < \log_6 7$.

108. Решити једначине:

а) $\log_4(2-x)\cdot\log_x 2 = 1$; *б)* $\log_x 2 \cdot \log_{2x} 2 = \log_{4x} 2$;

в) $\dfrac{1}{\log_6(x+3)} + \dfrac{2\log_{\frac{1}{4}}(4-x)}{\log_2(x+3)} = 1$; *г)* $\log_{0,5x} x^2 - 14\log_{16x} x^3 + 40\log_{4x}\sqrt{x} = 0$

д) $x^{\frac{\log x+5}{3}} = 10^{5+\log x}$.

109. Решити системе једначина:

а) $\log_2 x \cdot \log_x(x-3y) = 2$
$x \cdot y^{\log_x y} = y^{\frac{5}{2}}$

б) $y^{x^3+x+2} = 1$
$x + y = 3$

в) $\log_2 x + \log_4 y + \log_4 z = 2$
$\log_3 y + \log_9 z + \log_9 x = 2$
$\log_4 z + \log_{16} x + \log_{16} y = 2$

110. Решити неједначине:

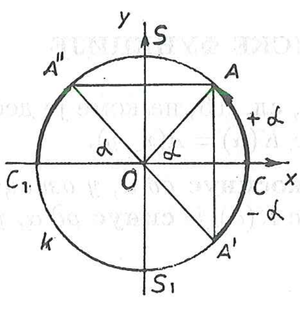
а) $\log_{\frac{1}{3}} \log_4(x^2-5) > 0$; *б)* $\log_2 \log_3 \dfrac{x+1}{x-1} < \log_{\frac{1}{2}} \log_{\frac{1}{3}} \dfrac{x-1}{x+1}$;

в) $\log_{\frac{1}{16}(25-x^2)}\left(\dfrac{24-2x-x^2}{14}\right) \geq 1$; *г)* $\log_{x^2-1}(3x-1) < \log_{x^2-1} x^2$;

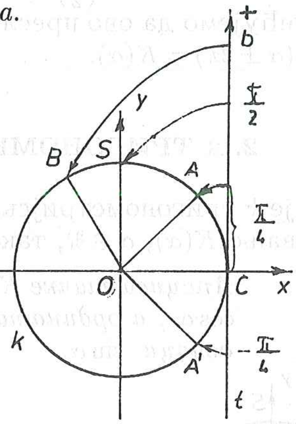
д) $\log_x(x+1) < \log_{\frac{1}{x}}(2-x)$.

2.10 ТРИГОНОМЕТРИЈА*)

Уочимо неке чињенице на које ћемо се ослањати у обради тригонометрије. Нека је у координатној равни xOy дат круг полупречника дужине 1, са центром O, сл. 14. Назваћемо га *тригонометријским кругом*. Пресечне тачке круга и координатних оса означимо са $C(1,\ 0)$, $S(0,\ 1)$, $C_1(-1,\ 0)$ и $S_1(0,\ -1)$. Координатним осама је круг подељен на *четири квадранта*.



Сл. 14



Сл. 15

Централном углу COA одговара лук $\widehat{CA}$ дужине α. (Видети у ПРВОЈ ГЛАВИ о лучној мери угла.) За лук $\widehat{CA}$ кажемо да је позитивно оријентисан ако је троугао OCA позитивно оријентисан. Позитивно оријентисан лук означавамо са $+\alpha$, а негативан, на пример, са $-\beta$. (Троугао OCA је позитивно оријентисан ако "при обилажењу" дуж страница, редом од O до C, од C до A, од A до O, троугаона површ остаје с леве стране.)

Пуном углу одговора лук дужине 2π, опруженом π, а правом углу $\dfrac{\pi}{2}$. Запазимо још да луковима $+\alpha$ и $-\alpha$ одговарају тачке A и A', симетричне у односу на осу Ox, а луковима α (није битно да ли је $+\alpha$ или $-\alpha$) и $\pi-\alpha$ одговарају тачке A и A'', симетричне у односу на осу Oy.

Нека је t тангента тригонометријског круга у тачки C. Узмимо праву t за бројну осу, тако да тачкама изнад C одговарају позитивни, а испод C негативни реални бројеви. Дефинишимо пресликавање реалних бројева α са осе t на тачке тригонометријског круга k, тако да дужина одсечка бројне осе за број α, буде једнака дужини

*) Основни појмови о тригонометријским функцијама углова изучавају са у *I* разреду. Због сажимања излагања и усклађивања са излагањем у *II* разреду, овде је обрађена комплетна тригонометрија.

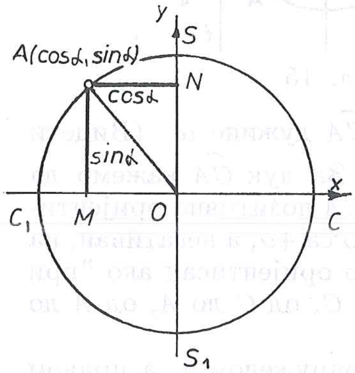
лука од C до одговарајуће тачке на кругу. При томе, позитивном броју α одговара позитивно оријентисан лук, и обратно. Ако је $\alpha > 2\pi$, одговарајући лук добијамо "обилазећи" пун круг и даље у истом смеру, ако треба и више пута, све док "дужина путање", не буде једнака броју α. На тај начин је дефинисано пресликавање: $\Re \longrightarrow k$, у ознаци: $K(\alpha) = T(x,\ y)$, где су x и y координате тачке T круга k. На пример $K\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = S(0,\ 1)$, $K(0) = C(1,\ 0) = K(2\pi)$.

Примећујемо да ово пресликавање није обострано једнозначно, него је $K(\alpha \pm 2\pi) = K(\alpha)$.

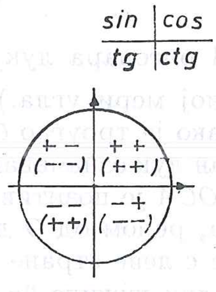
2.11 ТРИГОНОМЕТРИЈСКЕ ФУНКЦИЈЕ

Нека је k тригонометријски круг, сл. 16, на коме је дефинисано пресликавање $K(\alpha)$, $\alpha \in \Re$, тако да је $K(\alpha) = A(x,\ y)$.

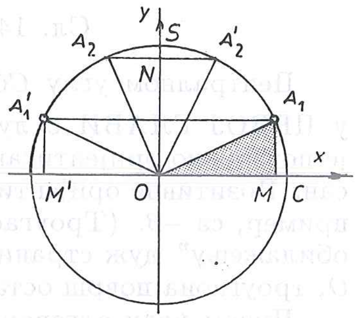
Апсциса тачке $K(\alpha)$ *је* **косинус** *од* α, *у ознаци:* $\cos\alpha$, *а ордината тачке* $K(\alpha)$ *је* **синус** *од* α, *у ознаци* $\sin\alpha$.



Сл. 16



Сл. 17



Сл. 18

Синус и косинус су *тригонометријске функције*, које су ограничене, јер је $|\,OA\,| = 1$, па је $|\,\sin\alpha\,| \le 1$ и $|\,\cos\alpha\,| \le 1$.

Дефинисаћемо још две тригонометријске функције, *тангенс* и *котангенс*, у ознаци $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$.

$$(30) \qquad \boxed{\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\ ,\ \text{за}\ \cos\alpha \ne 0\ ,\ \ \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\ ,\ \text{за}\ \sin\alpha \ne 0}$$

По дефиницији важи: $\boxed{\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1}$.

Како бројевима $K(\alpha)$ и $K(-\alpha)$ одговарају тачке симетричне у односу на осу Ox, то можемо закључити:

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha\ ,\ \cos(-\alpha) = \cos\alpha\ ,\ \operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha\ ,\ \operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha\ ,$$

тј. *само је косинус парна функција. Остале су непарне.*

Према положају тачке $K(\alpha)$ у координатном систему, одређујемо знак синуса и косинуса, а тиме и знак тангенса и котангенса. (Видети сл. 17.)

Специјално према координатама тачака C, S, C_1 и S_1, на сл. 16, је:

$$\sin 0 = 0 \ , \ \sin\frac{\pi}{2} = 1 \ , \ \sin\pi = 0 \ , \ \sin\frac{3\pi}{2} = -1 \ \text{ и } \ \sin 2\pi = 0 \ .$$

$$\cos 0 = 1 \ , \ \cos\frac{\pi}{2} = 0 \ , \ \cos\pi = -1 \ , \ \cos\frac{3\pi}{2} = 0 \ \text{ и } \ \cos 2\pi = 1 \ .$$

Ако је A било која друга тачка тригонометријског круга, M и N подножја нормала из A на Ox и Oy, тада из троугла OAM, на основу Питагорине теореме добијамо: $AM^2 + MO^2 = OA^2$, тј.

$$\boxed{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1} \tag{31}$$

Лако се проверава да ова једнакост важи и за тачке C, S, C_1 и S_1. Дакле, једнакост (31) важи за сваки реалан број α.

На основу дефиниције пресликавања $K(\alpha)$, закључујемо да су синус и косинус периодичне функције са *основном периодом* $T = 2\pi$:

$$\sin(\alpha \pm 2\pi) = \sin\alpha \quad , \quad \cos(\alpha \pm 2\pi) = \cos\alpha$$

Функције $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ имају основну периоду $T = \pi$, тј:

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \pi) = \operatorname{tg}\alpha \text{ и } \operatorname{ctg}(\alpha \pm \pi) = \operatorname{ctg}\alpha.$$

Тригонометријске функције можемо изразити преко вредности функција, за које је $K(\alpha)$ из првог квадранта: $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Уочимо најпре троуглове OA_1M и $OA_2'N$, сл. 18, такве да је лук $A_2'S$ једнак луку CA_1. Лако се доказује подударност ових троуглова, па је:

$$\sin\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \ \text{ и } \ \cos\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right),$$

(тј. $A_1M = NA_2'$ и $OM = ON$) а на основу тога и:

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \ \text{ и } \ \operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right).$$

Сада можемо израчунати, на пример $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$ (на слици 18 $K\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$ се пресликава у A_2):

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - (-\alpha)\right) = \cos(-\alpha) = \cos\alpha.$$

Слично добијамо:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\alpha \ , \ \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{ctg}\alpha \ , \ \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{tg}\alpha \ .$$

Из подударности троуглова OMA_1 и $OM'A_1'$, сл. 18, водећи рачуна о знаку координата, добијамо:

$$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha \quad , \quad \cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha \ ,$$
$$\operatorname{tg}(\pi-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha \quad , \quad \operatorname{ctg}(\pi-\alpha)=-\operatorname{ctg}\alpha \ .$$

Често кажемо да су $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ једна другој *кофункције*, а такође, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ међусобно. Нека је $f(\alpha)$ нека од тригонометријских функција, а $cof(\alpha)$ њена кофункција. Тада формула (коју нећемо даље образлагати):

$$(32) \qquad \boxed{f\left(n\cdot\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right)=\begin{cases}\pm f(\alpha) & , \ \textit{за } n=2k\\ \pm cof(\alpha) & , \ \textit{за } n=2k-1\end{cases}}$$

даје општу везу за тзв. *свођење на први квадрант.* Знак + или − на десној страни једнакости одређује се према сл. 17, зависно од знака функције f у квадранту у којем је тачка $K\left(n\cdot\dfrac{\pi}{2}\pm\alpha\right)$.

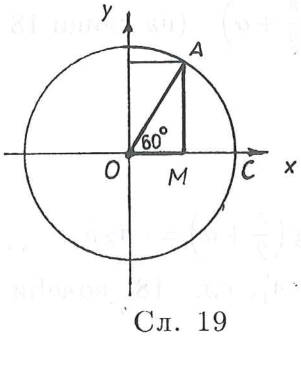
Сада се можемо уверити да је *основна периода* тангенса и котангенса $T=\pi$. Заиста:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\pi)=\frac{\sin(\alpha+\pi)}{\cos(\alpha+\pi)}=\frac{-\sin\alpha}{-\cos\alpha}=\operatorname{tg}\alpha. \text{ Слично: } \operatorname{ctg}(\alpha+\pi)=\operatorname{ctg}\alpha.$$

Пример 36. Израчунати тригонометријске функције од $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$.

Решење. Нека је $K\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=A$, сл. 19, и нека је M подножје нормале из A на осу Ox. Луку CA одговара централни угао од 60^o, па је правоугли троугао OMA половина једнакостраничног троугла странице 1, и координате тачке A су: $x=\dfrac{1}{2}=\cos\dfrac{\pi}{3}$ и $y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sin\dfrac{\pi}{3}$. Даље израчунамо: $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{3}=\sqrt{3}$, $\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. ♠

Поступајући слично налазимо вредности функција за $\alpha=\dfrac{\pi}{6}$ и $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$. Погледајмо те, и још неке вредности, приложене десно у таблици. Ову таблицу треба одмах запамтити, јер ћемо у противном убудуће често замуцкивати.



Сл. 19

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	∞	0
$\operatorname{ctg}\alpha$	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	∞	0	∞

Пример 37. Доказати идентичности (аргументи су дати тако да су сви изрази дефинисани).

а) $\dfrac{1-2\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\alpha$; *б)* $\dfrac{\operatorname{tg}\beta}{\cos\beta}+\dfrac{1}{1+\sin\beta}=\dfrac{1}{\cos^2\beta}$;

в) $2\sin^4\alpha-8\sin^4\alpha\cos^2\alpha+3\sin^2\alpha-6\sin^2\alpha\cos^2\alpha-3\cos^2\alpha+3=8\sin^6\alpha$.

Решење.

а) $\dfrac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-2\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=\dfrac{\sin^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}-\dfrac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\alpha$.

б) $\dfrac{\sin\beta}{\cos^2\beta}+\dfrac{1}{1+\sin\beta}=\dfrac{\sin\beta}{1-\sin^2\beta}+\dfrac{1}{1+\sin\beta}=\dfrac{\sin\beta+1-\sin\beta}{(1-\sin\beta)(1+\sin\beta)}=$
$=\dfrac{1}{1-\sin^2\beta}=\dfrac{1}{\cos^2\beta}$.

в) Заменимо из (31): $\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$, па добијемо: $2\sin^4\alpha-8\sin^4\alpha+$ $+8\sin^6\alpha+3\sin^2\alpha-6\sin^2\alpha+6\sin^4\alpha-3+3\sin^2\alpha+3=8\sin^6\alpha$. ♠

Пример 38. Израчунати:

а) $\sin\alpha,\ \cos\alpha,\ \operatorname{ctg}\alpha$, ако је $\operatorname{tg}\alpha=3\dfrac{3}{7}$, $\alpha\in\left[\pi,\ \dfrac{3\pi}{2}\right]$;

б) $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha$, ако је $\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha=2$; *в)* $\dfrac{\cos\dfrac{17\pi}{6}\cdot\sin\dfrac{7\pi}{3}\cdot\operatorname{tg}\dfrac{17\pi}{4}}{\operatorname{ctg}\dfrac{10\pi}{3}\cdot\cos\dfrac{7\pi}{4}\cdot\sin\dfrac{8\pi}{3}}$;

г) $\dfrac{a^2\operatorname{tg}(\pi+\alpha)+b^2\operatorname{ctg}\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)}{-a\operatorname{tg}\left(\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)+b\operatorname{tg}\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)}-(a+b)\operatorname{tg}^2(2\pi-\alpha)$.

Решење. *а)* $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{24}{7}\Rightarrow\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{7}{24}$. Даље из $\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\dfrac{576}{49}$, односно $\dfrac{\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}=\dfrac{576}{49}$, добијамо: $\sin^2\alpha=\dfrac{576}{625}$, одакле је $\sin\alpha=-\dfrac{24}{25}$, (трећи квадрант). Сада лако налазимо: $\cos\alpha=-\dfrac{7}{25}$.

б) $\operatorname{tg}^2\alpha+2+\operatorname{ctg}^2\alpha=4\Rightarrow(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)^2=4\Rightarrow\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha=\pm2$.

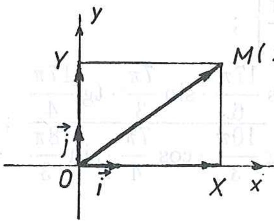
в) $\dfrac{\cos\left(3\pi-\dfrac{\pi}{6}\right)\cdot\sin\left(2\pi+\dfrac{\pi}{3}\right)\cdot\operatorname{tg}\left(4\pi+\dfrac{\pi}{4}\right)}{\operatorname{ctg}\left(3\pi+\dfrac{\pi}{3}\right)\cdot\cos\left(2\pi-\dfrac{\pi}{4}\right)\cdot\sin\left(3\pi-\dfrac{\pi}{3}\right)}=\dfrac{-\cos\dfrac{\pi}{6}\cdot\sin\dfrac{\pi}{3}\cdot\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4}}{\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{3}\cdot\cos\dfrac{\pi}{4}\cdot\sin\dfrac{\pi}{3}}=$

$=\dfrac{-\dfrac{\sqrt3}{2}\cdot\dfrac{\sqrt3}{2}\cdot1}{\dfrac{\sqrt3}{3}\cdot\dfrac{\sqrt2}{2}\cdot\dfrac{\sqrt3}{2}}=-\dfrac{3\sqrt2}{2}$.

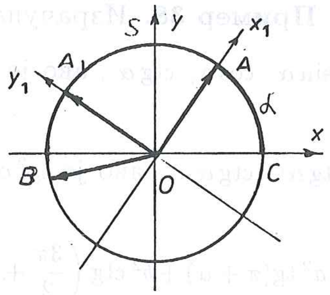
г) $\dfrac{a^2 \operatorname{tg}\alpha - b^2 \operatorname{tg}\alpha}{a \operatorname{ctg}\alpha - b \operatorname{ctg}\alpha} - (a+b)\operatorname{tg}^2\alpha = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha}(a+b) - (a+b)\operatorname{tg}^2\alpha =$
$= (a+b)\operatorname{tg}^2\alpha - (a+b)\operatorname{tg}^2\alpha = 0.$ $\left(\operatorname{tg}\left(\alpha - \dfrac{\pi}{2}\right) = \operatorname{tg}\left(-\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right)\right) = \right.$
$\left. = -\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = -\operatorname{ctg}\alpha\right.$, и сл.).♠

2.12 АДИЦИОНЕ И СЛИЧНЕ ФОРМУЛЕ

Нека је у координатној равни xOy дата тачка $M(x,\ y)$. Уочимо вектор $\overrightarrow{OM}$, сл. 20. Ако са $\vec{i}$ и $\vec{j}$ означимо јединичне векторе оса Ox и Oy , тада је $\overrightarrow{OX} = x\cdot\vec{i}$ и $\overrightarrow{OY} = y\cdot\vec{j}$. Како је $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OX} + \overrightarrow{OY}$, следи да је $\overrightarrow{OM} = x\cdot\vec{i} + y\cdot\vec{j}$. То ћемо искористити код израчунавања вредности функција $\sin(\alpha+\beta)$ и $\cos(\alpha+\beta)$, преко вредности функција од α и од β.



Сл. 20



Сл. 21

Нека је на тригонометријском кругу $K(\alpha+\beta) = B$ и $K(\alpha) = A$, сл. 21. Тада је дужина лука $\overset{\frown}{AB}$ једнака β. Према претходном разматрању и по дефиницији синуса и косинуса је:

$$\overrightarrow{OB} = \cos(\alpha+\beta)\cdot\vec{i} + \sin(\alpha+\beta)\cdot\vec{j}\,.$$

Поставимо нов координатни систем, тако да му оса Ox_1 садржи вектор $\overrightarrow{OA}$. Оса Oy_1 је нормална на Ox_1, па је $K\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right) = A_1$. У новом координатном систему је: $\overrightarrow{OB} = \cos\beta\,\vec{i_1} + \sin\beta\,\vec{j_1}$. Сада векторе $\vec{i_1} = \overrightarrow{OA}$ и $\vec{j_1} = \overrightarrow{OA_1}$ изразимо у првобитном координатном систему: $\vec{i_1} = \cos\alpha\cdot\vec{i} + \sin\alpha\cdot\vec{j}$ и $\vec{j_1} = \cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)\cdot\vec{i} + \sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)\cdot\vec{j} =$
$= -\sin\alpha\cdot\vec{i} + \cos\alpha\cdot\vec{j}$ и заменимо $\vec{i_1}$ и $\vec{j_1}\cdot$ у изразу за $\overrightarrow{OB}$. Биће $\overrightarrow{OB} = \cos\beta\cdot(\cos\alpha\cdot\vec{i} + \sin\alpha\cdot\vec{j}) + \sin\beta\cdot(-\sin\alpha\cdot\vec{i} + \cos\alpha\cdot\vec{j})$. Кад ово средимо и изједначимо са првобитним изразом за $\overrightarrow{OB}$ добићемо:

$\overrightarrow{OB} = \cos(\alpha+\beta)\ \vec{i} + \sin(\alpha+\beta)\ \vec{j} = (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)\ \vec{i} + (\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha)\ \vec{j}$, а одавде је: $(\cos(\alpha+\beta) - \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta)\ \vec{i} + (\sin(\alpha+\beta) - \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha)\ \vec{j} = \vec{0}$. Како су $\vec{i}$ и $\vec{j}$ неколинеарни вектори, ово је могуће само у случају $0\cdot\vec{i} + 0\cdot\vec{j} = \vec{0}$, одакле:

$$\boxed{\begin{aligned} \cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ \sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha \end{aligned}} \tag{33}$$

Узимајући у обзир да је $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$ и $\operatorname{ctg}(\alpha+\beta) = \dfrac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}$, и користећи (33) и (30) добијамо формуле:

$$\boxed{\begin{aligned} \operatorname{tg}(\alpha+\beta) &= \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} \\ \operatorname{ctg}(\alpha+\beta) &= \frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta - 1}{\operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\alpha} \end{aligned}} \tag{34}$$

Како је само косинус парна функција, остале су непарне, смењујући β са $(-\beta)$ налазимо и следеће формуле (из (33) и (34)):

$$\boxed{\begin{aligned} \cos(\alpha-\beta) &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \\ \sin(\alpha-\beta) &= \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha \\ \operatorname{tg}(\alpha-\beta) &= \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} \\ \operatorname{ctg}(\alpha-\beta) &= \frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta + 1}{\operatorname{ctg}\beta - \operatorname{ctg}\alpha} \end{aligned}} \tag{35}$$

Заменом аргумента β са α, из формула (33) и (34) добијамо формуле за функције двоструког аргумента:

$$\boxed{\begin{aligned} \cos 2\alpha &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \\ \sin 2\alpha &= 2\sin\alpha\cos\alpha \\ \operatorname{tg} 2\alpha &= \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha} \\ \operatorname{ctg} 2\alpha &= \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\alpha} \end{aligned}} \tag{36}$$

Комбинујући ове и раније изведене формуле, добијамо формуле којим функције изражавамо преко $\cos 2\alpha$. На пример:

$$\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos 2\alpha \;\Rightarrow\; \cos^2\alpha - (1-\cos^2\alpha) = \cos 2\alpha,$$
а одавде је $2\cos^2\alpha = 1+\cos 2\alpha$. Поступајући слично добијамо и: $2\sin^2\alpha = 1-\cos 2\alpha$, па је:

$$\boxed{\begin{aligned} \sin^2\alpha &= \frac{1-\cos 2\alpha}{2}\\ \cos^2\alpha &= \frac{1+\cos 2\alpha}{2}\\ \operatorname{tg}^2\alpha &= \frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}\\ \operatorname{ctg}^2\alpha &= \frac{1+\cos 2\alpha}{1-\cos 2\alpha}\end{aligned}} \tag{37}$$

Поступајући као у *примеру* 38. *а)*, могу се изразити синус и косинус преко тангенса:

$$\boxed{\sin^2\alpha = \frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}\;,\;\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} \tag{38}$$

Показало се у многим случајевима да је практично изразити функције од α преко $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. На пример:

$$\sin\alpha = \sin 2\cdot\frac{\alpha}{2} = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{\dfrac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}{\dfrac{\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}} =$$

$= \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} = \dfrac{2t}{1+t^2}$, где смо увели ознаку: $t = \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$.

Рачунајући слично за остале функције, добијамо:

$$\boxed{\begin{aligned} &\sin\alpha = \frac{2t}{1+t^2}\;,\;\cos\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}\;,\\ &\operatorname{tg}\alpha = \frac{2t}{1-t^2}\;,\;\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1-t^2}{2t}\;,\;t = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\end{aligned}} \tag{39}$$

Пример 39. Доказати да је:

а) $\dfrac{\sin^2\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)}{\operatorname{ctg}^2(\alpha-2\pi)} + \dfrac{\sin^2(-\alpha)}{\operatorname{ctg}^2\left(\alpha-\dfrac{3\pi}{2}\right)} = 1$;

б) $\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 4\alpha\cos 8\alpha = \dfrac{\sin 16\alpha}{16\sin\alpha}$; *в)* $\cos\dfrac{\pi}{7}\cos\dfrac{4\pi}{7}\cos\dfrac{5\pi}{7} = \dfrac{1}{8}$;

г) $2\left(\cos^2\alpha + \cos^2\left(\dfrac{2\pi}{3}+\alpha\right) + \cos^2\left(\dfrac{2\pi}{3}-\alpha\right)\right) = 3$;

д) $\dfrac{\cos^3\alpha - \cos 3\alpha}{\cos\alpha} + \dfrac{\sin^3\alpha + \sin 3\alpha}{\sin\alpha} = 3$;

ђ) $\operatorname{tg}^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right) = \dfrac{1-\sin 2\alpha}{1+\sin 2\alpha}$; *е)* $\operatorname{tg}^2\dfrac{\pi}{5}\cdot\operatorname{tg}^2\dfrac{2\pi}{5} = 5$.

Решење. *а)* Леву страну сведемо на први квадрант:

$$\frac{\cos^2\alpha}{\operatorname{ctg}^2\alpha} + \frac{\sin^2\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha}{\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}} + \frac{\sin^2\alpha}{\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

б) Проширимо леву страну са $16\sin\alpha$:

$$\frac{16\sin\alpha\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 4\alpha\cos 8\alpha}{16\sin\alpha} = \frac{8\sin 2\alpha\cos 2\alpha\cos 4\alpha\cos 8\alpha}{16\sin\alpha} =$$

$$= \frac{4\sin 4\alpha\cos 4\alpha\cos 8\alpha}{16\sin\alpha} = \frac{2\sin 8\alpha\cos 8\alpha}{16\sin\alpha} = \frac{\sin 16\alpha}{16\sin\alpha}.$$

в) Заменимо: $\cos\dfrac{5\pi}{7} = \cos\left(\pi - \dfrac{2\pi}{7}\right) = -\cos\dfrac{2\pi}{7}$, па даље као у претходном задатку:

$$\frac{-8\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}}{8\sin\frac{\pi}{7}} = \frac{-4\sin\frac{2\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}}{8\sin\frac{\pi}{7}} = \frac{-2\sin\frac{4\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}}{8\sin\frac{\pi}{7}} =$$

$$= \frac{-\sin\frac{8\pi}{7}}{8\sin\frac{\pi}{7}} = \frac{-\sin\left(\pi+\frac{\pi}{7}\right)}{8\sin\frac{\pi}{7}} = \frac{\sin\frac{\pi}{7}}{8\sin\frac{\pi}{7}} = \frac{1}{8}.$$

г) Применимо прво формуле (37), па (33):

$$1+\cos 2\alpha + 1 + \cos\left(\frac{4\pi}{3}+2\alpha\right) + 1 + \cos\left(\frac{4\pi}{3}-2\alpha\right) = 3 + \cos 2\alpha + \cos\frac{4\pi}{3}\cos 2\alpha -$$
$$-\sin\frac{4\pi}{3}\sin 2\alpha + \cos\frac{4\pi}{3}\cos 2\alpha + \sin\frac{4\pi}{3}\sin 2\alpha = 3 + \cos 2\alpha + 2\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)\cos 2\alpha =$$
$$= 3 + \cos 2\alpha - 2\cos\frac{\pi}{3}\cos 2\alpha = 3.$$

д) Уочимо да је $\cos 3\alpha = \cos(\alpha + 2\alpha) = \cos\alpha\cos 2\alpha - \sin\alpha\sin 2\alpha = \cos\alpha(\cos 2\alpha - 2\sin^2\alpha)$, а $\sin 3\alpha = \sin(\alpha+2\alpha) = \sin\alpha\cos 2\alpha + \sin 2\alpha\cos\alpha = \sin\alpha(\cos 2\alpha + 2\cos^2\alpha)$. Стога, лева страна постаје:

$$\cos^2\alpha - \cos 2\alpha + 2\sin^2\alpha + \sin^2\alpha + \cos 2\alpha + 2\cos^2\alpha = 3(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = 3.$$

ђ) Применимо формулу (37):

$$\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right) = \frac{2\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{2\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)} = \frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)} = \frac{1-\sin 2\alpha}{1+\sin 2\alpha}.$$

е) Нека је $x = \operatorname{tg}\frac{\pi}{5} \cdot \operatorname{tg}\frac{2\pi}{5}$. Израчунаћемо $\operatorname{tg}\frac{\pi}{5}$ и $\operatorname{tg}\frac{2\pi}{5}$ преко x. Најпре из $x = \operatorname{tg}\frac{\pi}{5} \cdot \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\pi}{5}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{5}}$, добијамо: $\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{5} = \dfrac{x}{x+2}$. Уочимо да је $\operatorname{tg}\frac{\pi}{5} = -\operatorname{tg}\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right) = -\operatorname{tg}\frac{4\pi}{5}$. Због тога је $x = -\operatorname{tg}\frac{4\pi}{5} \cdot \operatorname{tg}\frac{2\pi}{5}$, одакле је $x = \dfrac{-2\operatorname{tg}^2\frac{2\pi}{5}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{2\pi}{5}}$. Одавде налазимо да је: $\operatorname{tg}^2\frac{2\pi}{5} = \dfrac{x}{x-2}$. Сада из $x^2 = \operatorname{tg}^2\frac{\pi}{5} \cdot \operatorname{tg}^2\frac{2\pi}{5}$, добијамо: $x^2 = \dfrac{x}{x+2} \cdot \dfrac{x}{x-2}$, односно $1 = \dfrac{1}{x^2-4}$, одакле је $x^2 = 5$, а то се и тврдило. ♠

Пример 40. Ако је $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$ и $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, при чему је $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ и $\beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, доказати да је $\alpha - \beta = \frac{\pi}{4}$.

Доказ. $\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}$. Заменимо $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{tg}\beta$ и добијамо:

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}}{1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)} = \frac{2+\sqrt{2}-\sqrt{2}+1}{2-\sqrt{2}+\sqrt{2}+1} = 1 = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}.$$

Углови α и β су оштри, па из $\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$, закључујемо да је $\alpha - \beta = \frac{\pi}{4}$. ♠

Пример 41. Ако је $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, доказати да је $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$.

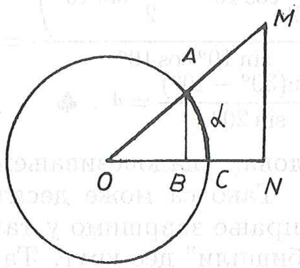
Доказ. Због $\gamma = \pi - (\alpha+\beta)$, је: $\sin\gamma = \sin(\pi-(\alpha+\beta)) = \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$. Онда леву страну трансформишемо:

$$\sin\alpha(1+\cos\beta)+\sin\beta(1+\cos\alpha) = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cdot 2\cos^2\frac{\beta}{2} +$$
$$+2\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cdot 2\cos^2\frac{\alpha}{2} = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\right) =$$
$$= 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2} = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\gamma}{2}\right) = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}.$$ ♠

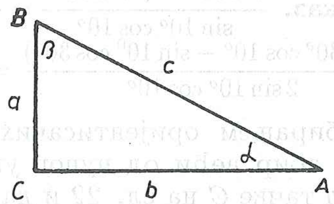
2.13 ТРИГОНОМЕТРИЈСКЕ ФУНКЦИЈЕ УГЛОВА

Геометрија се у почетку бавила мерењем страница и углова троугла. Ова мерења су заснивана на сличности троуглова, и то пре свега правоуглих троуглова.

На сл. 22 видимо правоугли троугао OMN, са хипотенузом OM и тригонометријски круг са центром O, који сече хипотенузу у тачки A. Нека је оштар угао MON једнак α, изражен у радијанима. Тада је $K(\alpha) = A$ и $\sin\alpha = AB$, а $\cos\alpha = OB$. Троуглови OMN и OAB су слични, па је $\dfrac{MN}{OM} = \dfrac{AB}{OA} = AB = \sin\alpha$ (јер је $OA = 1$). Слично се уверимо да је $\dfrac{ON}{OM} = \cos\alpha$, $\dfrac{MN}{ON} = \operatorname{tg}\alpha$ и $\dfrac{ON}{MN} = \operatorname{ctg}\alpha$. На основу тога можемо дефинисати тригонометријске функције углова правоуглог троугла. При томе ћемо у ознакама узимати и углове изражене у степенима. На пример: $\sin\dfrac{\pi}{6} = \sin 30^o = \dfrac{1}{2}$, и слично. Тако вредности тригонометријских функција углова од 0^o, 30^o, 45^o, 60^o, 90^o, 180^o, 270^o, 360^o налазимо у таблици на страни 128.



Сл. 22



Сл. 23

На основу разматрања са слике 22, можемо закључити: тригонометријске функције оштрог угла α у правоуглом троуглу су:

$$\sin\alpha = \frac{\text{наспрамна катета}}{\text{хипотенуза}} \qquad \left(\frac{a}{c}\right)$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{налегла катета}}{\text{хипотенуза}} \qquad \left(\frac{b}{c}\right)$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\text{наспрамна катета}}{\text{налегла катета}} \qquad \left(\frac{a}{b}\right)$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\text{налегла катета}}{\text{наспрамна катета}} \qquad \left(\frac{b}{a}\right)$$

У заградама су записане ове размере за троугао ABC са сл. 23. За угао β, $\beta = 90^o - \alpha$, важи:

$$\sin\beta = \cos\alpha\ ,\ \cos\beta = \sin\alpha\ ,\ \operatorname{tg}\beta = \operatorname{ctg}\alpha \ \text{ и } \ \operatorname{ctg}\beta = \operatorname{tg}\alpha .$$

Пример 42. Израчунати тригонометријске функције углова:

а) 15^o ; *б)* 75^o .

Решење. *а)* Како је $15^o = \dfrac{30^o}{2} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{6}$, на основу (37) добијамо: $\sin 15^o = \sqrt{\dfrac{1-\cos 30^o}{2}} = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$. Слично је $\cos 15^o = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$,

$\operatorname{tg} 15^o = \sqrt{\dfrac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}} = 2-\sqrt{3}$ и $\operatorname{ctg} 15^o = 2+\sqrt{3}$.

б) $\sin 75^o = \sin(90^o - 15^o) = \cos 15^o = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$, итд. ♠

Пример 43. Доказати да је $\dfrac{1}{\sin 10^o} - \dfrac{\sqrt{3}}{\cos 10^o} = 4$.

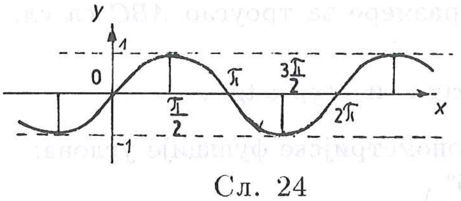
Доказ. $\dfrac{\cos 10^o - \sqrt{3}\sin 10^o}{\sin 10^o \cos 10^o} = \dfrac{2\cdot\left(\dfrac{1}{2}\cos 10^o - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 10^o\right)}{\sin 10^o \cos 10^o} =$

$= \dfrac{4(\sin 30^o \cos 10^o - \sin 10^0 \cos 30^o)}{2\sin 10^o \cos 10^o} = \dfrac{4\sin(30^o - 10^o)}{\sin 20^o} = 4$. ♠

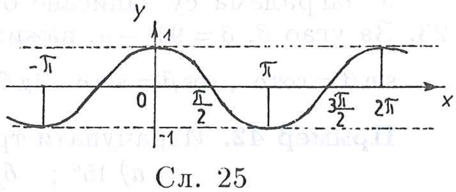
Сабирањем оријентисаних углова, (надовезивањем) можемо добити збир већи од пуног угла. Тако са може десити да кренемо од тачке C на сл. 22 и да сабирање завршимо у тачки A, али пошто смо претходно више пута "обишили" цео круг. Тако долазимо до општијег појма угла, чија величина може бити исказана са, нпр. $20\pi+\alpha$ или $10\cdot 360^o+\alpha$ и сл. На тај начин можемо сваки реалан број α пресликати на одговарајући угао. Тачка $K(\alpha)$ на тригонометријском кругу одговара реалном броју α и њему одговарајућем углу, којег такође означавамо са α. Тиме смо успоставили кореспонденцију између тригонометријских функција реалних бројева и тригонометријских функција углова.

2.14 ГРАФИЦИ ТРИГОНОМЕТРИЈСКИХ ФУНКЦИЈА

Користећи се резултатима из претходних одељака, који се односе на тригонометријске функције (вредности, периодичност и друго), скицираћемо графике функција: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$, $x \in \Re$. Уз графике дајемо само неопходне коментаре.



Сл. 24

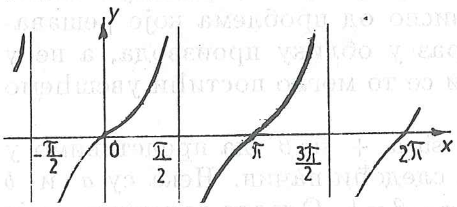


Сл. 25

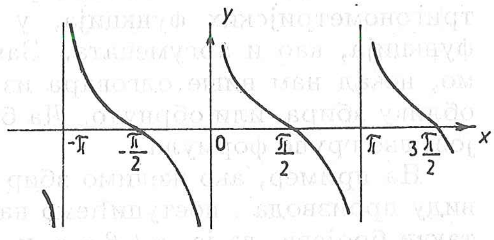
График функције $y = \sin x$ (*синусоиду*) приказујемо на сл. 24. Цео график је између правих $y = 1$ и $y = -1$. Функција има нуле $x = k\pi$, $k \in Z$. Максимум је $y = 1$, за $x = \dfrac{\pi}{2} + 2m\pi$, $m \in Z$, а минимум је $y = -1$ за $x = \dfrac{3\pi}{2} + n\pi$, $n \in Z$.

График функције $y = \cos x$ (*косинусоиду*) видимо на сл. 25. Нуле су $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in Z$, максимална вредност је $y = 1$, за $x = 2m\pi$, $m \in Z$, а минимална вредност је $y = -1$ за $x = \pi + 2n\pi$, $n \in Z$.

Функцију $y = \operatorname{tg} x$ приказали смо на сл. 26. Нуле функције су $x = k\pi$, $k \in Z$ (као код синуса). Нема екстремума. У прекидним тачкама $x = \dfrac{\pi}{2} + 2m\pi$, $m \in Z$, има вертикалне асимптоте. Функција је растућа.



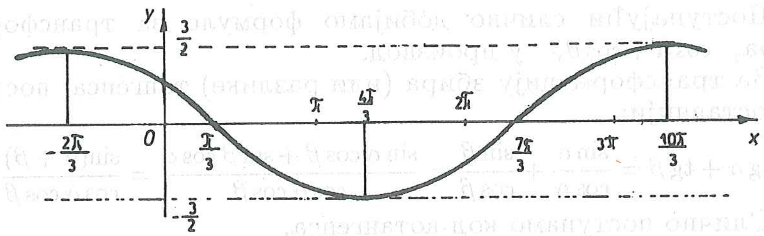
Сл. 26



Сл. 27

На сл. 27 имамо функцију $y = \operatorname{ctg} x$. Њене нуле су $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in Z$ и у прекидима $x = m\pi$, $m \in Z$, има вертикалне асимптоте. Функција стално опада.

Пример 44. Скицирати график функције $y = -\dfrac{3}{2}\sin\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{6}\right)$.



Сл. 28

Решење. Нуле функције су $\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{6} = k\pi$, $k \in Z$, тј. $x = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in Z$. Максимална вредност је $\dfrac{3}{2}$, за $\sin\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{6}\right) = -1$, а то је за $\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{3\pi}{2} + 2m\pi$. Одавде је $x = \dfrac{10\pi}{3} + 4m\pi$, $m \in Z$. Минимум $-\dfrac{3}{2}$ добијамо за $\sin\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{6}\right) = 1$, тј. за $\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{2} + 2n\pi$. Одавде је $x = \dfrac{4\pi}{3} + 4n\pi$, $n \in Z$. График је приказан на сл. 28.

Периода ове функције је $T = 4\pi$. (Уопште, функција $y = \sin(ax+b)$ има периоду $T = \dfrac{2\pi}{a}$. Исто важи и за функцију $y = \cos(ax+b)$.)

Функција има интервале рашћења: $x \in (\dfrac{4\pi}{3} + 4p\pi,\ \dfrac{10\pi}{3} + 4p\pi)$, $p \in Z$ и интервале опадања: $x \in (-\dfrac{2\pi}{3} + 4q\pi,\ \dfrac{4\pi}{3} + 4q\pi)$, $q \in Z$.♠

2.15 ТРАНСФОРМАЦИЈЕ ПРОИЗВОДА И ЗБИРА ТРИГОНОМЕТРИЈСКИХ ФУНКЦИЈА

Из досадашњег излагања уочава се велика "флексибилност" тригонометријских функција, у погледу трансформација самих функција, као и аргумената. Зависно од проблема које решавамо, некад нам више одговара израз у облику производа, а не у облику збира, или обрнуто. Да би се то могло постићи увешћемо још две групе формула.

На пример, ако желимо збир $\sin\alpha + \sin\beta$ да представимо у виду производа , поступићемо на следећи начин. Нека су a и b такви бројеви, да је $\alpha + \beta = a$ и $\alpha - \beta = b$. Одавде налазимо да је $\alpha = \dfrac{a+b}{2}$, а $\beta = \dfrac{a-b}{2}$. Према томе: $\sin\alpha + \sin\beta = \sin\left(\dfrac{a}{2} + \dfrac{b}{2}\right) + \sin\left(\dfrac{a}{2} - \dfrac{b}{2}\right) = \sin\dfrac{a}{2}\cos\dfrac{b}{2} + \sin\dfrac{b}{2}\cos\dfrac{a}{2} + \sin\dfrac{a}{2}\cos\dfrac{b}{2} - \sin\dfrac{b}{2}\cos\dfrac{a}{2} =$
$= 2\sin\dfrac{a}{2}\cos\dfrac{b}{2} = 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$.

Поступајући слично добијамо формуле за трансформацију збира, $\cos\alpha + \cos\beta$, у производ.

За трансформацију збира (или разлике) тангенса, поступак је једноставнији:

$$\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}.$$

Слично поступамо код котангенса.

Поступајући на сличан начин и у случајевима разлика две функције добићемо и формуле за трансформације разлика у производ. Тако настају следеће формуле:

$$\boxed{\begin{aligned} \sin\alpha + \sin\beta &= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \\ \sin\alpha - \sin\beta &= 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \end{aligned}} \qquad (40)$$

$$\boxed{\begin{aligned}\cos\alpha+\cos\beta&=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\\ \cos\alpha-\cos\beta&=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\end{aligned}} \tag{41}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta&=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}\\ \operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta&=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}\end{aligned}} \tag{42}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta&=\frac{\sin(\beta+\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}\\ \operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta&=\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}\end{aligned}} \tag{43}$$

Обрнуто, ако се указује потреба да се производ функција трансформише у збир, поступамо слично претходном излагању. На пример, нека је потребно трансформисати производ $\cos\alpha\cdot\cos\beta$. Пођимо од збира: $\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=$
$=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=2\cos\alpha\cos\beta.$

Сличним поступком долазимо и до осталих формула, које овде наводимо без доказа.

$$\boxed{\begin{aligned}2\sin\alpha\sin\beta&=\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\\ 2\cos\alpha\cos\beta&=\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\\ 2\sin\alpha\cos\beta&=\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\end{aligned}} \tag{44}$$

Ради увежбавања ових формула навешћемо неколико примера.

Пример 45. Доказати да је:

а) $\cos\alpha+\sin2\alpha-\cos3\alpha=4\sin\alpha\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{3\alpha}{2}\right)$;

б) $\frac{1}{\sin10^o}-4\sin70^o=2$; *в)* $\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}=-\frac{1}{2}$;

г) $\cos^2\alpha+\cos^2\beta-\cos^2\gamma=2\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma$, за $\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}$;

д) $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=1+4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$, за $\alpha+\beta+\gamma=\pi$;

ђ) $\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma=\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta\cdot\operatorname{ctg}\gamma$, ако је $\alpha+\beta+\gamma=\dfrac{\pi}{2}$;

е) $\operatorname{tg}20^o\cdot\operatorname{tg}40^o\cdot\operatorname{tg}80^o=\sqrt{3}$; *ж)* $\sin 47^o+\sin 61^o-\sin 11^o-\sin 25^o=\cos 7^o$, ако знамо да је $\sin 18^o=\dfrac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$.

Решење. *а)* $2\sin\alpha\cos\alpha+(\cos\alpha-\cos 3\alpha)=2\sin\alpha\cos\alpha+2\sin 2\alpha\sin\alpha=$
$=2\sin\alpha(\cos\alpha+\sin 2\alpha)=2\sin\alpha\left(\cos\alpha-\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+2\alpha\right)\right)=$
$=4\sin\alpha\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{3\alpha}{2}\right)$.

б) $\dfrac{1-4\sin 10^o\sin 70^o}{\sin 10^o}=\dfrac{1-2(\cos 60^o-\cos 80^o)}{\sin 10^o}=\dfrac{1-2\cdot\frac{1}{2}+2\sin 10^o}{\sin 10^o}=2.$

в) $\dfrac{2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}+2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}+2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}}=$

$=\dfrac{\sin\frac{3\pi}{7}-\sin\frac{\pi}{7}+\sin\frac{5\pi}{7}-\sin\frac{3\pi}{7}+\sin\frac{7\pi}{7}-\sin\frac{5\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}}=\dfrac{-\sin\frac{\pi}{7}+\sin\pi}{2\sin\frac{\pi}{7}}=-\dfrac{1}{2}.$

г) Како је $\gamma=\dfrac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)$, то је $\cos\gamma=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right)=\sin(\alpha+\beta)$, па имамо: $\cos^2\alpha+\cos^2\beta-\cos^2\gamma=\cos^2\alpha+\cos^2\beta-\sin^2(\alpha+\beta)=$
$=\dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}-\dfrac{1-\cos 2(\alpha+\beta)}{2}+\cos^2\beta=\dfrac{\cos 2(\alpha+\beta)+\cos 2\alpha}{2}+\cos^2\beta=$
$=\cos(2\alpha+\beta)\cdot\cos\beta+\cos^2\beta=\cos\beta(\cos(2\alpha+\beta)+\cos\beta)=$
$=\cos\beta\cdot\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos\alpha=\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma$. $\left(\cos(\alpha+\beta)=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\gamma\right)=\sin\gamma\right)$

д) Уочимо да је $\sin\dfrac{\gamma}{2}=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)=\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ и, према (37), $1-\cos\gamma=2\sin^2\dfrac{\gamma}{2}$. Полазимо од леве стране:
$\cos\alpha+\cos\beta+1-1+\cos\gamma=2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}-2\sin^2\dfrac{\gamma}{2}+1=$
$=2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}-2\cos^2\dfrac{\alpha+\beta}{2}+1=$
$=1+2\left(\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}-\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}=1+4\sin\dfrac{\alpha}{2}\sin\dfrac{\beta}{2}\sin\dfrac{\gamma}{2}.$

ђ) Полазимо од $\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta-1}{\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\alpha}$. Како је $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}-\gamma$, биће $\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{2}-\gamma\right)=\operatorname{tg}\gamma=\dfrac{1}{\operatorname{ctg}\gamma}$. Сада је $\dfrac{1}{\operatorname{ctg}\gamma}=\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta-1}{\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\alpha}$. Ослободимо се разломка и добијемо тражену једнакост.

е) $\operatorname{tg}20^o\operatorname{tg}40^o\operatorname{tg}80^o=\dfrac{8\sin 20^o\sin 40^o\sin 80^o}{8\cos 20^o\cos 40^o\cos 80^o}$. Сада за бројилац до-

бијамо: $4(\cos 20^o - \cos 60^o)\sin 80^o = 4\cos 20^o \sin 80^o - 4\cos 60^o \sin 80^o =$
$= 2(\sin 100^o + \sin 60^o) - 2\sin 80^o = 2\sin(180^o - 80^o) + 2\sin 60^o - 2\sin 80^o =$
$= 2\sin 80^o + \sqrt{3} - 2\sin 80^o = \sqrt{3}$. У имениоцу је: $8\cos 20^o \cos 40^o \cos 80^o =$
$= \dfrac{8\sin 20^o \cos 20^o \cos 40^o \cos 80^o}{\sin 20^o} = \dfrac{4\sin 40^o \cos 40^o \cos 80^o}{\sin 20^o} = \dfrac{2\sin 80^o \cos 80^o}{\sin 20^o} =$
$= \dfrac{\sin 160^o}{\sin 20^o} = \dfrac{\sin(180^o - 20^o)}{\sin 20^o} = \dfrac{\sin 20^o}{\sin 20^o} = 1$. Коначно: $\dfrac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$. Тиме је доказ завршен.

ж) $(\sin 47^o + \sin 61^o) - (\sin 25^o + \sin 11^o) = 2\cos 7^o \sin 54^o - 2\cos 7^o \sin 18^o =$
$= 2\cos 7^o(\sin 54^o - \sin 18^o) = 4\cos 7^o \cos 36^o \sin 18^o = 4\cos 7^o \sin 18^o(1 - 2\sin^2 18^o)$
$= 4\cos 7^o \cdot \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1) = \cos 7^o$. (Имали смо: $\cos 36^o = \cos^2 18^o -$
$- \sin^2 18^o = 1 - 2\sin^2 18^o = 1 - 2\cdot\frac{1}{16}(\sqrt{5}-1)^2 = \frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)$.) ♠

ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

111. Упростити израз:

а) $\dfrac{\sin(-\alpha)}{\sin(180^o+\alpha)} - \dfrac{\operatorname{tg}(90^o+\alpha)}{\operatorname{ctg}\alpha} + \dfrac{\cos\alpha}{\sin(90^o+\alpha)}$;

б) $\dfrac{\sin(270^o-\alpha)\operatorname{tg}(180^o-\beta)}{\operatorname{tg}(180^o+\beta)\cos(180^o-\alpha)} + \dfrac{\operatorname{ctg}(90^o-\alpha)\sin(\gamma-90^o)}{\cos(180^o-\gamma)\operatorname{tg}(-\alpha)}$;

в) $\dfrac{\sin 130^o \cos 330^o \operatorname{tg}(270^o-\alpha)\operatorname{ctg} 225^o}{\sin 270^o \cos 220^o \operatorname{tg} 210^o \operatorname{ctg}(180^o-\alpha)}$;

г) $\operatorname{tg} 1^o \cdot \operatorname{tg} 2^o \cdot \operatorname{tg} 3^o \cdot \ldots \cdot \operatorname{tg} 88^o \cdot \operatorname{tg} 89^o$;

д) $\sin^2 1^o + \sin^2 2^o + \sin^2 3^o + \cdots + \sin^2 88^o + \sin^2 89^o$;

112. Израчунати:

а) $\dfrac{\sin 20^o \cos 10^o + \cos 160^o \cos 100^o}{\sin 21^o \cos 9^o + \cos 159^o \cos 99^o}$; *б)* $\sin^4\dfrac{\pi}{8} + \sin^4\dfrac{3\pi}{8} + \sin^4\dfrac{5\pi}{8} + \sin^4\dfrac{7\pi}{8}$;

в) $\operatorname{tg} 22^o30'$; *г)* $\sin 2\alpha$ и $\cos 2\alpha$, ако је $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{8}{15}$, $\alpha \in \left(\pi, \dfrac{3\pi}{2}\right)$;

д) $\sin(\alpha-\beta)$ и $\cos(\alpha+\beta)$, ако је $\cos 2\alpha = -\dfrac{119}{169}$ и $\sin 2\beta = \dfrac{24}{25}$, за оштре углове α и 2β ;

ђ) $\operatorname{tg}\beta$, ако је $\alpha+\beta = \dfrac{\pi}{4}$ и $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{7}$; *е)* $\operatorname{tg} 3\alpha$ преко $\operatorname{tg}\alpha$.

113. Доказати да је:

а) $2(\sin^6\alpha + \cos^6\alpha) - 3(\sin^4\alpha + \cos^4\alpha) + 1 = 0$;

б) $\sin 2\alpha + \sin 4\alpha - \sin 6\alpha = 4\sin\alpha \sin 2\alpha \sin 3\alpha$;

в) $\dfrac{1+\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha}{2\cos^2\alpha+\cos\alpha-1}=2\cos\alpha$; *г)* $\cos\dfrac{\pi}{5}+\cos\dfrac{3\pi}{5}=\dfrac{1}{2}$;

д) $\operatorname{tg}15^o\cdot\operatorname{tg}25^o\cdot\operatorname{tg}35^o=\operatorname{tg}5^o$; *ђ)* $\operatorname{tg}9^o-\operatorname{tg}27^o-\operatorname{tg}63^o+\operatorname{tg}81^o=4$;

е) $\cos(\alpha+\beta)\cos\gamma+\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma-\sin(\alpha+\beta)\sin\gamma=$
$=4\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\beta+\gamma}{2}\cos\dfrac{\gamma+\alpha}{2}$.

114. Доказати условне идентичности:

а) $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma$, ако је $\alpha+\beta+\gamma=0$;

б) $\sin 4\alpha+\sin 4\beta+\sin 4\gamma=4\sin 2\alpha\sin 2\beta\sin 2\gamma$, ако је $\alpha+\beta+\gamma=\dfrac{\pi}{2}$;

в) $\sin^2\dfrac{\alpha}{2}+\sin^2\dfrac{\beta}{2}+\sin^2\dfrac{\gamma}{2}=1-2\sin\dfrac{\alpha}{2}\sin\dfrac{\beta}{2}\sin\dfrac{\gamma}{2}$, ако је $\alpha+\beta+\gamma=\pi$;

г) $\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{\beta}{2}+\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{\gamma}{2}+\operatorname{ctg}\dfrac{\beta}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{\gamma}{2}=1$, ако је $\alpha+\beta+\gamma=2\pi$;

д) $4\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha+\gamma}{2}\sin\dfrac{\alpha+\delta}{2}=\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma+\sin\delta$,
ако је $\alpha+\beta+\gamma+\delta=2\pi$;

ђ) $\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}^2\dfrac{\beta}{2}+\operatorname{tg}^2\dfrac{\gamma}{2}=1$,
ако је $\cos\alpha=\dfrac{a}{b+c}$, $\cos\beta=\dfrac{b}{a+c}$, $\cos\gamma=\dfrac{c}{a+b}$ и $a+b+c\neq 0$.

115. У каквом троуглу важи једнакост:

а) $\cos\alpha+\cos\beta-\cos(\alpha+\beta)=\dfrac{3}{2}$; *б)* $\cos\alpha+\cos\beta-\sin\gamma=0$;

в) $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=2$?

116. Доказати да за углове троугла важе неједнакости:

а) $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma\leq\dfrac{3}{2}$; *б)* $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma\leq\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$;

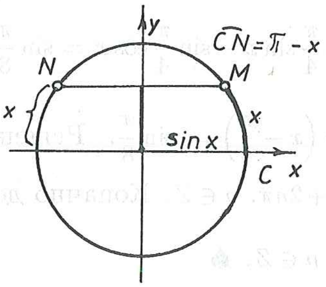
в) $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma$ је веће од 2 у оштроуглом, а мање од 2 у тупоуглом троуглу.

2.16 ТРИГОНОМЕТРИЈСКЕ ЈЕДНАЧИНЕ И НЕЈЕДНАЧИНЕ

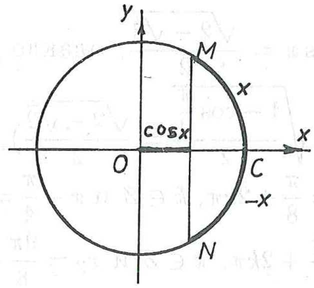
Разним трансформацијама и сменама, настојимо да једначине облика $f(\sin x,\,\cos x)=0$, сведемо на еквивалентне основне једначине типа: $\sin x=a$, $\cos x=a$, $\operatorname{tg}x=a$, $\operatorname{ctg}x=a$.

Размотримо решења основних једначина. Функција $y=\sin x$ је монотона на интервалу $\left[-\dfrac{\pi}{2},\,\dfrac{\pi}{2}\right]$, па на том интервалу има тачно једна вредност за x која задовољава једначину $\sin x=a$, ако је $-1\leq a\leq 1$. Ту вредност називамо $\arcsin a$ *(аркус синус a)*. Ако је

$|\,a\,| > 1$, једначина $\sin x = a$ нема решења. Утврдимо може ли ова једначина имати још неко решење на интервалу ширине 2π (основна периода). Према сл. 29, видимо да постоји могућност за друго решење, а то је $x = \pi - \arcsin a$.



Сл. 29



Сл. 30

Сличним разматрањем долазимо до закључка да једначина $\cos x = a$, за $-1 \leq a \leq 1$ има јединствено решење $x = \arccos a$, на интервалу $[0,\ \pi]$ (на том интервалу је $\cos x$ монотона функција). Друго решење на интервалу ширине 2π је $x = -\arccos a$, сл. 30. Ако је $|\,a\,| > 1$, једначина $\cos x = a$ нема решења.

Једначина $\operatorname{tg} x = a$, за сваки реалан број a има јединствено решење, $x = \operatorname{arctg} a$, на интервалу $\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$, а једначина $\operatorname{ctg} x = a$, за сваки реалан број a има јединствено решење, $x = \operatorname{arcctg} a$, на интервалу $(0,\ \pi)$.

Узимајући у обзир периодичност тригонометријских функција, налазимо сва решења, и то за синус и косинус додавањем $2k\pi$, $k \in Z$, на основна решења, а за тангенс и котангенс додавањем $n\pi$, $n \in Z$, на основна решења.

У следећим примерима приказаћемо како се ове једначине решавају у пракси.

Пример 46. Решити једначину облика $a \sin x + b \cos x = c$, па на основу тога наћи решења једначине $\sin x - \cos x = \sqrt{\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}}$.

Решење. Ако је $a^2 + b^2 \geq c^2$, поделимо једначину са $\sqrt{a^2+b^2}$. Добићемо: $\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \sin x + \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \cos x = \dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Уведимо ознаку $\varphi = \arccos \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Тада је $\sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, па наша једначина прелази у: $\cos\varphi \sin x + {} + \sin\varphi \cos x = \dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$, тј.: $\sin(x+\varphi) = \dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Ова једначина даје решења: $x+\varphi=\arcsin\dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}+2k\pi,\ k\in Z$ и $x+\varphi=\pi-\arcsin\dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}+2n\pi,\ n\in Z$. Нема решења ако је $a^2+b^2<c^2$.

Једначину $\sin x-\cos x=\sqrt{\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}}$ поделићемо са $\sqrt{2}$: $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin x-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos x=\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$, одакле је: $\cos\dfrac{\pi}{4}\sin x-\sin\dfrac{\pi}{4}\cos x=\sin\dfrac{\pi}{8}$ (јер је $\sin\dfrac{\pi}{8}=\sqrt{\dfrac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}}=\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$), тј. $\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\sin\dfrac{\pi}{8}$. Решења су: $x-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{8}+2k\pi,\ k\in Z$ и $x-\dfrac{\pi}{4}=\pi-\dfrac{\pi}{8}+2n\pi,\ n\in Z$. Коначно добијамо: $x_1=\dfrac{3\pi}{8}+2k\pi,\ k\in Z$ и $x_2=\dfrac{9\pi}{8}+2n\pi,\ n\in Z$. ♠

Пример 47. Решити једначину облика: $a\sin^2 x+b\sin x\cos x+c\cos^2 x=d$, па на основу тога наћи решења једначине: $3\sin^2 x-4\sin x\cos x+5\cos^2 x=2$.

Решење. Заменимо $d=d\cdot 1=d\cdot(\sin^2 x+\cos^2 x)$. После сређивања добијамо једначину: $A\sin^2 x+B\sin x\cos x+C\cos^2 x=0$

Очигледно је да не може бити $\cos x=0$, јер би тада (истовремено) требало да буде и $\sin x=0$, што није могуће. Стога поделимо једначину са $\cos^2 x$ и добијемо: $A\,\mathrm{tg}^2 x+B\,\mathrm{tg}\,x+C=0$. Ова квадратна једначина даје решења: $\mathrm{tg}\,x=t_1$ и $\mathrm{tg}\,x=t_2$, итд.

У конкретном примеру имамо:
$3\sin^2 x-4\sin x\cos x+5\cos^2 x=2\sin^2 x+2\cos^2 x$, односно, кад је средимо: $\sin^2 x-4\sin x\cos x+3\cos^2 x=0$. После дељења са $\cos^2 x$ добијамо: $\mathrm{tg}^2 x-4\,\mathrm{tg}\,x+3=0$. Решења ове једначине су: $\mathrm{tg}\,x_1=1$, $\mathrm{tg}\,x_2=3$, па је $x_1=\dfrac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in Z$ (јер је $\mathrm{arctg}\,1=\dfrac{\pi}{4}$) и $x_2=\mathrm{arctg}\,3+m\pi,\ m\in Z$. ♠

У неколико следећих примера показаћемо разне могућности за решавање тригонометријских једначина. Овде ће пре свега доћи до изражаја познавање тригонометријских функција уопште и њихових међусобних веза из формула (30) – (44).

Пример 48. Решити једначине:

а) $4\sin^2 x\cos x-4\sin^3 x+3\sin x-\cos x=0$;

б) $\sin 2x-12(\sin x-\cos x)+12=0$; *в)* $3\sin x=2(1-\cos x)$;

г) $\sin x\sin 2x\sin 3x=\dfrac{1}{4}\sin 4x$; *д)* $\dfrac{\sin 3x}{\sin x}+\dfrac{\cos 3x}{\cos x}=\dfrac{5}{2}+\cos 4x$;

ђ) $\mathrm{tg}^2 x+\mathrm{ctg}^2 x=4\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)\cos\left(\dfrac{3\pi}{4}-x\right)+2\sin 2x$;

е) $\sin 4x+3\sin 2x-\mathrm{tg}\,x=0$; *ж)* $\sin^x\alpha+\cos^x\alpha=1$;

з) $\sqrt{3^x} - 2^x + 1 = 0$; *и)* $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 2^x$.

Решење. *а)* Заменимо $\sin^2 x$ са $1-\cos^2 x$ и добијамо

$4\cos x(1-\cos^2 x) - 4\sin^3 x + 3\sin x - \cos x = 0$

$\Leftrightarrow 3(\sin x + \cos x) - 4(\sin^3 x + \cos^3 x) = 0$

$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(3 - 4(\sin^2 x - \sin x\cos x + \cos^2 x)) = 0$

$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x = 0) \ \vee \ (4\sin x\cos x - 1 = 0)$

Из прве једначине је: $\sin x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0$

$$\Leftrightarrow 2\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow \boxed{x_1 = \frac{3\pi}{4} + k\pi\ ,\ k \in Z}$$

Из друге једначине је $2\sin 2x - 1 = 0$, одакле добијамо: $\sin 2x = \frac{1}{2}$, па је $2x = \frac{\pi}{6} + 2m\pi$, $m \in Z$, или $2x = \frac{5\pi}{6} + 2n\pi$, $n \in Z$, тј. $\boxed{x_2 = \frac{\pi}{12} + m\pi}$ и $\boxed{x_3 = \frac{5\pi}{12} + n\pi}$, $m,\ n \in Z$.

б) Дату једначину можемо записати у облику: $-1 + 2\sin x\cos x - 12(\sin x - \cos x) + 13 = 0$, односно: $-(\sin^2 x - 2\sin x\cos x + \cos^2 x) - 12(\sin x - \cos x) + 13 = 0$. Сменом $\sin x - \cos x = t$, прелазимо на квадратну једначину: $-t^2 - 12t + 13 = 0$, чија су решења $t_1 = 1$ и $t_2 = -13$. Друго решење отпада због ограничености синуса и косинуса, па је: $\sin x - \cos x = 1$. Одавде, поступајући слично овом задатку под *а)*, добијамо: $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, па су решења: $\boxed{x_1 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in Z}$ и $\boxed{x_2 = \pi + 2m\pi,\ m \in Z}$.

в) Прелазимо на аргумент $\frac{x}{2}$ и добијамо: $6\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 4\sin^2\frac{x}{2}$, тј: $2\sin\frac{x}{2}\left(3\cos\frac{x}{2} - 2\sin\frac{x}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \left(\sin\frac{x}{2} = 0\right) \ \vee \ \left(3\cos\frac{x}{2} - 2\sin\frac{x}{2} = 0\right)$. Из првог услова је $\frac{x}{2} = k\pi$, тј. $\boxed{x_1 = 2k\pi,\ k \in Z}$. Из другог услова је $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{3}{2}$ (делимо једначину са $\cos\frac{x}{2}$, јер је $x \neq \pi$), па је $\boxed{x_2 = 2\operatorname{arctg}\frac{3}{2} + 2m\pi,\ m \in Z}$.

г) Десну страну трансформишемо по формули (36):

$\sin x\sin 2x\sin 3x = \frac{1}{2}\sin 2x\cos 2x \Leftrightarrow \sin 2x(2\sin x\sin 3x - \cos 2x) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\sin 2x = 0) \vee (\cos 2x - \cos 4x - \cos 2x = 0)$ (у загради смо применили прву од формула (44)). Дакле: $(\sin 2x = 0) \vee (\cos 4x = 0)$. Решења су: $\boxed{x_1 = \frac{k\pi}{2}\ ,\ x_2 = (2m+1)\frac{\pi}{8}\ ,\ k, m \in Z}$.

д) Сређивањем добијамо: $\dfrac{\sin 3x\cos x + \sin x\cos 3x}{\sin x\cos x} = \dfrac{5}{2} + \cos 4x$, односно: $\dfrac{\sin 4x}{\frac{1}{2}\sin 2x} = \dfrac{5}{2} + \cos^2 2x - \sin^2 2x$. Сада заменимо: $\sin 4x = 2\sin 2x\cos 2x$ и $\sin^2 2x = 1 - \cos^2 2x$, па добијемо једначину: $4\cos^2 2x - 8\cos 2x + 3 = 0$, квадратну по $\cos 2x$. Одавде је $\cos 2x = \frac{3}{2}$ или $\cos 2x = \frac{1}{2}$. Први случај је немогућ, па је $\cos 2x = \frac{1}{2}$ и решења су: $\boxed{x_1 = \frac{\pi}{6} + k\pi,\quad x_2 = -\frac{\pi}{6} + m\pi\quad k, m \in Z}$.

ђ) Заменимо $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ преко синуса и косинуса, а на десној страни применимо формулу (44). Добијемо једначину по $\sin 2x$, која се своди на $\sin^3 2x = 1$, односно: $\sin 2x = 1$. Решења су $\boxed{x = \frac{\pi}{4} + k\pi\ ,\ k \in Z}$.

е) Заменимо $\sin 4x$ са $2\sin 2x\cos 2x$, а онда применимо формуле (39), узимајући $t = \operatorname{tg} x$. Добијамо:

$2\sin 2x\cos 2x + 3\sin 2x - \operatorname{tg} x = 0$

$\Leftrightarrow \frac{4t}{1+t^2}\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2} + \frac{6t}{1+t^2} - t = 0$ (помножимо са $(1+t^2)^2$)

$\Leftrightarrow 4t(1-t^2) + 6t(1+t^2) - t(1+t^2)^2 = 0$

$\Leftrightarrow t^5 - 9t = 0 \Leftrightarrow t(t-\sqrt{3})(t+\sqrt{3})(t^2+3) = 0.$

Одавде је $\operatorname{tg} x = 0 \vee \operatorname{tg} x = \sqrt{3} \vee \operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$. Решења су: $\boxed{x_1 = k\pi,\quad x_2 = \frac{\pi}{3} + m\pi,\quad x_3 = -\frac{\pi}{3} + n\pi,\quad k, m, n \in Z}$, што можемо записати краће: $\boxed{x = \frac{k\pi}{3}\ ,\ k \in Z}$.

ж) Очигледно је $x = 2$ решење једначине, по дефиницији синуса и косинуса. Доказаћемо да је то једино решење. Како је $-1 \le \sin\alpha \le 1$ и $-1 \le \cos\alpha \le 1$, то једначина не може имати решења ако су $\sin^x\alpha$ и $\cos^x\alpha$ различитог знака. Стога у разматрању, за $x \ne 2$, можемо узети апсолутне вредности. Како су $|\sin\alpha|$ и $|\cos\alpha|$ мање од јединице, то ће бити $|\sin^n\alpha| < |\sin^2\alpha|$ и $|\cos^n\alpha| < |\cos^2\alpha|$ за $n > 2$ (особина степена чија је основа мања од 1), па за $n > 2$ је $\sin^n\alpha + \cos^n\alpha < 1$. Ако је $n < 2$, из истих разлога ће бити $|\sin^n\alpha| > |\sin^2\alpha|$ и $|\cos^n\alpha| > |\cos^2\alpha|$, па за $n < 2$ је $\sin^n\alpha + \cos^n\alpha > 1$. Дакле, $x = 2$ је јединствено решење.

з) Трансформисањем дате једначине добијамо: $\sqrt{3^x}+1=2^x$ (поделимо са 2^x) $\Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^x+\left(\frac{1}{2}\right)^x=1$, односно $\sin^x\frac{\pi}{3}+\cos^x\frac{\pi}{3}=1$. На основу претходног задатка, $x=2$ је јединствено решење.

и) Поделимо једначину са 2^x и добијемо:

$$\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right)^x+\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right)^x=1.$$

Међутим, према решењу *примера* 42, ова једначина представља: $\sin^x 15^o+\cos^x 15^o=1$, па је $x=2$ јединствено решење. ♠

Код решавања неједначина згодно је користити тригонометријски круг. Тако, према сл. 29, видимо да неједначина

$$\sin x > a$$

за $a\geq 1$ нема решења, за $a<-1$ решење је скуп $\Re$, а за $-1\leq a<1$ решење је $(\arcsin a+2k\pi<x<\pi-\arcsin x+2k\pi)$, $k\in Z$.

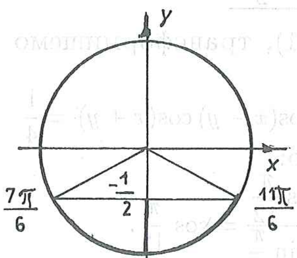
Слично добијамо решења осталих неједначина:
$\sin x<a$, $\cos x>a$, $\operatorname{tg} x<a$, итд.

Пример 49. Решити неједначине:

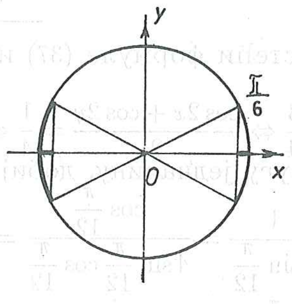
а) $2\sin 2x<-1$; *б)* $4\cos^2 x-3>0$; *в)* $\sin 2x<\cos x$;

г) $\operatorname{ctg}^2 x-4\operatorname{ctg} x+3<0$; *д)* $\sin^4 x+\cos^4 x<\frac{3}{4}$.

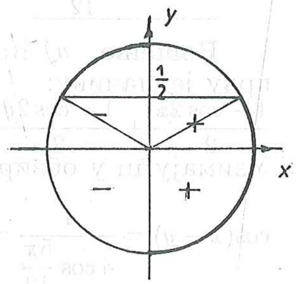
Решење. *а)* $\sin 2x<-\frac{1}{2}$. Према сл. 31, решење је $\frac{7\pi}{6}+2k\pi<x<\frac{11\pi}{6}+2k\pi,\ k\in Z.$



Сл. 31



Сл. 32



Сл. 33

б) $4\left(\cos^2 x-\frac{3}{4}\right)>0 \Leftrightarrow \left(\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)>0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(\cos x<-\frac{\sqrt{3}}{2}\ \vee\ \cos x>\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ (видети *одељак* 2.4). Према сл. 32, решења су $\left(-\frac{\pi}{6}+k\pi<x<\frac{\pi}{6}+k\pi\right),\ k\in Z.$

в) $2\sin x\cos x-\cos x<0 \Leftrightarrow 2\cos x\left(\sin x-\dfrac{1}{2}\right)<0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(\cos x>0 \ \wedge \ \sin x<\dfrac{1}{2}\right) \ \vee \ \left(\cos x<0 \ \wedge \ \sin x>\dfrac{1}{2}\right)$. Према сл. 33, решења су $-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi<x<\dfrac{\pi}{6}+2k\pi$, $\dfrac{\pi}{2}+2m\pi<x<\dfrac{5\pi}{6}+2m\pi$, $k,m\in Z$.

г) Решења по $\operatorname{ctg} x$, квадратне једначине $\operatorname{ctg}^2 x-4\operatorname{ctg} x+3=0$ су: $\operatorname{ctg} x=1$ и $\operatorname{ctg} x=3$. Дата квадратна неједначина је задовољена за $1<\operatorname{ctg} x<3$, а према графику на сл. 27 закључујемо решење по x је: $\operatorname{arcctg} \ 3+k\pi<x<\dfrac{\pi}{4}+k\pi$, $k\in Z$.

д) Упростимо: $\sin^4 x+2\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x-2\sin^2 x\cos^2 x<\dfrac{3}{4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\sin^2 x+\cos^2 x)^2-\dfrac{1}{2}\sin^2 2x<\dfrac{3}{4} \Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{2}-\sin^2 2x<0\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\sin 2x\right)\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\sin 2x\right)<0$. Као под *б)* добијамо решења:

$\dfrac{\pi}{4}+k\pi<2x<\dfrac{3\pi}{4}+k\pi$, односно $\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{k\pi}{2}<x<\dfrac{3\pi}{8}+\dfrac{k\pi}{2}$, $k\in Z$. ♠

Решићемо још и два система тригонометријских једначина са две непознате.

Пример 50. Решити системе једначина:

а) $\sin^2 x+\sin^2 y=\dfrac{3}{4}$, $\quad x+y=\dfrac{5\pi}{12}$ $\qquad$ *б)* $\dfrac{\sin x}{\sin y}=\dfrac{3}{2}$, $\quad x+y=\dfrac{\pi}{2}$

Решење. *а)* Користећи формуле (37) и (41), трансформишемо прву једначину:

$$\frac{1-\cos 2x}{2}+\frac{1-\cos 2y}{2}=\frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{\cos 2x+\cos 2y}{2}=\frac{1}{4} \Leftrightarrow \cos(x-y)\cos(x+y)=\frac{1}{4}$$

Узимајући у обзир другу једначину, добијамо:

$$\cos(x-y)=\frac{1}{4\cos\frac{5\pi}{12}}=\frac{1}{4\sin\frac{\pi}{12}}=\frac{\cos\frac{\pi}{12}}{4\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}}=\frac{\cos\frac{\pi}{12}}{2\sin\frac{\pi}{6}}=\cos\frac{\pi}{12}.$$

Према томе: $x-y=\pm\dfrac{\pi}{12}+2k\pi$, $k\in Z$. Полазни систем је еквивалентан систему линеарних једначина: $\begin{cases} x-y=\pm\dfrac{\pi}{12}+2k\pi \\ x+y=\dfrac{5\pi}{12} \end{cases}$, $k\in Z$.

Одавде добијамо:

$$\boxed{x_1=\frac{\pi}{4}+k\pi,\ y_1=\frac{\pi}{6}-k\pi\ ,\ x_2=\frac{\pi}{6}+m\pi,\ y_2=\frac{\pi}{4}-m\pi\ ,\quad k,m\in Z}\ .$$

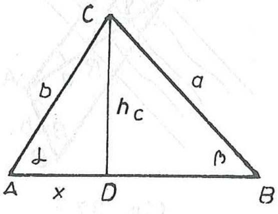
б) Прву једначину напишемо у облику: $\sin x : \sin y = 3 : 2$, па на основу особина пропорција важи: $(\sin x + \sin y) : (\sin x - \sin y) = = (3+2) : (3-2)$, односно $\dfrac{\sin x + \sin y}{\sin x - \sin y} = 5$. Применом формуле (40), једначина прелази у: $\operatorname{tg}\dfrac{x+y}{2} \cdot \operatorname{ctg}\dfrac{x-y}{2} = 5$. Како је $x + y = \dfrac{\pi}{2}$, добијамо: $\operatorname{ctg}\dfrac{x-y}{2} = 5 \Rightarrow \begin{cases} x - y = 2\operatorname{arcctg} 5 + 2k\pi \\ x + y = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$. Решења су:

$$\boxed{x = \frac{\pi}{4} + \operatorname{arcctg} 5 + k\pi \ , \quad y = \frac{\pi}{4} - \operatorname{arcctg} 5 - k\pi \ , \quad k \in Z} \ . \ \spadesuit$$

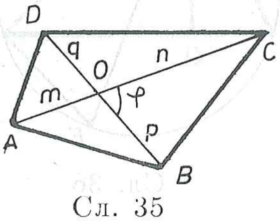
2.17 ПРИМЕНЕ ТРИГОНОМЕТРИЈСКИХ ФУНКЦИЈА УГЛОВА

На основу разматрања из *одељка* 2.13, могу се добити многе практичне формуле за израчунавање елемената троуглова и других равних фигура. Један од класичних проблема овог типа је тзв. *решавање троугла.* То је уствари израчунавање страница и углова троугла, на основу задатих елемената. То се може практично користити за израчунавање димензија објеката које из разних разлога не можемо непосредно измерити. На пример, израчунавање висине негог торња или брда, или висина стуба, зграде, дрвета на недоступном острву, и слично. За прецизна израчунавања потребни су специјални иструменти за мерење углова и прибор за израчунавања (таблице или рачунар), и сл.

Покажимо на неколико примера шта се може израчунати уз помоћ тригонометријских функција.



Сл. 34



Сл. 35

Уочимо висину h_c троугла ABC, сл. 34. Познато нам је да је површина троугла $P = \dfrac{1}{2}c \cdot h_c$. Висину можемо да изразимо преко угла α, на следећи начин. Из правоуглог троугла ACD добијамо: $\dfrac{h_c}{b} = \sin\alpha$, одакле је $h_c = b\sin\alpha$. Заменимо у формулу за површину и добијемо $P = \dfrac{1}{2}bc\sin\alpha$. Слично важи и за остале углове. Дакле:

(45) $$\boxed{P = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{1}{2}ac\sin\beta}$$

Обратимо сад пажњу на четвороугао $ABCD$, сл. 35.

Означимо са φ угао између дијагонала, а са m, n, p, q одсечке на дијагоналама одређене тачком O. Применимо формулу (45) на троуглове OAB, OBC, OCD и ODA. Биће површина четвороугла једнака:

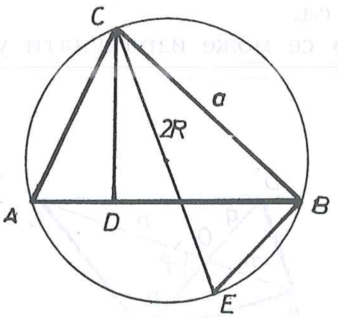
$$P = \frac{1}{2}mp\sin(180^o - \varphi) + \frac{1}{2}np\sin\varphi + \frac{1}{2}nq\sin(180^o - \varphi) + \frac{1}{2}mq\sin\varphi =$$

$= \frac{1}{2}\sin\varphi(mp + np + nq + mq) = \frac{1}{2}\sin\varphi(m+n)(p+q) = \frac{1}{2}\sin\varphi d_1 d_2$. Дакле:

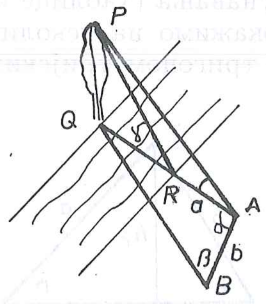
(46) $$\boxed{P = \frac{1}{2}d_1 \cdot d_2 \sin\varphi}$$

Вратимо се троуглу ABC. Добијеној релацији $h_c = b\sin\alpha$ додајмо и $h_c = a\sin\beta$, добијену из троугла BCD. Из ове две релације добијамо: $a\sin\beta = b\sin\alpha$, односно $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$. Сличне једнакости добијамо полазећи од неке друге висине. Све те једнакости заједно дају тзв. *синусну теорему:*

(47) $$\boxed{\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}}$$



Сл. 36



Сл. 37

Нека је $CE = 2R$ пречник описаног круга троугла ABC, сл. 36. Тада је $\measuredangle BEC = \alpha$ (над истом тетивом BC), а $\measuredangle CBE = 90^o$ (над пречником). Стога из троугла BCE добијамо да је $\frac{a}{2R} = \sin\alpha$, односно $\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$. Овом везом допунимо синусну теорему:

(48) $$\boxed{\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R}$$

Ове везе омогућавају "решавање" троугла ако међу датим елементима има (или са може израчунати) једна страница и наспрамни угао, или је дат и полупречник R.

Поново обратимо пажњу на троугао ABC на сл. 34. Применимо Питагорину теорему на правоугле троуглове ACD и BCD: $h_c^2 = b^2 - x^2$ и $h_c^2 = a^2 - (c-x)^2$. Изједначимо десне стране једнакости: $b^2 - x^2 = a^2 - (c-x)^2$. Одавде добијемо: $a^2 = b^2 + c^2 - 2cx$. Из троугла ACD израчунамо: $\dfrac{x}{b} = \cos\alpha \Rightarrow x = b\cos\alpha$, па ово заменимо у претходној једнакости. Поступајући слично са осталим висинама, добијемо везе међу страницама и угловима, које формулишу тзв. *косинусну теорему:*

$$\boxed{\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \end{aligned}} \qquad (49)$$

Косинусна теорема "решава троугао" кад му знамо све странице, или ако су познате две странице и захваћени угао.

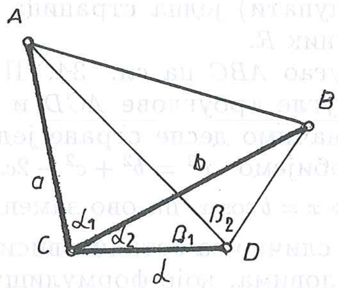
Пример 51. Према сл. 37 измерени су углови α, β, γ и дужи $AR = a$, $AB = b$. Израчунати ширину QR реке и висину PQ дрвета.

Решење. Из троугла ABQ је $\varphi = \measuredangle AQB = 180^o - \alpha - \beta$, па из $\dfrac{b}{\sin\varphi} = \dfrac{AQ}{\sin\beta}$, односно из $\dfrac{b}{\sin(\alpha+\beta)} = \dfrac{AQ}{\sin\beta}$ (синусна теорема) је $AQ = \dfrac{b\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$. Ширина реке је: $QR = AQ - a = \dfrac{b\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} - a$.

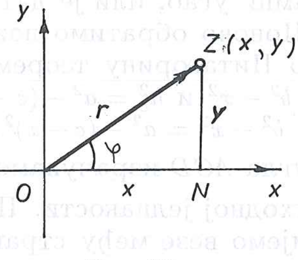
Висину дрвета, $x = PQ$, налазимо из правоуглог троугла PQR: $x = QR\cdot\operatorname{tg}\gamma = \left(\dfrac{b\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} - a\right)\cdot\operatorname{tg}\gamma$. ♠

Пример 52. Наћи растојање између две недоступне тачке A и B, према сл. 38, ако је измерена дужина $CD = d$ и углови α_1, α_2, β_1, β_2.

Решење. Нека је $AB = x$, $AC = a$ и $BC = b$. Најпре ћемо уз помоћ синусне теореме израчунати a и b. Из троугла ACD је: $\dfrac{a}{\sin\beta_1} = \dfrac{d}{\sin(\alpha_1+\alpha_2+\beta_1)}$, односно $a = \dfrac{d\sin\beta_1}{\sin(\alpha_1+\alpha_2+\beta_1)}$. Слично израчунавамо $b = \dfrac{d\sin(\beta_1+\beta_2)}{\sin(\alpha_2+\beta_1+\beta_2)}$. Сада из косинусне теореме и троугла ABC добијамо: $x^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha_1$. ♠



Сл. 38



Сл. 39

2.18 ТРИГОНОМЕТРИЈСКИ ОБЛИК КОМПЛЕКСНОГ БРОЈА*)

У *одељку* 2.2 смо утврдили да између комплексних бројева, $z = x + iy$, и тачака $Z(x,\ y)$ равни постоји обострано једнозначна кореспонденција. То нам омогућава увођење тригонометрије у поље комплексних бројева.

Уочимо правоугли троугао ONZ, сл. 39. У њему је $\frac{x}{r} = \cos\varphi$ и $\frac{y}{r} = \sin\varphi$, тј. $x = r\cos\varphi$ и $y = r\sin\varphi$. Ако то сменимо у алгебарски облик комплексног броја, добићемо: $z = r\cos\varphi + ir\sin\varphi$, односно:

$$\boxed{\begin{aligned} &z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \\ &r = \sqrt{x^2+y^2}\ ,\ \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x} \end{aligned}} \tag{50}$$

Ово је тзв. *тригонометријски облик* комплексног броја. Коришћењем формуле, познате под именом *Муаврова формула*, решаваћемо без муке проблеме везане за степеновање и кореновање комплексних бројева. Формула тврди:

$$\boxed{(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi\ ,\ n \in N} \tag{51}$$

Доказ ове формуле даћемо у следећој глави, у оквиру примене математичке индукције.

Непосредним израчунавањем долазимо до следећих веза: ако је $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, тада је:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

---

*) Ова тема је предвиђена по програму *III* разреда.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$
$$\overline{z} = r(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi))$$
$$z^{-1} = \frac{1}{r}(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi))$$
$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$
$$z^{-n} = \left(z^{-1}\right)^n = \frac{1}{r^n}(\cos(-n\varphi) + i\sin(-n\varphi))$$

Последње две формуле смо добили коришћењем Муаврове формуле.

Уочимо сада *биномну једначину* $z^n = a$, где је a комплексан број (што подразумева да може бити и реалан). Решимо ову једначину.

Нека је $a = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Претпоставимо да је решење дате једначине: $z = r_1(\cos\alpha + i\sin\alpha)$. Заменимо z и a у дату једначину:

$$r_1^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$
$$\Leftrightarrow (r_1^n = r \ \wedge \ n\alpha = \varphi + 2k\pi \ , \ k \in Z)$$
$$\Leftrightarrow \left(r_1 = \sqrt[n]{r} \ \wedge \ \alpha = \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \ , \ k \in Z\right)$$

Према томе решење једначине $z^n = a$ је:

$$\boxed{z = \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \cdot \sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) \ , \ k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}} \quad (52)$$

Број k узима само n узастопних вредности, јер би се због периодичности синуса и косинуса, за друге вредности k понављале вредности z. Формула (52) служи за *кореновање комплексних бројева.*

Пример 53. Израчунати:

а) $\left(\dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2(-1 - i)}\right)^{12}$; *б)* $(1 + \cos\alpha - i\sin\alpha)^{10}$.

Решење. *а)* Дати израз има облик $\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^{12}$, где је $z_1 = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, а $z_2 = -1 - i$. Применом формуле (50) најпре на z_1 добијамо: $r_1 = \sqrt{\dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4}} = 1$, $\operatorname{tg}\varphi_1 = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$, одакле је $\varphi_1 = \dfrac{\pi}{3}$. (Знамо да је $\operatorname{tg}\dfrac{4\pi}{3} = \sqrt{3}$ и о томе се мора водити рачуна код одређивања φ_1. Коју од ове две вредности узимамо одређује положај тачке $(x,\ y)$ у координатном систему. Овде смо имали тачку $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$,

а она је у првом квадранту.) Дакле $z_1 = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$. У случају броја z_2 имамо: $r_2 = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$, $\operatorname{tg}\varphi = 1$, тачка $(-1,-1)$ је у трећем квадранту, па је $\varphi_2 = \frac{5\pi}{4}$ и $z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$. Даље је: $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{12} = \frac{\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{12}}{(\sqrt{2})^{12}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)^{12}} = \frac{\cos\frac{12\pi}{3} + i\sin\frac{12\pi}{3}}{2^6\left(\cos\frac{60\pi}{4} + i\sin\frac{60\pi}{4}\right)} =$
$= \frac{\cos 4\pi + i\sin 4\pi}{64(\cos 15\pi + i\sin 15\pi)} = \frac{1 + i\cdot 0}{64(-1 + i\cdot 0)} = -\frac{1}{64}$.

б) $(1+\cos\alpha - i\sin\alpha)^{10} = \left(2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 2i\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\right)^{10} =$
$= 2^{10}\cos^{10}\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2} - i\sin\frac{\alpha}{2}\right)^{10} = 2^{10}\cos^{10}\frac{\alpha}{2}\left(\cos\left(-\frac{\alpha}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\alpha}{2}\right)\right)^{10} =$
$= 2^{10}\cos^{10}\frac{\alpha}{2}\left(\cos\left(-\frac{10\alpha}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{10\alpha}{2}\right)\right) = 2^{10}\cos^{10}\frac{\alpha}{2}(\cos 5\alpha - i\sin 5\alpha)$. ♠

Пример 54. Доказати да је $\left(\frac{1+i\operatorname{tg}\alpha}{1-i\operatorname{tg}\alpha}\right)^n = \frac{1+i\operatorname{tg}n\alpha}{1-i\operatorname{tg}n\alpha}$, $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z$.

Решење. $\frac{\left(1+i\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)^n}{\left(1-i\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)^n} = \frac{\frac{(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n}{\cos^n\alpha}}{\frac{(\cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha))^n}{\cos^n\alpha}} =$

$$= \frac{\cos n\alpha + i\sin n\alpha}{\cos(-n\alpha) + i\sin(-n\alpha)} = \frac{\frac{\cos n\alpha + i\sin n\alpha}{\cos n\alpha}}{\frac{\cos n\alpha - i\sin n\alpha}{\cos n\alpha}} = \frac{1+i\operatorname{tg}n\alpha}{1-i\operatorname{tg}n\alpha}. \ ♠$$

Пример 55. Решити једначине:

а) $\frac{z^3}{32} - \sqrt{2} + i\sqrt{2} = 0$; *б)* $z^4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)^{10} - z^4 - \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^5 = 0$.

Решење. *а)* Из дате једначине је $z = \sqrt[3]{32\sqrt{2} - 32i\sqrt{2}}$. Рачунамо: $r = \sqrt{2\cdot 1024 + 2\cdot 1024} = 64$, $\varphi = \operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}$ (тачка $(32\sqrt{2},\ -32\sqrt{2})$ је у четвртом квадранту), па је према (52):

$$z = \sqrt[3]{64}\left(\cos\frac{-\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{-\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{3}\right),\quad k \in \{0,\ 1,\ 2\}.$$

За $k = 0$ је $z_0 = 4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right) =$

$$= 4\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} - i\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right) = 2\sqrt{2+\sqrt{3}} - 2i\sqrt{2-\sqrt{3}}$$ (види *пример* 42).

За $k=1$ је $z_1 = 4\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right) = -2\sqrt{2-\sqrt{3}} + 2i\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

За $k=2$ је $z_2 = 4\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right) = -2\sqrt{2} - 2i\sqrt{2}$.

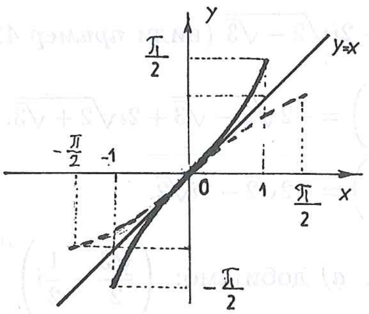
б) Поступајући као у *примеру* 53. *а)* добијамо: $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)^{10} =$
$= \left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)^{10} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{5} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$, па је
$z^4\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right) = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$, одакле је $z^4 = \dfrac{\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}} = -1$. Решење дате једначине је $z = \sqrt[4]{-1} = \sqrt[4]{\cos\pi + i\sin\pi} =$
$= \cos\frac{\pi + 2k\pi}{4} + i\sin\frac{\pi + 2k\pi}{4}$, $k \in \{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$. Решења су:
$z_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$, $z_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$, $z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $z_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$. ♠

2.19 ИНВЕРЗНЕ ТРИГОНОМЕТРИЈСКЕ ФУНКЦИЈЕ

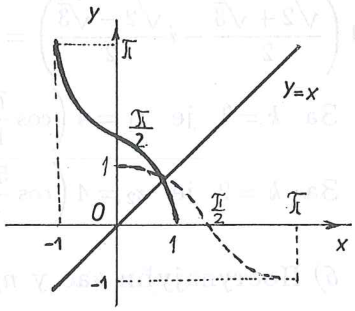
Знамо да функција $y = f(x)$ има инверзну функцију $y = f^{-1}(x)$, ако и само ако за свако y_0 постоји тачно једно x_0, такво да је $y_0 = f(x_0)$. Практично, функција $y = f(x)$ има инверзну функцију (инверзибилна је) ако и само ако је строго монотона. По дефиницији, тачка $(x_0,\ y_0)$ припада графику функције $y = f^{-1}(x)$, ако и само ако тачка $(y_0,\ x_0)$ припада графику функције $y = f(x)$. Због тога су графици ових двеју функција симетрични у односу на праву $y = x$.

Тригонометријске функције су пре свега периодичне, што значи да дефинишу пресликавање које није бијекција. Стога, у општем случају не можемо говорити о функцијама које су им инверзне за свако реално x. Чак, у интервалу ширине основне периоде, функције $y = \sin x$ и $y = \cos x$ немају инверзне функције, јер нису строго монотоне. Дакле, при дефинисању инверзних тригонометријских функција морамо водити рачуна о наведеним чињеницама.

Сада, водећи рачуна о интервалима монотоности тригонометријских функција, можемо скицирати графике њихових инверзних функција.



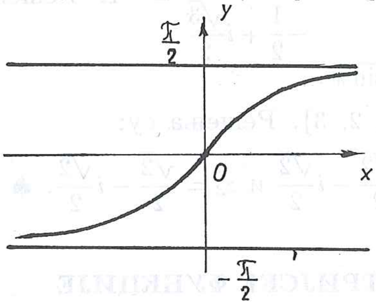
Сл. 40



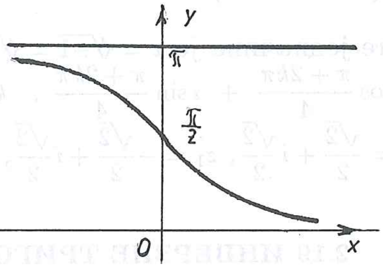
Сл. 41

1° $y = \arcsin x \quad \left(x \in [-1,\ 1] \ \text{ и } \ y \in \left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]\right)$, сл. 40.

2° $y = \arccos x \quad (x \in [-1,\ 1] \ \text{ и } \ y \in [0,\ \pi])$, сл. 41.



Сл. 42



Сл. 43

3° $y = \operatorname{arctg} x \quad \left(x \in \Re \ \text{ и } \ y \in \left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)\right)$, сл. 42.

4° $y = \operatorname{arcctg} x \quad (x \in \Re \ \text{ и } \ y \in (0,\ \pi))$, сл. 43.

При израчунавању вредности инверзних тригонометријских функција и решавању једначина и неједначина са њима, треба водити рачуна о свим раније наведеним везама међу тригонометријским функцијама и, на пример, о следећим чињеницама:

$\sin(\arcsin a) = a$, затим $\arcsin(\sin\alpha) = \alpha$, ако је $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$, итд.

Слично закључујемо и о осталим инверзним тригонометријским функцијама.

Пример 56. Израчунати:

а) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{7\pi}{8}\right)$; *б)* $\cos\left(2\arcsin\frac{4}{5}\right)$; *в)* $\operatorname{arcctg} 2 + \arcsin\frac{1}{\sqrt{10}}$;

г) $\operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg} 3$.

Решење. *а)* $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\dfrac{7\pi}{8}\right)=\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\left(\pi-\dfrac{\pi}{8}\right)\right)=\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\left(-\dfrac{\pi}{8}\right)\right)=$ $=-\dfrac{\pi}{8}$.

б) Ставимо: $\arcsin\dfrac{4}{5}=\alpha$. Одавде је $\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$, па је $\cos\alpha=$ $=+\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\dfrac{3}{5}$. (Знак пред кореном је +, јер је $\alpha\in\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$.) Сада имамо: $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=-\dfrac{7}{25}$.

в) Нека је $\alpha=\operatorname{arcctg}2$ и $\beta=\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{10}}$. (Очигледно је да $0<\alpha<\dfrac{\pi}{4}$.) Отуда је $\operatorname{ctg}\alpha=2$, а $\operatorname{ctg}\beta=\dfrac{\sqrt{1-\sin^2\beta}}{\sin\beta}=3$. Израчунајмо $\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta-1}{\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\alpha}=\dfrac{6-1}{3+2}=1$. Одавде је $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{4}$, тј. $\operatorname{arcctg}2+$ $+\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{10}}=\dfrac{\pi}{4}$.

г) Нека је $\alpha=\operatorname{arctg}1$, $\beta=\operatorname{arctg}2$ и $\gamma=\operatorname{arctg}3$. Тада је $\operatorname{tg}\alpha=1$, $\operatorname{tg}\beta=2$ и $\operatorname{tg}\gamma=3$, а $\operatorname{tg}(\alpha+\beta+\gamma)=\dfrac{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)+\operatorname{tg}\gamma}{1-\operatorname{tg}(\alpha+\beta)\cdot\operatorname{tg}\gamma}=$

$$\dfrac{\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}+\operatorname{tg}\gamma}{1-\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}\cdot\operatorname{tg}\gamma}=\dfrac{\dfrac{1+2}{1-2}+3}{1-\dfrac{1+2}{1-2}\cdot 3}=\dfrac{0}{10}=0.$$

Како је $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$, $\dfrac{\pi}{4}<\beta<\dfrac{\pi}{2}$ и $\dfrac{\pi}{4}<\gamma<\dfrac{\pi}{2}$, то из $\operatorname{tg}(\alpha+\beta+\gamma)=0$, закључујемо да је $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, односно: $\operatorname{arctg}1+\operatorname{arctg}2+\operatorname{arctg}3=\pi$. ♠

Пример 57. Доказати да је:

а) $\operatorname{arctg}x+\operatorname{arcctg}x=\dfrac{\pi}{2}$; *б)* $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{3}+\operatorname{arctg}\dfrac{1}{5}+\operatorname{arctg}\dfrac{1}{7}+\operatorname{arctg}\dfrac{1}{8}=\dfrac{\pi}{4}$.

Доказ. *а)* Ако је $x=0$, тада имамо $\operatorname{arctg}0+\operatorname{arcctg}0=0+\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{\pi}{2}$. Ако је $x\neq 0$, онда из $\alpha=\operatorname{arctg}x$ и $\beta=\operatorname{arcctg}x$, добијамо: $\operatorname{tg}\alpha=x$, односно $\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{1}{x}$ и $\operatorname{ctg}\beta=x$, па је: $\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta-1}{\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\alpha}=$ $=\dfrac{\dfrac{1}{x}\cdot x-1}{x+\dfrac{1}{x}}=0$. Како је $\alpha\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\ 0\right)\cup\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ и $\beta\in\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)\cup\left(\dfrac{\pi}{2},\ \pi\right)$, то из $\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=0$, закључујемо да је $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}$, а то значи:

$\operatorname{arctg}x+\operatorname{arcctg}x=\dfrac{\pi}{2}$.

б) Нека је $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{1}{3}$, $\beta = \operatorname{arctg}\frac{1}{5}$, $\gamma = \operatorname{arctg}\frac{1}{7}$ и $\delta = \operatorname{arctg}\frac{1}{8}$. Тада је $\operatorname{ctg}\alpha = 3$, $\operatorname{ctg}\beta = 5$, $\operatorname{ctg}\gamma = 7$ и $\operatorname{ctg}\delta = 8$. Сада, слично претходном *примеру* под *г)*, израчунамо $\operatorname{ctg}(\alpha+\beta+\gamma+\delta)$ и уверимо се да је то једнако 1, итд. ♠

Пример 58. Решити једначине:

а) $2\arcsin x = \arcsin 2x$; *б)* $\arccos x - \arcsin x = \arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$;

в) $\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \alpha$; *г)* $2(\arccos x)^2 - 3\pi\arccos x + \pi^2 = 0$.

Решење. *а)* Нека је $\alpha = \arcsin x$. Тада је $\sin\alpha = x$, па је $\cos\alpha = \sqrt{1-x^2}$. Сада из дате једначине имамо: $\sin 2\alpha = \sin(\arcsin 2x)$, тј. $2\sin\alpha\cos\alpha = 2x$ и коначно: $2x\sqrt{1-x^2} = 2x \Leftrightarrow x(\sqrt{1-x^2}-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

б) Дату једначину напишемо као $\arccos x - \arcsin x = \frac{\pi}{6}$. Осим тога, познато је да: $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ (доказује се слично претходном *примеру* под *а)*.). Сабирањем ових двеју једнакости добијамо: $\arccos x = \frac{\pi}{3}$, па је $x = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.

в) Из дате једначине је: $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) = \cos\alpha$, односно $\sin\left(\arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) = \cos\alpha$, што даје једначину: $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \cos\alpha$. Одавде, после квадрирања добијамо: $x = \operatorname{ctg}\alpha$.

г) Ово је квадратна једначина по $\arccos x$. Њена решења су $\arccos x = \frac{\pi}{2}$ и $\arccos x = \pi$, па је $x_1 = 0$ и $x_2 = -1$. ♠

Пример 59. Решити неједначине:

а) $(\operatorname{arctg} x)^2 - 4\operatorname{arctg} x + 3 > 0$; *б)* $\frac{\arccos(x^2-3x+2)}{8x^2-10x+3} > 0$;

в) $\arcsin(x^2-2x-2) > \frac{\pi}{4}$; *г)* $\operatorname{arctg}\sqrt{x} > \arccos(1-x)$.

Решење. *а)* Узимајући за променљиву $\operatorname{arctg} x$, добијамо решења $\operatorname{arctg} x < 1$ или $\operatorname{arctg} x > 3$. Међутим, $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2}$ (видети сл. 42), па закључујемо да је $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x < 1$ и коначно: $-\infty < x < \operatorname{tg} 1$.

б) Како је $\arccos(x^2-3x+2) \geq 0$ (видети сл. 42), то решење неједначине добијамо из: $8x^2-10x+3 > 0 \ \wedge\ \arccos(x^2-3x+2) \neq 0 \ \wedge\ -1 \leq x^2-3x+2 \leq 1$. Одавде је $8x^2-10x+3 > 0 \ \wedge\ x^2-3x+3 \geq 0 \ \wedge\ x^2-3x+1 < 0$. Међутим, $x^2-3x+3 > 0$ за свако реално x, а

остала два услова дају: $\left(x < \frac{1}{2} \ \vee \ x > \frac{3}{4}\right) \wedge \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$.
Решење је: $\frac{3-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{1}{2}$ или $\frac{3}{4} < x < \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

в) Неједнакост има смисла за $-1 \le x^2 - 2x - 2 \le 1$, односно: $1 \le x^2 - 2x \le 3$. Тада је дата неједнакост еквивалентна са: $\sin(\arcsin(x^2 - 2x - 2)) > \frac{\pi}{4}$, односно $x^2 - 2x > 2 + \frac{\sqrt{2}}{2}$. Из овога и претходног услова следи да је $2 + \frac{\sqrt{2}}{2} < x^2 - 2x \le 3$. Одавде добијамо: $-1 \le x \le 1 - \sqrt{3 + \frac{1}{\sqrt{2}}} \ \vee \ 1 + \sqrt{3 + \frac{1}{\sqrt{2}}} < x \le 3$.

г) Према сл. 41, за $1 - x \le 0$ је $\arccos(1-x) \ge \frac{\pi}{2}$, па због $\operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2}$, мора бити $1 - x > 0$. Тада су обе стране неједнакости веће од 0 и мање од $\frac{\pi}{2}$, а обе функције су монотоне, и то косинус опада. Стога је дата неједнакост еквивалентна са $\cos(\operatorname{arctg}\sqrt{x}) < \cos(\arccos(1-x))$, при чему је $1 - x \le 1$. Узимајући у обзир да је $1 - x > 0$, добијамо $0 \le x < 1$. Према (38) је $\cos(\operatorname{arctg}\sqrt{x}) = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg}\sqrt{x})}} = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$, па имамо систем неједначина: $\frac{1}{\sqrt{1+x}} < 1 - x \ \wedge \ 0 \le x < 1$. Овај систем после квадрирања даје: $x(x^2 - x - 1) > 0$, односно $x(x(x-1) - 1) > 0$. За $0 \le x < 1$ лева страна неједнакости је мања или једнака нули, па дата неједнакост нема решења.

ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

117. Решити једначине:

а) $\sin 2x + \sin 3x = 3 \sin x$; *б)* $\sin 2x + \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$;

в) $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = \sin x \left(\operatorname{tg} x \operatorname{tg}\frac{x}{2} + 1\right)$;

г) $8 \sin x \cos 3x \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = 1$;

д) $\sin^2 x^2 + \sin^2 2x^2 = \sin^2 3x^2 + \sin^2 4x^2$; *ђ)* $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$;

е) $2 \operatorname{arctg}\frac{1}{10} + \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{4}$; *ж)* $\operatorname{arctg}\frac{1}{1-x} - \operatorname{arcctg}\frac{1}{1+x} = \frac{\pi}{12}$;

з) $\log_{\cos x} \sin x + \log_{\sin x} \cos x = 2$; *и)* $25^{\log_{0.2}(\sin^2 x + 5 \sin x \cos x + 5)} = \frac{1}{9}$;

ј) $(\cos 2x)^{2\cos 3x + 4\cos x - 1} = \frac{1}{\cos 2x}$; *к)* $z^4 = -16$;

л) $(2+5i)z^3-2i+5=0$; *љ)* $(2-i)z^3-1+3i=0$;

м) $(-1+i)^8z^2=(-1+i\sqrt{3})^{10}$; *н)* $z^3=\left(\dfrac{3+i}{4-2i}-\dfrac{1-2i}{1+3i}\right)^{11}$.

118. Решити неједначине:

а) $2\sin^2 x-3\sin x+1<0$; *б)* $\dfrac{\sin 2x-\cos 2x+1}{\sin 2x+\cos 2x-1}>0$;

в) $\cos 2x-\cos 4x<0$; *г)* $|\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x|\le\dfrac{4}{\sqrt{3}}$;

д) $\arcsin x>\arccos x$; *ђ)* $\log_2(\cos 2x+3\sin x+1)<1$;

е) $\arcsin(\log_2 x)>0$; *ж)* $4^{\sin^2\pi x}+3\cdot 4^{\cos^2\pi x}\le 8$.

119. Израчунати

а) $\operatorname{tg}\left(\dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{5}{13}\right)$; *б)* $\operatorname{arctg}2+\operatorname{arctg}3$; *в)* $\operatorname{ctg}\left(2\arcsin\dfrac{3}{5}\right)$;

г) $2\arccos a-\arccos(2a^2-1)$, $0\le a\le 1$; *д)* $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}-i\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)^9$;

ђ) $\left(\dfrac{1+\cos\alpha+i\sin\alpha}{1+\cos\alpha-i\sin\alpha}\right)^4$; *е)* $\left(1-\dfrac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^{12}$; *ж)* $\sqrt[6]{-8i}$;

з) $\sqrt[4]{-8-8i\sqrt{3}}$; *и)* $\sin 3\alpha$ преко $\sin\alpha$ и $\cos 3\alpha$ преко $\cos\alpha$.

ј) $\sin 4\alpha$ и $\cos 4\alpha$, преко $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$;

(задатке *з), и)* решити коришћењем Муаврове формуле.)

120. Доказати да је:

а) $P_\Delta=\dfrac{1}{4}(a^2+b^2)\Leftrightarrow\alpha=\beta=\dfrac{\pi}{4}$; *б)* $0<x<\dfrac{\pi}{4}\Rightarrow\dfrac{1}{\sin^2 x(1-\operatorname{tg}x)}>8$;

в) $2\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2}+\operatorname{arctg}\dfrac{1}{3}=\operatorname{arctg}3$; *г)* $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2}+\operatorname{arctg}\dfrac{1}{3}=\dfrac{\pi}{4}$;

д) $\alpha+\beta+\gamma=\alpha\beta\gamma$, ако је $\operatorname{arctg}\alpha+\operatorname{arctg}\beta+\operatorname{arctg}\gamma=\pi$;

ђ) $z^n+\dfrac{1}{z^n}=2\cos n\alpha$, ако је $z+\dfrac{1}{z}=2\cos\alpha$;

е) $z=\dfrac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}$ реалан број, ако је $z_1z_2\ne -1$ и $|z_1|=|z_2|=1$.

ж) $f(n+4)+f(n)=0$, ако је $f(n)=\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n+\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^n$, $n\in N$.

ТРЕЋА ГЛАВА

Не упуштајући се у детаљно дефинисање појмова и доказивање свих особина и формула, проучићемо нека рогљаста и нека обртна тела. Највећи део тих разматрања односи се на израчунавање површина и запремина. Ако желимо да успешно решавамо ову врсту проблема морамо пре свега познавати многоуглове (површине, обиме и неке важне дужи, нпр. полупречнике описаног и уписаног круга) и круг (површину, обим, лук, исечак, одсечак). Морамо знати релације паралелности и нормалности у простору, тригонометрију и многе теореме из планиметрије.

Неке од неопходних чињеница обрадили смо у *првој глави* (планиметрију), а неке у *другој глави* (тригонометрију). Међутим, програмом математике за средње школе нигде није предвиђено изучавање површина и обима многоугла и круга. Како се без тога не можемо упустити у стереометријска мерења, овде ћемо најпре навести формуле које се односе на многоуглове и круг.

За произвољан *троугао* чије странице имају дужине a, b и c и одговарајуће висине h_a, h_b и h_c, важе формуле:

$P = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$ (површина троугла)

$2s = a + b + c$ (обим троугла)

$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ (Херонов образац)

$r = \frac{P}{s}$ (полупречник уписаног круга)

$R = \frac{abc}{4P}$ полупречник описаног круга).

Ако је *ABC правоугли троугао* са хипотенузом c:

$P = \frac{1}{2}a \cdot b = \frac{1}{2}c \cdot h_c$ (површина правоуглог троугла)

$c^2 = a^2 + b^2$ (Питагорина теорема)

$R = \frac{c}{2} = t_c$ (полупречник описаног круга)

$r = s - c$ (полупречник уписаног круга)

Ако је троугао *једнакостраничан*

$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ (површина једнакостраничног троугла)

$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (висина једнакостраничног троугла)

$R = 2r = \frac{2}{3}h = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ (полупречници описаног и уписаног круга)

За *четвороуглове* користимо формуле

$P = a \cdot b$ и $O = 2(a + b)$ (површина и обим правоугаоника)

$P = a^2 = \frac{d^2}{2}$ и $O = 4a$ (површина и обим квадрата)

$d = a\sqrt{2}$ (дијагонала квадрата)

$R = \frac{d}{2}$ и $r = \frac{a}{2}$ (описани и уписани круг квадрата)

$P = ah = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$ (површина ромба)

$2r = h$ (пречник уписаног круга ромба)

$P = \frac{(a + b) \cdot h}{2} = m \cdot h$ (површина трапеза)

$m = \frac{a + b}{2}$ (средња линија трапеза)

$P = ah_a = bh_b$ (површина паралелограма)

$P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$ (површина делтоида)

Правилан шестоугао је могуће разделити на шест једнакостраничних троуглова.

$P = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$ (површина правилног шестоугла)

$R = a$ (полупречник описаног круга)

$r = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (полупречник уписаног круга)

За мерења код *круга* користимо формуле:

$P = r^2\pi$, $(\pi = 3,14259\ldots)$ (површина круга)

$O = 2r\pi$ (обим круга)

$l = \frac{r\pi\alpha}{180}$ (α централни угао) (дужина лука)

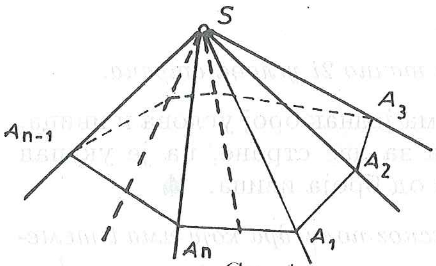
$P_i = \frac{r^2\pi\alpha}{360} = \frac{r \cdot l}{2}$ (површина исечка)

$P_o = P_i - P_\triangle$ (површина одсечка)

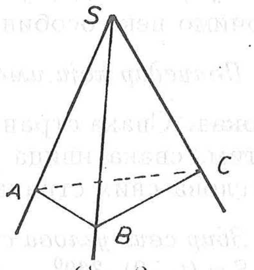
У првом разреду средње школе смо научили шта је *полупростор* и да је *конвексан диедар* пресек два полупростора са непаралелним граничним равнима. Пресек диедра са неком равни, која је нормална на ивицу диедра је *угао диедра.*

За два диедра кажемо да су једнаки (подударни) ако су им једнаки углови. Ако је угао δ_1 неког диедра Δ_1, већи од угла δ_2 диедра Δ_2, тада кажемо да је диедар Δ_1 већи од диедра Δ_2 и пишемо $\Delta_1 > \Delta_2$. Збир и разлику диедара дефинишемо такође преко збира и разлике њихових углова.

Уочимо многоугао $A_1A_2A_3\ldots A_{n-1}A_n$ и тачку S ван његове равни. Унију углова A_1SA_2, A_2SA_3, $\ldots$, $A_{n-1}SA_n$, A_nSA_1, називамо *рогљем.* Тачка S је *врх рогља*, углови су *стране рогља.* Полуправе SA_1, SA_2, $\ldots$, SA_n су *ивице рогља*, сл. 1. Две суседне стране одређују *диедар рогља.* Рогаљ са три стране називамо *триедар*, сл. 2. Ако је многоугао $A_1A_2\ldots A_n$ конвексан, рогаљ је такође конвексан.



Сл. 1



Сл. 2

Уочимо (без доказивања) следеће особине рогљева.

а) Рогаљ има најмање три ивице.

б) Збир две стране триедра је већи од треће стране, а разлика две стране је мања од треће стране.

в) У триедру наспрам једнаких диедара су једнаке стране. Наспрам већег диедра је већа страна и обрнуто.

г) Збир свих страна конвексног рогља је мањи од пуног угла.

3.1 ПОЛИЕДРИ

Полиедарска површ настаје унијом многоугаоних површи, таквом да свака два суседна многоугла имају заједничку страницу и нису компланарни. Сем тога, сви ови многоуглови су повезани једни с другим преко суседних многоуглова. Овде ћемо проучити неке од тзв. *затворених полиедарских површи.* То су површи код којих је свака страница многоугла заједничка за тачно два несуседна многоугла. Многоуглови који образују полиедарску површ су *стране*, и њихове странице су *ивице* полиедарске површи. Темена страна су *темена* полиедарске површи. Унутрашње углове многоуглова називамо *угловима страна* полиедарске површи.

Затворена полиедарска површ раздваја простор на две дисјунктне области, при чему она сама не припада ни једној од ових области. За неку тачку P кажемо да припада унутрашњој области ако свака полуправа Pp, која не сече ни једну ивицу, продире непаран број страна полиедарске површи.

Унија (затворене) полиедарске површи и њене унутрашње области, назива се *полиедар*, или *рогљасто тело*.

Полиедар је *неконвексан*, ако постоји раван која садржи једну страну полиедра и сече неку несуседну страну. Ако таква раван не постоји, полиедар је *конвексан*.

Уочимо неке особине полиедара.

а) Полиедар који има i ивица има тачно $2i$ углова страна.

Доказ. Свака страна полиедра има једнак број углова и ивица. Међутим, свака ивица је заједничка за две стране, па је укупан број углова свих страна дупло већи од броја ивица. ♠

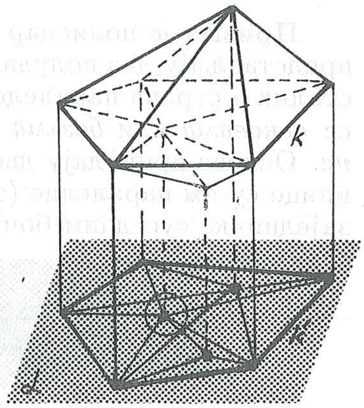
б) Збир свих углова страна конвексног полиедра који има t темена је: $S = (t-2) \cdot 360^0$.

Доказ. Пројектујмо конвексан полиедар на једну раван, која је изабрана тако да се различита темена пројектују на различите тачке и да се ниједна страна не пројектује на дуж, сл. 3. Тада се свака страна пројектује на многоугао са истим бројем темена као и полазни. Због тога је збир углова сваке стране полиедра једнак збиру углова њене пројекције. При томе, конвексан многоугао, контура пројекције полиедра, који је на сл. 3 означен са k', представља пројекцију једне затворене изломљене линије, коју образују неке ивице полиедра. Унутар k' свака тачка је пројекција двеју тачака полиедра, једне "изнад" и једне "испод" контуре k. Због тога, у израчунавању збира S углова страна, углови многоугла k' рачунају се два пута. За сваку пројекцију темена која је унутар k', укупном збиру додајемо по 360^0, јер је она заједничко теме углова који заједно чине пун угао. Ако контура k' има n темена, онда се тачно $(t-n)$ темена пројектује унутар k', па је тражени збир: $S = (t-n) \cdot 360^0 + 2 \cdot (n-2) \cdot 180^0 = (t-2) \cdot 360^0$. ♠

Следећа особина је позната под именом *Ојлерова теорема.*

в) За сваки конвексан полиедар, који има t темена, s страна, i ивица, важи једнакост: $t + s = i + 2$

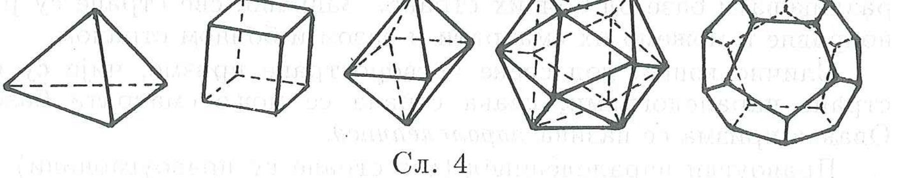
Доказ. Ако полиедар има s страна и свака страна има , редом , n_1, n_2, ..., n_s страница, тада је збир свих углова страна: $S = (n_1 - 2)180^0 + (n_2 - 2)180^0 + \cdots + (n_s - 2) \cdot 180^0 = (n_1 + n_2 + \cdots + n_s) \cdot 180^0 - s \cdot 360^0$. Како је укупан број страница , тј. $(n_1 + n_2 + \cdots + n_s)$, једнак двоструком броју ивица, тј. $2i$, (свака ивица је истовремено страница за два суседна многоугла) , то је $S = 2i \cdot 180^0 - s \cdot 360^0$. С обзиром на закључак из особине *б*), имамо: $(t-2) \cdot 360^0 = 2i \cdot 180^0 - s \cdot 360^0$, одакле , после скраћивања са 360, добијамо: $t + s = i + 2$, што се и тврдило. ♠



Сл. 3

Међу конвексним полиедрима посебно место заузимају тзв. *правилни полиедри.* Њихове су стране подударни правилни многоуглови, а подударни су и сви рогљеви и сви диедри.

Узимајући у обзир чињеницу да је збир страна сваког конвексног рогља мањи од пуног угла, а број ивица (и страна) рогља је најмање 3, закључујемо да рогљеви правилног полиедра не могу имати више од пет страна. (Најмања страна је од 60^0-угао једнакостраничног троугла.) Стране правилних полиедара могу бити само једнакостранични троуглови, квадрати и правилни петоуглови. (Нпр. три правилна шестоугла не могу образовати рогаљ, јер је $3 \cdot 120^0 = 360^0$.). Коначно, рогљеве правилног полиедра могу образовати: три, четири или пет углова од 60^0, или три угла од 90^0, или три угла од 108^0. Тако постоји само пет врста правилних полиедара: правилан *тетраедар*, правилан *хексаедар (коцка)*, правилан *октаедар*, правилан *икосаедар* и правилан *додекаедар.* На сл. 4 су приказани сви и то овим редом. Често их називају *Платоновим телима.*

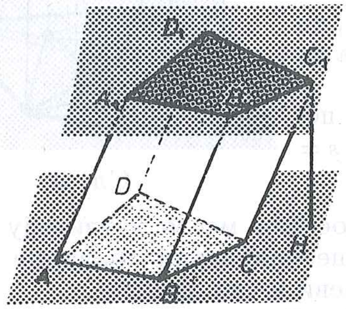


Сл. 4

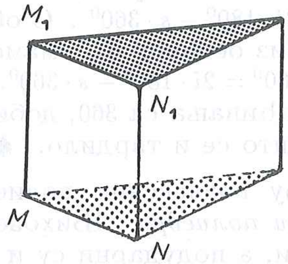
Правилни полиедри се срећу у природи у структурама неких кристала. У пракси, пак, сусрећемо се углавном са правилним тетраедром и коцком.

Са практичне стране најзначајнији полиедри су призме и пирамиде. Њих ћемо детаљније упознати, а биће речи и о зарубљеним пирамидама.

Призма је полиедар који има $n+2$ стране, $n \geq 3$, од којих две представљају два подударна некомпланарна n-тоугла, док су преосталих n страна паралелограми. Два подударна n-тоугла називају се *основама* или *базама* призме, а паралелограми су *бочне стране*. Основе припадају двема дисјунктним равнима, а одговарајуће ивице су им паралелне (то су *основне ивице*), сл. 5. Ивице које су заједничке суседним бочним странама називамо *бочним ивицама*.



Сл. 5



Сл. 6

Мада има $(n+2)$ стране, призма чија је база n-тоугао назива се *ентостраном*. Тако на сл. 5 имамо четворострану, а на сл. 6 тространу призму.

Ако су бочне ивице нормалне на раван основе, призма је *права*, као на сл. 6. У противном призма је *коса*, сл. 5. Нормално растојање између равни основа је *висина* призме. Код праве призме бочна ивица је висина. Код косе призме на сл. 5 висина је C_1H.

*Права призма чије су базе правилни многоуглови назива се правилном призмом.**)

На пример, ако је троугао MNP на сл. 6 једнакостраничан, тада је призма $MNPM_1N_1P_1$ *правилна тространа*. Међу правилним четвоространим призмама истичемо коцку, код које не можемо разликовати базе од бочних страна. Заправо, све стране су равноправне и можемо их сматрати и базом и бочном страном.

Слично коцки, код сваке четворостране призме, чије су све стране паралелограми, свака страна се може сматрати базом. Оваква призма се назива *паралелепипед*.

Правоугли паралелепипед (све стране су правоугаоници) назива се *квадар* (најчешћи облик у грађевинарству), сл. 7.

Призме, чије су базе са најмање четири странице, имају *дијагонале*. Дијагонала призме је дуж која не припада ни једној страни призме, а њени крајеви су темена база. Примењујући Питагорину

*) *Правилна призма* није и правилан полиедар и обрнуто. Изузетак је коцка, која је и једно и друго.

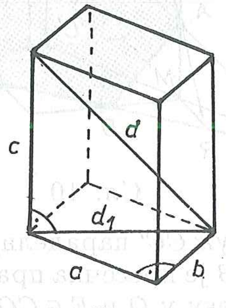
теорему на квадар, чије ивице имају дужине a, b, c, налазимо да дијагонала d задовољава услов:

$$\boxed{d^2 = a^2 + b^2 + c^2} \qquad (1)$$

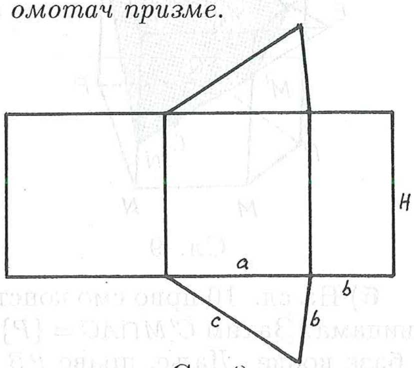
Специјално, за коцку ивице a важи: $d^2 = 3a^2$, односно:

$$\boxed{d = a\ \sqrt{3}} \qquad (2)$$

Унија бочних страна призме је *омотач призме.*



Сл. 7



Сл. 8

Познато нам је (из основне школе) како се може од папира начинити призма. Потребно је најпре начинити *мрежу* призме. То је многоугао који се може разделити на два подударна многоугла (који су подударни базама призме) и један паралелограм (који се даље може разделити на паралелограме подударне бочним странама призме). Водећи рачуна о томе које су стране суседне, добијамо мрежу призме. (На сл. 8 имамо мрежу праве тростране призме.)

Пресек призме са неком равни у општем случају представља многоугао. Ако раван пресеца све бочне ивице, тај многоугао има исти број темена као и база призме. То су *равни пресеци призме.*

За конструкцију равног пресека призме, потребно је најпре конструисати пресечну праву дате равни и равни једне основе. Даљу конструкцију приказаћемо у следећем задатку.

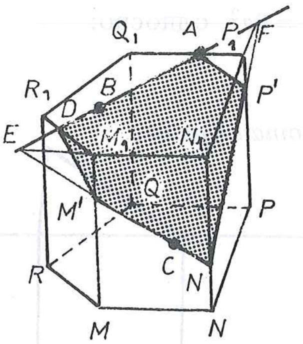
Пример 1. Конструисати пресек равни (A, B, C) и дате призме, ако су:

а) A и B тачке базе $M_1N_1P_1Q_1R_1$ (сл. 9) и C тачка бочне стране MNN_1M_1.

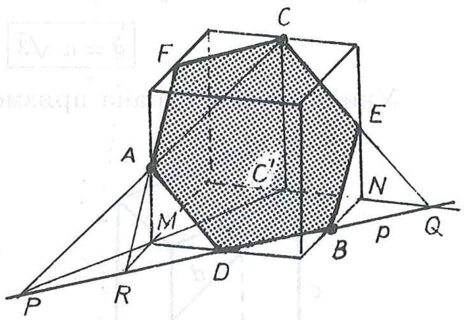
б) A, B, C средишта ивица коцке на сл. 10.

Решење. *а*) На сл. 9 најпре смо конструисали тачку D на ивици M_1R_1. (Права AB је пресек базе $M_1N_1P_1Q_1R_1$ и равни (A, B, C).) Права AB продире раван (M, N, N_1) у тачки E, у којој права M_1N_1

базе сече праву AB. Сада права EC, која је у равни (A,B,C), одређује продоре M' и N' ивица MM_1 и NN_1 кроз пресечну раван. Сада тачку F, $AB \cap N_1P_1 = \{F\}$, искористимо за одређивање тачке P'.



Сл. 9

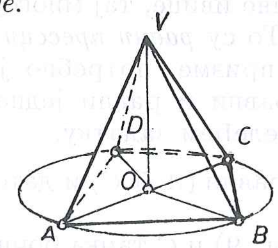


Сл. 10

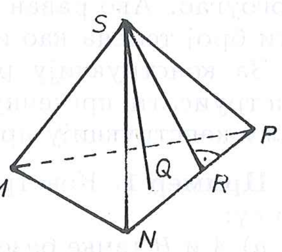
б) На сл. 10 прво смо конструисали дуж CC' паралелну бочним ивицама. Затим $C'M \cap AC = \{P\}$. Права PB је пресечна права равни и базе коцке. Даље, праве PB и $C'N$ се секу у Q и $E \in CQ$, итд. ♠

У неким примерима сусрешћемо се и са тзв. *дијагоналним пресецима* (који садрже две паралелне дијагонале база).

Пирамида је полиедар који има $(n+1)$ страну, $n \geq 3$, од којих је једна n-тоугао, а остале троуглови са заједничким теменом ван равни n-тоугла. Тај n-тоугао је *основа* или *база* пирамиде, а троуглови су *бочне стране*. Заједничко теме бочних страна, на сл. 11 тачка V, је *врх* пирамиде. Странице основе су *основне ивице*, а остале су *бочне ивице*. Нормала из врха на основу је *висина* пирамиде (на сл. 11 дуж VO). Висине бочних страна су *бочне висине* (*апотеме*), на сл. 12 дуж SR. Унија бочних страна је *омотач пирамиде*.



Сл. 11



Сл. 12

Мада има $(n+1)$ страну, пирамида чија је основа n-тоугао, назива се *ентострана*. На сл. 11 имамо четворострану, а на сл. 12 тространу. Код тростране пирамиде свака страна се може сматрати базом. Тростране пирамиде називамо *тетраедрима*.

Пирамиду називамо *правом*, ако су јој једнаке све бочне ивице. Ако је на сл. 11 дата права пирамида, тада се на основу једнакости $VA = VB = VC = VD$ може доказати да су правоугли троуглови VOA, VOB, VOC и VOD подударни, па је $OA = OB = OC = OD$. Посматрајући слично било коју праву пирамиду, долазимо до закључка да је подножје висине праве пирамиде центар описаног круга базе. Отуда и закључак да база праве пирамиде не може бити било какав многоугао. *База праве пирамиде може бити само тетиван многоугао.*

Ако је база праве пирамиде правилан многоугао, онда имамо *правилну пирамиду.* Раније смо се срели са једном правилном тространом пирамидом–правилним тетраедром.

Пресеци пирамиде и неке равни (*равни пресеци* пирамиде) конструишу се слично пресецима призме из *примера* 1. (Ако пресечна раван садржи врх и два несуседна темена базе, онда је то *дијагонални пресек.*).

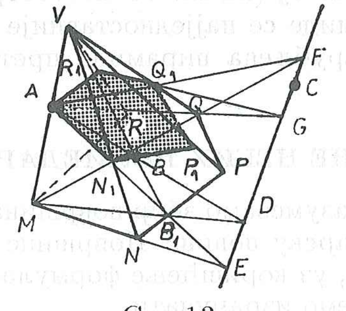
На следећем примеру ћемо видети како се конструишу ови равни пресеци.

Пример 2. Конструисати раван пресек пирамиде и равни (A, B, C) ако:

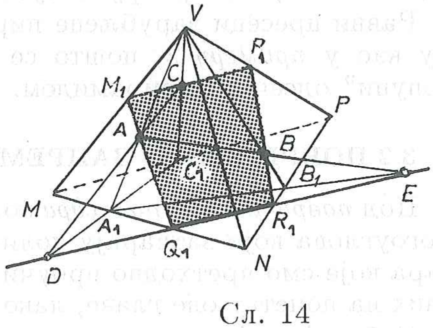
а) тачка A припада ивици VM, тачка B страни VNP, а тачка C равни базе $MNPQR$ (петостране пирамиде).

б) тачке A, B, C припадају редом странама VMN, VNP, VPM, тростране пирамиде $VMNP$.

Решење. *а*) Најпре одредимо пресек полуправе VB са базом. Добијемо тачку B_1, сл. 13. Даље је $MB_1 \cap AB = \{D\}$. Права CD је пресечна права равни базе и равни (A, B, C). Сада $MN \cap CD = \{E\}$ и $AE \cap VN = \{N_1\}$, па $N_1B \cap VP = \{P_1\}$. Затим $MQ \cap CD = \{F\}$ и $AF \cap VQ = \{Q_1\}$. Коначно $RQ \cap CD = \{G\}$ и $Q_1G \cap VR = \{R_1\}$.



Сл. 13

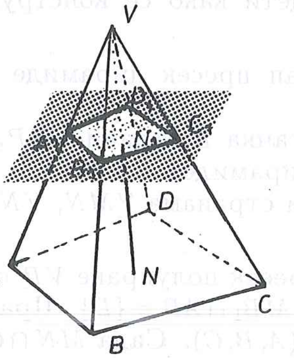


Сл. 14

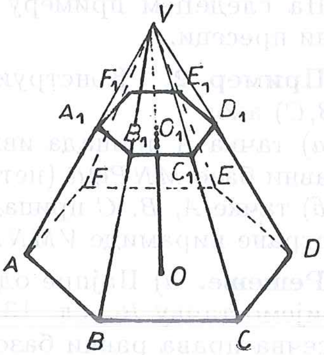
б) Као у претходном случају, одредимо A_1, B_1, C_1: $AC \cap A_1C_1 = \{D\}$ и $AB \cap A_1B_1 = \{E\}$, па је DE пресечна права равни (A, B, C) и

(M, N, P). Према сл. 14, права DE сече основне ивице у тачкама R_1 и Q_1. Тиме је пресек $M_1P_1R_1Q_1$ потпуно одређен. ♠

Ако пирамиду пресечемо неком равни која је паралелна са базом, раван пресек ће бити многоугао сличан бази, са ивицама паралелним одговарајућим основним ивицама. Ако део пирамиде између врха и равног пресека одбацимо, остатак ће бити полиедар чије су две стране слични n-тоуглови, а остале стране су трапези. Ово тело је тзв. *зарубљена пирамида.* Два слична n-тоугла су *основе* (*базе*), а трапези су *бочне стране*, чија је унија *омотач.* Краци трапеза су *бочне ивице*, а странице база су тзв. *ивице доње* (обично веће) *базе* и *ивице горње базе.* Висине трапеза називамо *бочним висинама.* На сл. 15 видимо како настаје четворострана зарубљена пирамида. Ако су бочне стране једнакокраки трапези, имамо *праву зарубљену пирамиду.* Висина зарубљене пирамиде је нормално растојање између равни база (на сл. 15 дуж NN_1).



Сл. 15



Сл. 16

Ако је основа праве зарубљене пирамиде правилан многоугао, онда имамо *правилну зарубљену пирамиду* (на сл. 16 шестострану).

Равни пресеци зарубљене пирамиде се најједноставније добијају као у *примеру* 2, пошто се зарубљена пирамида претходно "допуни" одсеченом пирамидом.

3.2 ПОВРШИНЕ И ЗАПРЕМИНЕ НЕКИХ ПОЛИЕДАРА

Под *површином P полиедра* подразумевамо збир површина свих многоуглова који затварају полиедарску површ. Површине полиедара које смо претходно проучили, уз коришћење формула наведених на почетку ове главе, лако ћемо израчунати.

Уобичајено је да се површина базе призме или пирамиде означи са B, а збир површина свих бочних страна, тј. површина омотача са M. Тако добијамо:

$$\boxed{P = 2B + M} \quad \text{(површина призме)} \tag{3}$$

$$\boxed{P = B + M} \quad \text{(површина пирамиде)} \tag{4}$$

$$\boxed{P = B_1 + B_2 + M} \quad \text{(површина зарубљене пирамиде)} \tag{5}$$

Пример 3. Површине страна квадра стоје у размери $3 : 1 : 4$. Израчунати површину квадра ако му је дијагонала дужине 39 *cm*.

Решење. Стране квадра чине шест правоугаоника; по два наспрамна су једнаки међу собом. Ако дужине ивица означимо са a, b, c, имамо пропорцију: $ab : ac : bc = 3 : 1 : 4$, или $b : c = 3 : 1$ и $a : b = 1 : 4$. Осим тога, из формуле (1) имамо: $a^2+b^2+c^2 = 39^2$. Из наведених пропорција добијамо $a : b : c = 3 : 12 : 4$, одакле је $a = 3k$, $b = 12k$ и $c = 4k$ (видети *одељак* 1.3). Сада из једнакости: $9k^2 + 144k^2 + 16k^2 = 1521$, добијамо $k = 3$ (јер је $k > 0$). Дакле: $a = 9$ *cm*, $b = 36$ *cm*, $c = 12$ *cm*, па је површина $P = 2ab + 2bc + 2ac = 1728\ cm^2$. ♠

Пример 4. Израчунати површину правилне тростране пирамиде која има основну ивицу дужине a *cm*, а сва три угла рогља при врху се прави.

Решење. Бочне стране су три подударна једнакокрака правоугла троугла са хипотеузом a *cm*, па самим тим имају катете $s = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ *cm*. Тражена површина је $P = B+M = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} + 3\cdot\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 =$
$= \dfrac{a^2}{4}(\sqrt{3}+3)\ cm^2$. ♠

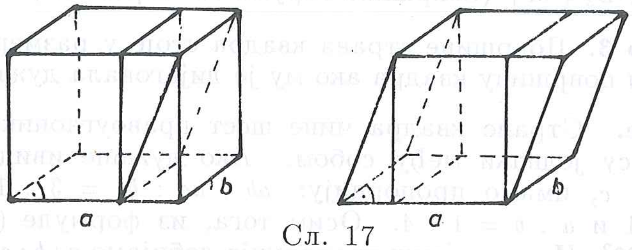
Појам *запремине полиедра* је доста сложенији од појма дужине и појма површине. Ради разумевања овог појма, који у ствари представља мерење "количине" простора, морамо поменути још неке појмове.

Познато нам је да су било које две фигуре подударне ако постоји изометрија којом се једна у другу пресликавају. Полиедри су фигуре, па се то и на њих односи. Кад су у питању правилни полиедри, за њихову подударност је довољно да су исте врсте и да имају једнаку ивицу.

Два *подударна полиедра* имају подударне све одговарајуће стране, све одговарајуће рогљеве, све одговарајуће ивице. Нас занимају посебно призме, пирамиде и зарубљене пирамиде. Може се доказати да су два оваква полиедра подударна ако имају подударне базе и одговарајуће бочне стране.

Осим подударности важни су још појмови *разложиве* и *допунске једнакости* полиедра.

Два полиедра су разложиво једнака ако представљају уније коначног броја подударних полиедара. На сл. 17 видимо квадар и паралелепипед (косоугли), који су разложиво једнаки. (Представљају уније једног квадра и две тростране призме.)



Сл. 17

Два полиедра су допунски једнака ако су њихове уније са коначно много подударних полиедара, подударне међу собом. Просто речено, ако се од два полиедра, "додавањем" подударних делова добију два подударна полиедра, они су допунски једнаки.

Сада можемо увести појам запремине.

Сваком полиедру F додељујемо позитиван број $V(F)$ (или једноставно број V), такав да:
а) Коцки ивице 1 додељујемо број 1.
б) Подударним полиедрима додељујемо једнаке бројеве.
в) Полиедру који је унија два полиедра F_1 и F_2 додељујемо број $V(F_1) + V(F_2)$.
Број $V(F)$ називамо запремином полиедра F.

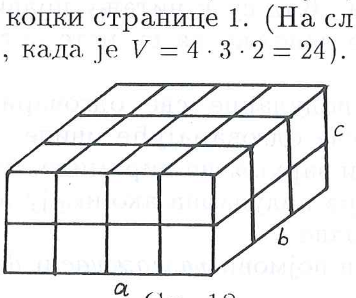
На основу изложене дефиниције закључујемо да допунски или разложиво једнаки полиедри имају једнаке запремине.

Сада се може наћи формула за одређивање запремине призме. Најпре, можемо утврдити следеће.

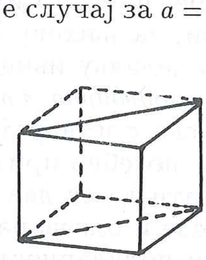
Запремина квадра, чије ивице имају дужине a, b, c износи $a \cdot b \cdot c$.

(6) $\boxed{V = a \cdot b \cdot c}$ (запремина квадра)

Доказ. Заиста, ако су a, b, $c \in N$, тада се квадар разлаже на $a \cdot b \cdot c$ коцки странице 1. (На сл. 18 приказан је случај за $a = 4$, $b = 3$, $c = 2$, када је $V = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$).



Сл. 18



Сл. 19

Ако је неки од бројева a, b, c рационалан, нпр. нека је $a = \frac{m}{n}$, $b = \frac{p}{q}$, $c = \frac{r}{s}$, тада можемо узети: $a = \frac{mqs}{nqs}$, $b = \frac{nps}{nqs}$ и $c = \frac{nqr}{nqs}$. Ако узмемо да је нова јединица дужине $\frac{1}{nqs}$, тада ће бити $a_0 = mqs$, $b_0 = nps$ и $c_0 = nqr$, $a_0, b_0, c_0 \in N$, па је $V_0 = a_0 \cdot b_0 \cdot c_0$. Међутим, у новим јединицама јединична коцка има запремину $V^1 = nqs \cdot nqs \cdot nqs = (nqs)^3$, па V коцки ивице 1 (у првобитном мерењу) садржи $(nqs)^3$ нових јединичних коцки, па је: $V_0 = V \cdot (nqs)^3$. Одавде је: $V = \frac{V_0}{(nqs)^3} =$

$$= \frac{a_0 \cdot b_0 \cdot c_0}{(nqs)^3} = \frac{a_0}{nqs} \cdot \frac{b_0}{nqs} \cdot \frac{c_0}{nqs} = \frac{mqs}{nqs} \cdot \frac{nps}{nqs} \cdot \frac{nqr}{nqs} = \frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s} = a \cdot b \cdot c.$$

Треба још доказати да је $V = a \cdot b \cdot c$ и ако су a, b, c ирационални бројеви.

Ако ирационалан број желимо да представимо у облику децималног броја, онда је то могуће учинити само приближно (са жељеном тачношћу). Нпр, ако је a ирационалан број, можемо узети да је: $\frac{a_k}{10^k} < a < \frac{a_k + 1}{10^k}$, где је $a_k, a_k + 1 \in N$ (односно $a' < a < a''$, где су a' и a'' приближне вредности за a, изражене са k децимала). Узимајући довољно велико k можемо постићи жељену тачност, а грешку апроксимације учинити довољно малом.

Слично представимо: $\frac{b_k}{10^k} < b < \frac{b_k + 1}{10^k}$ и $\frac{c_k}{10^k} < c < \frac{c_k + 1}{10^k}$. Тако дужине страница изразимо рационалним бројевима, са грешком не већом од $\frac{1}{10^k}$. Примењујући закључак за случај рационалних бројева a, b, c, добијамо: $\frac{a_k \cdot b_k \cdot c_k}{10^{3k}} < a \cdot b \cdot c < \frac{(a_k + 1)(b_k + 1)(c_k + 1)}{10^{3k}}$, тј.

$$a'b'c' < abc < a''b''c'', \text{ или } V' < abc < V''.$$

Овде су V' и V'' приближне вредности запремине квадра, па како грешку апроксимације можемо учинити произвољно малом, можемо коначно закључити да је $V = abc$ и ако су a, b, c ирационални бројеви. Тиме смо доказали формулу (6). ♠

Ако су a и b основне ивице и c је висина, ову формулу можемо написати у облику: $V = B \cdot H$, где је $H = c$). Није тешко доказати да је квадар разложиво једнак косој призми исте висине и једнаке базе (видети сл. 17). Слично се доказује да је сваки паралелепипед са базом површине B и висине H разложиво једнак нашем квадру. Због тога је запремина сваке четворостране призме: $V = B \cdot H$. Лако се уверавамо да је свака тространа призма подударна половини паралелепипеда чија база има површину $2B$, ако је B површина базе тростране призме (видети сл. 19). Због тога се запремина V тростране призме добија из: $2V = 2B \cdot H$, па је $V = B \cdot H$. Слично се може утврдити и за сваку другу призму, јер се свака база може разложити на троуглове. Због тога је:

(7) $\boxed{V = B \cdot H}$ (запремина произвољне призме)

Специјално за коцку ивице a, важи:

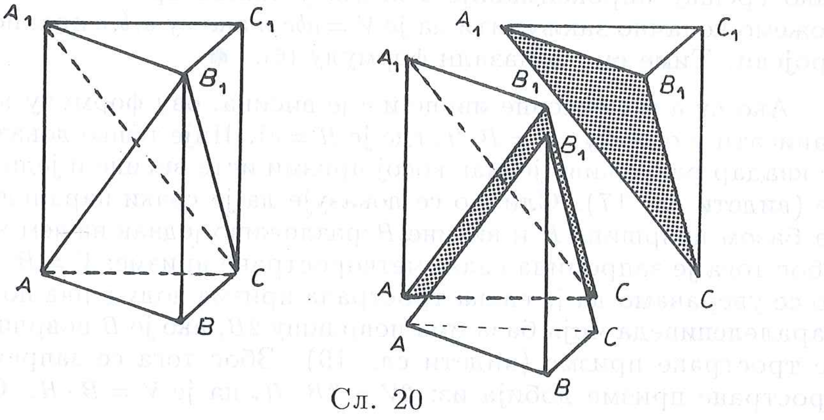
(8) $\boxed{V = a^3}$ (запремина коцке)

За одређивање запремине пирамиде користићемо чувени *Кавалијеријев принцип*, који, прилагођен нашем случају гласи:

> *Ако два полиедра, који су постављени на једну раван, пресецамо равнима паралелним основној равни и при томе су површине добијених пресека увек једнаке међу собом, тада ова два полиедра имају једнаке запремине.*

Користећи се чињеницом да су паралелни пресеци пирамиде (паралелно равни основе) слични основи, а да за површине тих сличних многоуглова важи: $P_1 : B = {H_1}^2 : H^2 = k^2$, односно $P_1 = k^2 B$, закључујемо да *две* пирамиде исте висине и једнаке површине база имају једнаке паралелне пресеке (на истој удаљености од база). Отуда излази да све пирамиде којима је површина базе B, а висина дужине H, имају међу собом једнаке запремине.

Свака база се може разложити на троуглове, па је довољно утврдити запремину тростране пирамиде. Приметимо да се тространа призма запремине $B \cdot H$ може разложити на три тростране пирамиде запремина $\frac{1}{3} B \cdot H$. Ово разлагање видимо на сл. 20. (Две горње пирамиде имају једнаке базе ACA_1 и A_1C_1C и заједничку висину из B_1, а доња и десна имају једнаке базе ABC и $A_1B_1C_1$ и једнаку одговарајућу висину.)



Сл. 20

Према Кавалијеријевом принципу, ове три пирамиде имају једнаке запремине, па је:

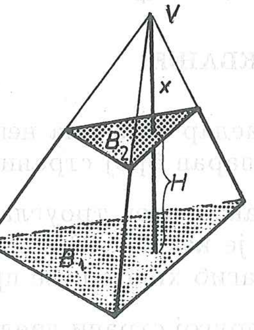
$$\boxed{V = \frac{1}{3} B \cdot H} \quad \text{(запремина произвољне пирамиде)} \qquad (9)$$

Запремину зарубљене пирамиде, сл. 21, израчунаћемо користећи особину сличних паралелних пресека пирамиде: $B_2 : B_1 = k^2$, тј. $B_2 = k^2 \cdot B_1$, где је $k = \frac{x}{x+H}$. Из $\sqrt{B_2} : \sqrt{B_1} = \frac{x}{x+H}$, налазимо да је $x = \frac{H\sqrt{B_2}}{\sqrt{B_1} - \sqrt{B_2}} = \frac{H(\sqrt{B_1 B_2} + B_2)}{B_1 - B_2}$.

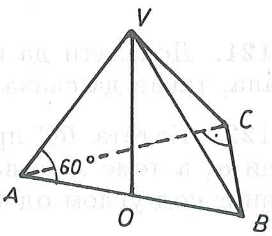
Према сл. 21, тражену запремину израчунавамо као разлику запремина "целе" пирамиде (висине $x + H$) и одсеченог дела (висине x): $V = \frac{1}{3}B_1(x+H) - \frac{1}{3}B_2 x = \frac{1}{3}B_1 H + \frac{1}{3}(B_1 - B_2) \cdot x$.

Кад заменимо x и скратимо са $(B_1 - B_2)$, добићемо:

$$\boxed{V = \frac{H}{3}(B_1 + \sqrt{B_1 B_2} + B_2)} \quad \text{(запремина зарубљене пирамиде)} \qquad (10)$$



Сл. 21



Сл. 22

Решићемо неколико примера.

Пример 5. Израчунати запремину праве тростране призме, ако је $B = 10\ cm^2$, а бочне стране су: $25\ cm^2$, $29\ cm^2$ и $36\ cm^2$.

Решење. Из бочних страна је $aH = 25$, $bH = 29$, $cH = 36$. Стављајући $\frac{1}{H} = k$, добијамо: $a = 25k$, $b = 29k$, $c = 36k$. Применимо Херонов образац на базу. Тако из $B = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, тј. из $10 = \sqrt{45k \cdot 20k \cdot 16k \cdot 9k}$, добијамо: $10 = 360k^2$. Дакле, $H = 6\ cm$, па је тражена запремина $V = B \cdot H = 60\ cm^3$. ♠

Пример 6. Израчунати запремину тростране пирамиде чија је база правоугли троугао са катетама $8\ cm$ и $15\ cm$, а бочне ивице су нагнуте према равни основе под углом од 60^0.

Решење. Ако је O подножје висине из врха V на базу ABC, тада су правоугли троуглови OAV, OBV и OCV подударни. (Имају заједничку катету OV и оштар угао од 60^0.) Због тога је $OA = OB = = OC$, па је O центар описаног круга базе, у овом случају средиште хипотенузе, сл. 22. Сада прво израчунамо хипотенузу базе: $c^2 = 8^2 + 15^2$, па је $c = 17\ cm$ и $R = \frac{17}{2}$. Троугао ABV је једнакостраничан, па је $H = \frac{c\sqrt{3}}{2} = \frac{17\sqrt{3}}{2}$. Запремина пирамиде је $V = \frac{1}{3}B \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \frac{a \cdot b}{2} \cdot H = 170\sqrt{3}\ cm^3$. ♠

Пример 7. Висина зарубљене пирамиде је $H = 15\ cm$. Ако је $B_1 : B_2 = 9 : 4$ и запремина $V = 475\ cm^3$, израчунати B_1 и B_2.

Решење. Из $B_1 : B_2 = 9 : 4$ добијамо $B_2 = \frac{4}{9}B_1$, што заменимо у запремину (формула (10)):
$475 = 5(B_1 + \frac{2}{3}B_1 + \frac{4}{9}B_1)$
Одавде је $B_1 = 45\ cm^2$, па је $B_2 = 20\ cm^2$. ♠

ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

121. Доказати да не постоји полиедар који има непаран број страна, такав да свака страна има непаран број страница.

122. Катета BC правоуглог једнакокраког троугла ABC је у равни α, а теме A је ван равни. Ако је катета AC нагнута према равни α под углом од 45^0, одредити нагиб хипотенузе према α.

123. Тачка A припада једној, а B другој страни диедра, чији је угао $\frac{\pi}{3}$. Ако су A_1 и B_1 подножја нормала из A и B на ивицу диедра, израчунати дужину дужи AB, ако $AA_1 = 3$, $BB_1 = 4$ и $A_1B_1 = 6$.

124. Основа пирамиде је једнакокраки троугао ABC крака $AB = AC = b$ и угла β наспрам крака. Бочне ивице су нагнуте према равни основе под углом φ. Израчунати површину пресека пирамиде и равни која садржи теме B и висину пирамиде.

125. Кроз средиште бочне ивице правилне тростране пирамиде постављена је раван нормална на ту ивицу. Израчунати површину пресека равни и пирамиде, ако је основна ивица дужине a, два пута мања од бочне ивице.

126. Израчунати одстојање једног темена од дијагонале коцке, ако дијагонала не садржи то теме, а ивица коцке има дужину a.

127. Центри страна коцке, ивице a, представљају темена правилног октаедра. Израчунати површину и запремину октаедра.

128. Све стране рогља при врху правилне четворостране пирамиде износе по 60^0. Израчунати површину и запремину те пирамиде, ако јој основна ивица има дужину a.

129. Израчунати запремину правилне четворостране призме, ако њена дијагонала образује угао од 30^0 са бочном страном. Основна ивица је дужине a.

130. Дијагонала квадра има дужину 13 cm, а дијагонале бочних страна $4\sqrt{10}$ cm и $3\sqrt{17}$ cm. Израчунати запремину квадра.

131. Запремина квадра је 2080 cm^3, површина 996 cm^2, а обим основе 58 cm. Колике су дужине основних ивица квадра?

132. Површине трију страна квадра су 2 m^2, 3 m^2 и 6 m^2. Колика је запремина тог квадра?

133. Израчунати површину праве призме, чија је база ромб странице a cm, са оштрим углом од 60^0, ако је већи дијагонални пресек призме квадрат.

134. Висина праве тростране призме је 5 cm, а запремина 24 cm^3. Одредити дужине основних ивица, ако се површине бочних страна односе као $17 : 17 : 16$.

135. Пирамида висине 16 cm има базу површине 512 cm^2. На којој висини, изнад базе, треба пресећи пирамиду паралелно бази, тако да пресек има површину 50 cm^2?

136. Основна ивица правилне тростране пирамиде је a, а бочне стране су нагнуте према равни основе под углом $\frac{\pi}{4}$. Израчунати површину и запремину пирамиде.

137. Наћи површину и запремину тростране пирамиде којој је основа правоугли троугао са катетама $a = 8$ cm и $b = 6$ cm, ако су јој бочне стране нагнуте према равни основе под углом од 30^0.

138. Основна ивица правилне тростране пирамиде је 1 cm, а површина омотача је 3 cm^2. Израчунати запремину пирамиде.

139. Израчунати површину и запремину правилног тетраедра ивице a cm.

140. Основне ивице тростране пирамиде имају дужине: a cm, a cm, b cm. Израчунати запремину пирамиде, ако су све бочне ивице нагнуте према основи под углом од $\frac{\pi}{6}$.

141. Површина дијагоналног пресека правилне четворостране пирамиде је 12 cm^2, а основна ивица $a = 6$ cm. Израчунати површину пирамиде.

142. Израчунати површину и запремину тростране пирамиде, којој су бочне ивице дужина a cm, b cm, c cm, узајамно нормалне.

143. Бочне ивице тростране пирамиде, дужине s cm, граде рогаљ са странама од 90^0, 60^0, 60^0. Израчунати површину и запремину пирамиде.

144. Две стране тростране пирамиде су једнакостранични троуглови странице a, који одређују прав диедар. Израчунати површину и запремину пирамиде.

145. Основне ивице тростране пирамиде су 10 cm, 10 cm и 12 cm. Израчунати површину и запремину пирамиде ако су бочне стране нагнуте према равни основе под углом од 45^0.

146. Из средишта S висине правилне четворостране пирамиде конструисане су нормала на бочну ивицу, $SM = 7$ cm, и нормала на бочну страну, $SN = 5$ cm. Израчунати запремину пирамиде.

147. База тростране пирамиде је правоугли троугао хипотенузе c cm и оштрог угла $\alpha = 30^0$. Израчунати запремину пирамиде, ако су јој све бочне ивице нагнуте према бази под углом од 45^0.

148. Бочна висина правилне тростране пирамиде је h cm. Бочне стране су нагнуте према равни основе под углом од 60^0. Израчунати површину пирамиде.

149. Основне ивице правилне четворостране зарубљене пирамиде су $3a$ cm и $2a$ cm. Израчунати запремину пирамиде, ако су све бочне ивице нагнуте према равни веће основе под углом од 45^0.

150. Правилна четворострана пирамида је пресечена једном равни, која је паралелна равни основе, удаљена 77 cm од основе. Површина пресека је 5625 cm^2. Израчунати површину добијене зарубљене пирамиде, ако је висина дате пирамиде 231 cm.

151. Бочна висина и основне ивице правилне четворостране зарубљене пирамиде односе се као $5 : 8 : 2$. Колика је површина овог полиедра, ако му је запремина $1,75$ m^3?

152. Правилна тространа зарубљена пирамида, са основним ивицама 8 cm и 5 cm, висине 3 cm, пресечена је са равни која је одређена једном ивицом веће основе и наспрамним теменом мање основе. Колика је површина тог пресека?

153. Бочна страна и већа основа правилне тростране зарубљене пирамиде одређују диедар од 60^0. Израчунати запремину зарубљене пирамиде, ако су јој основне ивице 12 cm и 4 cm.

154. Правилна зарубљена тространа пирамида са основним ивицама 36 cm и 12 cm има омотач површине 936 cm^2. Висина, чији су крајеви центри основа, продире раван, одређену ивицом веће основе и наспрамним теменом мање основе, у тачки P. Кроз тачку P је постављена раван паралелна основама. Израчунати површине пресека ових равни и зарубљене пирамиде.

155. Дат је једнакостраничан троугао ABC странице a cm. Са исте стране, ван равни овог троугла, дате су тачке M, N, P, такве да су троуглови ABM, BCN и CAP једнакокраки правоугли, са правим угловима M, N, P, а равни ових троуглова су нормалне на раван (ABC). Израчунати површину и запремину полиедра $ABCMNP$.

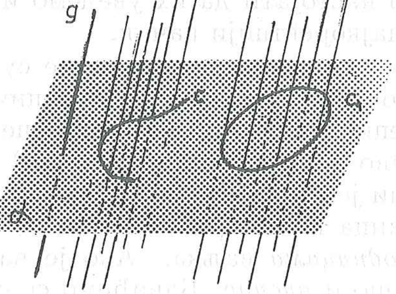
3.3 ОБРТНА ТЕЛА

Нека је α произвољна раван и c произвољна крива у α. (c може бити нека од познатих кривих–круг, парабола и сл, или неки лук ових кривих, или изломљена линија, итд.). Изаберимо неку праву g која продире раван α.

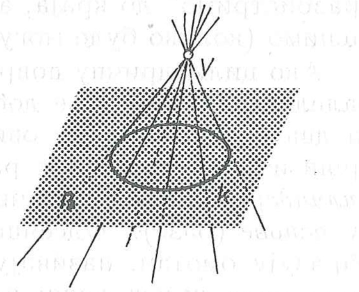
Скуп свих тачака свих правих које су паралелне са g и секу c, називамо **цилиндричном површи.**

Крива c је *водиља* (директриса), права g *генератриса* цилиндричне површи.*) Праве које секу c и паралелне су са g називамо *изводницама.*

На сл. 23 имамо једну *отворену* и једну *затворену* цилиндричну површ (зависно од тога да ли је c отворена или затворена крива).



Сл. 23



Сл. 24

*) *Генератриса*, то је она која изводи, ствара (генерише).

Нека је сада k крива у равни β и V тачка ван равни β.

Скуп свих тачака свих правих које садрже тачку V и секу криву k, назива се **конусна површ**

Крива k је *водиља*, а праве кроз V су *изводнице* (генератрисе) конусне површи. Тачка V је *врх* конусне површи.

На сл. 24 је приказана једна *затворена кружна конусна површ* (водиља је круг k).

У даљем излагању бавићемо се *искључиво затвореним кружним*, цилиндричним и конусним површима. Стога нећемо наглашавати да је водиља круг.

Праву која пролази кроз центар водиље, и паралелна је генератриси за цилиндричну површ, а садржи тачку V за конусну површ, називамо *осом*.

Ако је оса нормална на раван водиље, имамо *праву цилиндричну*, односно *праву конусну* површ.

Истакнимо још једну важну чињеницу: *Пресеци кружних цилиндричних и кружних конусних површи са равнима које су паралелне равни водиље, представљају кругове.* У случају цилиндричне површи овај пресек је подударан водиљи.

У овом одељку размотрићемо површине и запремине неких фигура које нису полиедри. То ће бити фигуре ограничене деловима конусних и цилиндричних површи, деловима сфере*) и круговима. Те фигуре називамо заједничким именом *обртна тела.* Овај назив су добиле због чињенице да могу настати обртањем неке равне фигуре око једне праве. За свако поједино тело размотрићемо и каквим обртањем настаје.

Мерење површина и запремина обртних тела је са логичког становишта доста компликованије од мерења полиедара. Користећи до сада стечена знања нећемо бити у стању да ове појмове "разбистримо" до краја, али ћемо настојати да их уведемо и објаснимо (колико буде могуће) на најкоректнији начин.

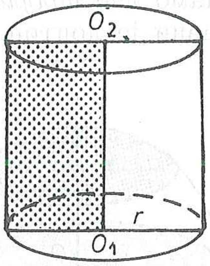
Ако цилиндричну површ пресечемо двема равнима које су паралелне равни водиље добићемо обртно тело које је ограничено са два круга одређена овим пресецима и делом цилиндричне површи између пресечних равни. Ово тело је *ваљак* (кружни) или *цилиндар.* Део цилиндричне површи је *омотач* ваљка, а два круга су *основе* (базе). Одсечци изводница цилиндричне површи, који образују омотач, називају се *изводницама* ваљка. Ако је ваљак прав, онда су изводнице истовремено и *висине.* Бавићемо се само

*) У првом разреду средње школе смо научили да је сфера скуп свих тачака S, таквих да је $SO = r$, где је O дата тачка (*центар*) и r дата дуж (*полупречник*).

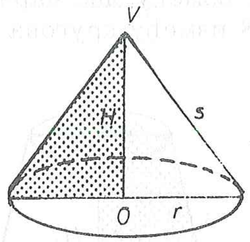
правим ваљком, сл. 25. Као што ћемо се уверити, прав ваљак је одређен полупречником и висином.

Раван која садржи осу сече ваљак по тзв. *осном* пресеку. Код правог ваљка осни пресек је правоугаоник. *Прав ваљак настаје обртањем правоугаоника око једне своје странице.* На сл. 25 осенчени правоугаоник се обрће око странице O_1O_2.

Ако је осни пресек ваљка квадрат ($H = 2r$), тада имамо *једнакостраничан ваљак.*



Сл. 25



Сл. 26

Пресецимо конусну површ једном равни, која је паралелна са равни водиље. Обртно тело, које је ограничено кругом одређеним овим пресеком и делом конусне површи између пресечне равни и врха, назива се *купа* (кружна) или *конус.* Круг је *основа* (база) купе, а део цилиндричне површи је *омотач.* Врх V конусне површи је врх купе. Одсечке изводница конусне површи, који одређују омотач, називамо *изводницама* купе. Лако се доказује да су све изводнице праве купе једнаке међу собом. Тада је одсечак осе (на сл. 26 дуж VO) *висина* купе.

Осни пресек праве купе је једнакокраки троугао. Ако је, пак, овај троугао једнакостраничан ($s = 2r$) онда имамо *једнакостраничну купу.*

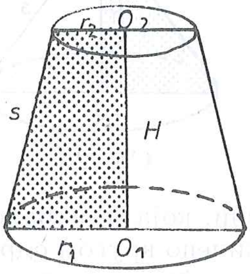
Права купа настаје обртањем правоуглог троугла око једне катете. (На сл. 26 овај троугао је осенчен.)

Страница око које се обрће равна фигура представља висину обртног тела.

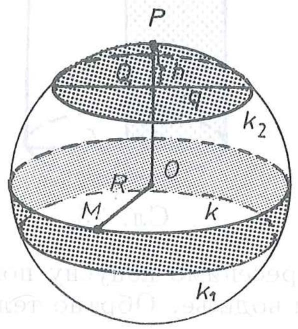
Ако конусну површ пресечемо са две равни паралелне равни водиље, обе са једне стране врха, добићемо обртно тело ограничено са два круга и делом конусне површи, које се назива *зарубљена купа.* Кругови су *основе* (базе) зарубљене купе, а део конусне површи *омотач.* Делови изводница који одређују омотач представљају *изводнице зарубљене купе.* Код праве зарубљене купе, сл. 27, изводнице су једнаке дужине, а оса представља *висину.* Осни пресек је једнакокраки трапез.

Зарубљена купа настаје ротацијом правоуглог трапеза око мањег крака. Основице овог трапеза су полупречници основа.

Подсетимо се да је **лопта** *скуп свих тачака* M, таквих да је $OM \leq r$, где је O дата тачка (*центар* лопте) и r дата дуж (*полупречник* лопте). Лопта је ограничена сфером. Пресек лопте и равни је круг, а ако пресечна раван садржи центар, онда је пресек тзв. *велики круг лопте* чији је полупречник једнак полупречнику лопте (на сл. 28 круг k). Пресечна раван дели лопту на два *одсечка*, а ако раван садржи центар лопте, онда имамо две *полулопте*. Део лопте између две паралелне пресечне равни је лоптин *слој*. (На сл. 28 између кругова k и k_1.)



Сл. 27



Сл. 28

Део сфере који припада одсечку назива се *калота.* Калота и одсечак у датој лопти λ одређени су *висином* (на сл. 28 дуж $PQ = h$). Део сфере који припада слоју назива се *зона* или *појас*. Растојање између пресечних равни је висина зоне (слоја).

Уочимо да *лопта настаје обртањем полукруга око свог пречника.*

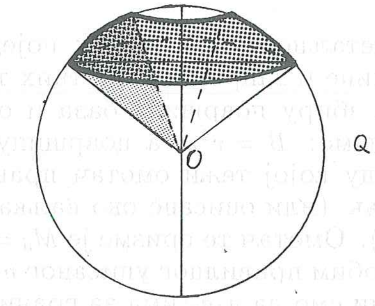
Од делова лопте занима нас још и *лоптин исечак.* То је тело које је ограничено калотом и купом која има врх O (центар лопте), а база јој је пресечни круг. На сл. 28 то је купа са базом k_2 и врхом O. Овде имамо један конвексан исечак (одговара му мања калота) и један неконвексан (ограничен поменутом купом и калотом која захвата више од пола сфере).

Исечком лопте (обавезно неконвексним) називамо и тело ограничено појасом и двема купама са врхом O,сл. 29. У сваком случају, лоптин исечак настаје обртањем неког кружног исечка око неког пречника круга. (На сл. 29 тај исечак је осенчен.)

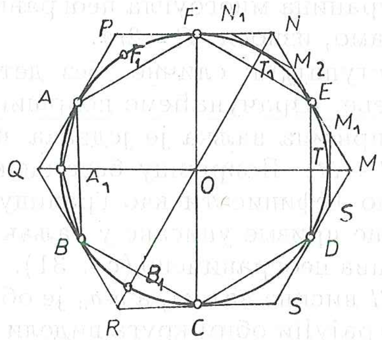
Ради лакшег разумевања и извођења површина и запремина обртних тела, подсетимо се на Архимедов начин израчунавања обима круга.

Јасно је да се дужина круга не може мерити као дужи, јер није могуће директно упоредити дужину лука са јединичном дужи.

Стога, уочимо правилан уписан шестоугао $ABCDEF$ и правилан описан шестоугао $MNPQRS$ круга k, сл. 30. а). Познато је да је обим конвексног многоугла, уписаног у други многоугао, мањи од обима тог другог многоугла. Због тога је обим o_6 уписаног правилног шестоугла мањи од обима O_6 описаног правилног шестоугла. Уочимо пречник A_1T (који је симетрала тетиве AB). Тада



Сл. 29



Сл. 30 а)

је $A_1A = A_1B$. Слично одредимо тачке B_1, C_1, итд., па добијемо правилан уписани дванаестоугао: $AA_1BB_1 \ldots FF_1$. У троуглу AA_1B је $AA_1 + A_1B > AB$, тј. $2a_{12} > a_6$, где су a_6 и a_{12} странице правилног уписаног дванаестоугла, односно шестоугла. Одавде је $12a_{12} > 6a_6$, тј $o_{12} > o_6$. Истовремено видимо да за описане правилне многоуглове важи: $O_{12} < O_6$. (Према сл. 30. а) је $M_1M > M_1T$ и $M_2N > M_2T_1$, јер је хипотенуза већа од катете, па је $2b_{12} < b_6$.). Наставимо ли овај поступак уписивања и описивања правилних многоуглова, дуплирајући сваки пут број њихових страница, добићемо растући низ обима уписаних и опадајући низ обима описаних правилних многоуглова. При томе обим било ког уписаног многоугла мањи је од обима сваког описаног многоугла. Тако добијамо услов:

$$o_6 < o_{12} < o_{24} < \cdots < o_n < \cdots < O_n < \cdots < O_{24} < O_{12} < O_6$$

Сл. 30. б)

Ако на некој полуправој Op одредимо тачке A_6, A_{12}, ..., A_n, ..., B_n, ..., B_{12}, B_6, такве да су дужи OA_6, OB_6, итд, једнаке обимима уписаних и описаних многоуглова, сл 30. б), тада ћемо имати низ дужи A_6B_6, $A_{12}B_{12}$, ..., A_nB_n, од којих се свака следећа садржи у претходној. Ако се n неограничено повећава, дуж A_nB_n се смањује и можемо је учинити произвољно малом (тј. можемо учинити да се обими o_n и O_n разликују за произвољно мали број). Тада, по познатом ставу, постоји јединствена тачка C, која се садржи у свакој дужи A_nB_n. То значи да постоји број O (једнак дужини дужи OC), који је већи од обима сваког уписаног, а мањи од обима сваког описаног многоугла. Тај број називамо *обимом круга.*

Дакле, можемо рећи да је обим круга граница којој тежи обим правилног уписаног (или описаног) многоугла тог круга, када се број страница многоугла неограничено повећава. Та граница, као што знамо, износи: $O = 2r\pi$.

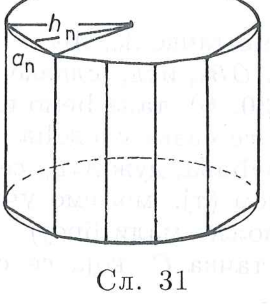
Поступајући слично, без детаљног упуштања у појединачне случајеве, израчунаћемо површине и запремине обртних тела.

Површина ваљка је једнака збиру површина база и омотача: $P = 2B + M$. Површину базе знамо: $B = r^2\pi$, а површину омотача ћемо дефинисати као границу којој тежи омотач правилне n-тостране призме уписане у ваљак, (или описане око ваљка) кад се n увећава неограничено (сл. 31). Омотач те призме је $M_n = n \cdot a_n \cdot H$, где је H висина ваљка, а $n \cdot a_n$ је обим правилног уписаног n-тоугла. Разматрајући обим круга видели смо да $n \cdot a_n$ има за границу обим круга, тј. $n \cdot a_n$ тежи ка $2r\pi$. Због тога је омотач ваљка $M = 2r\pi H$. Дакле, добијамо формулу:

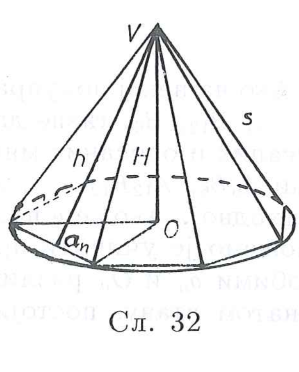
(11) $\boxed{P = 2r^2\pi + 2r\pi H}$ (површина ваљка)

Слично, запремину ваљка ћемо дефинисати као границу којој теже запремине правилних уписаних (или описаних) n-тостраних призми, када се n неограничено увећава. Запремина призме уписане у ваљак биће $V_n = B_n \cdot H$, где се B_n састоји од n једнакокраких троуглова странице a_n и одговарајуће висине h_n, сл. 31. Значи $B_n = n \cdot \dfrac{a_n \cdot h_n}{2}$. Када се n увећава неограничено, тада h_n тежи полупречнику и $n \cdot a_n$ тежи обиму основе. Стога B_n тежи ка $\dfrac{1}{2} 2r\pi \cdot r = r^2\pi$. Тако добијамо:

(12) $\boxed{V = r^2\pi H}$ (запремина ваљка)



Сл. 31



Сл. 32

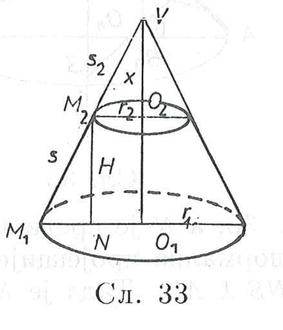
Поступајући слично са купом, тј. уписујући у купу правилне n-тостране пирамиде, добићемо, нпр. да је $M_n = n \cdot \dfrac{a_n \cdot h_n}{2}$, где је h_n бочна висина пирамиде, која тежи ка изводници s купе, када n неограничено расте. Како и $n \cdot a_n$ тежи обиму основе, то M_n тежи ка $\dfrac{2r\pi \cdot s}{2}$, па је омотач купе $M = r\pi s$, сл. 32. Слично резонујемо код извођења запремине. Тако добијамо:

$$\boxed{P = r^2\pi + r\pi s, \quad V = \frac{1}{3}r^2\pi H} \text{ (површина и запремина купе)} \tag{13}$$

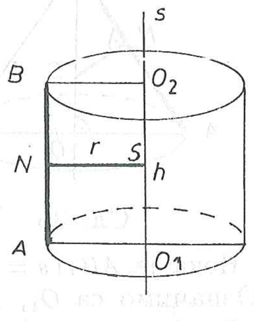
Површину и запремину зарубљене купе израчунаћемо користећи формуле за купу.

Нека је x висина и s_2 изводница купе, чијим одсецањем настаје зарубљена купа висине H, изводнице s, са базама полупречника r_1 и r_2, сл. 33. Површина зарубљене купе је: $P = {r_1}^2\pi + {r_2}^2\pi + M_1 - M_2$, где је $M_1 = r_1\pi(s+s_2)$ омотач купе висине $(H+x)$, а $M_2 = r_2\pi s_2$ омотач "одсечене" купе. Дакле: $M_1 - M_2 = r_1\pi s + \pi s_2(r_1 - r_2)$. Из сличних троуглова VO_2M_2 и M_2NM_1, добијамо $VM_2 : O_2M_2 = M_1M_2 : M_1N$, тј. $s_2 : r_2 = s : (r_1 - r_2)$. Одавде је $s_2 = \dfrac{r_2 s}{r_1 - r_2}$. Кад ово заменимо добићемо омотач зарубљене купе: $M = r_1\pi s + r_2\pi s$ и

$$\boxed{P = {r_1}^2\pi + {r_2}^2\pi + r_1\pi s + r_2\pi s} \text{ (површина зарубљене купе)} \tag{14}$$



Сл. 33



Сл. 34

Запремину добијамо из $V = V_1 - V_2 = \frac{1}{3}{r_1}^2\pi(H+x) - \frac{1}{3}{r_2}^2\pi x =$ $= \frac{1}{3}{r_1}^2\pi H + \frac{1}{3}\pi x({r_1}^2 - {r_2}^2)$. Из сличних троуглова VO_1M_1 и VO_2M_2 добијамо $VO_1 : VO_2 = O_1M_1 : O_2M_2$, односно $(H+x) : x = r_1 : r_2$. Одавде је $x = \dfrac{Hr_2}{r_1 - r_2}$. Заменимо x у запремину и добијемо:

$V = \dfrac{1}{3}{r_1}^2\pi H + \dfrac{1}{3}\pi \cdot \dfrac{Hr_2}{r_1 - r_2}(r_1 - r_2)(r_1 + r_2)$. Одавде је:

(15) $\boxed{V = \frac{\pi H}{3}({r_1}^2 + r_1 r_2 + {r_2}^2)}$ (запремина зарубљене купе)

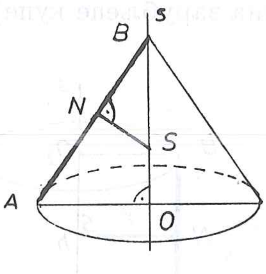
Израчунавање површине лопте и њених делова поједноставићемо уз помоћ следеће теореме.

Теорема. Ротацијом око праве s, дуж AB генерише обртну површ чија је површина $P = 2r\pi h$, где је h нормална пројекција дужи AB на праву s, а r одсечак симетрале дужи AB, од средишта дужи до праве s.

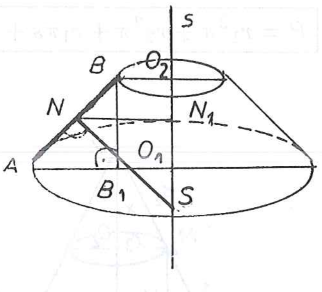
Доказ. Разликоваћемо три случаја.

а) Нека је $AB \| s$, сл. 34. Обртањем дуж AB генерише омотач ваљка, полупречника r и висине h, па је $P = M = 2r\pi h$.

б) Нека је $B \in s$, сл. 35, и нека је $r = NS$ нормала на AB, где је N средиште дужи AB. Обртањем дуж AB генерише омотач купе, полупречника AO, висине h и изводнице AB. Према формули (13) имамо: $P = AO \cdot \pi \cdot AB$. Међутим, правоугли троуглови BNS и BOA су слични, па је $BN : NS = BO : AO$, тј. $\frac{AB}{2} : r = h : AO$. Одавде је $AO = \frac{2rh}{AB}$. Заменом у P добијамо: $P = 2r\pi h$.



Сл. 35



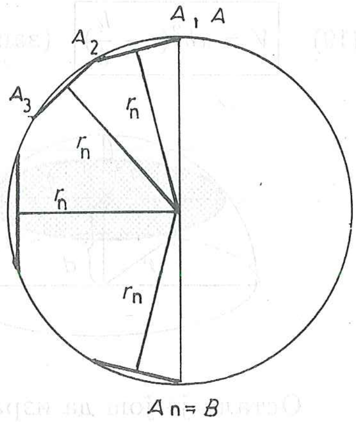
Сл. 36

в) Нека је $AB \cap s = \emptyset$ и $AB \nparallel s$, сл. 36, а N је средиште дужи AB. Означимо са O_1, N_1, O_2 редом нормалне пројекције тачака A, N, B на s и нека је $BB_1 \perp AO_1$ и $NS \perp AB$. Тада је $NS = r$ и $O_1O_2 = BB_1 = h$.

Обртањем око s дуж AB генерише омотач зарубљене купе. Висина купе је h, изводница AB, а полупречници база AO_1 и BO_2. Дакле $P = M = AO_1 \cdot \pi \cdot AB + BO_2 \cdot \pi \cdot AB = \pi \cdot AB \cdot (AO_1 + O_2B) = 2\pi \cdot AB \cdot NN_1$(јер је NN_1 средња линија трапеза AO_1O_2B). Међутим, правоугли троуглови ABB_1 и SNN_1 су слични ($\sphericalangle ABB_1 = \sphericalangle SNN_1$- углови са нормалним крацима), па је $AB : BB_1 = SN : NN_1$, односно $AB : h = r : NN_1$. Одавде је $NN_1 = \frac{rh}{AB}$. Заменом у P добијамо

$P = 2\pi rh$. ♠

Сада можемо израчунати површину лопте, односно површину сфере и делова сфере.



Сл. 37

Нека се полукруг k обрће око свог пречника $AB = 2r$, сл. 37. Нека су: $A_1 = A$, A_2, A_3, …, $A_n = B$ темена правилног $2n$-тоугла уписаног у круг. Површину лопте дефинишемо као границу којој тежи површина обртног тела генерисаног изломљеном линијом $A_1A_2A_3 \ldots A_n$, када се n неограничено повећава. Обртна површ коју генерише ова изломљена линија биће унија неких обртних површи из последње теореме. Све ове површи имају исти одсечак симетрале, то је дуж r_n, а збир свих пројекција:

$h_1 + h_1 + \cdots + h_n = AB = 2r$.

Када n неограничено расте, r_n тежи ка r, а површина обртне површи $P_n = 2\pi r_n h_1 + 2\pi r_n h_2 + \cdots + 2\pi r_n h_n = 2\pi r_n(h_1 + h_2 + \cdots + h_n) = 2\pi r_n AB$, тежи ка $4r^2\pi$. Дакле:

$\boxed{P = 4r^2\pi}$ (површина лопте) (16)

Резонујући слично добијамо површину калоте и површину појаса (зоне). У тим случају је $h_1 + h_2 + \cdots + h_n = h$. Отуда имамо:

$\boxed{P = 2r\pi h}$ (површина калоте и појаса) (17)

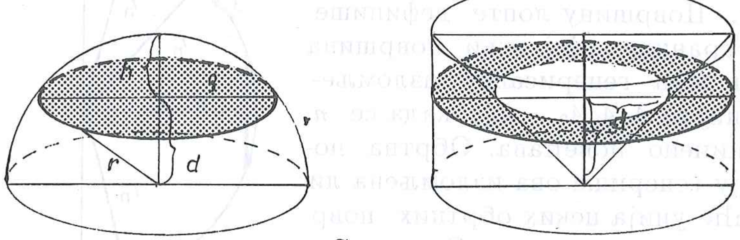
Сада ћемо израчунати запремину лопте користећи се Кавалијеријевим принципом. Према сл. 38, лако ћемо се уверити да полулопта полупречника r и тело добијено тако што се из ваљка полупречника и висине r "изреже" купа исте висине и полупречника, имају једнаке запремине.

Заиста, ако на висини d поставимо пресечну раван површина пресека лопте биће $p = \rho^2\pi = (r^2 - d^2)\pi$, а површина пресека "издубљеног ваљка" биће $p_1 = r^2\pi - d^2\pi$ (јер је изводница купе нагнута према бази под углом од 45^0). Отуда закључујемо да је запремина полулопте: $\dfrac{V}{2} = r^2\pi r - \dfrac{1}{3}r^2\pi r = \dfrac{2}{3}r^3\pi$. Дакле:

$\boxed{V = \dfrac{4}{3}r^3\pi}$ (запремина лопте) (18)

Упоређујући запремине само делова изнад пресечне равни, добићемо запремину одсечка. Ако му висину означимо са h, добићемо: $V = \pi r^2 h - \frac{\pi h}{3}(r^2 + rd + d^2)$. Стављајући $d = r - h$, после сређивања добијамо:

(19) $\boxed{V = \pi h^2 (r - \frac{h}{3})}$ (запремина одсечка)



Сл. 38

Остало је још да израчунамо запремину исечка лопте. (Користићемо се сликама 28 и 29.)

Ако је исечак одређен калотом висине h, као на сл. 28, онда се запремина исечка добија као збир запремина одговарајућег одсечка и купе. Полупречник ρ купе добијамо из $\rho^2 = r^2 - (r-h)^2 = 2rh - h^2$. Висина купе је $r - h$. Према томе имамо: $V = \pi h^2 (r - \frac{h}{3}) + \frac{1}{3}(2rh - h^2)\pi(r - h)$. Сређивањем овог израза добијамо: $V = \frac{2}{3} r^2 \pi h$. У случају веће калоте, висине $(2r - h)$, запремина купе се одузима. Није тешко уверити се да се добије иста формула као у претходном случају, само је h замењено са $(2r-h)$. Ако имамо исечак као на сл. 29, тада га можемо сматрати разликом двају исечака као са сл. 28, са одговарајућим висинама h_1 и h_2. Тада је $V = \frac{2}{3}\pi r^2 h_1 - \frac{2}{3}\pi r^2 h_2 = \frac{2}{3}\pi r^2 (h_1 - h_2) = \frac{2}{3}\pi r^2 h$, јер је $h = h_1 - h_2$. Према томе, у сваком случају важи формула:

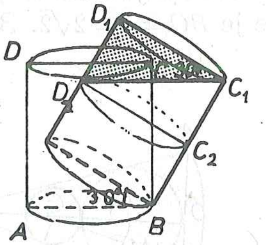
(20) $\boxed{V = \frac{2}{3} r^2 \pi h}$ (запремина лоптиног исечка)

Сада ћемо решити неколико примера.

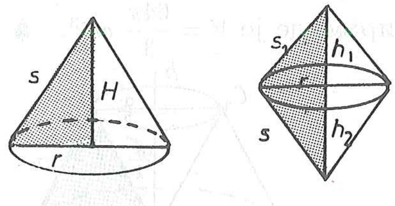
Пример 8. Шерпа облика ваљка, пречника 4 dm, дубине 3 dm, напуњена је до врха водом. Колико ће воде остати у шерпи, ако се она нагне, тако да раван дна гради са хоризонталном равни угао од 30^0?

Решење. После нагињања и изливања вода ће заузети хоризонталан положај. Количина просуте воде ће бити једнака половини запремине ваљка, чији је осни пресек правоугаоник $C_1D_1D_2C_2$ са сл. 39.

Запремина шерпе ($r = 2\ dm$, $H = 3\ dm$) је $V = 12\pi\ dm^3$, а проливена количина воде ($r = 2\ dm$, $H_1 = \dfrac{4}{\sqrt{3}}\ dm$) је $\dfrac{1}{2}V_1 = \dfrac{8\sqrt{3}}{3}\pi\ dm^3$. Узимајући приближне вредности $\sqrt{3} = 1,73$ и $\pi = 3,14$, добијамо: $V - \dfrac{1}{2}V_1 = 23,19\ dm^3 = 23,19$ литара. Тачно толико је воде остало у шерпи. ♠



Сл. 39



Сл. 40

Пример 9. Правоугли троугао са катетама 7 cm и 24 cm ротира око сваке своје странице. Одредити размере површина и запремина трију добијених обртних тела.

Решење. Ако троугао ротира око катете, онда је та катета висина купе, а друга катета је полупречник. Хипотенуза ($c = 25\ cm$) је изводница, сл. 40. Ако је $r = 7\ cm$, $H = 24\ cm$, тада је $P_1 = 224\pi\ cm^2$ и $V_1 = 392\pi\ cm^3$. Ако је $r = 24\ cm$, $H = 7\ cm$, онда је $P_2 = 1176\pi\ cm^2$ и $V_2 = 1344\pi\ cm^3$.

Приликом обртања троугла око хипотенузе, настаје тзв. двојна купа, сл. 40 десно. Полупречник добијамо из површине датог троугла ($r = h_c$ и $c \cdot h_c = a \cdot b$) $r = \dfrac{168}{25} = 6,72\ cm$. Сада налазимо: $P_3 = r\pi s_1 + r\pi s_2 = 208,32\pi\ cm^2$ и $V_3 = \dfrac{1}{3}r^2\pi h_1 + \dfrac{1}{3}r^2\pi(h_1 + h_2) = \dfrac{1}{3}r^2\pi c = 376,32\pi\ cm^3$. Дакле $P_1 : P_2 : P_3 = 224 : 1176 : 208,32 = 100 : 525 : 93$ и $V_1 : V_2 : V_3 = 392 : 1344 : 376,32 = 175 : 600 : 168$. ♠

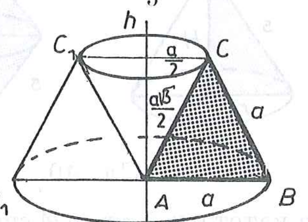
Пример 10. Једнакостраничан троугао ABC странице $AB = a$ ротира око праве h, која садржи тачку A и нормална је на AB. Израчунати површину и запремину добијеног обртног тела.

Решење. Добијено тело је зарубљена купа из које је изрезана мања купа, сл. 41. Полупречници база су a и $\dfrac{a}{2}$, висина је $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, изводнице су a.

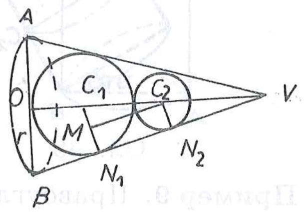
Површина тела се састоји из доње базе, омотача зарубљене купе и омотача мање купе: $P = 3a^2\pi\ cm^2$. Запремина је $V = V_{zk} - V_k = = \dfrac{a^3\pi\sqrt{3}}{4}\ cm^3$. ♠

Пример 11. У праву купу су уписане две лопте. Једна додирује базу и омотач купе, а друга додирује омотач и прву лопту. Полупречници лопти су 1 cm и 2 cm. Колика је запремина купе?

Решење. Према сл. 42 је $C_1C_2 = 3\ cm$ и $C_1M = 1\ cm$, па је у правоуглом троуглу C_1C_2M трећа страница $C_2M = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}\ cm$. Како је $\triangle C_2VN_2 \cong \triangle C_1C_2M$, то је $C_2V = 3\ cm$ и $VN_2 = 2\sqrt{2}\ cm$. Дакле, висина купе је $VO = 8\ cm$. Сада из сличних троуглова VC_2N_2 и VBO добијамо: $VN_2 : C_2N_2 = VO : BO$, одакле је $BO = r = 2\sqrt{2}$. Запремина пирамиде је $V = \dfrac{64\pi}{3}\ cm^3$. ♠



Сл. 41

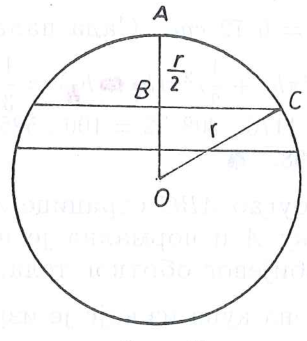


Сл. 42

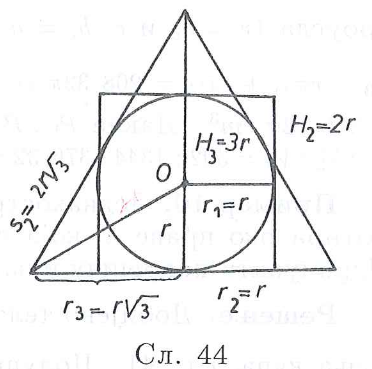
Пример 12. Лопта полупречника r пресечена је са две паралелне равни. Она која је ближа центру дели полупречник у размери $1:6$, а друга полови полупречник.

а) Наћи размеру површина најмање калоте, појаса и малог пресека лопте.

б) Одредити размеру запремина одсечка који одговара најмањој калоти и исечка који одговара појасу.



Сл. 43



Сл. 44

Решење. *а*) Према сл. 43, полупречник мањег пресека је

$BC = \frac{r\sqrt{3}}{2}$, висина калоте је $AB = \frac{r}{2}$ и висина појаса је $\frac{r}{3}$. Тражена размера је: $P_1 : P_2 : P_3 = 2r\pi \cdot \frac{r}{2} : \left(\frac{r\sqrt{3}}{2}\right)^2 \pi : 2r\pi\frac{r}{3} = 12 : 9 : 8$.

б) $V_1 : V_2 = \pi \cdot \left(\frac{r}{2}\right)^2 \left(r - \frac{r}{6}\right) : \frac{2}{3}r^2\pi \cdot \frac{r}{3} = 15 : 16$. ♠

Пример 13. Око лопте полупречника r описани су једнакостраничан ваљак и једнакостранична купа. Израчунати размеру површина и размеру запремина ова три тела.

Решење. На сл. 44 су означене димензије редом лопте, ваљка, купе. Према томе израчунавамо: за лопту $P_1 = 4r^2\pi$ и $V_1 = \frac{4}{3}r^3\pi$, затим за ваљак $P_2 = 2r^2\pi + 2r\pi \cdot 2r = 6r^2\pi$ и $V_2 = r^2\pi \cdot 2r = 2r^3\pi$ и за купу $P_3 = (r\sqrt{3})^2\pi + r\sqrt{3}\pi \cdot 2r\sqrt{3} = 9r^2\pi$ и $V_3 = \frac{1}{3}(r\sqrt{3})^2\pi \cdot 3r = 3r^3\pi$. После скраћивања са $r^2\pi$, односно са $r^3\pi$, добијамо:
$P_1 : P_2 : P_3 = 4 : 6 : 9 = V_1 : V_2 : V_3$. ♠

Стереометрију завршавамо задацима за самосталан рад.

ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

156. Раван нормална на основу једнакостраничног ваљка одсеца на основи тетиву дужине 6 cm, којој одговара централни угао од 120^0. Израчунати запремину мањег дела ваљка.

157. У ваљак је уписана правилна тространа призма, а у ову призму је уписан ваљак. Израчунати размеру запремина ова два ваљка.

158. Квадрат странице a cm ротира прво око једне странице, а онда око симетрале те странице. Одредити размеру површина и размеру запремина ова два ваљка.

159. У дворишту облика квадрата странице 12 m копа се јама облика ваљка, пречника 8 m. Ископана земља се равномерно расипа по дворишту и одмах се сабија. Колико дубоко треба копати да би јама (после сабијања околног терена) била 3 m дубока?

160. Изводница праве купе, дужине s cm, нагнута је према равни основе под углом од 30^0. Израчунати запремину купе.

161. Прав ваљак и права купа имају једнаке површине, запремине и висине H. Израчунати површине и запремине ових тела.

162. Осни пресек праве купе је троугао који има један угао од 120^0. У купу је уписан једнакостраничан ваљак полупречника

r, тако да му једна база лежи у равни базе купе, а друга додирује целим обимом омотач купе. Израчунати површину купе.

163. Ваљак има основу концентричну основи купе. Врх купе је центар друге основе ваљка. Ова тела имају једнаке запремине. Ако је полупречник ваљка r и висина H, израчунати запремину оног дела ваљка који је у купи.

164. Како треба пресећи купу полупречника r и изводнице s, па да површина пресека буде једнака површини омотача добијене зарубљене купе?

165. Полупречници основа праве зарубљене купе су r и $2r$. Површина омотача је једнака збиру површина основа, а површина осног пресека је $36\ dm^2$. Израчунати запремину зарубљене купе.

166. Ромб $ABCD$ са оштрим углом $\alpha = 60^0$ обрће се око праве p, која садржи теме A и нормална је на страницу AB. Израчунати површину и запремину добијеног обртног тела, ако је $AB = a\ cm$.

167. Прав ваљак је уписан у лопту полупречника r. Израчунати запремину ваљка, ако је његова површина једнака $\frac{3}{4}$ површине лопте.

168. Површина лопте је подељена кругом површине 27π у размери $1 : 3$. Тај круг је основа двеју правих купа, чији су врхови на површини лопте. Израчунати запремину дела лопте који је ван ових двеју купа.

169. Око зарубљене купе висине $22\ cm$, полупречника база $20\ cm$ и $24\ cm$ описана је лопта. Израчунати површину лопте.

170. Права купа висине $16\ cm$, са хоризонталном базом полупречника $6\ cm$ и врхом окренутим надоле, наливена је водом дубине $12\ cm$. У њу се потопи лопта пречника $6\ cm$. До које се висине подигао ниво воде?

171. У једнакостраничној купи, постављеној као у *задатку* 170, је лопта пречника $1\ dm$. Колико најмање воде треба налити у купу да би се лопта потопила. Колики је ниво (висина) воде кад се после тога лопта извади?

172. Како треба пресећи лопту полупречника r, па да разлика површина добијених калота буде једнака површини пресека.

173. Висина појаса је $7\ cm$, а полупречници пресека су $16\ cm$ и $33\ cm$. Израчунати површину зоне.

174. На ком одстојању од центра лопте полупречника r треба поставити тачкасти светлосни извор, да би он осветлио трећину површине лопте?

175. Површина сферне калоте је $1,5\pi\ dm^2$, а висина је $5\ cm$. Колики је полупречник основе калоте? Израчунати површину и запремину одсечка.

176. Око коцке је описан цилиндар, тако да су крајеви једне дијагонале коцке центри база ваљка, а остала темена коцке припадају омотачу ваљка. Израчунати површину ваљка, ако је површина дијагоналног пресека коцке једнака S.

177. У праву тространу призму, чија је основа једнакокраки правоугли троугао, уписана је лопта пречника $2\ dm$ (која додирује све стране призме). Израчунати запремину призме.

178. У правилан тетраедар ивице $a = 12\sqrt{3}$ је уписана права зарубљена купа висине $H = 8\sqrt{2}$, тако да омотач купе додирује три стране тетраедра. Израчунати површину зарубљене купе, ако већа база купе и база тетраедра леже у истој равни.

179. Врх купе је центар једне стране коцке, чија је дијагонала дужине $1\ dm$. Основа купе сече четири бочне ивице коцке. Израчунати запремину купе, ако се висина H купе, према ивици коцке односи као $3:4$.

180. У праву зарубљену купу са полупречницима база $20\ cm$ и $5\ cm$, запремине $3150\pi\ cm^3$, уписан је једнакостраничан ваљак, тако да му је основа у већој основи купе, а друга основа додирује целим обимом омотач купе. Израчунати површину ваљка.

181. Права зарубљена купа висине $H = 50\ cm$ има основе полупречника $\frac{70}{3}\ cm$ и $\frac{20}{3}\ cm$. Она сече лопту пречника H, која садржи центре основа купе. Израчунати површине делова сфере, настале пресеком омотача купе и лопте.

182. Око лопте запремине $36\pi\ cm^3$ описана је права зарубљена купа, која има полупречник једне базе једнак $4\ cm$. Израчунати површину и запремину те купе.

183. Око четири лопте полупречника r, од којих свака додирује остале три, описана је лопта, тако да додирује сваку од четири дате. Израчунати површину и запремину описане лопте.

184. Израчунати површину сфере која додирује свих шест ивица правилног тетраедра, ако је дужина ивице тетраедра $a\ cm$.

3. 4 ДЕТЕРМИНАНТЕ

У *одељку* 1.6 користили смо се детерминантама другог реда ради решавања система линеарних једначина са две непознате. Овде ћемо појам детерминанте проширити. Најпре да се подсетимо:

Полином $AD - BC$ називамо детерминантом другог реда и записујемо га у виду квадратне шеме:

$$(21)\qquad \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = AD - BC \quad \text{(детерминанта другог реда)}$$

На пример $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos 2\alpha.$

Детерминанта трећег реда се дефинише на следећи начин:

$$(22)\qquad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

Формулу (22) често називамо *развојем детерминанте по првој врсти.* Ову формулу представљамо као дефиницију, а детерминанту је могуће *развијати* по било којој врсти или по било којој колони, али се овде нећемо тиме бавити.

Ако у формули (22) израчунамо детерминанте другог реда, добићемо вредност детерминанте трећег реда у виду полинома трећег степена по a, b, c. Постоји практичан начин, тзв. *Сарусово правило*, за израчунавање детерминанте трећег реда.*) Детерминанти се допишу здесна редом прва и друга колона (или испод треће врсте се допишу прва и друга врста). Затим се по "дијагоналама" множи одозго надоле, без мењања знака производа, и одоздо нагоре са променом знака, као што је и приказано на следећој шеми.

$$(23)\qquad \begin{array}{ccccc} & & - & - & - \\ \left|\begin{matrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{matrix}\right. & \begin{matrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{matrix} & \left.\begin{matrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{matrix}\right| & \begin{matrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{matrix} & \begin{matrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{matrix} \\ & & + & + & + \end{array} \quad \text{(Сарусово правило)}$$

На пример, нека је дата детерминанта састављена од бројева.

$$\left|\begin{matrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & -3 \end{matrix}\right| \begin{matrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 0 & -5 \end{matrix} = 18 + 0 - 10 - 0 - 40 + 3 = -29$$

Наведимо **неке** особине детерминанти, без образлагања.

1^0 Детерминанта не мења вредност ако све врсте замене места са одговарајућим колонама.

2^0 Ако две врсте (или колоне) међусобно замене места, детерминанта промени знак.

3^0 Ако се нека врста (или колона) помножи неким бројем k, тада детерминанта Δ добија вредност $k \cdot \Delta$. (Ова особина омогућује да

*) Сарусово правили важи искључиво за детерминанте трећег реда.

"извучемо пред детерминанту" заједнички чинилац из неке врсте или колоне.)

4^0 Детеминанта не мења вредност ако се нека врста (колона) помножи једним бројем и дода другој врсти (колони).

5^0 Детерминанта је једнака нули ако

–једна врста (колона) има све елементе нуле

–две врсте (колоне) су пропорционалне међу собом

Комбиновањем ових особина може се олакшати израчунавање детерминанти, а нарочито кад су у питању детерминанте-полиноми слова.

Пример 14. Израчунати детерминанте:

$$a)\ \Delta = \begin{vmatrix} 22 & 23 & 24 \\ 23 & 24 & 22 \\ 24 & 22 & 23 \end{vmatrix} \qquad б)\ \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

Решење. *a*) Прво одузмемо другу колону од треће, па прву колону од друге колоне. Затим, другу и трећу врсту додајемо првој врсти, па развијемо по првој врсти.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 22 & 23 & 1 \\ 23 & 24 & -2 \\ 24 & 22 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 22 & 1 & 1 \\ 23 & 1 & -2 \\ 24 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 69 & 0 & 0 \\ 23 & 1 & -2 \\ 24 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 69 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} =$$
$$= 69 \cdot (-3) = -207.$$

б) Најпре прву колону одузмемо од друге и од треће колоне. Даљи поступак се види доле.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ (b-a)(b+a) & (c-a)(c+a) \end{vmatrix} =$$
$$= (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b+a & c+a \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c+a-b-a) = (b-a)(c-a)(c-b) \spadesuit$$

Детерминанте уводимо ради решавања система линеарних једначина, па погледајмо како се то чини. Наводимо тзв. *Крамерово правило* за решавање система од две и од три линеарне једначине.

За систем $\begin{matrix} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{matrix}$ израчунамо детерминанте:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix},\ \Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix},\ \Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Решење система добијамо (ако их има) из

$$\boxed{\Delta \cdot x = \Delta_x \ \wedge\ \Delta \cdot y = \Delta_y} \quad \text{(Крамерово правило)} \qquad (24)$$

Даље поступамо као у дискусији решења из *одељка* 1.6.

За случај система од три једначине са три непознате:

$$\begin{aligned} a_1x+b_1y+c_1z&=d_1\\ a_2x+b_2y+c_2z&=d_2\\ a_3x+b_3y+c_3z&=d_3 \end{aligned}$$

Најпре израчунамо детерминанте*)

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix},\ \Delta_x=\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1\\ d_2 & b_2 & c_2\\ d_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix},\ \Delta_y=\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1\\ a_2 & d_2 & c_2\\ a_3 & d_3 & c_3\end{vmatrix},$$

$$\Delta_z=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1\\ a_2 & b_2 & d_2\\ a_3 & b_3 & d_3\end{vmatrix}$$

Решења система (ако их има) добијамо из:

(24′) $\boxed{\Delta\cdot x=\Delta_x\ \wedge\ \Delta\cdot y=\Delta_y\ \wedge\ \Delta\cdot z=\Delta_z}$ (Крамерово правило)

Сада ћемо решити два примера, комбинујући по потреби и *Гаусов поступак* (видети *одељак* 1.6).

Пример 15. Решити и дискутовати системе једначина:

а) $x-3y+z=-11$ *б*) $x-y-z=2$ *в*) $ax+y=1$
$2x+4y-2z=-6$ $x+2y+z=6$ $x+ay=-1$
$x+y=-4$ $2x+y=6$
г) $mx+4y+z=0$ *д*) $x+y+z=1$
$2x-nz=-2$ $ax+by+cz=d$
$2y+3z=1$ $a^2x+b^2y+c^2z=d^2,\ d\neq a,\ d\neq b,\ d\neq c.$

Решење. *а*) $\Delta=6$, $\Delta_x=-36$, $\Delta_y=12$, $\Delta_z=6$, па је
$x=-\dfrac{36}{6}=-6$, $y=\dfrac{12}{6}=2$, $z=\dfrac{6}{6}=1$ (према (24)).

б) $\Delta=0$ и $\Delta_x=-2\neq 0$. С обзиром да је $0\cdot x=-2$ немогућа једначина, систем нема решења, без обзира на вредности Δ_y и Δ_z.

в) $\Delta=\begin{vmatrix} a & 1\\ 1 & a\end{vmatrix}=a^2-1=(a-1)(a+1)$

$\Delta_x=\begin{vmatrix} 1 & 1\\ -1 & a\end{vmatrix}=a+1,\quad \Delta_y=\begin{vmatrix} a & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-a-1=-(a+1).$

1^0 Ако је $a\neq-1$ и $a\neq 1$, тада је $\Delta\neq 0$, па из (24) добијамо:
$x=\dfrac{\Delta_x}{\Delta}=\dfrac{a+1}{(a-1)(a+1)}=\dfrac{1}{a-1},\ y=\dfrac{\Delta_y}{\Delta}=\dfrac{-(a+1)}{(a-1)(a+1)}=\dfrac{1}{1-a}.$

2^0 Ако је $a=1$, тада је $\Delta=0$ и $\Delta_x=2\neq 0$, па према (24) имамо: $0\cdot x=2$, што је немогуће. Дакле, за $a=1$ систем нема решења.

3^0 Ако је $a=-1$, тада је $\Delta=0=\Delta_x=\Delta_y$. Формула (24) даје: $0\cdot x=0$ и $0\cdot y=0$. Ово нам не даје одговор на питање да ли систем има решења. У овом случају враћамо $a=-1$ у полазни систем.

*) Δ формирамо од коефицијента уз непознате. Када у Δ коефицијенте који стоје уз x заменимо слободним члановима (уместо a_1, a_2, a_3 ставимо d_1, d_2, d_3), добијемо Δ_x, итд.

Он је еквивалентан са : $\begin{matrix} -x+y=1 \\ x-y=-1 \end{matrix}$, а то је у ствари само једна једначина: $-x+y=1$ из које је $y=x+1$. Решења система су сви парови $(x,\ x+1)$.

$$г)\ \Delta=\begin{vmatrix} m & 4 & 1 \\ 2 & 0 & -n \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}=m\begin{vmatrix} 0 & -n \\ 2 & 3 \end{vmatrix}-4\begin{vmatrix} 2 & -n \\ 0 & 3 \end{vmatrix}+1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=2(mn-10).$$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} 0 & 4 & 1 \\ -2 & 0 & -n \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}=4(5-n),\quad \Delta_y=\begin{vmatrix} m & 0 & 1 \\ 2 & -2 & -n \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}=mn-6m+2,$$

$$\Delta_z=\begin{vmatrix} m & 4 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}=4(m-2).$$

1^0 $\Delta\neq 0$ за $mn\neq 10$. Решење система је јединствено:

$$x=\frac{4(5-n)}{2(mn-10)}=\frac{2(5-n)}{mn-10},\ y=\frac{mn-6m+2}{2(mn-10)},\ z=\frac{4(m-2)}{2(mn-10)}=$$
$$=\frac{2(m-2)}{mn-10}.$$

2^0 Ако је $mn=10$ тада је $\Delta=0$. Ако је при томе $n\neq 5$, онда је $\Delta x\neq 0$, па из $0\cdot x\neq 0$, следи да систем нема решења.

3^0 Ако је $mn=10$ и $n=5$, тада је и $m=2$. Међутим, за $n=5$ и $m=2$ је $\Delta=0=\Delta_x=\Delta_y=\Delta_z$, па из $0\cdot x=0$, $0\cdot y=0$ и $0\cdot z=0$, не можемо ништа да закључимо о решењима. Вратимо ли $m=2$ и $n=5$ у полазни систем, добијамо:

$$\left.\begin{aligned} 2x+4y+\ \ z&=\ \ 0 \\ 2x-5\qquad z&=-2 \\ 2y+3z&=\ \ 1 \end{aligned}\right\}\Rightarrow\left.\begin{aligned} 2x+4y+z&=0 \\ 4y-6z&=-2 \\ 2y+3z&=\ \ 1 \end{aligned}\right\}\Rightarrow\begin{aligned} 2x+4y+z&=0 \\ -4y-6z&=-2 \\ \underline{0=0}& \end{aligned}$$

(Примењујемо Гаусову методу: прву једначину помножимо са (-1) и додамо другој. Затим смо другу једначину помножили са $(-\frac{1}{2})$ и додали трећој)

Дакле, систем је сагласан. Одавде добијамо решења. То су тројке облика $(\frac{5}{2}z-1,\ -\frac{3}{2}z+\frac{1}{2},\ z)$.

$$д)\ \Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}=(b-a)(c-a)(c-b)\ \ (\text{видети } пример\ 14.\ б).$$

Даље је $\Delta_x=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ d & b & c \\ d^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}=(b-d)(c-d)(c-b)$ (од Δ се разликује само по томе што уместо a стоји d).

Слично је $\Delta_y = (d-a)(c-a)(c-d)$ и $\Delta_z = (b-a)(d-a)(d-b)$.

1^0 $\Delta \neq 0$ ако је $a \neq b \wedge b \neq c \ \wedge \ c \neq a$. Тада је, према (24):

$$x = \frac{(b-d)(c-d)}{(b-a)(c-a)} \quad y = \frac{(d-a)(c-d)}{(b-a)(c-b)} \quad z = \frac{(d-a)(d-b)}{(c-a)(c-b)}.$$

Ако нису испуњени сви услови из 1^0 систем може бити несагласан или неодређен (са бесконачно много решења).

2^0 Нека је $a = b$ и $c \neq a$ (отуда је и $c \neq b$). Тада је $\Delta = 0$ и $\Delta_x \neq 0$, па систем нема решења.

3^0 Нека је $a = c$ и $b \neq a$ (отуда је и $c \neq a$). Тада је поново $\Delta = 0$ и $\Delta_x \neq 0$, па систем нема решења.

4^0 Нека је $b = c$ и $a \neq b$ (отуда је и $c \neq a$). Тада је поново $\Delta = 0$ $\Delta_x = 0$, $\Delta_y \neq 0$, па поново нема решења.

5^0 Ако је $a = b$ и $a = c$ (тада је и $b = c$), онда је $\Delta = 0 = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z$. Сада не знамо да ли систем има решења. Стога вратимо у систем $a = b = c$ и добијамо:

$$\left.\begin{aligned} x + \ \ y + \ \ z &= 1 \\ ax + ay + \ az &= d \\ a^2x + a^2y + a^2z &= d^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \begin{aligned} x+y+z &= 1 \\ 0 &= d-a \\ 0 &= d^2-a^2 \end{aligned}$$

(Помножили смо прву једначину са $(-a)$ и додали другој, па прву једначину са $(-a^2)$ и додали трећој).

Како је $d \neq a$, то је $d-a \neq 0$ и $d^2-a^2 \neq 0$, па систем није сагласаннема решења. ♠

Ако је систем линеарних једначина *хомоген*, тј. ако су сви слободни чланови једначина једнаки нули, тада су увек Δ_x, Δ_y и Δ_z једнаке нули. Ако је при томе $\Delta \neq 0$, тада овај систем има само решења $x = y = z = 0$ - то су тзв. *тривијална решења.*

Систем хомогених линеарних једначина има и нетривијална решења, само ако је $\Delta = 0$.

Пример 16. Решити хомогене системе ленеарних једначина.

$$a)\ \begin{aligned} 2x - 5y + \ z &= 0 \\ x + 3y - 2z &= 0 \\ 3x - \ y - \ z &= 0 \end{aligned} \qquad б)\ \begin{aligned} x + 2y - 3z &= 0 \\ -2x - \ y + \ z &= 0 \\ x + 5y - 8z &= 0 \end{aligned} \qquad в)\ \begin{aligned} (m+1)x + y + z &= 0 \\ x + (m+1)y + z &= 0 \\ x + y + (m+1)z &= 0 \end{aligned}$$

Решење. *а)* $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$. Систем има само тривијална решења: $x = 0 = y = z$.

б) $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & -8 \end{vmatrix} = 0$. Систем има и нетривијална решења, која налазимо Гаусовом методом.

$$\left.\begin{array}{r} x+2y-3\,z=0 \\ -2x-\ \ y+\ \ \ z=0 \\ x+5y-8\,z=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} x+2y-3z=0 \\ 3y-5z=0 \\ 3y-5z=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{r} x+2y-3z=0 \\ 3y-5z=0 \\ 0=0 \end{array}$$

Одавде је $y=\dfrac{5}{3}z$ и $x=-\dfrac{1}{3}z$, па су сва решења тројке облика: $(5t,\ -t,\ 3t)$, t је произвољан реалан број. За $t\neq 0$ имамо нетривијална решења.

$$\textit{в})\ \Delta=\begin{vmatrix} m+1 & 1 & 1 \\ 1 & m+1 & 1 \\ 1 & 1 & m+1 \end{vmatrix}=m^2(m+3).$$

1^0 Ако је $m\neq 0$ и $m\neq -3$ биће $\Delta\neq 0$ и систем има само тривијална решења: $x=y=z=0$.

2^0 За $m=0$ је $\Delta=0$, па систем има облик:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=0 \\ x+y+z=0 \\ x+y+z=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow x+y+z=0.$$ Решења су $(-y-z,\ y,\ z)$.

3^0 За $m=-3$ је: $\begin{array}{r} -2x+\ y+\ \ z=0 \\ x-2y+\ \ z=0 \\ x+\ \ y-2z=0 \end{array}$.

Применимо Гаусову методу (помножимо трећу једначину са 2 и додамо првој, а онда помножимо са (-1) и додамо другој)

$$\left.\begin{array}{r} 3y-3z=0 \\ -3y+3z=0 \\ \underline{x+y-2z=0} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{r} 0=0 \\ -3y+3z=0 \\ \underline{x+y-2z=0} \end{array}$$

Нетривијална решења су: $y=z$ и $x=z$, тј. $(z,\ z,\ z)$. ♠

ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

185. Израчунати детерминанте

$$a)\ \begin{vmatrix} \cos\alpha+i\sin\alpha & 1 \\ 1 & \cos\alpha-i\sin\alpha \end{vmatrix} \quad б)\ \begin{vmatrix} 2\sin\alpha\cos\alpha & 2\sin^2\alpha-1 \\ 2\cos^2\alpha-1 & 2\sin\alpha\cos\alpha \end{vmatrix}$$

$$в)\ \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad г)\ \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} \quad д)\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1+i \\ 0 & 1 & i \\ 1-i & -i & 1 \end{vmatrix}.$$

186. Доказати да је: $a)\ \begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix}=(b-a)(c-a)(c-b)$

$$б)\ \begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix} = (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

187. Решити једначину:

$$а)\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2-x & 1 \\ 1 & 1 & 3-x \end{vmatrix} = 0 \quad б)\ \begin{vmatrix} a & x & x \\ x & a & x \\ x & x & a \end{vmatrix} = 0$$

188. Решити (дискутовати) систем једначина

$$а)\ \begin{array}{l} ax + 4y = 2 \\ 9x + ay = 3 \end{array} \quad б)\ \begin{array}{l} kx + y + z = k \\ x + ky + z = 1 \\ x - y + kz = k \end{array} \quad в)\ \begin{array}{l} px + 2z = 2 \\ 5x + 2y = 1 \\ x - 2y + qz = 3 \end{array}$$

$$г)\ \begin{array}{l} x + y + mz = 0 \\ x + my + z = 0 \\ mx + y + z = 0 \end{array}.$$

3. 5 ВЕКТОРИ

У ПРВОЈ ГЛАВИ је било речи о векторима у геометрији (модел вектора је оријентисана дуж) и то само у неколико случајева примене вектора у доказивања неких особина. У овом одељку ћемо упознати неке неаритметичке операције са векторима, користећи се при томе и од раније познатим појмовима и операцијама. Затим ћемо поставити векторе у тродимензионални (и дводимензионални) правоугли координатни систем.

Нека су $\vec{a}$ и $\vec{b}$ два не-нула вектора (тј. $|\vec{a}| \neq 0$ и $|\vec{b}| \neq 0$).

Скаларни производ *вектора* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$, *у ознаци* $\vec{a} \cdot \vec{b}$, *је:*

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})} \tag{25}$$

Одавде непосредно закључујемо да скаларни производ има следеће особине:

–скаларни производ је број

–ако је $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$ оштар угао, онда је $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$;

–не-нуле вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ су нормални међу собом ако и само ако је $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

– $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (комутативност)

–ако је $\vec{b} = \vec{a}$, тада је $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$. (Пишемо: $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$.)

Такође важи једнакост $\vec{a} \cdot (\vec{b} \pm \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} \pm \vec{a} \cdot \vec{c}$. (Ова тврђења наводимо без доказа.)

Из дефиниције скаларног производа добијамо формуле:

$$\boxed{|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^{\,2}}} \quad \text{(интензитет вектора)} \tag{26}$$

$$\boxed{\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}} \quad \text{(угао између два вектора)} \tag{27}$$

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a}\perp\vec{b}} \quad \text{(услов нормалности)} \tag{28}$$

Пример 17. Вектори $\vec{a} = \vec{m} + 2\,\vec{n}$ и $\vec{b} = 5\,\vec{m} - 4\,\vec{n}$ су странице правоугаоника, при чему су $\vec{m}$ и $\vec{n}$ јединични вектори (*ортови*). Израчунати:

а) $\sphericalangle(\vec{m}, \vec{n})$, *б*) дужину дијагонале правоугаоника,
в) угао φ између дијагонала.

Решење. *а*) Странице правоугаоника су нормалне међу собом, па на основу (28): $\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = 0$. Дакле: $(\vec{m} + 2\,\vec{n})\cdot(5\,\vec{m} - 4\,\vec{n}) = 0$. Према наведеним особинама добијамо: $5\,\vec{m}^{\,2} + 6\,\vec{m}\cdot\vec{n} - 8\,\vec{n}^{\,2} = 0$. Због $|\vec{m}| = |\vec{n}| = 1$ је $\vec{m}^{\,2} = \vec{n}^{\,2} = 1$ и $\vec{m}\cdot\vec{n} = 1\cdot 1\cdot\cos(\vec{m}, \vec{n})$, па је $\cos(\vec{m}, \vec{n}) = \dfrac{1}{2}$. Отуда закључујемо: $\sphericalangle(\vec{m}, \vec{n}) = \dfrac{\pi}{3}$.

б) Вектор $\vec{d_1}$ дијагонале добијамо по дефиницији збира вектора: $\vec{d_1} = \vec{a} + \vec{b} = 6\,\vec{m} - 2\,\vec{n}$. Према томе: $|\vec{d_1}| = \sqrt{\vec{d_1}^{\,2}} = \sqrt{(6\,\vec{m} - 2\,\vec{n})^2} = \sqrt{36\,\vec{m}^{\,2} - 24\,\vec{m}\cdot\vec{n} + 4\,\vec{n}^{\,2}} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$. Дакле $|\vec{d_1}| = |\vec{d_2}| = 2\sqrt{7}$.

в) Друга дијагоала је $\vec{d_2} = \vec{a} - \vec{b} = -4\,\vec{m} + 6\,\vec{n}$, па је $\cos\varphi =$
$$= \frac{\vec{d_1}\cdot\vec{d_2}}{|\vec{d_1}|\cdot|\vec{d_2}|} = \frac{(6\,\vec{m} - 2\,\vec{n})\cdot(-4\,\vec{m} + 6\,\vec{n})}{28} = \frac{-24\,\vec{m}^{\,2} + 44\,\vec{m}\vec{n} - 12\,\vec{n}^{\,2}}{28} =$$
$= \dfrac{-14}{28} = -\dfrac{1}{2}$. Значи $\varphi = \dfrac{2\pi}{3}$ (φ је туп угао). ♠

Уочимо поново два не-нула вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Векторски производ *вектора* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$, *у ознаци* $\vec{a}\times\vec{b}$, *је* $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin(\vec{a}, \vec{b})\cdot\vec{n_0}$, *при чему је* $\vec{n_0}\perp\vec{a}$ *и* $\vec{n_0}\perp\vec{b}$, *а вектори* $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{n_0}$, *тим редом, чине десни триедар:*

$$\boxed{\vec{a}\times\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin(\vec{a}, \vec{b})\cdot\vec{n_0}} \quad \text{(векторски производ)} \tag{29}$$

(Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{n_0}$ чине *десни триедар* ако су некомпланарни и могу се распоредити у простору редом као палац, кажипрст, средњи прст десне руке. Слично, прстима леве руке описујемо леви систем трију вектора.)

Дакле, $\vec{a} \times \vec{b}$*) је вектор, који се дефинише тако да

1^0 $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot |\sin(\vec{a}, \vec{b})|$

2^0 $\vec{a} \times \vec{b}$ је нормалан на раван одређену са $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

3^0 $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{a} \times \vec{b}$ формирају десни триедар.

Уочавамо и следеће особине:

– због $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ је $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

– ако је $\vec{a} \parallel \vec{b}$, онда је $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$, специјално $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$ (јер је $\sin 0 = \sin\pi = 0$)

– $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$.

На основу формуле (45) из *одељка* 2.17, добијамо формуле:

(30) $\boxed{P_\triangle = \frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}|}$ (површина троугла)

(31) $\boxed{P = |\vec{a} \times \vec{b}|}$ (површина паралелограма)

Пример 18. Одредити $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$ и $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$, ако је површина паралелограма одређеног векторима $\vec{a}$ и $\vec{b}$ једнака $\sqrt{3}$, затим $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1$ и дужина дијагонале $\vec{a} + \vec{b}$ је $\sqrt{7}$.

Решење. Имамо услов $|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{3}$, тј. $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\vec{a}, \vec{b}) = \sqrt{3}$ и $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1$, тј. $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 1$. Ако поделимо ове две једнакости, добићемо: $\operatorname{tg}(\vec{a}, \vec{b}) = \sqrt{3}$, одакле је $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{3}$, а због тога $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{2}$.

Сада имамо услове: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\frac{\pi}{3} = 1$, тј. $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| = 2$ и $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{7}$, тј. $(\vec{a} + \vec{b})^2 = 7 \Rightarrow |\vec{a}|^2 + 2\,\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 7$, а одавде $|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 = 5$. Како је $2 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| = 4$, додавањем и одузимањем ове једнакости претходној, добијамо: $(|\vec{a}| + |\vec{b}|)^2 = 9$ и $(|\vec{a}| - |\vec{b}|)^2 = 1$. Ово даје два система линеарних једначина:

$$\left.\begin{array}{r} |\vec{a}| + |\vec{b}| = 3 \\ |\vec{a}| - |\vec{b}| = 1 \end{array}\right\} . \text{ и } \left.\begin{array}{r} |\vec{a}| + |\vec{b}| = 3 \\ |\vec{a}| - |\vec{b}| = -1 \end{array}\right\} .$$ **) Задатак има два решења.

*) $\vec{a} \times \vec{b}$ читамо: "$\vec{a}$ *крст* $\vec{b}$".

**) $|\vec{a}| + |\vec{b}| > 0$, а $|\vec{a}| - |\vec{b}|$ може бити и негативно.

Прво је $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=1$, а друго $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=2$. ♠

Пример 19. Ако је $|\vec{a}|=2$, $\vec{b}\cdot\vec{c}=-7$, $\vec{a}\cdot\vec{c}=-2$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=-1$, а вектори $\vec{m}$ и $\vec{n}$, $\vec{m}=\vec{a}-\vec{b}$ и $\vec{n}=\vec{b}+\vec{c}$, су међу собом нормални, израчунати $|\vec{b}|$. Затим, одредити вектор $\vec{v}$, који је компланаран са $\vec{a}$ и $\vec{b}$, тако да је вектор $\vec{c}-\vec{v}$ нормалан на раван $(\vec{a},\vec{b})$. Колики је интензитет вектора $\vec{v}$?

Решење. Из $\vec{m}\perp\vec{n}$ следи да је $\vec{m}\cdot\vec{n}=0$, тј. $(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{b}+\vec{c})=0$. Одавде је $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}-\vec{b}^{\,2}-\vec{b}\cdot\vec{c}=0$. Кад заменимо дате скаларне производе, добићемо $-1-2-|\vec{b}|^2+7=0$, а одавде је $|\vec{b}|^2=4$, па је $|\vec{b}|=2$.

Тражени вектор $\vec{v}$, компланаран са $\vec{a}$ и $\vec{b}$, може се *развити у правцу вектора* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$, тј. $\vec{v}=\alpha\,\vec{a}+\beta\,\vec{b}$, где треба одредити α и β, тако да буду задовољени и остали услови. По тим условима вектор $\vec{c}-\vec{v}=\vec{c}-\alpha\,\vec{a}-\beta\,\vec{b}$ треба да је нормалан на раван $(\vec{a},\vec{b})$, одакле следи да је он нормалан на $\vec{a}$ и на $\vec{b}$ појединачно.

Из услова $(\vec{c}-\vec{v})\perp\vec{a}$ је $(\vec{c}-\vec{v})\cdot\vec{a}=0$, тј. $(\vec{c}-\alpha\,\vec{a}-\beta\,\vec{b})\cdot\vec{a}=0$. Одавде, поступајући као код израчунавања $|\vec{b}|$, добијамо једначину $-2-4\alpha+\beta=0$. Слично, из $(\vec{c}-\vec{v})\perp\vec{b}$, добијамо једначину $-7+\alpha-4\beta=0$. Решавајући добијени систем једначина по α и β, налазимо да је $\alpha=-1$, $\beta=-2$. Према томе $\vec{v}=-\vec{a}-2\,\vec{b}$. Тако имамо: $|\vec{v}|=\sqrt{\vec{v}^{\,2}}=\sqrt{\vec{a}^{\,2}+4\,\vec{a}\cdot\vec{b}+4\,\vec{b}^{\,2}}=\sqrt{4-4+16}=4$. ♠

Дефинисаћемо још једну операцију са векторима, овог пута тринарну операцију (са три елемента).

За векторе $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ *дефинишемо тзв.* **мешовити производ**, *као* $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$, где операције "$\times$" и "$\cdot$" имају раније дефинисано значење.

Није тешко извести следеће закључке

1^0 Ако су $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ компланарни вектори, тада је $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=0$. (Заиста, по дефиницији је $\vec{a}\times\vec{b}$ вектор нормалан на раван ових вектора, па је и $(\vec{a}\times\vec{b})\perp\vec{c}$. Тада применимо услов нормалности-формулу (28).)

2^0 Ако вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ чине десни триедар, тада $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}>0$.

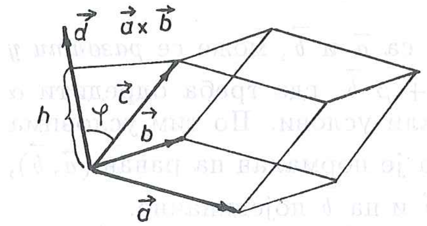
3^0 Ако су вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ некомпланарни, тада је запремина паралелепипеда, одређеног овим векторима, једнака:

$$(32) \qquad \boxed{V = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}\,|} \quad \text{(запремина паралелепипеда)}$$

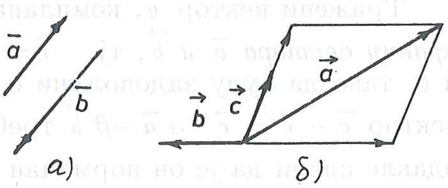
Одавде, према разматрањима из *одељка* 3.2, такође добијамо:

$$(32') \qquad \boxed{V_t = \frac{1}{6}|(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}\,|} \quad \text{(запремина тетраедра)}$$

До формуле (32) долазимо једноставно, према сл. 45. Висина призме је $h = |\vec{c}\,| \cdot \cos\varphi$, где је $\varphi = \sphericalangle(\vec{d}, \vec{c})$ и $\vec{d} = \vec{a} \times \vec{b}$. Заменимо $\cos\varphi$ према формули (27), па имамо: $h = |\vec{c}\,| \cdot \dfrac{\vec{d} \cdot \vec{c}}{|\vec{d}\,| \cdot |\vec{c}\,|} = \dfrac{\vec{d} \cdot \vec{c}}{|\vec{d}\,|}$, или $\vec{d} \cdot \vec{c} = |\vec{d}\,| \cdot h$. Како је $|\vec{d}\,| = |\vec{a} \times \vec{b}\,| = P_{\square}$, то имамо: $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = V$.



Сл. 45



Сл. 46

4^0 Из 2^0 и 3^0 закључујемо да је:
$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a}) \cdot \vec{c} = -(\vec{c} \times \vec{b}) \cdot \vec{a} = -(\vec{a} \times \vec{c}) \cdot \vec{b}$.

Поново истичемо услов 1^0, који важи за компланарне векторе:

$$(33) \qquad \boxed{(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0 \Leftrightarrow \vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c} \text{ су компланарни}}$$

Пример 20. Шта можемо закључити о векторима $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, ако је: $\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a} = \vec{0}$?

Решење. "Помножимо" скаларно здесна дату једнакост вектором $\vec{c}$. Добијамо: $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} + (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{c} + (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{c} = 0$. Други и трећи сабирак су једнаки нули, јер је $(\vec{b} \times \vec{c}) \perp \vec{c}$ и $(\vec{c} \times \vec{a}) \perp \vec{c}$,*) па остаје: $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$, а ово, према последњој формули, казује да су $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарни. ♠

Подсетимо се на појам *линеарне зависности вектора.* Сада нас занима искључиво линеарна зависност два или три вектора, и те случајеве ћемо интерпретирати геометријски.

---

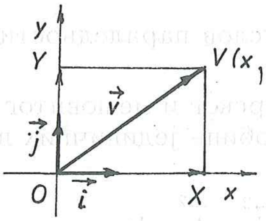
*) Увек је мешовити производ од само два вектора једнак нули: $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{a} = 0$.

Вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ су линеарно зависни ако и само ако постоје бројеви α и β, који нису истовремено једнаки нули, такви да је $\alpha\,\vec{a} + \beta\,\vec{b} = \vec{0}$.

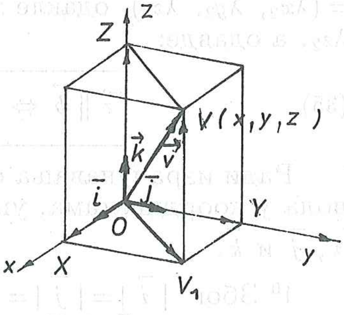
Ако је, нпр. $\alpha \neq 0$, онда из дате једнакости добијамо: $\vec{a} = \dfrac{\beta}{\alpha}\,\vec{b}$. Ако су $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не-нула вектори, то значи: *$\vec{a}$ и $\vec{b}$ су линеарно зависни, ако и само ако су колинеарни*, сл. 46 *а*).

Слично, ако су $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ линеарно зависни, тада постоје бројеви α, β, γ, који нису сви једнаки нули, такви да је $\alpha\,\vec{a} + \beta\,\vec{b} + \gamma\,\vec{c} = \vec{0}$. Тада, нпр. за $\alpha \neq 0$, добијамо: $\vec{a} = m\,\vec{b} + n\,\vec{c}$, где је $m = -\dfrac{\beta}{\alpha}$ и $n = -\dfrac{\gamma}{\alpha}$. Кажемо да смо вектор $\vec{a}$ *развили у правцу вектора* $\vec{b}$ *и* $\vec{c}$, што значи да су ови вектори компланарни. Дакле, *$\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ су линеарно зависни вектори ако и само ако су компланарни*, сл. 46 *б*).

На основу последњег тврђења можемо за векторе једне равни поставити правоугли координатни систем у тој равни и све векторе развити у правцу јединичних вектора оса Ox и Oy. На сл. 47 видимо како произвољном вектору $\vec{v}$ одговара тачка $V(x,\ y)$, таква да је $\overrightarrow{OV} = \vec{v}$. Овде је, очигледно $\overrightarrow{OV} = \overrightarrow{OX} + \overrightarrow{OY} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$. То записујемо краће као $\vec{v} = (x,\ y)$.



Сл. 47.



Сл. 48.

За некомпланарне векторе ћемо конструисати *тродимензионални координатни систем*, одређен са три узајамно нормалне осе x, y, z, са заједничком тачком O (координатни почетак). Ове осе су оријентисане, тако да њихови позитивни смерови одређују у редоследу Ox, Oy, Oz, десни триедар, сл. 48.

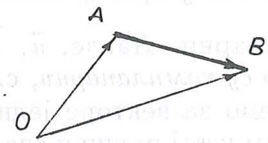
Произвољном вектору $\vec{v}$ одговара јединствена тачка $V(x,\ y,\ z)$, таква да је $\overrightarrow{OV} = \vec{v}$. Према сл. 48, вектор $\overrightarrow{OV}$ се може разложити у правцу јединичних вектора $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ координатних оса: $\overrightarrow{OV} =$

$= \overrightarrow{OV_1} + \overrightarrow{V_1V}$, па због $\overrightarrow{OV_1} = \overrightarrow{OX} + \overrightarrow{OY} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$ и $\overrightarrow{V_1V} = \overrightarrow{OZ} = z\,\vec{k}$ је

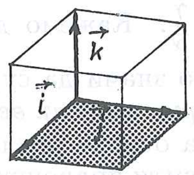
(34) $\boxed{\overrightarrow{OV} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k} = (x,\ y,\ z)}$ (вектор положаја тачке V)

Приметимо, ако је $z = 0$, да је $\overrightarrow{OV} = (x,\ y,\ 0) = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$, а према сл. 47 је $x\,\vec{i} + y\,\vec{j} = (x,\ y)$. Ми ћемо ове две ознаке сматрати равноправним, јер се ради о једном истом вектору $\overrightarrow{OV}$.

Ако су дате тачке $A(x_1,\ y_1,\ z_1)$ и $B(x_2,\ y_2,\ z_2)$, тада вектор $\overrightarrow{AB}$ изражавамо преко координата ових тачака. Знамо да је $\overrightarrow{AB} =$
$= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_2 - x_1)\,\vec{i} + (y_2 - y_1)\,\vec{j} + (z_2 - z_1)\,\vec{k}$, сл. 49, тј.
$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1)$.



Сл. 49.



Сл. 50.

Као што смо видели у *одељку* 1.12, вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ су паралелни ако и само ако је $\vec{a} = \lambda \cdot \vec{b}$, $\lambda \neq 0$. Ако су вектори дати координатама, онда из $\vec{a} = \lambda \cdot \vec{b}$, добијамо: $(x_1,\ y_1,\ z_1) = \lambda(x_2,\ y_2,\ z_2) =$
$= (\lambda x_2,\ \lambda y_2,\ \lambda z_2)$, одакле закључујемо да је $x_1 = \lambda x_2$, $y_1 = \lambda y_2$, $z_1 = \lambda z_2$, а одавде:

(35) $\boxed{\vec{z} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{y_1}{y_2} = \dfrac{z_1}{z_2}}$ (услов паралелности)

Ради израчунавања скаларног, векторског и мешовитог производа у координатама, упознајмо неке особине јединичних вектора $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$.

1^0 Због $|\,\vec{i}\,| = |\,\vec{j}\,| = |\,\vec{k}\,| = 1$ је $\vec{i}^{\,2} = \vec{j}^{\,2} = \vec{k}^{\,2} = 1$;

2^0 Због $\vec{i} \perp \vec{j}$, $\vec{i} \perp \vec{k}$ и $\vec{j} \perp \vec{k}$ је $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0$;

3^0 Због 1^0 и 2^0 је $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$, $\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$, $\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$. (Према сл. 50 и формули (31) је $|\,\vec{i} \times \vec{j}\,| = 1 = |\,\vec{j} \times \vec{k}\,| = |\,\vec{k} \times \vec{i}\,|$.).

Сада се непосредним израчунавањем лако могу проверити следеће формуле:

(36) $\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}$

(37) $\boxed{|\,\vec{a}\,| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

$$\boxed{\vec{a}\perp\vec{b} \Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0} \tag{38}$$

$$\boxed{\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}} \tag{39}$$

$$\boxed{(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}} \tag{40}$$

(Није неопходно наглашавати на кога се односе координате са десних страна једнакости, јер је то очигледно.)

Све ове формуле можемо применити и на векторе у равни (сл. 47), тако што ћемо сматрати да је вектор $\vec{v}=(x,\ y)$ из равни Oxy, исто што и вектор $\vec{v}=(x,\ y,\ 0)$ из система $Oxyz$.

Пример 21. Дата су темена паралелограма $ABCD$: $A(1,\ -2,\ 0)$, $B(2,\ 1,\ 3)$, $C(-2,\ 0,\ 5)$. Одредити координате темена D и површину паралелограма.

Решење. Ако је $ABCD$ паралелограм, онда је $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BA}$. Нека је $D(x,\ y,\ z)$. Тада је $\overrightarrow{CD}=(x+2,\ y,\ z-5)$ и $\overrightarrow{BA}=(-1,\ -3,\ -3)$, па из $(x+2,\ y,\ z-5)=(-1,\ -3,\ -3)$, добијамо: $x+2=-1$, $y=-3$, $z-5=-3$. Тражена тачка је $D(-3,\ -3,\ 2)$.

За површину паралелограма имамо најпре $\overrightarrow{BC}=(-4,\ -1,\ 2)$, затим $\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -3 & -3 \\ -4 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -9\,\vec{i}+14\,\vec{j}-11\,\vec{k}$, па је према (31) површина паралелограма: $P=\sqrt{81+196+121}=\sqrt{398}\approx 20$ ♠

Пример 22. Дата је тачка $A(3,\ 0,\ -1)$ и вектор $\vec{v}=(2,\ 1,\ -2)$.

а) Одредити тачку B, тако да је $|\overrightarrow{AB}|=6$ и да су вектори $\overrightarrow{AB}$ и $\vec{v}$ паралелни.

б) У равни xOy одредити тачку C, такву да је $\overrightarrow{AC}\perp\vec{v}$ и $|\overrightarrow{AC}|=3$.

Решење. *а*) Треба да је $\overrightarrow{AB}=k\cdot\vec{v}=(2k,\ k,\ -2k)$ и $|\overrightarrow{AB}|=6$, тј. $\sqrt{4k^2+k^2+4k^2}=6$. Одавде је $|k|=2$, тј. $k=2$ или $k=-2$. Нека је $k=2$, тј. $\overrightarrow{AB}=(4,\ 2,\ -4)$ и $B(x,\ y,\ z)$. Тада је $\overrightarrow{AB}=(x-3,\ y,\ z+1)$ и $\overrightarrow{AB}=(4,\ 2,\ -4)$. Слично претходном примеру, добијамо $x=7$, $y=2$, $z=-5$, тј. $B(7,\ 2,\ -5)$. Ако је, пак, $k=-2$, тражена тачка је $B_1(-1,\ -2,\ 3)$.

б) Тражимо тачку $C=(x,\ y,\ 0)$, па је $\overrightarrow{AC}=(x-3,\ y,\ 1)$. Услов $\overrightarrow{AC}\perp\vec{v}$ даје једнакост $\overrightarrow{AC}\cdot\vec{v}=0$, тј. $2(x-3)+y-2=0$, а услов

$|\overrightarrow{AC}| = 3$ даје једнакост $(x-3)^2 + y^2 + 1 = 9$. Решења овог система једначина су $x = 5$, $y = -2$ или $x = \frac{13}{5}$, $y = \frac{14}{5}$. Дакле, тражена тачка је $C(5,\ -2,\ 0)$ или $C_1(\frac{13}{5},\ \frac{14}{5},\ 0)$. ♠

Пример 23. Одредити вектор $\vec{c}$ интензитета $\sqrt{21}$, који полови угао између вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, $\vec{a} = (1,\ -2,\ 2)$ и $\vec{b} = (3,\ 2,\ 6)$.

Решење. Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ су компланарни. Користићемо чињеницу да дијагонала ромба полови унутрашњи угао. Стога ћемо одредити вектор дијагонале ромба, одређеног јединичним векторима $\vec{a_0} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ и $\vec{b_0} = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$. Дакле, биће $\vec{d} = \vec{a_0} + \vec{b_0} = \frac{1}{3}(1,\ -2,\ 2) + \frac{1}{7}(3,\ 2,\ 6) = \frac{1}{21}(7,\ -14,\ 14) + \frac{1}{21}(9,\ 6,\ 18) = \frac{1}{21}(16,\ -8,\ 32) = \frac{8}{21}(2,\ -1,\ 4)$. Како је $|(2,\ -1,\ 4)| = \sqrt{4+1+16} = \sqrt{21}$, закључујемо да је тражени вектор $\vec{c} = (2,\ -1,\ 4)$ или $\vec{c_1} = (-2,\ 1,\ -4)$. Друга дијагонала ромба, $\vec{d_1} = \vec{a_0} - \vec{b_0} = -\frac{2}{21}(1,\ 10,\ 2)$, слично одређује још два решења: $\vec{c_{2,3}} = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}(1,\ 10,\ 2)$. ♠

Пример 24. Задати су вектори $\vec{a} = (1,\ 1,\ 1)$, $\vec{b} = (2,\ 2,\ 1)$, $\vec{c} = (1,\ 3,\ -6)$. Одредити вектор $\vec{d}$, нормалан на $\vec{a}$ и $\vec{b}$, тако да је $\vec{c} \cdot \vec{d} = 16$. Затим, израчунати запремину паралелепипеда одређеног векторима $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{d}$ и висину која одговара страни $(\vec{a},\ \vec{d})$.

Решење. Ако је $\vec{d} \perp \vec{a}$ и $\vec{d} \perp \vec{b}$, онда је $\vec{d} = k \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$. Одредимо $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -\vec{i} + \vec{j} = (-1,\ 1,\ 0)$, па је $\vec{d} = (-k,\ k,\ 0)$. Број k одредићемо из $\vec{c} \cdot \vec{d} = 16$, тј. $(1,\ 3,\ -6) \cdot (-k,\ k,\ 0) = 16$. Добијамо једначину: $-k + 3k = 16$, са решењем $k = 8$. Тражили смо вектор $\vec{d} = (-8,\ 8,\ 0)$.

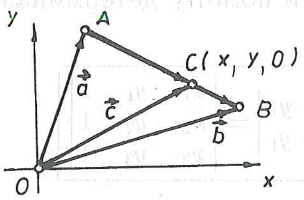
Запремина паралелепипеда је $V = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -8 & 8 & 0 \end{vmatrix} = 16$. Површина стране $(\vec{a}, \vec{d})$ је $|\,\vec{a} \times \vec{d}\,|$. Стога, израчунамо $\vec{a} \times \vec{d} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ -8 & 8 & 0 \end{vmatrix} =$

$=-8\vec{i}-8\vec{j}+16\vec{k}=8(-1,\ -1,\ 2)$, па је $|\vec{a}\times\vec{b}|=8\sqrt{1+1+4}=8\sqrt{6}$. Тражена висина је $h=\dfrac{V}{B}=\dfrac{16}{8\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. ♠

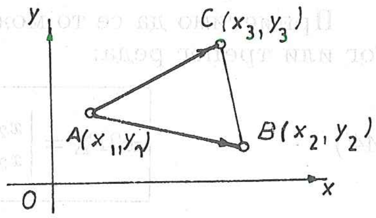
Користећи се векторима, можемо решити неке проблеме везане за дужи у равни. На пример, *растојање* d *двеју тачака*, $A(x_1,\ y_1)$ и $B(x_2,\ y_2)$ је интензитет вектора $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ 0)$

$$\boxed{d\ =\ \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}}\quad \text{(растојање двеју тачака)} \tag{41}$$

Нека је дата дуж AB, тако да је $A(x_1,\ y_1)$ и $B(x_2,\ y_2)$. Одредимо координате тачке C, $C\in AB$, тако да је $\dfrac{AC}{BC}=m$, сл. 51.



Сл. 51.



Сл. 52.

Изразићемо вектор $\vec{c}=\overrightarrow{OC}$, преко вектора положаја датих тачака, $\vec{a}=(x_1,\ y_1,\ 0)$ и $\vec{b}=(x_2,\ y_2,\ 0)$. Према услову је $\overrightarrow{AC}=m\cdot\overrightarrow{CB}$, па како је $\overrightarrow{AC}=\vec{c}-\vec{a}$ и $\overrightarrow{CB}=\vec{b}-\vec{c}$, биће $\vec{c}-\vec{a}=m\cdot(\vec{b}-\vec{c})$, а одавде $\vec{c}=\dfrac{\vec{a}+m\cdot\vec{b}}{1+m}$. Сад пређемо на координате и добићемо: $(x,\ y,\ 0)=\left(\dfrac{x_1+mx_2}{1+m},\ \dfrac{y_1+my_2}{1+m},0\right)$. Дакле:

$$\boxed{\begin{aligned} x\ &=\frac{x_1+mx_2}{1+m}\\ y&=\frac{y_1+my_2}{1+m}\end{aligned}}\quad \text{(подела дужи у датој размери)} \tag{42}$$

Специјално, за $m=1$, тачка C је *средиште дужи*. Тада имамо:

$$\boxed{\begin{aligned} x&=\frac{x_1+x_2}{2}\\ y&=\frac{y_1+y_2}{2}\end{aligned}}\quad \text{(средиште дужи)} \tag{43}$$

Слично израчунавамо координате тежишта троугла ABC: $T\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$, где је $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$, $C(x_3,\ y_3)$.

Уочимо сада троугао ABC у равни Oxy, са теменима $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$, $C(x_3,\ y_3)$, сл. 52. Израчунајмо површину овог троугла, користећи се формулом (30) : $2P = |\ \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\ |$. Како је $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ 0)$ и $\overrightarrow{AC} = (x_3 - x_1,\ y_3 - y_1,\ 0)$, то је $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} =$
$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & 0 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & 0 \end{vmatrix} = (0,\ 0,\ (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)).$$
Према (37) је $|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = |(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)|$. Отуда је *површина троугла*: $2P_\Delta = |(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)|$, или другачије:

$$\boxed{2P_\Delta = |x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)|} \tag{44}$$

Приметимо да се то може написати помоћу детерминанте другог или трећег реда:

$$\boxed{\pm 2P_\Delta = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}} \tag{44'}$$

Није тешко уверити се да се *површина простог четвороугла**) $ABCD$, са теменима $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$, $C(x_3,\ y_3)$, $D(x_4,\ y_4)$ израчунава по формули

$$\boxed{\pm 2P = x_1(y_2 - y_4) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_4 - y_2) + x_4(y_1 - y_3)} \tag{45}$$

ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

189. Израчунати површину троугла одређеног векторима $2\vec{a} - 3\vec{b}$ и $3\vec{a} + 2\vec{b}$, ако је $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$ и $|\vec{a} + \vec{b}| = 4$.

190. Одредити угао између вектора $\vec{a} + \vec{b}$ и $2\vec{a} - \vec{b}$ и запремину паралелепипеда конструисаног над векторима $\vec{a} + \vec{b}$, $2\vec{a} - \vec{b}$ и $\vec{c}$, ако је $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$, $\measuredangle(\vec{a}, \vec{b}) = arcos\frac{4}{5}$ и $(\vec{a} \times \vec{b})\cdot \vec{c} = \frac{1}{3}$.

191. Одредити вектор $\vec{c}$ који је нормалан на $\vec{a}$ и $\vec{b}$, ако је $\vec{a} = (2,\ 1,\ 3)$ и $\vec{b} = (1,\ 2,\ 2)$, и интензитет вектора $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ једнак је $\sqrt{69}$, а вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ чине леви систем вектора.

192. Дати су вектори $\vec{a} = (1,\ 1,\ 1)$ и $\vec{b} = (1,\ -1,\ -1)$. Одредити јединични вектор $\vec{c}$, који са вектором $\vec{a}$ одређује угао од 30^0, ако

*) Прост је четвороугао коме су несуседне странице дисјунктне.

је површина паралелограма конструисаног над векторима $\vec{b}$ и $\vec{c}$ једнака $\sqrt{2}$.

193. Дати су вектори $\vec{a}=(-4,\ 1,\ 2)$, $\vec{b}=(2,\ 4,\ 2)$ и $\vec{c}=(1,\ 1,\ 2)$. Одредити вектор $\vec{d}$, нормалан на векторе $\vec{a}$ и $\vec{b}$, који са вектором $\vec{c}$ одређује оштар угао, ако је запремина тетраедра одређеног векторима $\vec{a}$, $\vec{d}$, $\vec{c}$ једнака $17,5$. Одредити висину тетраедра, која одговара страни $(\vec{a},\ \vec{d})$.

194. Леви систем вектора $\vec{a}=(3,\ -4,\ 2)$, $\vec{b}=(6,\ -8,\ 5)$ и $\vec{c}$ образује паралелепипед, чија је висина која одговара страни $(\vec{a},\ \vec{b})$ једнака 2. Одредити целобројне координате вектора $\vec{c}$, ако је $|\vec{c}|=\sqrt{14}$ и $\vec{b}\cdot\vec{c}=5$.

3.6 ПРАВА У РАВНИ

У даљем излагању посматраћемо неке скупове тачака, чији графици у равни Oxy представљају неке "линије". Овај задатак ћемо решавати тако, што ћемо на основу неке особине, којом се поменути скуп тачака одређује јединствено, саставити једначину облика $F(x,\ y)=0$. Једначина мора бити састављена тако да сваком пару $(x,\ y)$ одговара тачно једна тачка датог скупа и обрнуто. Особина, која одређује скуп, може бити исказана дефиницијом тог скупа или неким ставом.

Ми смо (у геометрији) *праву* узели за основни појам, па је не дефинишемо. Овде ћемо једначину праве линије одредити помоћу неког става. Узимајући различите ставове можемо добити и различите облике једначине праве.

Нека је $\vec{p}=(a,\ b)$ дати вектор и $P(x_1,\ y_1)$ дата тачка, сл. 53. На основу аксиоме паралелности, постоји тачно једна права p, која садржи тачку P и паралелна је вектору $\vec{p}$. Свака тачка $M(x,\ y)$ те праве задовољава услов да је $\overrightarrow{PM}\parallel\vec{p}$, где је $\overrightarrow{PM}=(x-x_1,\ y-y_1)$. Помоћу формуле (35), добијамо *канонични облик* једначине праве:

$$\boxed{\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}} \tag{46}$$

Вектор $\vec{p}=(a,\ b)$, где је $ab\neq 0$, је *вектор правца* праве p. Видимо да ова једнакост важи и ако је $M=P$.

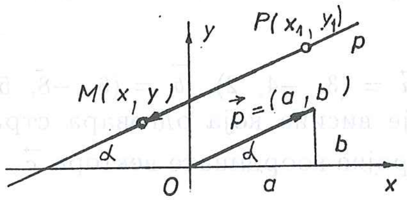
Специјално, ако је $\vec{p}=(0,\ b)$, једначина (46) је бесмислена ако је $x-x_1\neq 0$, а има смисла за $x-x_1=0$. Тада је вектор $\vec{p}$ колинеаран са осом Oy, па једначина $x-x_1=0$, односно:

(47) $\boxed{x = x_1}$

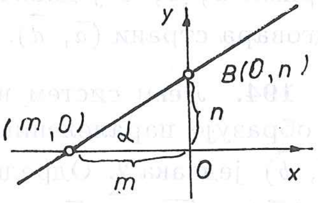
представља *праву паралелну са осом Oy.* Ако је вектор правца паралелан оси Ox, тј. ако је $\vec{p} = (a,\ 0)$, добијамо једначину праве

(47′) $\boxed{y = y_1}$

која је *паралелна са осом Ox.*



Сл. 53



Сл. 54

Узимајући у (46) да је $\dfrac{x-x_1}{a} = \dfrac{y-y_1}{b} = t$, налазимо да је:

(48) $\boxed{\begin{array}{l} x = x_1 + at \\ y = y_1 + bt \end{array}}$

Ово је *параметарска једначина праве.* За дату тачку $P(x_1,\ y_1)$ и вектор $\vec{p} = (a,\ b)$, променом вредности параметра t добијамо разне тачке праве p. Корисно је увести појам *клизајуће тачке*, коју означавамо са $P_t(x_1 + at,\ y_1 + bt)$, која "клизи" по правој p са променом вредности за t.

Интензитет вектора $\vec{p}$ нема значаја у одређивању правца праве p. Због тога, ако је $a \neq 0$, можемо, због: $(a,\ b) = a(1,\ \dfrac{b}{a}) = a(1,\ k)$, где је $k = \dfrac{b}{a} = \operatorname{tg}\alpha$ (видети сл. 53), једначину (46) написати у облику: $\dfrac{x-x_1}{1} = \dfrac{y-y_1}{k}$, односно, као што је уобичајено:

(49) $\boxed{y - y_1 = k(x - x_1)}$

Ово је *једначина праве кроз једну дату тачку*, или тзв. *једначина прамена правих* са тачком $P(x_1,\ y_1)$ као центром прамена. Број $k = \operatorname{tg}\alpha$, где је α угао којег са полуосом Ox одређује "горња" полуправа праве p (тј. део праве који је изнад осе Ox), називамо *коефицијентом правца* праве.

"Решавајући једначину (49) по y", добијамо: $y = kx + y_1 - kx_1$ и стављајући ознаку "n" за број $(y_1 - kx_1)$, добијамо једначину:

(50) $\boxed{y = kx + n}$

То је тзв. *експлицитни* (решен по y) облик једначине праве. Како за $x = 0$ добијамо $y = n$, то број n представља одсечак праве (*сегмент*) на оси Oy, сл. 54.

Према једној аксиоми, права p је одређена са две различите тачке (постоји тачно једна права која садржи две различите тачке). Нека су $A(x_1,\ y_1)$ и $B(x_2,\ y_2)$ две различите тачке. Тада је $\vec{p} = \overrightarrow{AB}$ вектор правца праве p, тј. $\vec{p} = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1)$. Тада је, према (46), једначина праве AB:

$$\boxed{\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}} \quad \text{или} \quad \boxed{y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)} \tag{51}$$

За случајеве $AB \| Ox$ или $AB \| Oy$, важе закључци из (47) и (48). Формула (51) позната је као *једначина праве кроз две дате тачке*. Њен коефицијент правца је $k = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

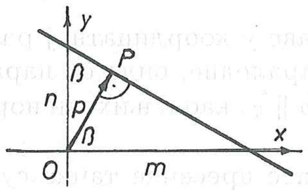
Специјално, ако је B тачка осе Oy и A тачка осе Ox, тј. ако је $B(0,\ n)$ и $A(m,\ 0)$, једначина (51) постаје $\dfrac{x}{m} = \dfrac{y - n}{-n}$, одакле је:

$$\boxed{\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1} \tag{52}$$

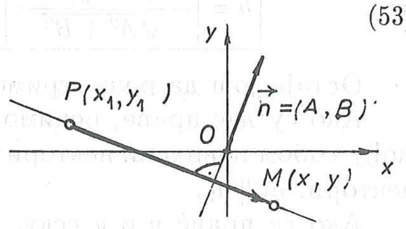
То је тзв. *сегментни облик* једначине праве. Бројеви m и n су одсечци (сегменти) на координатним осама, сл. 54.

Користећи се последњом формулом, можемо добити тзв. *нормални облик* једначине праве. Нека је $\overrightarrow{OP}$, $P \in a$, вектор нормалан на праву a и $|\overrightarrow{OP}| = p$. Према сл. 55 је $m = \dfrac{p}{\cos\beta}$ и $n = \dfrac{p}{\sin\beta}$. Заменом у (52) добијамо:

$$\boxed{x\cos\beta + y\sin\beta - p = 0} \tag{53}$$



Сл. 55



Сл. 56

Користећи се теоремом о јединости нормале из дате тачке на дату праву, можемо добити још један облик једначине праве. Нека је дат вектор $\vec{n} = (A,\ B)$ и тачка $P(x_1,\ y_1)$. Одредимо једначину праве p, која садржи дату тачку и нормална је на дати вектор. Свака тачка $M(x,\ y)$ праве p задовољава услов:

$$\boxed{\vec{n} \cdot \overrightarrow{PM} = 0} \tag{54}$$

Вектор $\overrightarrow{n} = (A,\ B)$, називамо *нормалним вектором праве.* (Ако је $M = P$, онда је $|PM| = 0$, а ако је $M \neq P$, онда важи услов нормалности двају вектора.) Ово је тзв. *векторска једначина праве*, која, када уврстимо координате вектора $\overrightarrow{n}$ и $\overrightarrow{PM}$, прелази у:

$$\boxed{A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0} \tag{55}$$

Ако број $(-Ax_1 - By_1)$ означимо са C, добијамо једначину:

$$\boxed{Ax + By + C = 0} \tag{56}$$

познату под именом *општа једначина праве*, или *имплицитни* (нерешен) *облик* једначине праве.

Није тешко утврдити везу општег облика једначине са нпр. експлицитним, сегментним или нормалним обликом. Свођењем једначине (56) на ове друге, налазимо да је нпр. $k = -\dfrac{A}{B}$, $B \neq 0$, односно $m = -\dfrac{C}{A}$, $A \neq 0$, $n = -\dfrac{C}{B}$, $B \neq 0$. Једначина:

$$\boxed{\frac{Ax + By + C}{-sgnC \cdot \sqrt{A^2 + B^2}} = 0} \quad \text{(свођење на нормални облик)} \tag{57}$$

доводи општи облик на нормални облик.

Користећи једначине (53) и (57) добијамо формулу за израчунавање *нормалног растојања дате тачке* $M(x_0,\ y_0)$ од дате праве, рецимо $Ax + By + C = 0$. Наводимо ову формулу без образложења:

$$\boxed{h = \left|\frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right|} \quad \text{(растојање тачке од праве)} \tag{58}$$

Остаје још да размотримо две праве у координатној равни.

Ако су две праве, рецимо p и q, паралелне, онда су паралелни међу собом и њихови вектори правца $\overrightarrow{p} \parallel \overrightarrow{q}$, као и њихови нормални вектори: $\overrightarrow{n_1} \parallel \overrightarrow{n_2}$.

Ако се праве p и q секу, координате пресечне тачке су решења система којег формирају једначине ових двеју правих. Посебно нас интересује угао између њих. Тај угао можемо одредити као угао између вектора праваца или као угао између нормалних вектора. На пример, користећи формулу (27), добијамо: $\cos\varphi = \dfrac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{({A_1}^2 + {B_1}^2)({A_2}^2 + {B_2}^2)}}$. Међутим, узимајући коефицијент правца, $k = \operatorname{tg}\alpha$, можемо згодно израчунати $\operatorname{tg}\varphi$. Према сл. 57 је α_2 спољашњи угао троугла A_1A_2P, па је $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$, односно

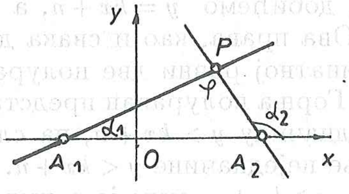
$\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1}{1+\operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2}$. Ставимо: $\operatorname{tg}\alpha_1 = k_1$ и $\operatorname{tg}\alpha_2 = k_2$, па ћемо добити формулу за *угао између две праве*:

$$\boxed{\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}} \tag{59}$$

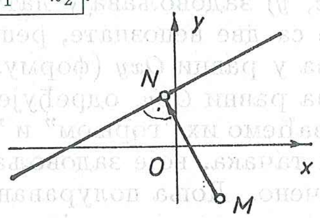
Специјално, ако је $p \perp q$, тада је $\vec{n_1} \perp \vec{n_2}$, па је и $\vec{n_1} \cdot \vec{n_2} = 0$, тј.

$$\boxed{A_1A_2 + B_1B_2 = 0} \quad \text{или} \quad \boxed{k_1k_2 = -1} \tag{60}$$

где смо заменили $-\dfrac{A_1}{B_1} = k_1$ и $-\dfrac{A_2}{B_2} = k_2$. Ова формула представља *услов нормалности* две праве. Подсетимо још да се услов паралелности може представити у облику $\boxed{k_1 = k_2}$.



Сл. 57



Сл. 58

Ако су дате праве $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, које се секу, можемо поставити задатак да се саставе једначине симетрала углова које ове праве одређују. Користећи се познатом чињеницом да су тачке симетрале угла једнако удаљене од кракова (тј. од датих правих), долазимо до једначина тих симетрала.

$$\boxed{\frac{A_1x + B_1y + C_1}{-sgnC_1\sqrt{{A_1}^2 + {B_1}^2}} \pm \frac{A_2x + B_2y + C_2}{-sgnC_2\sqrt{{A_2}^2 + {B_2}^2}} = 0} \tag{61}$$

Слично изгледа и једначина *прамена правих*, одређеног двема правим $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, које се секу:

$$\boxed{m(A_1x + B_1y + C_1) + n(A_2x + B_2y + C_2) = 0} \tag{62}$$

Узимајући разне вредности за бројеве m и n добијамо праве тог прамена тј. праве које садрже пресечну тачку датих правих.

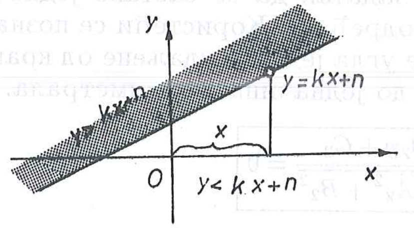
Пример 25. Дата је права $3x - 4y + 15 = 0$ и тачка $M(2,\ -1)$. Одредити координате тачке N, која је подножје нормале из M на дату праву, сл. 58.

Решење. Узмимо променљиву, тзв. *клизајућу* тачку дате праве, на следећи начин. Нека је $x = t$, тада је $y = \dfrac{3t+15}{4}$, па одредимо

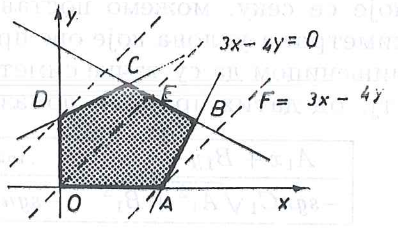
t, тако да x и y буду координате тачке N. Ако је $N(t, \dfrac{3t+15}{4})$, тада је вектор $\overrightarrow{MN} = (t-2, \ \dfrac{3t+15}{4}+1)$ нормалан на дату праву, па је паралелан са $\vec{n} = (3, \ -4)$. Због тога је $\dfrac{t-2}{3} = \dfrac{\dfrac{3t+15}{4}+1}{-4}$, а одавде је $t = -1$. Тражена тачка је $N(-1, \ 3)$. ♠

Користећи графике правих можемо решавати системе линеарних неједначина с две непознате, као што смо чинили и у ПРВОЈ ГЛАВИ.

Према излагању у овом одељку можемо закључити да свакој линеарној једначини, са једном или са две непознате, одговара у равни Oxy једна права. На тој правој су све тачке чије координате $(x, \ y)$ задовољавају дату једначину. Ако дату једначину, нека буде са две непознате, решимо по y, добићемо $y = kx + n$, а то је права у равни Oxy (формула (50)). Ова права, као и свака друга права равни Oxy, одређује у координатној равни две полуравни. Назваћемо их "горњом" и "доњом". Горња полураван представља скуп тачака, које задовољавају неједначину $y > kx + n$, на сл. 59 осенчено. Доња полураван је решење неједначине $y < kx + n$. Ако решавамо нестрогу неједначину, нпр. $y \geq kx+n$, онда је решење *затворена полураван*, значи полураван са својом ивицом (са правом $y = kx + n$).



Сл. 59



Сл. 60

Решење система оваквих неједначина је пресек одговарајућих полуравни. Како је полураван конвексан скуп, то ће и решење система линеарних неједначина с две непознате бити конвексан скуп (нпр. неки конвексан многоугао).

Пример 26. Дати графичко решење система неједначина:

$$\left.\begin{aligned} x \geq 0, \ y \geq 0 \\ x - 2y + 4 \geq 0 \\ x + 2y - 8 \leq 0 \\ 2x - y - 6 \leq 0 \end{aligned}\right\} (*)$$

Решење. Прве две неједначине одређују први квадрант. Остале, у експлицитном облику, дају $y \leq \dfrac{x+4}{2}$, $y \leq \dfrac{8-x}{2}$, $y \geq 2x-6$, па је решење осенчени петоугао на сл. 60, укључујући и контуру. ♠

Може се поставити овакав задатак. Одредити минималну вредност израза $F = 3x - 4y$, тако да x и y задовољавају услове $(*)$, тј. да буду решења система неједначина из последњег примера.*)

Овако формулисан проблем назива се *проблем линеарног програмирања.* Суштина проблема линеарног програмирања се састоји у следећем.

Дата је *функција циља*, то је линеарна форма F (у нашем случају $F = 3x - 4y$). Треба одредити *минималну вредност* функције циља (може се тражити максимална вредност) уз линеарна ограничења, која су задата системом линеарних неједначина. Обавезно се захтевају ненегативна решења, тј. $x \geq 0$, $y \geq 0$. Овај систем називамо *системом ограничења* (у нашем случају систем $(*)$).

Сви парови $(x,\ y)$ који задовољавају систем ограничења називају се *допустива* (дозвољена) *решења.* У нашем случају то су тачке петоугла $OABCD$ на сл. 60. Решење које се тражи је *оптимално решење.* То је пар $(x_0,\ y_0)$, такав да је $F_{min} = F(x_0,\ y_0)$ (у нашем случају $F_{min} = 3x_0 - 4y_0$).

Да бисмо решили конкретно постављен задатак, налажење минимума функције циља $F = 3x - 4y$, уз ограничења $(*)$, истакнимо следеће.

За $F = 0$ имамо праву $3x - 4y = 0$, која садржи координатни почетак, на сл. 60 нацртану испрекиданом линијом. Дуж OE је део те праве у петоуглу, који пролази кроз допустива решења. Вредност функције $F = 3x - 4y$ на дужи OE је 0. Померањем ове испрекидане линије горе и доле, све докле пресеца петоугао $OABCD$, мењамо вредност функције F. Може се доказати да се најмање и највеће вредности налазе у теменима скупа допустивих решења (тј. у теменима петоугла $OABCD$). Координате темена налазимо у пресецима одговарајућих правих. Тако имамо $O(0,\ 0)$, $A(3,\ 0)$, $B(4,\ 2)$, $C(2,\ 3)$, $D(0,\ 2)$. Истим редом рачунамо вредности функције циља: $F_O = 0$, $F_A = 9$, $F_B = 4$, $F_C = -6$, $F_D = -8$. Дакле, оптимално решење задатка је $F_{min} = F(0,\ 2) = -8$.

Могао је проблем бити постављен тако да се тражи максимална вредност за $F = 3x - 4y$. Тада би решење било $F_{max} = F(3,\ 0) = 9$.

---

*) Изрази облика: $c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$, где су $c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_n$ константе, називају се *линеарне форме.*

ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

195. Написати једначине симетрала углова одређених правим $5x - 12y - 3 = 0$ и $3x + 4y + 1 = 0$.

196. Израчунати површину троугла ABC, ако су $x - 3y - 1 = 0$ и $3x - 2y + 4 = 0$ једначине правих AB и AC, а $M(3,\ 3)$ је средиште странице BC.

197. Наћи једначину праве p, која садржи пресечну тачку правих $a:\ x + 2y - 5 = 0$ и $b:\ 2x + 3y - 7 = 0$ и нормална је на праву $q:\ 2x - 2y + 5 = 0$.

198. Одредити координате ортоцентра троугла ABC, ако су једначине његових страница AB, BC, CA, редом: $x - y - 2 = 0$, $2x + y - 13 = 0$, $4x - y - 5 = 0$.

199. Написати једначину праве m, која је од праве q: $3x - 4y + 10 = 0$ удаљена за 5.

200. Решити графички системе неједначина:

$$a)\ \begin{aligned} 3x - y - 3 &\geq 0 \\ x - y + 1 &\geq 0 \\ x + y - 1 &\geq 0 \end{aligned} \qquad б)\ \begin{aligned} 2x - y - 2 &\leq 0 \\ x - 2y + 1 &\geq 0 \\ x + y + 3 &\geq 0 \end{aligned} \qquad в)\ \begin{aligned} x &\geq 0 \\ 2x - 3y - 3 &\leq 0 \\ x + y - 4 &\leq 0 \\ x - 4y + 3 &\geq 0 \end{aligned}$$

201. Решити следећи проблем линеарног програмирања:

$$a)\ \begin{aligned} f_{min} &= 50 - 5x - y \\ x \geq 0,\ y &\geq 0 \\ x + 2y - 13 &\leq 0 \\ 3x + 2y - 19 &\leq 0 \\ 5 - x &\geq 0 \\ 6 - y &\geq 0 \end{aligned} \qquad б)\ \begin{aligned} f_{max} &= 12 + 2x - y \\ x \geq 0, y &\geq 0 \\ x + y - 20 &\leq 0 \\ 10 - x &\geq 0 \\ 15 - y &\geq 0 \\ x + y - 10 &\geq 0 \end{aligned}$$

3.7 КРИВЕ ДРУГОГ РЕДА

У овом одељку ћемо проучити круг, елипсу, хиперболу, параболу, и посебно њихове тангенте и сечице. Ове криве се називају заједничким именом *конусни пресеци* или *криве другог реда.*

Прво име потиче отуда, што се свака од ових кривих може добити као пресек кружне конусне површи и равни у одговарајућем положају. Друго име указује на чињеницу да једначине ових кривих представљају специјалне случајеве опште једначине другог степена са променљивим x и y:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Најпре ћемо наћи једначину круга. Знамо да је *круг* скуп свих тачака M равни, таквих да је $d(C,\ M) = r$, где је $C(p,\ q)$ дата тачка равни и r дати позитиван број.*) Ако са $x,\ y$ означимо (промењиве) координате тачке M на кругу, тада, према формули (41), имамо: $CM = \sqrt{(x-p)^2 + (y-q)^2} = r$, одакле после квадрирања:

$$\boxed{(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2} \quad \text{(једначина круга)} \tag{63}$$

Тачка $C(p,\ q)$ је *центар круга*, а r је *полупречник*. Ако је центар круга координатни почетак, тј. $C(0,\ 0)$, круг има једначину:

$$\boxed{x^2 + y^2 = r^2} \tag{64}$$

Дакле, координате било које тачке датог круга задовољавају једначину (63), односно (64). Обрнуто, за сваки пар $(x,\ y)$, који задовољава горњу једначину, одговарајућа тачка припада кругу.

Ако је $(x_0-p)^2 + (y_0-q)^2 > r^2$, тачка $P(x_0,\ y_0)$ је *ван круга*, а ако је $(x_0-p)^2 + (y_0-q)^2 < r^2$, тачка $P(x_0,\ y_0)$ је *у кругу*. Ако је $(x_0-p)^2 + (y_0-q)^2 \leq r^2$, тачка $P(x_0,\ y_0)$ *припада кружној површи*.

Нека је $y = kx + n$ једначина дате праве и $(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$ једначина датог круга. Зависно од решења система којег чине ове две једначине, закључујемо да се права и круг секу (два решења), додирују (једно решење) или су дисјунктни (нема заједничких решења). Решење $(x_1,\ y_1)$ је заједничка тачка праве и круга.

Сменимо $y = kx + n$ у једначину круга. Решавањем добијамо: $(x-p)^2 + (kx+n-q)^2 = r^2$, одакле је $(k^2+1)x^2 + 2(kn-kq-p)x + p^2 + q^2 + n^2 - r^2 - 2nq = 0$. Дискриминанта ове квадратне једначине је $D = 4r^2(k^2+1) - 4(kp-q+n)^2$. Као што смо видели у *одељку* 2.3, за $D > 0$ имамо два реална решења (дата права је *сечица*), за $D < 0$ нема реалних решења и за $D = 0$ имамо једно решење (дата права је *тангента*). Према томе,истичемо услов:**)

$$\boxed{r^2(k^2+1) = (kp-q+n)^2} \quad \text{(услов додира праве и круга)} \tag{65}$$

Нека је дата једначина круга и тачка $P(x_0,\ y_0)$. Ако је P ван круга, тада постоје две тангенте чије су једначине: $y - y_0 = k(x - x_0)$, где k одређујемо из услова додира (65) (два решења). Ако је P у кругу, тангента не постоји.

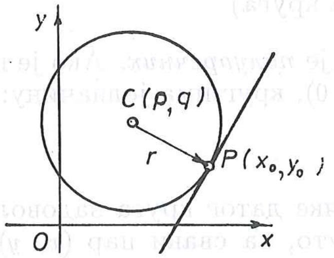
Одредимо једначину тангенте у тачки $P(x_0,\ y_0)$ која је на кругу $(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$, сл. 61. Тангента је нормална на полупречник CP, па како је $\overrightarrow{CP} = (x_0-p,\ y_0-q)$, то ће, према формули (55), једначина тангенте бити: $(x_0-p)(x-x_0) + (y_0-q)(y-y_0) = 0$, коју

*) $d(C,\ M)$ је растојање од тачке C до тачке M.

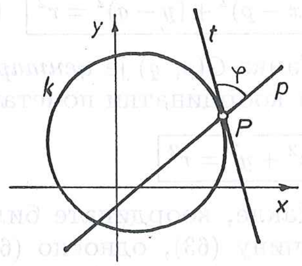
**) За круг из формуле (64) је $p = q = 0$, па је услов додира $r^2(k^2+1) = n^2$.

можемо трансформисати: $(x_0-p)(x-p+p-x_0)+(y_0-q)(y-q+q-y_0)=0$, односно $(x_0-p)(x-p)+(y_0-q)(y-q)-(x_0-p)^2-(y_0-q)^2=0$. Како је $(x_0,\ y_0)$ тачка на кругу, то је $(x_0-p)^2+(y_0-q)^2=r^2$, па је:

(66) $\boxed{(x_0-p)(x-p)+(y_0-q)(y-q)=r^2}$ (тангента у тачки круга)



Сл. 61



Сл. 62

Проблем одређивања *заједничких тангенти* двају кругова, решава се применом услова (65).

Угао између сечице p и круга k, дефинише се као *оштар или прав угао* између праве p и тангенте t у пресечној тачки, сл. 62.

Слично, *угао између два круга* који се секу је *оштар или прав угао* између њихових тангенти, конструисаних у пресечној тачки.

Решимо неколико примера у вези са кругом.

Пример 27. Наћи једначину тангенте круга описаног око троугла ABC, конструисане у тачки A, ако је: $A(-1,\ 8)$, $B(-3,\ 4)$, $C(6,\ 7)$

Решење. Центар круга је пресечна тачка симетрала дужи AB и BC. Симетрала дужи AB је скуп тачака $S(x,\ y)$, таквих да је $AS=BS$, па је $AS^2 = BS^2$, тј. $(x+1)^2+(y-8)^2=(x+3)^2+(y-4)^2$. Сређивањем добијамо $x+2y-10=0$. Слично добијамо симетралу дужи BC : $3x+y-10=0$. Пресек ове две симетрале је центар $S(2,\ 4)$. Полупречник круга је $r=SA=\sqrt{(-1-2)^2+(8-4)^2}=5$, па је једначина описаног круга: $(x-2)^2+(y-4)^2=25$. Тангента у тачки A, према формули (66) је $(-1-2)(x-2)+(8-4)(y-4)=25$, тј. $-3x+4y=35$. ♠

Пример 28. Написати једначину тангенте круга $x^2+y^2=5$, која сече праву $x+2y-7=0$ под углом од 45^0.

Решење. Дата права има коефицијент правца $k_1=-\dfrac{1}{2}$. Коефицијент k наше тангенте добићемо применом формуле (59):

$\operatorname{tg} 45^0=\dfrac{k+\dfrac{1}{2}}{1-\dfrac{k}{2}}$. Одавде је $k=\dfrac{1}{3}$. Тражена тангента има једначину:

$y = \frac{1}{3}x + n$. Према услову (65), због $p = q = 0$ и $r = \sqrt{5}$ је: $5(\frac{1}{9} + 1) = n^2$, па је $n = \frac{5\sqrt{2}}{3}$ или $n = -\frac{5\sqrt{2}}{3}$. Имамо две тангенте: $y = \frac{x}{3} + \frac{5\sqrt{2}}{3}$ и $y = \frac{x}{3} - \frac{5\sqrt{2}}{3}$. ♠

Параболу, елипсу и хиперболу сматрамо *конусним пресецима у ужем смислу.* Њихова заједничка дефиниција гласи:

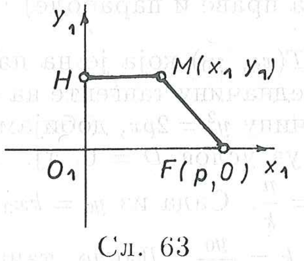
> *Конусни пресек је скуп свих тачака којима су растојања од дате тачке и од дате праве пропорционална.*

Дата тачка F је *жижа* или *фокус*, а дата права d је *директриса* конусног пресека. Коефицијент пропорционалности, број e, $e > 0$, је *ексцентрицитет.*

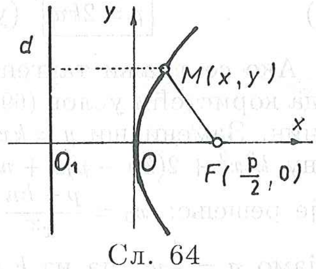
Узимајући Y_1-осу за директрису, а тачку $F(p,\ 0)$, $p > 0$, за жижу, сл. 63, наћићемо једначину конусних пресека. Нека је $M(x_1,\ y_1)$ тачка криве у равни $O_1x_1y_1$. Тада из $\frac{FM}{MH} = e$, тј. из $\sqrt{(x_1 - p)^2 + {y_1}^2} = e \cdot |x_1|$, добијамо: $(x_1 - p)^2 + {y_1}^2 = e^2 {x_1}^2$, односно:

$$\boxed{(1 - e^2){x_1}^2 + {y_1}^2 - 2px_1 + p^2 = 0} \quad \text{(конусни пресеци)} \tag{67}$$

> *Ако је $e = 1$ имамо параболу, за $0 < e < 1$ имамо елипсу, а за $e > 1$ хиперболу.*



Сл. 63



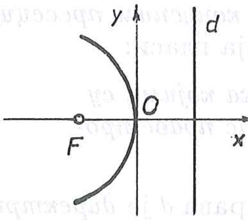
Сл. 64

Узмимо да је $e = 1$. **Једначина параболе** биће ${y_1}^2 = 2p(x_1 - \frac{p}{2})$. Уведимо нов координатни систем са координатним осама x и y, померањем O_1y_1 осе удесно за $\frac{p}{2}$. У новом координатном систему ће бити $y_1 = y$ и $x_1 - \frac{p}{2} = x$, па је:

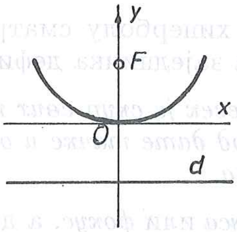
$$\boxed{y^2 = 2px} \quad \text{(парабола)} \tag{68}$$

Видимо да је $x \geq 0$, тј. парабола се налази десно од осе Oy. Теме је координатни почетак, сл. 64. Оса Ox је оса симетрије параболе. С обзиром на дефиницију конусних пресека и чињеницу да је $e = 1$, закључујемо да је *парабола скуп свих тачака једнако удаљених од дате тачке и од дате праве.*

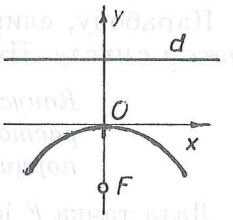
Мењајући положаје жиже и директрисе у односу на координатне осе, добијамо следеће облике једначина парабола: $y^2 = -2px$, сл. 65, затим $x^2 = 2py$, сл. 66 и $x^2 = -2py$, сл. 67.



Сл. 65



Сл. 66



Сл. 67

У свим случајевима *теме параболе је* тачка O. Све су ово тзв. *канонични облици једначина параболе.* Последња два знамо из *одељка* 2.4.

Задржаћемо се на једначини (68).

Испитујући решење система једначина $y = kx+n$ и $y^2 = 2px$, слично као код круга, долазимо до односа праве према кругу. Права облика $y = n$ не може бити тангента параболе $y^2 = 2px$. Она је, заправо сечица, иако са параболом има само једну заједничку тачку. Ако је $k \neq 0$, имамо услов за тангенту $y = kx + n$:

(69) $\boxed{p = 2kn}$ (услов додира праве и параболе)

Ако се тражи тангента у тачки $T(x_0,\ y_0)$ која је на параболи, тада користећи услов (69) добијамо једначину тангенте на следећи начин. Заменивши $y = kx + n$ у једначину $y^2 = 2px$, добијамо једначину $k^2x^2 + 2(kn - p)x + n^2 = 0$, која уз услов $D = 0$, тј. $p = 2kn$, даје решење: $x_0 = \dfrac{p - kn}{k^2} = \dfrac{2kn - kn}{k^2} = \dfrac{n}{k}$. Сада из $y_0 = kx_0 + n$, добијамо $n = \dfrac{1}{2}y_0$, па из $k = \dfrac{n}{x_0}$ имамо $k = \dfrac{y_0}{2x_0}$. Дакле, тангента је: $y = \dfrac{y_0}{2x_0} \cdot x + \dfrac{1}{2}y_0$. Помножимо са y_0 и заменимо: ${y_0}^2 = 2px_0$ и добијемо

(70) $\boxed{y_0y = p(x + x_0)}$ (тангента у тачки на параболи)

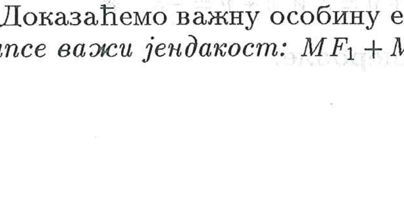
За угао под којим се секу права и парабола, или две параболе, важи све што смо закључили у претходном разматрању о кругу.

Нека је сада $0 < e < 1$, тј. размотримо **једначину елипсе.** Трансформишимо једначину (67) на следећи начин. Поделимо је са $(1 - e^2)$ и додамо левој и десној страни једнакости $\dfrac{p^2}{(1 - e^2)^2}$. Добићемо $x_1{}^2 - \dfrac{2px_1}{1-e^2} + \dfrac{p^2}{(1-e^2)^2} + \dfrac{y_1{}^2}{1-e^2} = \dfrac{p^2}{(1-e^2)^2} - \dfrac{p^2}{1-e^2}$, односно: $\left(x_1 - \dfrac{p}{1-e^2}\right)^2 + \dfrac{y_1{}^2}{1-e^2} = \dfrac{e^2p^2}{(1-e^2)^2}$. Сада померимо осу O_1y_1 удесно за $\dfrac{p}{1-e^2}$, па ћемо добити нове координате: $x = x_1 - \dfrac{p}{1-e^2}$ и $y = y_1$. Тада једначина прелази у облик: $x^2 + \dfrac{y^2}{1-e^2} = \dfrac{e^2p^2}{(1-e^2)^2}$, који поделимо са $\dfrac{e^2p^2}{(1-e^2)^2}$ и имамо: $\dfrac{x^2}{\dfrac{e^2p^2}{(1-e^2)^2}} + \dfrac{y^2}{\dfrac{e^2p^2}{1-e^2}} = 1$. Уведимо ознаке

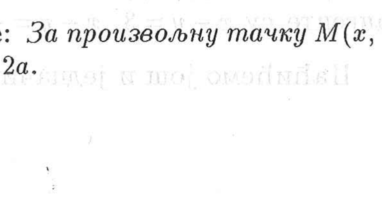
$a = \dfrac{ep}{1-e^2}$ и $b = \dfrac{ep}{\sqrt{1-e^2}}$ (тј. $b^2 = (1-e^2)a^2$) и добијамо

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1} \quad \text{(једначина елипсе)} \tag{71}$$

Анализом ове једначине, непосредно долазимо до важних особина елипсе. Нпр. очигледно је елипса симетрична у односу на обе координатне осе, па је координатни почетак O *центар* симетрије елипсе, сл. 68. Затим је $|x| \le a$ и $|y| \le b$. Пресеци са координатним осама су $A_1(-a,\ 0)$, $A_2(a,\ 0)$, $B_1(0,\ -b)$ и $B_2(0,\ b)$. То су темена елипсе. Дужи OA и OB су *полуосе* елипсе. Због симетричности закључујемо да елипса има две жиже и две директрисе, симетричне у односу на осу Oy. Одредићемо координате ових жижа у равни Oxy. Према сл.68 је $|O_1O| = \dfrac{p}{1-e^2} = \dfrac{a}{e}$. (За толико је померена оса O_1y_1). Како је $O_1F_1 = p$, то је $|OF_1| = O_1O - O_1F_1 = \dfrac{p}{1-e^2} - p = \dfrac{pe^2}{1-e^2} = ae$. Дакле, координате жижа су $F_1(-ae,\ 0)$ и $F_2(ae,\ 0)$. Из троугла B_2F_1O имамо: $B_2F_1{}^2 = b^2 + a^2e^2 = (1-e^2)a^2 + a^2e^2 = a^2$, па је $B_1F_1 = B_1F_2 = a$. Ако уведемо ознаку $ae = c$, тада је $F_1(-c,\ 0)$, $F_2(c,\ 0)$, $a^2 - b^2 = c^2$ и $e = \dfrac{c}{a}$ је ексцентрицитет елипсе. Једначине директриса су $x = \dfrac{a}{e}$ и $x = \dfrac{a}{e}$.



Сл. 68



Сл. 69

Доказаћемо важну особину елипсе: *За произвољну тачку $M(x,\ y)$ елипсе важи јендакост: $MF_1 + MF_2 = 2a$.*

Доказ. Нека су N_1 и N_2 подножја нормала из M на директрисе d_1 и d_2. Тада је, према дефиницији конусних пресека, $MF_1 = e \cdot MN_1$ и $MF_2 = e \cdot MN_2$, па је $MF_1 + MF_2 = e(MN_1 + MN_2) = eN_1N_2 = e \cdot 2OO_1 = = 2e \cdot \frac{a}{e} = 2a$. ♠

Што се тиче односа праве према елипси, поступајући слично као код параболе, долазимо до закључка да је права $y = kx + n$ тангента елипсе, ако и само ако је испуњен услов:

(72) $\boxed{a^2k^2 + b^2 = n^2}$ (услов додира праве и елипсе)

У случају тангенте у тачки $T(x_0,\ y_0)$, која је *на елипси*, добијамо једначину:

(73) $\boxed{\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = 1}$ (тангента у тачки на елипси)

Угао између праве и елипсе, као и угао између две елипсе одређује се као у случају круга.

Пример 29. Задата је елипса $8x^2 + 18y^2 = 144$ и права $p: 2x + 3y + 15 = 0$. Одредити на елипси тачку најближу датој правој и тачку најудаљенију од дате праве.

Решење. Тражимо додирне тачке тангенти дате елипсе, које су паралелне са датом правом, сл. 69. Коефицијент правца тангенте једнак је коефицијенту дате праве $k = -\frac{2}{3}$. Једначина елипсе је $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{8} = 1$, па услов додира, формула (72), даје: $18\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + 8 = n^2$. Одавде је $n = 4$ или $n = -4$. Тангенте су $y = -\frac{2}{3}x + 4$ и $y = -\frac{2}{3}x - 4$. Додирне тачке су: најближа $T_1(-3,\ -2)$ и најдаља $T_2(3,\ 2)$. ♠

Пример 30. Одредити заједничке тангенте за криве $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$ и $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} = 1$.

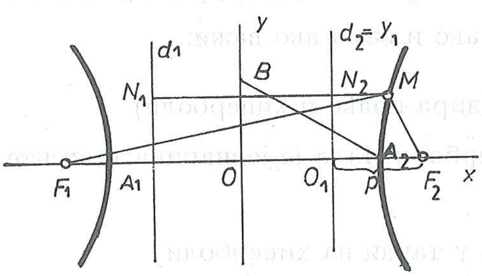
Решење. Тражимо тангенте са једначином $y = kx+n$. Применимо услов (72) на обе елипсе и добијемо систем једначина: $5k^2+4 = n^2$ и $4k^2+5 = n^2$. Одавде $k = 1$ или $k = -1$ и $n = 3$ или $n = -3$. Заједничке тангенте су $x - y = 3$, $x - y = -3$, $x + y = 3$ и $x + y = -3$. ♠

Наћићемо још и једначину **хиперболе**.

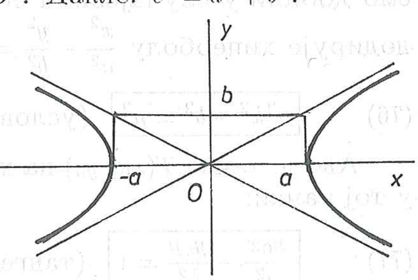
Нека је сада у једначини (67) испуњено $e > 1$. Поделимо једначину са $1 - e^2 < 0$ и, поступајући као код једначине елипсе, добијамо: ${x_1}^2 - \frac{{y_1}^2}{e^2-1} + \frac{2px_1}{e^2-1} = \frac{p^2}{e^2-1}$, односно $\left(x_1 + \frac{p}{e^2-1}\right)^2 - \frac{{y_1}^2}{e^2-1} = \frac{e^2p^2}{(e^2-1)^2}$. Пошто померимо осу O_1y_1 улево за $\frac{p}{e^2-1}$, добићемо нов координатни систем Oxy у којем је $x_1 + \frac{p}{e^2-1} = x$ и $y_1 = y$, па имамо: $x^2 - \frac{y^2}{e^2-1} = \frac{e^2p^2}{(e^2-1)^2}$. Ову једначину поделимо са $\frac{e^2p^2}{(e^2-1)^2}$ и ставимо $\frac{ep}{e^2-1} = a$ и $\frac{ep}{\sqrt{e^2-1}} = b$ (што даје везу $b = a\sqrt{e^2-1}$), па је:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1} \quad \text{(хипербола)} \tag{74}$$

Дискусијом ове једначине долазимо до закључка да хипербола не сече осу Oy, а осу Ox сече у теменима $A_1(-a,\ 0)$ и $A_2(a,\ 0)$. Чак, за $x \in (-a,\ a)$ нема тачака на хиперболи. Стога a називамо *реалном*, а b *имагинарном полуосом.* Хипербола је симетрична у односу на осу Ox и у односу на осу Oy. Тачка O је *центар* симетрије хиперболе. Хипербола се састоји из две дисјунктне *гране*, сл. 70. Због симетричности она има и две директрисе и две жиже. Видимо на сл. 70 да је $OF_2 = p + \frac{p}{e^2-1} = \frac{pe^2}{e^2-1} = ae$. Због тога су жиже $F_1(-ae,\ 0)$ и $F_2(ae,\ 0)$. Одстојање директрисе од осе Oy је $OO_1 = \frac{p}{e^2-1} = \frac{1}{e}\frac{ep}{e^2-1} = \frac{a}{e}$, па су једначине директриса $x = -\frac{a}{e}$ и $x = \frac{a}{e}$. Означимо ли $ae = c$, добићемо жиже: $F_1(-c,\ 0)$ и $F_2(c,\ 0)$, а ексцентрицитет хиперболе је $e = \frac{a}{c}$. Из троугла OA_2B, где је $OB = b$, добијамо: ${OA_2}^2 + OB^2 = A_2B^2$, тј. $a^2 + b^2 = a^2 + a^2(e^2-1) = a^2e^2 = c^2 = A_2B^2$. Дакле: $c^2 = a^2 + b^2$.



Сл. 70



Сл. 71

Трансформишимо једначину (74) на следећи начин: $a^2y^2 =$

$= b^2x^2 - a^2b^2$, па поделимо са a^2x^2 и добијемо $\frac{y^2}{x^2} = \frac{b^2}{a^2}(1 - \frac{a^2}{x^2})$. Одавде је $\frac{y}{x} = \pm\frac{b}{a}\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}$. Како је a^2 константа, а x^2 се неограничено повећава кад x тежи ка $+\infty$ или ка $-\infty$, то ће разломак $\frac{a^2}{x^2}$ бити све мањи, уколико је $|x|$ већи број. Дакле, $\frac{a^2}{x^2}$ тежи нули кад $|x|$ тежи ка $+\infty$. Отуда закључујемо да $\frac{y}{x}$ тежи ка $\pm\frac{b}{a}$. Другим речима график хиперболе се приближава графицима правих $y = \frac{b}{a}x$ и $y = -\frac{b}{a}x$. Није тешко доказати да разлике $y - \frac{b}{a}x$ и $y - \left(-\frac{b}{a}x\right)$, где је из једначине хиперболе $y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$, теже ка нули кад $|x|$ тежи ка $+\infty$. Стога можемо замислити да се "негде у бесконачности" хипербола додирује са овим двема правим. Ове праве називамо *асимптотама* хиперболе.

(75) $\boxed{y = \pm\frac{b}{a}x}$ (асимптоте хиперболе)

На сл. 71 видимо и како се конструишу асимптоте.

Ако су директрисе паралелне оси Ox, а жиже су на оси Oy, тада реална и имагинарна оса из формуле (74) замене улоге, па се график добија "ротирањем" сл. 71 за прав угао. Једначина хиперболе тада гласи

(75′) $\boxed{-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ или } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1}$ (хипербола)

Разматрајући положај праве $y = kx + n$ према хиперболи или однос две криве, долазимо до закључака који су слични онима које смо добили у случајевима осталих кривих. Тако, права $y = kx + n$ додирује хиперболу $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, ако и само ако важи:

(76) $\boxed{a^2k^2 - b^2 = n^2}$ (услов додира праве и хиперболе)

Ако је тачка $T(x_0,\ y_0)$ на хиперболи, тада је једначина тангенте у тој тачки:

(77) $\boxed{\frac{x_0x}{a^2} - \frac{y_oy}{b^2} = 1}$ (тангента у тачки на хиперболи)

Хиперболе имају особину која их издваја од осталих конусних пресека. За било коју тачку M хиперболе важи: $|MF_1 - MF_2| =$

$= 2a$. Докажимо то! Нека су N_1 и N_2 подножја нормала из M на директрисе d_1 и d_2. Тада је по дефиницији конусних пресека: $MF_1 = eMN_1$ и $MF_2 = eMN_2$, па је $|MF_1 - MF_2| = e|MN_1 - MN_2| = e \cdot N_1N_2 = e \cdot 2 \cdot OO_1 = 2e \cdot \frac{a}{e} = 2a$.

Може се десити да добијемо једначину другог реда, која подсећа на неку од описаних кривих, а, у ствари, не представља никакву криву. На пример једначина $x^2 + y^2 = 0$ личи на једначину круга и $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$ личи на једначину елипсе, а обе су задовољене само за $x = 0$ и $y = 0$. Дакле, обе *представљају само једну тачку*.

Једначима $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ личи на једначину хиперболе, а представља једначину $\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 0$, која је еквивалентна са $\frac{x}{a} - \frac{y}{a} = 0$ или $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$. Дакле то је *скуп од две праве*.

Затим, једначине $x^2 + y^2 = -r^2$ и $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$, нису задовољене за било који пар реалних бројева x, y, а прва личи на круг, друга на елипсу.Назваћемо их *имагинарним кругом* и *имагинарном елипсом*.

Пример 31. Производ растојања било које тачке хиперболе $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ од асимптота те хиперболе има сталну вредност. Доказати.

Доказ. Нека је $M(x_1, y_1)$ произвољна тачка дате хиперболе, чије су асимптоте $y = \frac{b}{a}x$ и $y = -\frac{b}{a}x$, односно $bx - ay = 0$ и $bx + ay = 0$. Растојања тачке M од ових правих (према (58)) су $h_1 = \left|\frac{bx_1 - ay_1}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right|$ и $h_2 = \left|\frac{bx_1 + ay_1}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right|$. Према томе: $h_1 \cdot h_2 = \left|\frac{b^2{x_1}^2 - a^2{y_1}^2}{a^2 + b^2}\right|$. Међутим, према (74) је $b^2{x_1}^2 - a^2{y_1}^2 = a^2b^2$, јер је $M(x_1, y_1)$ тачка на хиперболи, па је $h_1 \cdot h_2 = \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2}$, а ово је константа. ♠

Пример 32. Дате су хипербола $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$ и парабола $y^2 = 16x$. Одредити: *а*) пресечне тачке кривих; *б*) угао под којим се секу криве; *в*) заједничке тангенте кривих.

Решење. *а*) Стављајући у прву једначину $y^2 = 16x$, добијамо квадратну једначину $3x^2 - 16x - 12 = 0$, чија су решења $x = 6$ и $x = -\frac{2}{3}$. Међутим, због $y^2 = 16x$ је $x \geq 0$, па важи само $x = 6$. Одговарајућа решења за y су $y = 4\sqrt{6}$ и $y = -4\sqrt{6}$. Пресечне тачке су $P(6, 4\sqrt{6})$ и $Q(6, -4\sqrt{6})$.

б) Тангента хиперболе у тачки P је: $\frac{6x}{4} - \frac{4\sqrt{6}y}{12} = 1$, са коефицијентом правца $k_1 = \frac{3\sqrt{6}}{4}$, а тангента параболе у истој тачки је $4y\sqrt{6} = 8(x+6)$, са коефицијентом правца $k_2 = \frac{\sqrt{6}}{3}$. Према томе, угао φ под којим се секу хипербола и парабола, према (59), одређујемо из $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{\frac{3\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{3}}{1 + \frac{3\sqrt{6}}{4}\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$. Одавде $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{6}}{6}$.

в) Заједничке тангенте су праве облика $y = kx + n$, уз услове (69) и (76). Како је $p = 8$, $a^2 = 4$ и $b^2 = 12$, добијамо: $2kn = 8$ и $4k^2 - 12 = n^2$. Решења овог система једначина су $k = 2$ и $n = 2$ или $k = -2$ и $n = -2$. Једначине заједничких тангенти су $y = 2x + 2$ и $y = -2x - 2$. ♠

ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

202. Под којим се углом круг $x^2 + y^2 = 16$ види из тачке $P(8,\ 0)$?

203. Под којим се углом секу криве $x^2 + y^2 - 6x - 2y = -2$ и $x^2 + y^2 - 4x + 4y = -6$?

204. Написати једначине тангенти параболе $y^2 = 8x$ у тачки *а*) $A(2,\ -4)$, *б*) $B(5,\ -7)$.

205. Написати једначину скупа тачака које су једнако удаљене од осе Oy и од криве $x^2 - 6x + y^2 = -8$.

206. Дата је тачка $P(1,\ 1)$ и елипса $9x^2 + 16y^2 = 144$. Написати једначину сечице p, која на елипси одсеца тетиву са средиштем P.

207. Наћи једначину скупа (геометријског места) тачака из којих се елипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ види под правим углом.

208. Дуж BC дужине n, клизи крајњим тачкама по координатним осама. Какву криву описује тачка A, која дату дуж дели у размери $\frac{BA}{AC} = m$?

209. Написати једначину хиперболе којој је дата асимптота $x - 2y = 0$ и тангента $5x - 6y - 8 = 0$.

210. Наћи једначину геометријског места тачака које су једнако удаљене од тачке $A(2,\ 0)$ и круга $(x+2)^2 + y^2 = 4$.

3.8 СКУП ЦЕЛИХ БРОЈЕВА. МАТЕМАТИЧКА ИНДУКЦИЈА

Скуп **природних бројева** задајемо на следећи начин.
1^0 *Број* 1 *је најмањи природан број.*
2^0 *Сваки природан број* n *има следбеника; то је број* $n+1$.

Према томе, скуп природних бројева је $N = \{1,\ 2,\ 3,\ \dots\}$.

За природан број m кажемо да је *дељив* природним бројем n, ако и само ако постоји природан број k, такав да је $m = k \cdot n$. (Тада је m дељив и са k). То се још записује у облику $n|m$ ("n дели m"). Бројеви k и n су *делиоци* броја m. Због $m = 1 \cdot m$, за $m \in N$, закључујемо да је број 1 делилац сваког природног броја.

Природан број p је *прост* ако има тачно два различита делиоца. (То су 1 и p). Прости су бројеви: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, ...

Природан број је *сложен* ако има више од два различита делиоца. Сложени су бројеви 4, 6, 8, 9, 10, 12, ...

Број 1 *није ни прост ни сложен.*

Познато је да се сваки сложен број може написати на јединствен начин у виду производа простих бројева: $n = p_1 \cdot p_2 \cdots p_m$. Ови прости бројеви не морају бити различити. Израз

$$\boxed{n = {p_1}^{\alpha_1} \cdot {p_2}^{\alpha_2} \cdots {p_k}^{\alpha_k}} \tag{78}$$

представља *растављање броја* n *на просте чиниоце.* Изложиоци $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \dots,\ \alpha_k$, показују колико се пута појављује исти чинилац.

Најмањи делилац, различит од 1, за било који природан број, је прост број. За број n, он не може бити већи од $\sqrt{n}$. Другим речима, ако за број n не постоји прост број p, $p < \sqrt{n}$, такав да $p|n$, онда је и n прост број.

Два природна броја m и n увек имају бар један *заједнички делилац*. Највећи од њих се назива *највећи заједнички делилац* и означава се са $D(m,\ n)$. Ако m и n имају тачно један заједнички делилац, онда је то број 1, тј. $D(m,\ n) = 1$. Тада кажемо да су m и n *узајамно прости бројеви.*

Ако је $m|p$, онда кажемо да је p *садржалац* броја m, а ако $m|p$ и $n|p$, онда је p *заједнички садржалац* за m и n. Најмањи од свих оваквих бројева p, називамо *најмањим заједничким садржаоцем* бројева m и n и означавамо га са $S(m,\ n)$. У случају да је $D(m,\ n) = 1$, биће $S(m,\ n) = m \cdot n$. Ако је $D(m,\ n) = d$, онда је $S(m,\ n) = \dfrac{m \cdot n}{d}$.

Навешћемо сада неке важне особине дељивости.

–ако је $m|n$ и $n|p$, онда је $m|p$
–ако је $m|n$ и $n|m$, онда је $m = n$
–ако је $m|p$ и $n|p$, онда је $S(m,\ n)|p$
–ако је $m|p$ и $m|q$, онда је $m|(p+q)$ и $m|(p-q)$ и $m|(p \cdot q)$

Ако број n није дељив бројем m, $n > m$ и $m, n \in N$, тада постоје јединствени природни бројеви q и r, такви да је

(79) $$\boxed{n = q \cdot m + r, \ r < m < n}$$

Број q је *количник*, а r *остатак дељења* броја n са m.

Скуп чији су елементи 0, ± 1, ± 2, $\pm 3, \ldots$ називамо *скупом целих бројева.*

Знамо да је $0 \cdot a = 0$ за сваки број a, а ако је $b \neq 0$, тада не постоји број a, такав да је $b = 0 \cdot a$. Због тога *нула не може бити делилац.*

За цео број b кажемо да је *дељив* целим бројем a, $a \neq 0$, ако и само ако постоји цео број k, такав да је $b = k \cdot a$. Ако цео број b није дељив целим бројем a, $a \neq 0$, тада постоји јединствен цео број q и јединствен природан број r, тако да важи

(79′) $$\boxed{b = q \cdot a + r, r < |a|}$$

(видети (79)). Ако је b дељиво са a, тада често кажемо да је "остатак дељења b са a једнак нули" (или да нема остатка дељења).

Нека је S неки скуп целих бројева и m природан број већи од 1. Сваком броју из S одговара јединствен остатак при дељењу са m, и то 0 (ако је дељив са m), 1, 2, ..., $m-1$. То нам омогућава да скуп S поделимо на дисјунктне подскупове, тако да сви бројеви у једном подскупу имају једнаке остатке дељења са m. Нека су a и b елементи једног таквог подскупа. Тада је $a = mp + r_0$ и $b = mq + r_0$. У том случају кажемо да су бројеви a и b *конгруентни по модулу* m. То изначавамо са $a \equiv b(mod\ m)$. С обзиром да је у том случају $a - b = m(p-q)$, закључујемо да су два цела броја a и b конгруентна по модулу m ако и само ако је њихова разлика дељива са m:

(80) $$\boxed{a \equiv b(mod\ m) \Leftrightarrow a - b = k \cdot m}$$

Није тешко доказати (и нећемо доказивати) да се конгруенција по модулу одликује следећим особинама:

$$m|a \Leftrightarrow a \equiv 0(mod\ m)$$

$$a_1 \equiv b_1(mod\ m) \wedge a_2 \equiv b_2(mod\ m) \Rightarrow \begin{cases} a_1 \pm a_2 \equiv b_1 \pm b_2(mod\ m) \\ a_1 \cdot a_2 \equiv b_1 \cdot b_2(mod\ m) \end{cases}$$

$$a \equiv b(mod\ m) \wedge k \in N \Rightarrow \begin{cases} a^k \equiv b^k(mod\ m). \\ a \cdot k \equiv b \cdot k(mod\ m \cdot k). \end{cases}$$

Примењујући ове особине, нпр. на просте бројеве, за $m = 6$, закључујемо да се сваки прост број p, већи од три, може представити у облику $p = 6k \pm 1$.

Пример 33. Одредити прост број p, тако да и број $3^p + p^3$ буде прост.

Решење. Ако је $p = 2$, онда је $3^p + p^3 = 3^2 + 2^3 = 17$, а то је прост број. Ако је $p > 2$, онда је p непаран број, па су и 3^p и p^3 непарни. Међутим, збир два непарна броја је паран број па је и $3^p + p^3$ паран број, а пошто је већи од два, он је и сложен. Дакле, једино решење задатка је $p = 2$. ♠

Пример 34. Колики је остатак дељења $(4^{444} - 3^{333}) : 13$?

Решење. Имамо $4^3 = 64 \equiv -1(mod\ 13)$, па је $4^{444} = (4^3)^{148} \equiv$ $\equiv (-1)^{148}(mod\ 13) \equiv 1(mod\ 13)$. Сем тога је $3^3 = 27 \equiv 1(mod\ 13)$, па је $3^{333} = (3^3)^{111} \equiv 1^{111}(mod\ 13) \equiv 1(mod\ 13)$. Одавде закључујемо да: $(4^{444} - 3^{333}) \equiv (1 - 1)(mod\ 13) \equiv 0(mod\ 13)$, што значи да је тражени остатак дељења 0. ♠

Значај *следбеника природног броја* посебно долази до изражаја у следећој аксиоми:

> *Ако је нека формула $f(n)$, $n \in N$, тачна за $n = 1$ и $f(n) \Rightarrow f(n+1)$, тада је формула $f(n)$ тачна за $n \in N$.*

Ово је тзв. *принцип математичке индукције*. Користимо га врло често у доказивању формула. Дешава се да понуђена формула не важи за $n = 1$, ни за $n = 2$, итд. Тада доказујемо да формула важи за сваки природан број n, $n \geq k$, где је k број за који смо утврдили тачност формуле. Такође је могуће користити овај принцип и на скупу целих бројева, тако што негативном броју k кореспондирамо природан број $(-k)$.

На следећим примерима ћемо видети детаљно разрађен поступак доказивања математичком индукцијом.

Пример. 35. Доказати да за сваки природан број n важи једнакост: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Доказ. 1^0 *Провера за* $n = 1$. Лева страна има "n" сабирака, па за $n = 1$ има један сабирак. Стога треба да важи: $1^2 = \dfrac{1(1+1)(2\cdot 1+1)}{6}$, тј. $1^2 = \dfrac{1\cdot 2\cdot 3}{6}$, што је тачно.

2^0 *Доказ* $f(n) \Rightarrow f(n+1)$. Ако левој и десној страни дате једнакости додамо $(n+1)^2$ и средимо десну страну, добићемо:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 =$$

$$= (n+1)\left(\frac{n(2n+1)}{6} + n + 1\right) = \frac{(n+1)(2n^2 + n + 6(n+1))}{6} =$$

$$= \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} =$$

$= \dfrac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6}$, што представља $f(n+1)$. Дакле $f(n) \Rightarrow f(n+1)$, па је формула $f(n)$ тачна за $n \in N$. ♠

Пример 36. Доказати Муаврову формулу, тј. доказати да је $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi,\ n \in N$.

Доказ. 1^0 Провера за $n=1$: $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^1 = \cos\varphi + i\sin\varphi$, то је тачно.

2^0 Доказ $f(n) \Rightarrow f(n+1)$. Дата формула $f(n)$ тврди да је $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$. Помножимо ову једнакост са $(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ и средимо десну страну: $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{n+1} =$
$= \cos n\varphi \cdot \cos\varphi + i\cos n\varphi \cdot \sin\varphi + i\sin n\varphi \cdot \cos\varphi + i^2 \sin n\varphi \cdot \sin\varphi =$
$= (\cos n\varphi \cdot \cos\varphi - \sin n\varphi \cdot \sin\varphi) + i(\sin n\varphi \cdot \cos\varphi + \sin\varphi \cdot \cos n\varphi) =$
$= \cos(n\varphi + \varphi) + i\sin(n\varphi + \varphi) = \cos(n+1)\varphi + i\sin(n+1)\varphi$. Ово потврђује да $f(n) \Rightarrow f(n+1)$, па је тиме доказана исправност формуле. ♠

Пример 37. Доказати да је $9^{n+1} + 2^{6n+1}$ дељиво са 11 за сваки природан број n.

Доказ. 1^0 Провера за $n=1$: $9^2 + 2^7 = 81 + 128 = 209 = 11 \cdot 19$.

2^0 Доказ $f(n) \Rightarrow f(n+1)$. Формула $f(n)$ тврди да је: $9^{n+1} + 2^{6n+1} = 11k,\ k \in N$. Пођимо од израза $9^{(n+1)+1} + 2^{6(n+1)+1}$. Његовим трансформисањем добијамо:
$9^{(n+1)+1} + 2^{6(n+1)+1} = 9 \cdot 9^{n+1} + 2^6 \cdot 2^{6n+1} = 9 \cdot 9^{n+1} + 9 \cdot 2^{6n+1} + 55 \cdot 2^{6n+1} =$
$= 9(9^{n+1} + 2^{6n+1}) + 55 \cdot 2^{6n+1} = 9 \cdot 11k + 55 \cdot 2^{6n+1} = 11(9k + 5 \cdot 2^{6n+1})$,
што значи да је и $9^{(n+1)+1} + 2^{6(n+1)+1}$ дељиво са 11, тј. $f(n) \Rightarrow f(n+1)$. Тиме је доказано тврђење задатка. ♠

ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

211. Ако је p прост број већи од три, доказати да је $p^2 - 1$ дељиво са 24.

212. Доказати да постоји 15 узастопних сложених бројева.

213. Доказати да је $7^{7^7} - 3$ дељиво са 10.

214. Доказати да за $h > -1$ и $n \in N$, важи неједнакост $(1+h)^n \geq 1 + nh$ (*Бернулијева неједнакост*).

215. Доказати да за $n \in N$ важи једнакост:
а) $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$; *б*) $\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$;

в) $\sin x + \sin 3x + \cdots + \sin(2n-1)x = \dfrac{\sin^2 nx}{\sin x}$;

г) $\cos\dfrac{x}{2} \cdot \cos\dfrac{x}{2^2} \cdots \cos\dfrac{x}{2^n} = \dfrac{\sin x}{2^n \sin\dfrac{x}{2^n}}$; *д*) $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}} = 2\cos\dfrac{\pi}{2^{n+1}}$.

216. Доказати да за $n \in N$ важи неједнакост:
$2! \cdot 4! \cdot 6! \cdots (2n)! \ \geq \ ((n+1)!)^n$, ($n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$, а $n!(n+1) = (n+1)!$).

217. Доказати да је $3 \cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$ дељиво са 17, $\forall n \in N$.

3.9 БРОЈНИ НИЗОВИ. ГРАНИЧНА ВРЕДНОСТ НИЗА

Уочимо неко пресликавање $f(n)$ скупа природних бројева на скуп реалних бројева. Сложимо ликове редом: први, други, трећи, итд. који одговарају бројевима 1, 2, 3, итд. Означимо их редом са a_1, a_2, a_3, итд. Овако сложени они чине **бројни низ**:

$$\boxed{a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots} \quad \text{(бројни низ)} \tag{81}$$

Бројни низ можемо репрезентовати и само тзв. *општим чланом* a_n. На пример: $a_n = 2n$ је *низ парних бројева*, $b_n = \dfrac{1}{n}$ је тзв. *хармонијски низ*, и сл. Из општег члана лако се изражавају остали чланови, једноставно замењујемо n редом са 1, 2, 3, ... Наведимо неколико примера низова.

(*а*) $1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \ldots,\ \frac{1}{n},\ \ldots$
(*б*) $\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \ldots,\ \frac{n}{n+1},\ \ldots$
(*в*) $3,\ 7,\ 11,\ \ldots,\ 4n-1,\ \ldots$
(*г*) $3,\ 6,\ 12,\ 24,\ \ldots,\ 3 \cdot 2^{n-1},\ \ldots$
(*д*) $-1,\ 1,\ -1,\ 1,\ \ldots,\ (-1)^n,\ \ldots$

Последњи записани број у сваком низу је његов *општи члан.*

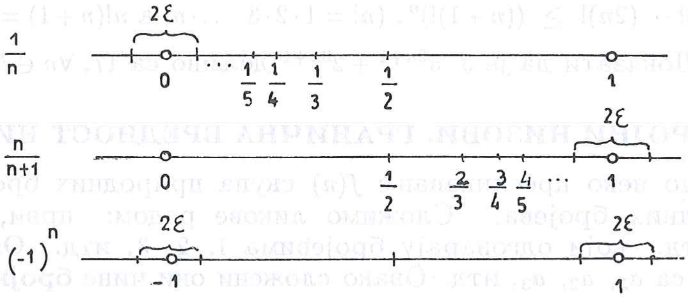
Посматрањем ових неколико низова, можемо уочити неке битне карактеристике низова уопште.

За низове (*а*), (*б*), (*д*) важе неједнакости: $|a_n| \leq M$, где M можемо одредити. Такви низови су *ограничени*. Нпр, за низ (*а*) важи $0 < a_n \leq 1$, за низ (*б*) важи $\frac{1}{2} \leq a_n < 1$, а код низа (*д*) је $a_n \in \{-1,\ 1\}$.

Низови (*в*) и (*г*) имају особину, да за било који број M можемо наћи број n_0, такав да је $|a_n| > M$, за $n > n_0$. То су тзв. *неограничени* низови.

Код низа (*а*) запажамо да је сваки следећи члан мањи од претходног, па је низ (*а*) *опадајући*. Он стално опада. Такве низове сврставамо у тзв. *монотоно опадајуће*. Насупрот низу (*а*), низови *б*), (*в*) и (*г*) су *монотоно растући*. Низ (*д*) није ни растући ни опадајући.

Означимо елементе низова (*а*), (*б*) и (*д*) тачкама на бројној оси, сл. 72.



Сл. 72

Нека је $\varepsilon > 0$ неки број који ћемо бирати према потреби. Претпоставимо да је он "веома мали" (нпр. $0,000001$). Ако је M нека тачка на бројној оси, тада интервал ширине 2ε, са тачком M као средиштем, називамо *епсилон околином тачке* M. Примећујемо да се чланови низа (a) приближавају тачки 0, а чланови низа $(б)$ тачки 1. Није тешко схватити да се у било којој ε-околини тачке 0 налазе *скоро сви чланови* низа (a).*) Слично, скоро сви чланови низа $(б)$ се налазе у произвољној ε-околини тачке 1 (тј. за било које, произвољно мало ε).

С обзиром да је сваки други члан низа $(д)$ једнак 1, односно -1, можемо рећи да се у произвољној ε-околини тачке 1, а такође и у произвољној ε-околини тачке -1, налази бесконачно много чланова низа $(д)$.

Овакве тачке, тј. тачке у чијој се произвољној ε-околини налази бесконачно много чланова низа, називамо *тачкама нагомилавања низа.* Низови (a) и $(б)$ имају тачно једну тачку нагомилавања. Важно је уочити да *сваки ограничен низ има бар једну тачку нагомилавања.*

Уведимо сада један важан појам.

Низ који има тачно једну тачку нагомилавања је конвергентан.

Тачка нагомилавања конвергентног низа је његова *граница.* За конвергентан низ кажемо да *има границу.* На основу досадашњих разматрања можемо и овако резоновати. Нека је a једина тачка нагомилавања низа a_n.

Низ a_n је конвергентан ако за свако $\varepsilon > 0$ постоји природан број n_0, такав да је за свако $n > n_0$ испуњен услов $|a_n - a| < \varepsilon$.

*) "Скоро сви" у математичкој терминологији значи да се ван ε-околине налази познат-коначан број чланова, рецимо 1000 чланова, а сви остали, њих бесконачно много, су у ε-околини.

Тада кажемо да је a *гранична вредност низа* a_n и пишемо: $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. (Читамо: "Лимес од a_n кад ен тежи бесконачости, једнак је a".)

Низови који немају тачку нагомилавања или имају више од једне тачке нагомилавања су *дивергентни*.

Према сл. 72 је $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ и $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$*)

У неколико наредних примера видећемо како се практично израчунавају граничне вредности неких низова. Општи члан низа најчешће је израз који не можемо директно израчунати, као $\frac{\infty}{\infty}$, $0\cdot\infty$, $\frac{0}{0}$, $\infty-\infty$, 1^∞ и др.

Пример 38. Израчунати граничне вредности следећих низова:

а) $a_n = \dfrac{n^2-2n^3}{(n+1)^3}$; *б)* $a_n = \sqrt{n^2+3n}-n$;

в) $a_n = \dfrac{1}{n^3}+\dfrac{2^2}{n^3}+\dfrac{3^2}{n^3}+\cdots+\dfrac{(n-1)^2}{n^3}$; *г)* $a_n = \dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}$;

д) $a_n = b^n$, $b>0$.

Решење. *а)* $$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2-2n^3}{(n+1)^3} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n^3\left(\frac{1}{n}-2\right)}{n^3\left(1+\frac{1}{n}\right)^3} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{n}-2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^3} = -2,$$ јер, као што знамо, $\frac{1}{n}\to 0$. (Овде смо имали израз облика $\frac{\infty}{\infty}$.)

б) $$\lim_{n\to+\infty}(\sqrt{n^2+3n}-n) = \lim_{n\to+\infty}\frac{(\sqrt{n^2+3n}-n)(\sqrt{n^2+3n}+n)}{\sqrt{n^2+3n}+n} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{n^2+3n-n^2}{\sqrt{n^2+3n}+n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{3n}{n\left(\sqrt{1+\frac{3}{n}}+1\right)} = \lim_{n\to+\infty}\frac{3}{\sqrt{1+\frac{3}{n}}+1} = \frac{3}{2},$$

јер $\frac{3}{n}\to 0$. (Ово је био низ чији је општи члан облика $\infty-\infty$.)

в) $$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2}{n^3} =$$

*) Често пишемо симболично: $\frac{1}{\infty}=0$ или $\frac{1}{0}=\infty$.

$= \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n(n-1)(2n-1)}{6n^3} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n^2-3n+1}{6n^2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2(2-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2})}{6n^2} = \dfrac{1}{3}.$ (Овде a_n, кад $n \to +\infty$, представља збир бесконачно много сабирака, од којих сваки тежи нули, тј. има облик $0 \cdot \infty$. Збир у бројиоцу израчунали смо као у *примеру* 35.)

г) Можемо трансформисати a_n, на следећи начин: $a_n = $ $= \dfrac{2-1}{1\cdot 2} + \dfrac{3-2}{2\cdot 3} + \cdots + \dfrac{(n+1)-n}{n\cdot(n+1)} = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \cdots + \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1} =$ $= 1 - \dfrac{1}{n+1}$, јер се сви остали сабирци пониште. Према томе: $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right) = 1$, јер $\dfrac{1}{n+1} \to 0$. (Могли смо користити резултат *задатка* 215 *б*), по којем је $a_n = \dfrac{n}{n+1}$, итд.)

д) Ако је $b = 1$, онда је очигледно $b^n = 1$. Размотрићемо случајеве кад је $b > 1$ и $0 < b < 1$.

Ако је $b > 1$, тада можемо написати: $b = 1 + h,\ h > 0$. Тада је према Бернулијевој неједнакости (*задатак* 214): $b^n = (1+h)^n > 1 + nh \to +\infty$.

Ако је $0 < b < 1$, можемо узети: $b = \dfrac{1}{a}$, где је $a > 1$. Тада је $\lim\limits_{n\to+\infty} b^n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{a^n} = \dfrac{1}{+\infty} = 0$. (Видели смо у претходном случају да због $a > 1$ важи: $a^n \to +\infty$.) ♠

Слично последњем примеру, може се доказати да

(82) $$\boxed{|q| < 1 \Rightarrow q^n \to 0, \quad \text{кад} \quad n \to +\infty}$$

На граничне вредности низова могу се применити основне рачунске операције, што се релативно лако доказује: $\lim\limits_{n\to+\infty} (a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$; $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n \cdot b_n = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to+\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to+\infty} b_n}$, ако лимеси на десној страни једнакости постоје и у последњем случају је $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n \neq 0$.

Доста сложеније је доказати да операција "лимес" може да "уђе" под знак функције, нпр. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin a_n = \sin \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

Корисно је знати и следеће две теореме.

(*а*) *Ако за низове* a_n, b_n, c_n *важи* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} c_n = a$ *и постоји природан број* n_0, *такав да за* $n > n_0$ *важи* $a_n \leq b_n \leq c_n$, *тада је* $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = a$.

(б) Ако је низ a_n монотон и ограничен онда је a_n и конвергентан, тј. постоји a, тако да је $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$.

Пример 39. Израчунати граничне вредности низова:

а) $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}$; *б)* $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ – број e.

Решење. *а)* У изразу за a_n је први сабирак највећи (са најмањим имениоцем), а последњи, n-ти сабирак, је најмањи. Због тога је $n \cdot \dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}} \le a_n \le n \cdot \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}$, тј. $\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}} \le a_n \le \dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}$. Међутим, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}} = 1$, а слично је и $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}} = 1$, па је по теореми (*а*): $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 1$.

б) Користећи Бернулијеву неједнакост доказаћемо да $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, тј. $a_{n+1} > a_n$, што значи да је низ a_n монотоно растући:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n} = \frac{\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}\cdot\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}} =$$

$$= \left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}\cdot\frac{n+1}{n} > \left(1-(n+1)\cdot\frac{1}{(n+1)^2}\right)\cdot\frac{n+1}{n} = 1.$$

Уочимо низ $b_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\cdot\left(1+\dfrac{1}{n}\right) > a_n$. Видимо да је:

$$\frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\dfrac{1}{n-1}\right)^n} = \frac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\cdot\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}{\left(1+\dfrac{1}{n-1}\right)^n} = \frac{1}{\left(\dfrac{1+\dfrac{1}{n-1}}{1+\dfrac{1}{n}}\right)^n}\cdot\frac{n+1}{n} =$$

$= \dfrac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n^2-1}\right)^n}\cdot\dfrac{n+1}{n}$. Како је, према Бернулијевој неједнакости: $\left(1+\dfrac{1}{n^2-1}\right)^n > 1 + n\cdot\dfrac{1}{n^2-1}$, то је $\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n^2-1}\right)^n} < \dfrac{1}{1+\dfrac{n}{n^2-1}}$, па је

$$\frac{b_n}{b_{n-1}} < \frac{1}{1+\dfrac{n}{n^2-1}}\cdot\frac{n+1}{n} = \frac{n^3-n^2-n-1}{n^3-n^2-n} = 1-\frac{1}{n^3-n^2-n} < 1,$$ одакле следи да је $b_n < b_{n-1}$, што значи да низ b_n опада.

следи да је $b_n < b_{n-1}$, што значи да низ b_n опада.

Сада имамо $a_1 = 2 < a_n < b_n < 4 = b_1$, па је низ a_n ограничен. Пошто је и монотон, по теореми (*b*) низ a_n је конвергентан, па постоји $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$. Ова гранична вредност је значајна и означава се са e:

(83) $$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e} \quad (\text{број } e)$$

Број e је ирационалан и $e = 2,718\cdots$ ♠

У следећој глави број e ћемо користити као основу тзв. природног логаритма. Писаћемо: $\ln x = \log_e x$.

Размотрићемо још два једноставна низа.

Нека су a_1 и d, $d \neq 0$, дати бројеви, помоћу којих формирамо низ чији чланови испуњавају захтев: $a_n = a_{n-1} + d$:

$a_1,\ a_1 + d,\ a_1 + 2d,\ \ldots,\ a_1 + (n-1)d,\ \ldots$

Овакав низ се назива **аритметички низ** (или *аритметичка прогресија*). Његов *општи члан* је, као што се види:

(84) $$\boxed{a_n = a_1 + (n-1)d}$$

Одмах можемо уочити основну особину низа, по којој је разлика било која два узастопна члана једнака d. Стога број d називамо *разликом* (или диференцијом) аритметичког низа. На основу овога долазимо до особине која карактерише три узастопна члана:

(85) $$\boxed{2a_k = a_{k-1} + a_{k+1}}$$

(из $a_k - a_{k-1} = a_{k+1} - a_k$, добијамо горњу једнакост), што значи да је средњи члан аритметичка средина својих суседних чланова.

Најједноставнији аритметички низ је низ природних бројева: $1,\ 2,\ \ldots,\ (n-1),\ n,\ \ldots$, коме је $a_1 = 1$ и $d = 1$.

Нађимо збир n природних бројева: $1,\ 2,\ \ldots,\ n-1,\ n$.

$S = 1 + 2 + \cdots + (n-1) + n = (1+n) + (2 + (n-1)) + (3 + (n-2)) + \cdots =$
$= \frac{n}{2}(n+1) = \frac{n(n+1)}{2}.$

(Збир првог и последњег члана је једнак збиру другог и претпоследњег, итд.)

Овај збир можемо искористити за налажење збира n чланова било којег аритметичког низа:

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \cdots + (a_1 + (n-1)d) =$
$= na_1 + d(1 + 2 + \cdots + (n-1)) = na_1 + \frac{(n-1)\cdot n}{2}d = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$. Дакле:

(86) $$\boxed{S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)} \quad \text{или} \quad \boxed{S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)}$$

(збир аритметичког низа)

(јер је $2a_1 + (n-1)d = a_1 + a_1 + (n-1)d = a_1 + a_n$).

Пример 40. Између -2 и 46 уметнути 15 бројева, тако да сви заједно формирају аритметички низ. Колики је збир ових 17 бројева?

Решење. Ово је проблем тзв. *интерполације* аритметичког низа. Решићемо га тако што ћемо сматрати да је $a_1 = -2$ и $a_{17} = 46$, па ћемо израчунати d, користећи се формулом (84): $a_{17} = a_1 + 16d$, односно $46 = -2 + 16d$. Одавде је $d = 3$. Значи, треба уметнути бројеве: 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, 31, 34, 37, 40, 43. Њихов збир је $S_{17} = \frac{17}{2}(-2+46) = 374$. ♠

Пример 41. За које вредности x бројеви $\log 2$, $\log(2^x - 1)$ и $\log(2^x + 3)$ представљају у датом поретку три узастопна члана аритметичког низа?

Решење. Према особини (85) је $2\log(2^x - 1) = \log 2 + \log(2^x + 3)$. Одавде је $\log(2^x - 1)^2 = \log 2(2^x + 3)$, односно $(2^x - 1)^2 = 2(2^x + 3)$. Ставимо $2^x = t$ и имамо једначину $t^2 - 4t - 5 = 0$, чија су решења $t = 5$ и $t = -1$. Како је $2^x > 0$, могуће је само $t = 5$, тј. $2^x = 5$. Дакле $x = \log_2 5$. ♠

Размотримо сада следећи низ. Нека су дати бројеви b_1 и q, $b_1 q \neq 0$ и $q \neq 1$, од којих формирамо низ по правилу: $b_n = q \cdot b_{n-1}$. Добићемо: $b_1,\ b_1 q,\ b_1 q^2,\ \ldots,\ b_1 q^{n-1},\ \ldots$

Овакав низ називамо **геометријским низом** (или *геометријском прогресијом*). Његов *општи члан* је

$$\boxed{b_n = b_1 \cdot q^{n-1}} \tag{87}$$

Према начину формирања низа видимо да је количник два узастопна члана једнак броју q. Зато се q назива *количником геометријског низа*. На основу тога добијамо везу између три узастопна члана геометријског низа. Из $\frac{b_k}{b_{k-1}} = \frac{b_{k+1}}{b_k}$ следи:

$$\boxed{{b_k}^2 = b_{k-1} \cdot b_{k+1}} \tag{88}$$

што значи да је средњи члан геометријска средина својих суседних чланова.

Израчунајмо збир првих n чланова геометријског низа: $S_n = b_1 + b_1 q + b_1 q^2 + \cdots + b_1 q^{n-1}$

Пошто је $q \neq 1$, можемо леву и десну страну ове једнакости помножити са $(1-q)$. Добићемо:

$$S_n(1-q) = b_1(1-q)(1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1})$$

Како производ две заграде на десној страни једнакости даје бином $(1-q^n)$, то ће тражени збир бити:

$$\boxed{S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q},\ q \neq 1} \quad \text{(збир геометријског низа)} \tag{89}$$

О овом збиру има смисла расправљати ако је то коначан број. Слично резонујемо и за случај збира аритметичког низа. Због тога смо се у оба случаја ограничили на збир n чланова низа. Међутим, као што ћемо видети, код геометријског низа, ако је $|q| < 1$, има смисла разговарати и о збиру бесконачно много чланова, тј. о "збиру свих чланова низа".

Нека је $b_1,\ b_1q,\ b_1q^2,\ \ldots,\ b_1q^{n-1},\ \ldots$ геометријски низ коме је количник $|q| < 1$. Збир првих n чланова је дат формулом (89). Да бисмо нашли збир свих чланова низа (за све природне бројеве n), мораћемо се послужити лимесом. Учинићемо то овако:

$b_1+b_1q+b_1q^2+\cdots+b_1q^{n-1}+\cdots = \lim\limits_{n\to+\infty}(b_1+b_1q+b_1q^2+\cdots+b_1q^{n-1}) =$
$= \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{b_1(1-q^n)}{1-q} = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{b_1}{1-q}(1-q^n) = \dfrac{b_1}{1-q}$, јер, према (82), ако је $|q| < 1$ важи: $q^n \to 0$, кад $n \to +\infty$. Дакле:

$$\boxed{|q| < 1 \Rightarrow S = \frac{b_1}{1-q}} \tag{90}$$

(збир бесконачног опадајућег геометријског низа)

Решићемо још неколико примера.

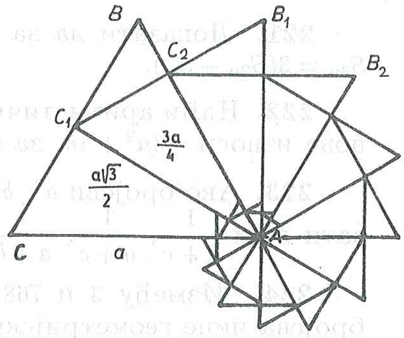
Пример 42. Колико чланова има геометријски низ, ако је збир првог и петог члана 51, збир другог и шестог 102, а збир свих чланова 3069?

Решење. Услови су: $b_1 + b_5 = 51$ и $b_2 + b_6 = 102$, односно: $b_1(1+q^4) = 51$ и $b_1q(1+q^4) = 102$. Одавде добијамо $q = 2$, па је $b_1 = 3$. Из $S_n = \dfrac{b_1(1-q^n)}{1-q}$, добијамо: $1024 = 2^n$, одакле је $n = 10$. ♠

Пример 43. Први члан аритметичког низа је 24. Написати првих десет чланова овог низа, ако први, пети и једанаести члан одређују геометријску прогресију.

Решење. По услову бројеви 24, $24+4d$ и $24+10d$ чине геометријску прогресију, па је, према (88): $(24+4d)^2 = 24(24+10d)$. Одавде добијамо једначину: $16d^2 - 48d = 0$, која даје решење $d = 3$. Тражени бројеви су: 24, 27, 30, 33, 36, 39, 42, 45, 48, 51. Количник геометријске прогресије је $q = \dfrac{3}{2}$. ♠

Пример 44. Над висином једнакостраничног троугла ABC странице a, конструисан је нови једнакостраничан троугао (чија је страница висина првобитног троугла), па је над висином новог троугла конструисан следећи једнакостраничан троугао, итд, видети сл.73. Израчунати збир обима и збир површина свих овако конструисаних једнакостраничних троуглова (њих бесконачно много).



Сл. 73

Решење. Странице ових троуглова чине геометријски низ. Дати троугао ABC има страницу $b_1 = a$. Следећи троугао AB_1C_1 има страницу $b_2 = AC_1 = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, иза њега је троугао AB_2C_2 са страницом $b_3 = b_2\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3a}{4}$, итд. Обими свих троуглова дају збир:

$$O = O_1 + O_2 + O_3 + \cdots = 3a\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{4} + \cdots\right)$$

Збир у загради нађемо по формули (90), за $q = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, па је:

$$O = \frac{3a}{1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{6a}{2 - \sqrt{3}} = 6a(2 + \sqrt{3}).$$

Збир површина свих троуглова је: $P = P_1 + P_2 + P_3 + \cdots =$

$$= a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4} + \left(\frac{3a}{4}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4} + \cdots = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}\left(1 + \frac{3}{4} + \frac{9}{16} + \cdots\right).$$

На збир у загради применимо формулу (90), $q = \dfrac{3}{4}$, и добијемо:

$$P = a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{3}{4}} = a^2\sqrt{3}. \spadesuit$$

ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

218. Решити једначину: $3 + 10 + 17 + \cdots + x = 345$.

219. У једном аритметичком низу први члан је 11 и седми 35. Његов четврти члан је једнак четвртом члану другог аритметичког низа. Први и последњи члан овог другог низа су 38 и 13. Колико чланова има други низ?

220. Ако бројеви a, b и c чине аритметичку прогресију, доказати да то важи и за: $\dfrac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}$, $\dfrac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}$, $\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$.

221. Доказати да за сваки аритметички низ важи једнакост: $S_{3n} = 3(S_{2n} - S_n)$.

222. Наћи аритметичку прогресију код које збир првих n чланова износи $3n^2 + 4n$, за сваки n.

223. Ако бројеви a^2, b^2, c^2 чине аритметичку прогресију, доказати да и $\frac{1}{b+c}$, $\frac{1}{a+c}$, $\frac{1}{a+b}$ чине аритметичку прогресију.

224. Између 3 и 768 уметнути три броја, тако да свих пет бројева чине геометријску прогресију.

225. На дужи $AB = 195$ cm наћи тачке C и D, тако да дужине добијених делова чине геометријски низ и $BD = AC + 120$ cm.

226. За коју вредност броја a је гранична вредност збира: $2a + a\sqrt{2} + a + \cdots$ једнака 8?

227. Колики је збир n бројева низа: $1, 11, 111, \ldots$?

228. Ако су бројеви a, b и c истовремено пети, седамнаести и тридесетседми члан једне аритметичке и једне геометријске прогресије, доказати да је: $a^{b-c} \cdot b^{c-a} \cdot c^{a-b} = 1$.

229. Одредити четири броја, тако да прва три одређују геометријски низ, а последња три аритметички низ и притом је збир првог и последњег 14, а збир остала два је 12.

230. Одредити граничну вредност израза:

$$D = \sqrt{3\sqrt{5\sqrt{3\sqrt{5\sqrt{3\cdots}}}}}$$

231. У круг полупречника r је уписан квадрат, а онда у тај квадрат је уписан круг. Затим је поново у добијени круг уписан квадрат, па у квадрат круг, и тако до бесконачности. Израчунати границу којој теже обими свих квадрата и површине свих кругова.

232. Доказати да за сваку аритметичку прогресију a_1, a_2, a_3, $\ldots$, a_n важи идентичност:

$$S = \frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{a_{n-1}} + \sqrt{a_n}} = \frac{n-1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_n}}.$$

233. Неки чланови аритметичких прогресија 17, 21, 25, ... и 16, 21, 26, ... су једнаки. Наћи збир првих 100 једнаких чланова ових прогресија.

234. Наћи збир n разломака: $\frac{3}{2} + \frac{7}{4} + \cdots$, ако бројиоци разломака чине аритметичку, а имениоци геометријску прогресију.

ЧЕТВРТА ГЛАВА

У овој глави обрађујемо градиво *IV* разреда. За разлику од претходних глава, овде ће теорије бити мало. Осим тога, ВЕРОВАТНОЋА и СТАТИСТИКА неће се уопште обрађивати. Разлози за ове "недостатке" могу се наслутити. Претпоставља се да сви они који се спремају за наредне испите, у довољној мери владају актуелним градивом, наученим у текућој школској години. Сем тога, на располагању им је школски уџбеник ако је потребно да се подсете на неко теоријско питање. Изостављање ВЕРОВАТНОЋЕ и СТАТИСТИКЕ има мало дубље разлоге. Према мишљењу многих стручњака, а тако мисли и аутор овог ПРИРУЧНИКА, обрада ових тема, са онолико часова и са оним насловима, како је предвиђено ПРОГРАМОМ, представља промашај оних који су састављали овај ПРОГРАМ и оних који су такав ПРОГРАМ озваничили. Слично се може рећи и за комплетан ПРОГРАМ *IV* разреда. Заправо, све што се у текућој години учи јесу озбиљне теме, које се у предвиђеном обиму не могу коректно обрадити. Осим тога, онима који у даљем образовању неће изучавати математику, градиво *IV* разреда неће користити, а остали ће, у оквиру математике на факултету све то радити испочетка. Ни ови други неће имати много користи од чињеница научених у *IV* разреду. Напротив, могу имати проблема ако сматрају да ту материју довољно познају. Због тога на ПРИЈЕМНИМ и КЛАСИФИКАЦИОНИМ испитима за упис на факултете дају се задаци углавном из градива претходна три разреда средње школе.

То су разлози због којих се наведено градиво обрађује углавном кроз решене *примере* и *задатке за вежбање* (такође са решењима - у ШЕСТОЈ ГЛАВИ).

4.1 КОМБИНАТОРИКА

Овде ћемо се забавити следећим питањима:

(а) Од елемената датог коначног скупа изабрати све групе елемената чији је састав и распоред одређен датим условима.

(б) Израчунати колико таквих група има (пребројати их).

Пример 1. Дат је скуп цифара $S = \{1,\ 2,\ 3\}$. Поставимо неколико проблема у вези са његовим елементима.

Користећи се елементима скупа S написати и пребројати:

1^o Све троцифрене бројеве са различитим цифрама.

2^o Све двоцифрене бројеве са различитим цифрама.

3^o Све парове цифара.

4^o Све четвороцифрене бројеве који имају две парне и две различите непарне цифре.

5^o Све четвороцифрене бројеве (могу се понављати цифре).

Решење. 1^o Најлакше ћемо тражене бројеве исписати ако их слажемо по величини. То су: 123, 132, 213, 231, 312, 321. Има их укупно 6.

2^o Тражени бројеви су: 12, 21, 13, 31, 23, 32. И њих има 6.

3^o Имамо три пара: 1, 2, затим 1, 3 и 2, 3.

4^o Тражени бројеви имају цифре 1, 2, 2, 3. То су: 1223, 1232, 1322, 2123, 2132, 2213, 2231, 2312, 2321, 3122 ,3212, 3221 и има их 12.

5^o Нећемо исписивати све бројеве, само ћемо их пребројати. За сваку од четири цифре имамо по три кандидата. Тако постоје три броја са различитим цифрама јединица. Цифру десетица такође можемо изабрати на три начина, а за сваки такав случај имамо три различите цифре јединица, па две цифре можемо изабрати на девет начина ($3 \cdot 3$). Слично резонујемо код избора цифре стотина и код избора цифре хиљада. Тако закључујемо да се цифрама 1, 2 и 3 може написати $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4 = 81$ број траженог облика. ♠

У оквиру наведеног примера срели смо се са неким појмовима из комбинаторике. Проучимо их детаљније.

Нека је дат скуп $P = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ са n *различитих* елемената. Свака уређена n-торка елемената скупа P назива се **пермутацијом** елемената $a_1, a_2, \ldots, a_n$, које ћемо једноставно записивати без заграда и без запете, нпр. $a_{i1}a_{i2}\ldots a_{in}$. Формирање пермутација вршимо као у случају 1^o наведеног *примера.* (Ако се пермутују слова, онда је редослед елемената одређен лексикографским поретком слова.)

Ради пребројавања пермутација, поступићемо на следећи начин. Нека су $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ученици и нека је дато n нумерисаних столица. Свакој пермутацији елемената скупа P одговара један распоред ученика на нумерисаним столицама. Најпре попунимо прву столицу. То можемо учинити на n начина. Када један ученик седне на прву столицу, за другу преостаје $(n-1)$ кандидат, па прва два седишта можемо попунити на $n \cdot (n-1)$ начина. Сада за трећу столицу има $(n-2)$ кандидата итд. Попуњавајући следећа седишта, сваки пут преостаје по један кандидат мање. Коначно, за последњу столицу остане само један кандидат. Тако добијемо да је укупан број пермутација различитих елемената $a_1, a_2, \ldots, a_n$ једнак: $P(n) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1$, што означавамо са:

$$\boxed{P(n) = n!} \quad \text{(број пермутација без понављања)} \quad (1)$$

За ове пермутације кажемо да су *без понављања*, зато што су сви елементи различити. Ако су неки од елемената скупа P једнаки међу собом, тада размештањем свих елемената добијамо **пермутације с понављањем**. У наведеном *примеру* у случају 4^o имамо пермутације од 4 елемента, од којих се један појављује два пута. Њих можемо овако пребројати. Нека су цифре 1, 2, 2, 3 означене словима: a, b_1, b_2, c. Према формули (1) ови елементи имају $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ пермутације. Међутим, сваки међусобни распоред елемената b_1 и b_2 је један исти распоред, тј. свеједно је да ли имамо b_1b_2 или b_2b_1, јер су то две двојке. Стога је број *различитих распореда* у ствари упола мањи и износи $\dfrac{24}{2} = 12$ (што се слаже са изложеним решењем *примера* 1).

Уопште, ако се од n пермутованих елемената један понавља α пута, тада се ових α једнаких елемената појављује $\alpha!$ пута у једнаким међусобним распоредима, па је број *различитих* пермутација датих n елемената једнак $\dfrac{n!}{\alpha!}$. Ако се понављају још неки елементи, рецимо β пута, тада се укупан број пермутација дели и са $\beta!$, итд. Коначно, можемо закључити:

$$\boxed{P_{\alpha,\beta,\cdots,\gamma}(n) = \frac{n!}{\alpha! \cdot \beta! \cdots \gamma!}} \quad \text{(број пермутација с понављањем)} \quad (2)$$

Пример 2. Колико се пермутација може начинити од речи МАТЕМАТИКА?

Решење. Од 10 елемената М се појављује 2 пута, А 3 пута и Т 2 пута, па је $P_{2,3,2}(10) = \dfrac{10!}{2! \cdot 3! \cdot 2!} = 151200$ пермутација. ♠

Пример 3. Узимајући реч МЕТАР за почетни положај, пермутовањем добијамо реч ТРЕМА. Која је то пермутација по реду?

Решење. Нека је МЕТАР почетна пермутација, којој одговара број 12345. Стављајући одговарајуће цифре уместо слова у речи ТРЕМА (тј. $M = 1$, $E = 2$, итд.), добићемо број 35214. Бројимо на следећи начин.

Са 1 почиње $4! = 24$ пермутација (пермутујемо 2, 3, 4, 5).
Са 2 почиње $4! = 24$ пермутација (пермутујемо 1, 3, 4, 5).
Сада је на првом месту цифра 3.
Са 31 почиње $3! = 6$ пермутација (пермутујемо 2, 4, 5).

Са 32 почиње $3! = 6$ пермутација.
Са 34 почиње $3! = 6$ пермутација.
Сада је на другом месту цифра 5.
Са 351 почиње $2! = 2$ пермутације (пермутујемо 2 и 4).

Сада је на трећем месту цифра 2, тј. имамо 352. Пермутација 35214 је прва следећа. Како смо до сада имали $24+24+6+6+6+2 = 78$ пермутација, реч ТРЕМА је 79-а пермутација од речи МЕТАР. ♠

Вратимо се поново скупу $P = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Свака уређена k-торка елемената скупа P, $k \leq n$, назива се *варијација k-те класе* елемената $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Специјално, за $k = n$, то су пермутације које смо проучили. Ради пребројавања варијација од n елемената, k-те класе, у ознаци $V_k(n)$,*) уочићемо k нумерисаних столица и на њих ћемо распоредити n ученика. Прву столицу можемо попунити на n различитих начина. Кад попунимо прву, за другу столицу преостаје $(n-1)$ ученик, па се друга столица попуњава на $(n-1)$ начин. Даљим пребројавањем, као код пермутација, добијемо:

(3) $$\boxed{V_k(n) = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}$$

(број варијација без понављања)

Ово су **варијације без понављања**, због тога што су свих k елемената различити међу собом.

Ако нас, нпр. интересује колико има троцифрених бројева са непарним цифрама, тада за сваку цифру имамо по 5 кандидата (у сваку од "три столице" можемо поставити било коју од цифара 1, 3, 5, 7, 9). Оваквих бројева ће, према томе бити: $5 \cdot 5 \cdot 5$. Ово су *варијације с понављањем*. Тако, од n различитих елемената, описаним пребројавањем налазимо варијације с понављањем k-те класе:

(4) $$\boxed{\overline{V}_k(n) = n^k}$$ (број варијација с понављањем)

Још једном, уочимо скуп $P = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ са различитим елементима. Сваки непразан подскуп скупа P је једна **комбинација без понављања** од елемената $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Ако овај подскуп има k елемената, онда је то *комбинација без понављања од n елемената k-те класе*, у ознаци $C_k(n)$. Ових комбинација има $k!$ пута мање него одговарајућих варијација, јер распоред елемената у подскупу није битан. Према томе:

(5) $$\boxed{C_k(n) = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!}}$$

(број комбинација без понављања)

*) У уџбенику за *IV* разред гимназије (аутор Ј.Д.Кечкић) користи се ознака V_n^k. Слично, комбинације су означене са C_n^k.

На пример, број комбинација треће класе од непарних цифара је $\dfrac{5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3}=10$. На овом примеру објаснићемо зашто се број варијација дели са $k!$. Нека је 135 једна комбинација треће класе од цифара 1, 3, 5, 7, 9. Пермутовањем добијамо $3!=6$ варијација, које коначно представљају исти подскуп скупа 1, 3, 5, 7, 9, што значи да оваквих 6 варијација представља једну комбинацију.

Ако разломак на десној страни једнакости (5) проширимо са $(n-k)\cdot(n-k-1)\cdots 2\cdot 1$, добићемо:

$$\boxed{C_k(n)=\frac{n!}{k!(n-k)!}} \tag{6}$$

Последња формула показује да је број комбинација од n елемената k-те класе једнак броју пермутација с понављањем:

$$\boxed{C_k(n)=P_{k,n-k}(n)} \tag{7}$$

Ови бројеви играју важну улогу код степеновања бинома, па се зато називају *биномним коефицијентима.* Означавамо их са $\dbinom{n}{k}$ и читамо: *"ен над ка"*:

$$\boxed{C_k(n)=\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}} \tag{8}$$

(биномни коефицијент)

где је $n\in N$, а $k=0$ или $k\in N$.

Ако се у комбинацијама k-те класе дозволи понављање елемената (могу и сви бити једнаки), тада имамо **комбинације с понављањем**. Не улазећи у образложења, наводимо следећу формулу:

$$\boxed{\overline{C}_k(n)=\binom{n+k-1}{k}} \quad \text{(број комбинација с понављањем)} \tag{9}$$

Позабавимо се особинама биномних коефицијената.

Пример 4. Доказати особине биномних коефицијената:

а) $\dbinom{n}{0}=\dbinom{n}{n}=1$; *б)* $\dbinom{n}{k}=\dbinom{n}{n-k}$; *в)* За $0\le k\le n$ је $\dbinom{n}{k}\in N$;

г) За $k>n$ је $\dbinom{n}{k}=0$; *д)* $\dbinom{n}{k}+\dbinom{n}{k-1}=\dbinom{n+1}{k}$.

Доказ. *а)* Према (8) је $\dbinom{n}{0}=\dfrac{n!}{0!\cdot n!}=1$ и $\dbinom{n}{n}=\dfrac{n!}{n!\cdot 0!}=1$.

б) Према (8) је $\dbinom{n}{n-k}=\dfrac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!}=\dfrac{n!}{(n-k)!\cdot k!}=\dbinom{n}{k}$.

в) Имамо: $\binom{n}{k} = \dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots k}$. Доказаћемо да је бројилац могуће скратити, редом са k, $(k-1)$, ...3, 2. Како је бројилац производ k узастопних природних бројева, то ови бројеви имају различите остатке дељења са k. Ових остатака има тачно k, то су: 1, 2, 3, ..., $k-1$, 0, па је један од ових бројева дељив са k. Слично закључимо и за остале бројеве: 2, 3, ..., $k-1$. Према томе, можемо скратити цео именилац.

г) У изразу $\binom{n}{k} = \dfrac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots k}$, бројилац је производ k узастопних целих бројева, од којих је један број нула, јер је $n-k<0$, а најмањи је $(n-k+1)$. Због тога је бројилац, а самим тим и разломак, једнак нули.

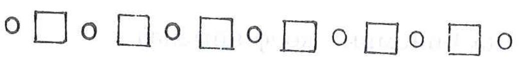
д) $\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}+\dfrac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} =$

$$= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{n-k+1}\right) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\cdot\frac{n-k+1+k}{k(n-k+1)} =$$

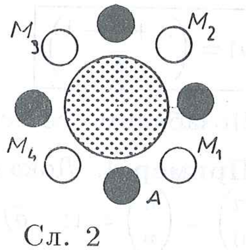
$$= \frac{n!(n+1)}{(k-1)!\cdot k\cdot(n-k)!(n-k+1)} = \frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!} = \binom{n+1}{k} \text{ према (8).}$$ ♠

Пример 5. На полици се налази 10 књига. На колико је начина могуће узети са полице 4 књиге, тако да никоје две од изабраних не буду на полици једна до друге? (Није дозвољено мењати првобитни распоред књига на полици.)

Решење. Кад изаберемо 4 књиге, на полици ће остати 6 књига, сл. 1. Извучене књиге могу бити на једном од 7 места, означених на сл. 1 празним кружићима. Пошто нема размештања (пермутовања), број могућих избора је $C_4(7) = \dfrac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 35$. ♠



Сл. 1



Сл. 2

Пример 6. На колико се начина могу распоредити 4 жене и 4 мушкарца на 8 седишта око округлог стола, тако да два мушкарца не седе један до другог?

Решење. Два распореда *за округлим столом* су различита, ако бар једна особа има бар једног промењеног суседа. У нашем примеру очигледно жене и мушкарци седе наизменично. Претпоставимо да је жена A, сл. 2, села на једно утврђено место. Тада се остале могу распоредити на $3!$ начина. Четири мушкарца се на четири слободна места могу распоредити на $4!$ начина. Укупан број распореда је $3! \cdot 4! = 144$. ♠

Пример 7. Од 10 срећака 3 сигурно доносе добитак. Катарина је купила 3 срећке. Колико постоји различитих могућности за куповину ових срећака, тако да Катарина има бар један добитак?

Решење. Од десет срећака можемо изабрати 3 на $\binom{10}{3}$ начина. Од тих 10 немају добитак 7. Тројку која не добија можемо изабрати на $\binom{7}{3}$ начина. Катарина има сигуран добитак у једној од $\binom{10}{3} - \binom{7}{3} = 305$ комбинација. ♠

У ПРВОЈ ГЛАВИ, *одељак* 1.4 говорили смо о неким степенима бинома. Тако смо видели да је:

$$(a+b)^1 = \binom{1}{0}a + \binom{1}{0}b \qquad (a+b)^2 = \binom{2}{0}a^2 + \binom{2}{1}ab + \binom{2}{2}b^2$$

$$(a+b)^3 = \binom{3}{0}a^3 + \binom{3}{1}a^2b + \binom{3}{2}ab^2 + \binom{3}{3}b^3$$

Поступајући слично, такође добијамо:

$$(a+b)^4 = \binom{4}{0}a^4 + \binom{4}{1}a^3b + \binom{4}{2}a^2b^2 + \binom{4}{3}ab^3 + \binom{4}{4}b^4.$$

Користећи се математичком индукцијом, можемо доказати да слично важи за $(a+b)^n$. Претпоставимо да важи $f(n)$, тј.:

$$\boxed{(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n} \tag{10}$$

Ако докажемо да $f(n) \Rightarrow f(n+1)$, онда формула (10) важи за сваки природан број n.

Помножимо једнакост (10) са $(a+b)$. Добићемо:$(a+b)^{n+1} =$
$= (a+b)\left(\binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n\right) =$
$= \binom{n}{0}a^{n+1} + \left(\binom{n}{0} + \binom{n}{1}\right)a^nb + \left(\binom{n}{1} + \binom{n}{2}\right)a^{n-1}b^2 + \cdots + \left(\binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}\right)ab^n +$
$+\binom{n}{n}b^{n+1}$

На основу особина биномних коефицијената, доказаних у *примеру* 4, закључујемо следеће:

$\binom{n}{0} = 1$ за $\forall n \in N$, па је и $\binom{n+1}{0} = 1 = \binom{n}{0}$.

$\binom{n}{n} = 1$ за $\forall n \in N$, па је и $\binom{n+1}{n+1} = 1 = \binom{n}{n}$.

Примењујући особину из *примера* 4 *д)* на збирове у заградама, добијамо:

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}=\binom{n+1}{1}, \binom{n}{1}+\binom{n}{2}=\binom{n+1}{2}, \dots, \binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}=\binom{n+1}{n}.$$

Када све ово заменимо, добијамо:

$$(a+b)^{n+1} = \binom{n+1}{0}a^{n+1}+\binom{n+1}{1}a^n b+\binom{n+1}{2}a^{n-1}b^2+\dots+\binom{n+1}{n}ab^n+ \\ +\binom{n+1}{n+1}b^{n+1},$$

што потврђује да $f(n) \Rightarrow f(n+1)$. Дакле, формула (10), позната под именом **биномна формула** (*Њутнова формула*), важи за $\forall n \in N$.

Приметимо да $(k+1)$-ви члан има облик:

$$\boxed{B_{k+1} = \binom{n}{k}a^{n-k}b^k} \tag{11}$$

Биномна формула се користи за степеновање сваког бинома, али се користи и у доказивању многих особина биномних коефицијената. Осим тога, у комбинацији са Муавровом формулом за комплексне бројеве, можемо добити многе идентитете у вези са тригонометријским функцијама.

Пример 8. Доказати идентитете:

а) $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\dots+\binom{n}{n}=2^n$;

б) $\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\dots=\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\cdots$ (Последњи сабирци са једне и друге стране једнакости су $\binom{n}{n-1}$ и $\binom{n}{n}$.);

в) $\binom{2n}{n}=\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\binom{n}{2}^2+\dots+\binom{n}{n}^2$.

Доказ. *а)* Ако у формули (10) ставимо $a=1$ и $b=1$, тада због $1^k=1$, формула прелази у тражену идентичност.

б) У формули (10) ставимо: $a=1$ и $b=-1$. Тада због $1^k=1$, $(-1)^{2k}=1, (-1)^{2k-1}=-1$ и $(1-1)^n=0$, добијамо: $0=\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-$ $-\binom{n}{3}+\dots+(-1)^n\binom{n}{n}$, а одавде следи дата идентичност.

в) Приметимо најпре да је $\binom{2n}{n}$ коефицијент уз x^n у развоју $(1+x)^{2n}$. Међутим, такође је: $(1+x)^{2n} = (1+x)^n \cdot (1+x)^n =$
$= \left(\binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}x^{n-1} + \binom{n}{n}x^n\right) \cdot$
$\cdot \left(\binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}x^{n-1} + \binom{n}{n}x^n\right).$

Множећи ове две заграде, сваки члан са сваким, добићемо x^n у случајевима: први из леве заграде са последњим из десне заграде, затим други из леве са претпоследњим из десне заграде, итд. Изједначујући коефицијент уз x^n из $(1+x)^{2n}$ и збир коефицијената уз x^n са десне стране једнакости, добијамо:

$$\binom{2n}{n} = \binom{n}{0}\cdot\binom{n}{n} + \binom{n}{1}\cdot\binom{n}{n-1} + \binom{n}{2}\cdot\binom{n}{n-2} + \cdots + \binom{n}{n}\cdot\binom{n}{0}.$$

Но, према *примеру* 4: $\binom{n}{0} = \binom{n}{n}$, $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1}$, $\binom{n}{2} = \binom{n}{n-2}$, итд. Сменимо то и добијамо тражену идентичност. ♠

Пример 9. Колико рационалних чланова има у развоју:

$$(\sqrt[3]{2} + \sqrt[4]{3})^{100}.$$

Решење. Према формули (11) је $B_{k+1} = \binom{100}{k}\left(\sqrt[3]{2}\right)^{100-k} \cdot \left(\sqrt[4]{3}\right)^k =$ $= \binom{100}{k} \cdot 2^{\frac{100-k}{3}} \cdot 3^{\frac{k}{4}} = \binom{100}{k} \cdot 2^{33} \cdot 2^{\frac{1-k}{3}} \cdot 3^{\frac{k}{4}}$. Очигледно, рационални ће бити они чланови за које су бројеви $\frac{1-k}{3}$ и $\frac{k}{4}$, $0 \le k \le 100$ цели. Од бројева: 0, 4, 8, ..., 100 изабраћемо оне, за које је $1-k$ дељиво са 3. То су бројеви: 4, 16, 28, 40, 52, 64, 76, 88, 100. Има их 9. ♠

Пример 10. У развоју $\left(\frac{1}{x} + 3x\right)^n$ наћи члан који не садржи x, знајући да је коефицијент десетог члана највећи.

Решење. Одредићемо најпре n, знајући да је B_{10} највећи коефицијент. Тада важе неједнакости: $B_{10} > B_9$ и $B_{10} > B_{11}$. У нашем случају је: $\binom{n}{9}\cdot 3^9 > \binom{n}{8}\cdot 3^8$ и $\binom{n}{9}\cdot 3^9 > \binom{n}{10}\cdot 3^{10}$. Применимо формулу (8) и добијемо: $\frac{n-8}{9}\cdot 3 > 1$ и $1 > \frac{n-9}{10}\cdot 3$.

Из прве неједнакости је $n > 11$, а из друге $n < \dfrac{37}{3}$, па је $n = 12$. Сада из $B_{k+1} = \binom{12}{k} \cdot 3^k \cdot x^{2k-12}$, добијамо да је $k = 6$. Тада је $B_7 = \binom{12}{6} \cdot 3^6 \cdot x^0 = \binom{12}{6} \cdot 3^6$. ♠

Пример 11. Изразити $\sin 6x$ и $\cos 6x$ преко $\sin x$ и $\cos x$.

Решење. Комбинујемо Муаврову и биномну формулу:

$$(\cos x + i\sin x)^6 = \binom{6}{0}\cos^6 x + \binom{6}{1}\cos^5 x \cdot i\sin x + \binom{6}{2}\cos^4 x \cdot i^2 \sin^2 x + \binom{6}{3}\cos^3 x \cdot i^3 \sin^3 x + \binom{6}{4}\cos^2 x \cdot i^4 \sin^4 x + \binom{6}{5}\cos x \cdot i^5 \sin^5 x + \binom{6}{6} i^6 \sin^6 x,$$

тј. $\cos 6x + i\sin 6x = (\cos^6 x - 15\cos^4 x \sin^2 x + 15\cos^2 x \sin^4 x - \sin^6 x) + i(6\cos^5 x \sin x - 20\cos^3 x \sin^3 x + 6\cos x \sin^5 x)$.

Сада изједначимо реалне делове леве и десне стране једнакости, а такође и имагинарне и добијамо тражене везе:

$\cos 6x = \cos^6 x - 15\sin^2 x \cos^4 x + 15\sin^4 x \cos^2 x - \sin^6 x$ и

$\sin 6x = 6\sin x \cos^5 x - 20\sin^3 x \cos^3 x + 6\sin^5 x \cos x$. ♠

Пример 12. Израчунати $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n}$.

Решење. Како је $\sqrt[n]{n} \geq 1$, то можемо написати $\sqrt[n]{n} = 1 + h_n$, где је $h_n \geq 0$. Одавде је: $n = (1 + h_n)^n$. Биномна формула даје: $n = 1 + \binom{n}{1}h_n + \binom{n}{2}{h_n}^2 + \binom{n}{3}{h_n}^3 + \cdots$ Сви сабирци су позитивни, па је: $n > \binom{n}{2}{h_n}^2 = \dfrac{n(n-1)}{2}{h_n}^2$, одакле је: $0 \leq h_n \leq \sqrt{\dfrac{2}{n-1}}$.

Кад $n \to +\infty$, тада $\dfrac{2}{n-1} \to 0$, па $h_n \to 0$. Отуда је $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. ♠

Сада се може доказати да је такође $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^k} = 1$, $k \in N$. При томе користимо особину лимеса производа.

ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

235. Колико је троуглова одређено теменима једног конвексног десетоугла?

236. Од цифара 1, 2, 3, 4, 5, 6 треба саставити све шестоцифрене бројеве, тако да цифре 1, 2, 3 буду једна до друге:
а) поређане у растући низ; *б)* у произвољном редоследу.

237. Од цифара 1 2 2 2 2 3 3 4 4 4 састављени су десетоцифрени бројеви. Колико таквих бројева почиње са: *а)* 22; *б)* 313; *в)* 1234?

238. На полици су сложене 2 плаве, 5 црвених и 3 жуте књиге, тако да су књиге исте боје корица једна до друге. На колико се начина могу распоредити ове (различите) књиге?

239. Десет различитих предмета треба поделити на три лица, и то једном 3 предмета, другом 5 предмета и трећем 2 предмета. На колико је начина могуће то учинити?

240. Правоугаоник $ABCD$, димензија 4 m пута 7 m, подељен је хоризонталним и вертикалним дужима на квадрате површина 1 m^2. На колико се разних начина може из доњег левог темена A доћи у десно горње теме C, ако је дозвољено само кретање по хоризонталним и вертикалним дужима и то "десно" или "горе"?

241. У развоју $\left(\sqrt[4]{a^2x}+\sqrt[5]{\dfrac{1}{ax^2}}\right)^n$ одредити члан који не садржи x, ако се зна да су коефицијенти петог и десетог члана једнаки.

242. Наћи рационалне чланове у развоју $\left(\sqrt[5]{3}+\sqrt[3]{2}\right)^{24}$.

243. У развоју $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^n$ коефицијент трећег члана је за 35 већи од коефицијента другог члана. Наћи онај члан који не садржи x.

244. У развоју $(3x+2)^7$ наћи члан са највећим коефицијентом.

245. У развоју $(x+y)^n$ је $B_2=240$, $B_3=720$ и $B_4=1080$. Одредити x, y и n.

4.2 РЕАЛНЕ ФУНКЦИЈЕ. ГРАНИЧНЕ ВРЕДНОСТИ.

О функцијама уопште било је говора у *одељку* 1.2. Сада ћемо се позабавити детаљнијим истраживањем особина функција, уз њихово графичко приказивање у координатном систему. Биће речи о *реалним функцијама.* То су функције којима су и *домен* и *кодомен* подскупови скупа реалних бројева, скупа R.

Постоје различита схватања појма *елементарних функција.* Ми ћемо под овим појмом подразуметавати претежно функције које не представљају композиције пресликавања. Конкретно, елементарним функцијама сматрамо следеће.

(Полином) $\quad f(x)=P_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0,\quad n\in N$

(Рационална функција) $\quad f(x)=\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)},\quad Q_n(x)\neq 0$

(Ирационална функција) $\quad f(x)=\sqrt[n]{x},\quad n\in N$

(Експоненцијална функција) $\quad f(x)=a^x,\quad a>0$ и $a\neq 1$

(Логаритамска функција) $\quad f(x) = \log_a x, \quad a > 0$ и $a \neq 1$

Затим, долазе тригонометријске и инверзне тригонометријске функције. (Видети претходну главу.)

Неелементарним сматрамо функције које настају као композиције елементарних функција, као:

$$f(x) = e^{-\sin x},\ f(x) = \sqrt{2x - \log(x^2+2)},\ f(x) = \operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}},\ \text{итд.}$$

Такође не спадају у елементарне (мада често једноставне) ни функције дефинисане специјалним формулама, као *сигнум*, односно *знаковна* функција:

$$sgn\ x = \begin{cases} 1, & \text{за } x > 0 \\ 0, & \text{за } x = 0 \\ -1, & \text{за } x < 0 \end{cases}$$

Композиције елементарних функција, као нпр. $y = f(\varphi(x))$, називамо *сложеним* или *посредним* функцијама.

Домен (област дефинисаности) елементарних функција знамо из ранијих поглавља. Користећи се тиме, одређујемо области дефинисаности за сложене функције. Ради коректног одређивања области дефинисаности, нагласићемо шта се подразумева под тврђењем "да је функција дефинисана".

> *За функцију $y = f(x)$ кажемо да је дефинисана у тачки $x = x_0$, ако се може израчунати тачно једна, реална и коначна вредност $f(x_0)$.*

У складу са овом дефиницијом наводимо случајеве када је дефинисаност сложене функције под знаком питања. Практично имамо четири таква случаја.

$1^0 \quad y = \dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ је дефинисана за $\varphi(x) \neq 0$. Тачке $x = x_i$ за које је $\varphi(x_i) = 0$ су *тачке прекида*. (Коначна тачка у којој функција није дефинисана, али је дефинисана лево или десно од ње.)

$2^0 \quad y = \sqrt[2k]{f(x)}$ је дефинисана за $f(x) \geq 0$.

$3^0 \quad y = \log(f(x))$ је дефинисана за $f(x) > 0$.

$4^0 \quad y = \arcsin(f(x))$, односно $y = \arccos(f(x))$, дефинисана је за $-1 \leq f(x) \leq 1$.

У сва четири случаја подразумева се да $f(x)$ нема ограничења, тј. да је $f(x)$ дефинисана за $\forall x \in R$. Ако, пак, $f(x)$ има своја ограничења, онда је област дефинисаности условљена и доменом функције $f(x)$. Случај 2^0 обухвата и функције облика $y = (f(x))^{\frac{m}{n}}$. Овде нећемо испитивати функције облика $y = (f(x))^{\varphi(x)}$.

Занимљиво је проучити понашање функција у околини прекида, као и понашање у тзв. "крајевима", тј. кад x тежи ка $+\infty$ или ка

$-\infty$. Посебно је значајно тзв. *асимптотско понашање* функција, које испитујемо помоћу *граничних вредности функција.*

Дефинишимо граничну вредност функције.

За функцију $y = f(x)$, дефинисану на скупу $D \subset R$, кажемо да има граничну вредност $y_0 \in R$ у тачки $x_0 \in D$, ако за свако $x \in D$, $x \neq x_0$, и свако $\varepsilon > 0$, постоји број $\delta > 0$, такав да је за $|x - x_0| < \delta$ испуњена неједнакост $|f(x) - y_0| < \varepsilon$.

Тада пишемо: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y_0$.

Можемо говорити и о граничној вредности кад x тежи ка $+\infty$ или ка $-\infty$, слично граничним вредностима низова. Такође, гранична вредност y_0 може бити и бесконачна (као код дивергентних низова). На граничне вредности функција такође ћемо примењивати теореме о лимесу збира, разлике, производа и количника, као код низова, на крају ТРЕЋЕ ГЛАВЕ.

Начин практичног израчунавања граничне вредности функције зависи, као и код низова, између осталог и од "врсте" израза: $\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\infty}{\infty}$, $\infty \cdot \infty$, $0 \cdot \infty$, 1^∞, 0^0, ∞^0, итд.

На пример, ако се тражи $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$, који има облик $\dfrac{0}{0}$, често се разним алгебарским трансформацијама из израза $f(x)$ и $\varphi(x)$ издвоје чиниоци $(x - a)$, па имамо:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to a} \frac{(x-a) f_1(x)}{(x-a)\varphi_1(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}.$$

Пример 13. Израчунати следеће граничне вредности:

$$а)\ \lim_{x \to -2} \frac{x^2 + 2x}{x^2 - x - 6}; \quad б)\ \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{4 - 3x} - 2}{1 + \sqrt[3]{2x - 1}};$$

$$в)\ \lim_{x \to 1} \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt[3]{x} - 1) \cdots (\sqrt[k]{x} - 1)}{(1 - x^2)^{k-1}}, \quad k \in N.$$

Решење. *а)* $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x(x+2)}{(x-3)(x+2)} = \lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x}{x-3} = \dfrac{2}{5}$.

б) Применимо поступак рационалисања, посебно за бројилац, посебно за именилац.

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(\sqrt{4-3x} - 2)(\sqrt{4-3x} + 2)(1 - \sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{(2x-1)^2})}{(\sqrt{4-3x} + 2)(1 + \sqrt[3]{2x-1})(1 - \sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{(2x-1)^2})} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(4 - 3x - 4)(1 - \sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{(2x-1)^2})}{(\sqrt{4-3x} + 2)(1 + 2x - 1)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-3x(1-\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{(2x-1)^2})}{2x(\sqrt{4-3x}+2)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-3(1-\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{(2x-1)^2})}{2(\sqrt{4-3x}+2)} = \frac{-3\cdot 3}{2\cdot 4} = -\frac{9}{8}.$$

в) Применимо теорему о лимесу производа:

$$\lim_{x\to 1} \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt[3]{x}-1)\cdots(\sqrt[k]{x}-1)}{(1-x^2)^{k-1}} = \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{1-x^2}\cdot \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{1-x^2}\cdots \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[k]{x}-1}{1-x^2}.$$

Лимеси на десној страни су истог типа – разликују се само по изложиоцу корена. Стога је довољно наћи само последњи:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[k]{x}-1}{1-x^2} = \lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt[k]{x}-1)(\sqrt[k]{x^{k-1}}+\sqrt[k]{x^{k-2}}+\cdots+\sqrt[k]{x}+1)}{(1-x)(1+x)(\sqrt[k]{x^{k-1}}+\sqrt[k]{x^{k-2}}+\cdots+\sqrt[k]{x}+1)} =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(1-x)(1+x)(\sqrt[k]{x^{k-1}}+\sqrt[k]{x^{k-2}}+\cdots+\sqrt[k]{x}+1)} =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{-1}{(1+x)(\sqrt[k]{x^{k-1}}+\sqrt[k]{x^{k-2}}+\cdots+\sqrt[k]{x}+1)} = \frac{-1}{2\cdot k}.$$

Стављајући: $k=2$, $k=3$, ..., добијамо и остале лимесе, па је:

$$\lim_{x\to 1} \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt[3]{x}-1)\cdots(\sqrt[k]{x}-1)}{(1-x^2)^{k-1}} = \frac{-1}{2\cdot 2}\cdot\frac{-1}{2\cdot 3}\cdots\frac{-1}{2\cdot k} = \frac{(-1)^{k-1}}{2^{k-1}\cdot k!}. \spadesuit$$

Израз типа $\infty-\infty$ решавамо као и сличне низове.

Пример 14. Израчунати: $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-2+\sqrt{x^2-x+5})$.

Решење. Овде имамо случај $(-\infty+\infty)$, који ћемо најпре рационалисати: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(x-2+\sqrt{x^2-x+5})(x-2-\sqrt{x^2-x+5})}{x-2-\sqrt{x^2-x+5}} =$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{(x-2)^2-(x^2-x+5)}{x-2-\sqrt{x^2-x+5}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-3x-1}{x-2-\sqrt{x^2(1-\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2})}} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{x(-3-\frac{1}{x})}{x(1-\frac{2}{x}+\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}})} = -\frac{3}{2}.$$ (У имениоцу смо имали:

$$\sqrt{x^2(1-\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2})} = \sqrt{x^2}\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}} = |x|\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}} = -x\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}},$$

јер је $x<0$, па је $|x|=-x$.) $\spadesuit$

При израчунавању граничних вредности функција, користимо се неким *стандардним* случајевима као формулама. На пример:

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e} \quad \text{или} \quad \boxed{\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e} \tag{12}$$

У практичним задацима ово схватамо још шире, у следећем смислу: $\lim\limits_{x\to a}(1+\varphi(x))^{\frac{1}{\varphi(x)}}=e$, ако $\varphi(x)\to 0$, кад $x\to a$.

Пример 15. Израчунати граничне вредности:

$$a)\ \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+3}\right)^{3x-2};\qquad б)\ \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg}x)^{\operatorname{tg}2x}.$$

Решење. Оба израза су типа 1^{∞}. Свешћемо их на облик дат у формули (12).

$$a)\ \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+3}\right)^{3x-2}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+3-4}{2x+3}\right)^{3x-2}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{-4}{2x+3}\right)^{3x-2}=\lim_{x\to+\infty}\left(\left(1+\frac{-4}{(2x+3)}\right)^{\frac{2x+3}{-4}}\right)^{\frac{-4}{2x+3}\cdot(3x-2)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{-4(3x-2)}{2x+3}}=\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{-4x(3-\frac{2}{x})}{x(2+\frac{3}{x})}}=e^{-6}.$$

(Овде имамо $(1+\varphi(x))^{\frac{1}{\varphi(x)}}$, где је $\varphi(x)=\dfrac{-4}{2x+3}$.)

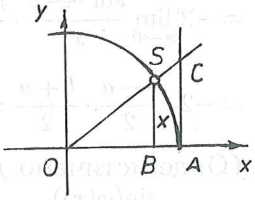
$$б)\ \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg}x)^{\operatorname{tg}2x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(1+(\operatorname{tg}x-1))^{\operatorname{tg}2x}=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left((1+(tgx-1)^{\frac{1}{\operatorname{tg}x-1}}\right)^{(\operatorname{tg}x-1)\cdot\operatorname{tg}2x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}e^{(\operatorname{tg}x-1)\cdot\operatorname{tg}2x}=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}e^{-(1-\operatorname{tg}x)\cdot\frac{2\operatorname{tg}x}{(1-\operatorname{tg}x)(1+\operatorname{tg}x)}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}e^{\frac{-2\operatorname{tg}x}{1+tgx}}=e^{-1}=\frac{1}{e}.\ \spadesuit$$

Доказаћемо једну значајну граничну вредност:

$$(13)\qquad \boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1}$$



Сл. 3

Уочимо на сл. 3 троуглове OBS и OAC и исечак OAS, којем одговара лук x. (На слици је тригонометријски круг, полупречника 1, па је и $\sphericalangle AOS=x$). Површине ових фигура су у релацијама: $P_{OBS}\le P_{OAS}\le P_{OAC}$

Заменимо површине одговарајућим формулама, па је:

$$\frac{1}{2}OB\cdot BS\le\frac{1}{2}OA\cdot x\le\frac{1}{2}OA\cdot\operatorname{tg}x\Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2}\cos x\sin x\le\frac{1}{2}x\le\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin x}{\cos x}\Big/\cdot\frac{2}{\sin x}\Leftrightarrow$$

$$\cos x\le\frac{x}{\sin x}\le\frac{1}{\cos x}\Leftrightarrow\frac{1}{\cos x}\ge\frac{\sin x}{x}\ge\cos x.$$

Кад $x \to +0$, тада $\cos x \to 1$, па $\dfrac{\sin x}{x} \to 1$, кад $x \to +0$. Како је $\dfrac{\sin(-x)}{-x} = \dfrac{\sin x}{x}$ и $\cos(-x) = \cos x$, то $\dfrac{\sin x}{x} \to 1$ и кад $x \to -0$, па долазимо до закључка као у (13).

Пример 16. Израчунати граничне вредности:

а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} 5x}$; *б)* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos bx - \cos ax}{x^2}$;

г) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x \sin^2 x}$.

Решење *а)* $$\lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{\sin 3x}{\cos 3x}}{\dfrac{\sin 5x}{\cos 5x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos 5x}{\cos 3x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\sin 5x} = 1 \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{\sin 3x}{5\cdot 3x}}{\dfrac{\sin 5x}{3\cdot 5x}} =$$

$$= \frac{3}{5} \lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \frac{1}{\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x}{5x}} = \frac{3}{5} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{3}{5}.$$

б) $$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = 2 \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{4 \cdot \frac{x^2}{4}} = \frac{2}{4} \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 = \frac{2}{4} \cdot 1^2 = \frac{1}{2}.$$

в) $$\lim_{x\to 0} \frac{\cos bx - \cos ax}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-2\sin \frac{bx-ax}{2} \cdot \sin \frac{bx+ax}{2}}{x^2} =$$

$$= -2 \lim_{x\to 0} \frac{\sin \frac{b-a}{2}x}{x} \cdot \frac{\sin \frac{b+a}{2}x}{x} = -2 \lim_{x\to 0} \frac{\frac{b-a}{2} \cdot \sin \frac{b-a}{2}x}{\frac{b-a}{2}x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\frac{b+a}{2} \cdot \sin \frac{b+a}{2}x}{\frac{b+a}{2}x} =$$

$$= -2 \cdot \frac{b-a}{2} \cdot \frac{b+a}{2} = \frac{a^2-b^2}{2}, \text{ јер } \frac{\sin \frac{b-a}{2}x}{\frac{b-a}{2}x} \to 1 \text{ и } \frac{\sin \frac{b+a}{2}x}{\frac{b+a}{2}x} \to 1.$$

(Овде истичемо да се формула (13) користи у ширем значењу, као $\lim\limits_{\varphi(x)\to 0} \dfrac{\sin(\varphi(x))}{\varphi(x)} = 1$.)

г) Поступамо слично претходним случајевима. Дајемо цео поступак без објашњења.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{\sin x}{\cos x} - \sin x}{x \sin^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{1}{\cos x} - 1}{x \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{1-\cos x}{\cos x}}{x^2 \dfrac{\sin x}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2},$$

према случају *б)*. (Заменили смо $\cos x \to 1$ и $\dfrac{\sin x}{x} \to 1$.) ♠

Сада ћемо доказати неколико формула које ћемо користити слично формулама (12) и (13).

Пример 17. Доказати следеће формуле:

$$а) \quad \boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1} \tag{14}$$

$$б) \quad \boxed{\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \ln a} \tag{15}$$

$$в) \quad \boxed{\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1} \tag{16}$$

Доказ. *а)* $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+x) = \lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1.$

б) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}$ решимо сменом промењиве. Ставимо: $a^x - 1 = y$. Кад $x \to 0$ тада и $y \to 0$. Одавде $a^x = 1 + y$, па је $\displaystyle x = \frac{1}{\ln a}\ln(1+y)$.

Па је: $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \lim_{y\to 0}\frac{y}{\frac{1}{lna}\ln(1+y)} = \lim_{y\to 0}\frac{\ln a}{\frac{1}{y}\ln(1+y)} = \lim_{y\to 0}\frac{\ln a}{\ln(1+y)^{\frac{1}{y}}} =$ $= \ln a$, јер, према претходном случају, именилац тежи броју 1.

в) Према претходном случају: $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = \ln e = 1.$ ♠

Користећи лимесе из претходних примера, као неке врсте формула, можемо решавати сложеније случајеве, слично *примеру* 16.

Пример 18. Израчунати граничне вредности:

$$а) \quad \lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos 2x}{\ln\cos 3x}; \quad б) \quad \lim_{x\to e}\frac{\ln x - 1}{x - e};$$

$$в) \quad \lim_{x\to 0}\frac{e^{1+x\,\mathrm{tg}\,x} - e^{\cos x}}{\sin^2 x}; \quad г) \quad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(e^{x^2} - \cos x + 1)}{x^2}.$$

Решење. *а)* $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+(\cos 2x - 1))}{\ln(1+(\cos 3x-1))} =$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+(\cos 2x-1))}{\cos 2x - 1}(\cos 2x - 1)\lim_{x\to 0}\frac{1}{\dfrac{\ln(1+(\cos 3x-1))}{\cos 3x - 1}(\cos 3x - 1)} =$$

$= \displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x - 1}{\cos 3x - 1}$, јер, према (14), остали изрази теже ка 1. Даље је:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{1-\cos 3x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{2\sin^2\dfrac{3x}{2}} = \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sin^2 x}{x^2}}{\dfrac{\sin^2\dfrac{3x}{2}}{\dfrac{9}{4}x^2}\cdot\dfrac{9}{4}} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2}{\left(\dfrac{\sin\dfrac{3x}{2}}{\dfrac{3x}{2}}\right)^2}\cdot\frac{4}{9} = \frac{4}{9}.$$

б) $\lim\limits_{x\to e}\frac{\ln x-\ln e}{x-e}=\lim\limits_{x\to e}\frac{\ln\frac{x}{e}}{x-e}=\lim\limits_{x\to e}\frac{\ln(1+(\frac{x}{e}-1))}{e(\frac{x}{e}-1)}=\frac{1}{e}.$

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\cos x}(e^{1-\cos x+x\operatorname{tg}x}-1)}{x^2\cdot\frac{\sin^2 x}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e(e^{1-\cos x+x\operatorname{tg}x}-1)}{x^2}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e(e^{1-\cos x+x\operatorname{tg}x}-1)(1-\cos x+x\operatorname{tg}x)}{x^2(1-\cos x+x\operatorname{tg}x)}=\lim_{x\to 0}\frac{e(1-\cos x+x\operatorname{tg}x)}{x^2}=$$

$$=e\left(\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x}{x}\right)=\frac{e}{2}+e\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x\cos x}=\frac{e}{2}+e=\frac{3e}{2}.$$

г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+e^{x^2}-\cos x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+(e^{x^2}-\cos x))}{x^2(e^{x^2}-\cos x)}\cdot(e^{x^2}-\cos x)=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1+1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=$$

$$=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}.\ \spadesuit$$

У наведеним примерима смо тражили граничне вредности "кад x тежи a" не улазећи у дискусију "с које се стране" (леве или десне) x приближава ка a. Увериће мо се да то питање, у неким случајевима, има битну улогу. Нпр. ако $x\to 0$ с леве стране, $sgn x\to -1$, а ако $x\to 0$ с десне стране $sgn x\to 1$. Овде се сусрећемо са појмовима *леве граничне вредности*, то је $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$, и *десне граничне вредности*, то је $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$. У општем случају ова два лимеса могу бити различита, као код функције $y = sgn\ x$. Шта више:

Функција $f(x)$ има граничну вредност у тачки x_0, ако су леви и десни лимес у тој тачки једнаки:

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x)=\lim_{x\to x_0+0} f(x)\Rightarrow\exists\lim_{x\to x_0} f(x).$$

Леви и десни лимеси функције посебно су важни у тачкама прекида функције.

Пример 19. Израчунати леви и десни лимес функције у тачки прекида: *а)* $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$; *б)* $f(x)=\frac{x^2-x}{x+2}$.

Решење. *а)* Тачка прекида је $x=0$.

$$\lim_{x\to -0} e^{\frac{1}{x}}=e^{-\frac{1}{0}}=e^{-\infty}=\frac{1}{e^{+\infty}}=0.\qquad \lim_{x\to +0} e^{\frac{1}{x}}=e^{+\frac{1}{0}}=e^{+\infty}=+\infty.$$

б) Тачка прекида је $x=-2$. $\lim\limits_{x\to -2-0}\frac{x^2-x}{x+2}=\frac{4+2}{-2-0+2}=\frac{6}{-0}=$

$$=-\infty.\qquad \lim_{x\to -2+0}\frac{x^2-x}{x+2}=\frac{6}{-2+0+2}=\frac{6}{+0}=+\infty.\ \spadesuit$$

Граничну вредност функције користимо за дефинисање појма *непрекидне функције*.

Функција $y = f(x)$ је непрекидна у тачки x_0, $x_0 \in R$, ако је $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Овај услов не испуњава функција $f(x) = sgn\ x$ у тачки $x_0 = 0$. Разуме се, прекидна је и свака функција$f(x)$, за коју важи: $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$ (видети последњи пример).

Израчунавањем граничних вредности функције у околини прекида (тј. у околини изоловане тачке у којој функција није дефинисана) и неких граничних вредности, кад $x \to +\infty$ или $x \to -\infty$, долазимо до појма **асимптота функција**.

У даљем раду ћемо се сусретати са *вертикалним, хоризонталним* и *косим асимптотама*.

Права $x = a$ је *вертикална асимптота* ако је леви или десни лимес (или оба), кад x тежи a, неограничен. Јасно је да *функција може имати вертикалну асимптоту само у тачки прекида.*

Права $y = b$ или $y = b_1$ је *хоризонтална асимптота* ако је $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$ или $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b_1$ (b или b_1 је коначан број). Ако важи само прва једнакост, онда је $y = b$ *лева* хоризонтална асимптота, а ако важи само друга једнакост, онда имамо *десну* хоризонталну асимптоту.

Права $y = kx + n$, $k \neq 0$, је *коса асимптота* функције, ако је $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - kx - n) = 0$ или $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - kx - n) = 0$. Неке функције имају само *леву* или само *десну* косу асимптоту. Такође је могуће да су лева и десна коса асимптота различите.

Међутим, *са једне стране* (нпр. леве) *функција не може имати и хоризонталну и косу асимптоту.*

Наравно функција може бити без иједне асимптоте.

По дефиницији, график функције се приближава графику асимптоте, али се ови графици не секу у смеру приближавања. Можемо замислити да се функција и асимптота "додирују у бесконачно удаљеној тачки". (Независно од тога асимптота и график се могу сећи у неким коначним тачкама)

Из дефиниције косе асимптоте, непосредно се добија практичан поступак за одређивање једначине косе асимптоте:

$$\boxed{\begin{array}{l} k = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x}; \qquad n = \lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - kx) \\ \left(k_1 = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}; \qquad n_1 = \lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - k_1 x) \right). \end{array}} \tag{17}$$

Пример 20. Наћи асимптоте функција:

а) $y = e^{\frac{1}{x}}$; *б)* $y = \dfrac{x^2 - x}{x+2}$; *в)* $y = \dfrac{x^2 - x - 6}{x^2}$;

г) $y = x - 2 - \sqrt{x^2 - x - 2}$.

Решење. *а)* Тачка прекида је $x = 0$. Према претходном *примеру* је $\lim\limits_{x\to-0} e^{\frac{1}{x}} = 0$ и $\lim\limits_{x\to+0} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$, па је права $x = 0$ вертикална асимптота. Даље је $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$, па је права $y = 1$ хоризонтална асимптота (с обе стране). Косих асимптота нема.

б) Према претходном *примеру* је у тачки прекида $x = -2$ леви лимес $-\infty$ и десни $+\infty$, па је права $x = -2$ вертикална асимптота. Функција нема хоризонталних асимптота, јер је $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2 - x}{x+2} = -\infty$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2 - x}{x+2} = +\infty$. Због $k = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2 - x}{x^2 + 2x} = 1 = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ и $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - kx) = \lim\limits_{x\to-\infty} (\dfrac{x^2 - x}{x+2} - x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-3x}{x+2} = -3 =$ $= \lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - kx)$, права $y = x - 3$ је коса асимптота с обе стране.

в) Тачка прекида је $x = 0$. Утврдимо да је $\lim\limits_{x\to-0} \dfrac{x^2 - x - 6}{x^2} =$ $= \dfrac{-6}{+0} = -\infty = \lim\limits_{x\to+0} \dfrac{x^2 - x - 6}{x^2}$, па је права $x = 0$, тј. оса Oy, вертикална асимптота. Затим, због $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2 - x - 6}{x^2} = 1 = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2 - x - 6}{x^2}$, закључујемо да је $y = 1$ хоризонтална асимптота и то с обе стране.

Функција нема косих асимптота.

г) Функција је дефинисана за $x^2 - x - 2 \geq 0$, а то је испуњено за $x \in (-\infty, \ -1] \cup [2, \ +\infty)$. У тачкама $x = -1$ и $x = 2$ је дефинисана: $f(-1) = -3$ и $f(2) = 0$, па нема вертикалних асимптота. Како је $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (x - 2 - \sqrt{x^2 - x - 2}) =$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{(x-2)^2 - (x^2 - x - 2)}{x - 2 + \sqrt{x^2 - x - 2)}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-3x + 6}{x - 2 + \sqrt{x^2 - x - 2}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x(-3 + \frac{6}{x})}{x(1 - \frac{2}{x} + \sqrt{1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}})} = -\frac{3}{2},$$ то је права $y = -\dfrac{3}{2}$ хоризонтална асимптота с десне стране. Са леве стране нема хоризонталне, па ћемо потражити косу асимптоту: $k = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x - 2 - \sqrt{x^2 - x - 2}}{x} =$

$= \lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\frac{2}{x}+\sqrt{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}\right)=2.$*) Затим је $n=\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-kx)=$
$=\lim\limits_{x\to-\infty}(-x-2-\sqrt{x^2-x-2})=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{(-x-2)^2-(x^2-x-2)}{-x-2+\sqrt{x^2-x-2}}=$
$=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{5x+6}{-x-2+\sqrt{x^2-x-2}}=-\frac{5}{2}$. Према томе, права $y=2x-\frac{5}{2}$ је коса асимптота, с леве стране. ♠

ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

246. Израчунати следеће граничне вредности:

а) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})$; *б)* $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{x^2+ax+a}-\sqrt[3]{x^2-ax+a}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}$;

в) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x-2}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}\right)$; *г)* $\lim\limits_{x\to-\infty}x(\sqrt{x^2+1}+x)$;

д) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{1-2\cos x}{\pi-3x}$; *ђ)* $\lim\limits_{x\to0}\frac{x(\sqrt{1-\operatorname{tg}2x}-\sqrt{1+\operatorname{tg}2x})}{1-\cos x}$; *е)* $\lim\limits_{x\to1}\frac{\cos\frac{\pi x}{2}}{1-\sqrt{x}}$;

ж) $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}}\frac{8x^3+1}{\arcsin(2x+1)}$; *з)* $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$; *и)* $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(e^{3x}-2)}{\ln(3+e^{2x})}$;

ј) $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x\right)$; *к)* $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$;

л) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x\cos 2x\cos 3x}{x^2}$; *љ)* $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}}{x^2}$; *м)* $\lim\limits_{x\to2}\frac{2^x-x^2}{x-2}$;

н) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\cos 2x}{\cos 3x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$; *њ)* $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(\cos(e^x-1))}{\sin^2 x}$;

о) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x\operatorname{tg}x)-\ln(\cos x)}{x^2}$.

247. Наћи асимптоте функција

а) $y=\frac{x+2}{x}$; *б)* $y=\frac{x+5}{x^2-4}$; *в)* $y=\sqrt{x^2+2x}+x$;

г) $y=\frac{\ln x+1}{\ln x-1}$; *д)* $y=2x+\ln\left(\frac{e^x-1}{e^x+3}\right)^2$.

4.3 ИЗВОДИ ФУНКЦИЈА

Наведимо дефиницију **извода функције.**

Ако је функција $y=f(x)$ дефинисана у околини тачке x_0, тада је извод функције у тачки x_0,

---

*) $\frac{-\sqrt{x^2-x-2}}{x}=\frac{-\sqrt{x^2-x-2}}{-\sqrt{x^2}}=\sqrt{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}.$

у ознаци $f'(x_0)$, следећа гранична вредност:

(18) $$\boxed{f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}} \quad \text{(извод функције)}$$

Ако постоји ова гранична вредност (коначна), тада кажемо да је функција $f(x)$ *диференцијабилна* у тачки x_0. Ако је функција диференцијабилна у свакој тачки неког интервала $(a,\ b)$, тада кажемо да је диференцијабилна на том интервалу.

Можемо се уверити да је диференцијабилна функција непрекидна, док се обрнуто не може тврдити:

$$\lim_{h\to 0} (f(x_0+h)-f(x_0)) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \cdot h = \lim_{h\to 0} f'(x_0)\cdot h = 0,$$

што значи да је $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

С обзиром да је извод функције гранична вредност неког израза, то постоји *лева* и *десна* гранична вредност, па отуда постоји *леви извод* и *десни извод* функције, у ознаци $f'_-(x_0)$ и $f'_+(x_0)$. Јасно је да код диференцијабилних функција важи: $f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = f'(x_0)$.

Сада ћемо по дефиницији (18) израчунати неке изводе.

Пример 21. Израчунати по дефиницији изводе функција:

а) $y = x^2+3x-5$; *б)* $y=\sqrt{x}$; *в)* $y=\sin x$; *г)* $y=e^x$; *д)* $y=\ln x$.

Решење. *а)* $$y' = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2+3(x+h)-5-(x^2+3x-5)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2hx+3h+h^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(2x+3+h)}{h} = 2x+3.$$

б) $$y' = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

в) $$y' = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2\sin\frac{h}{2}\cdot\cos(x+\frac{h}{2})}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cdot \lim_{h\to 0} \cos(x+\frac{h}{2}) = 1\cdot\cos x = \cos x.$$

г) $$y' = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h}-e^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^x(e^h-1)}{h} = e^x\cdot 1 = e^x.$$

д) $$y' = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h)-\ln x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln\dfrac{x+h}{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+\dfrac{h}{x})}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+\dfrac{h}{x})}{\dfrac{h}{x}} \cdot \frac{1}{x} = 1\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{x}. \ \spadesuit$$

Сличним поступцима могу се добити изводи и осталих елементарних и нееелементарних функција. Убудуће, за израчунавање извода користићемо следеће **таблице извода**:

$$C'=0 \quad *) \qquad (\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}\,**) \qquad (\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$$

$$x'=1 \qquad (e^x)'=e^x \qquad (\sin x)'=\cos x$$

$$(x^n)'=n\cdot x^{n-1} \qquad (a^x)'=a^x\ln a \qquad (\cos x)'=-\sin x$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2} \qquad (\ln x)'=\frac{1}{x} \qquad (\operatorname{tg} x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(\operatorname{ctg} x)'=-\frac{1}{\sin^2 x} \qquad (\operatorname{arctg} x)'=\frac{1}{1+x^2}=-(\operatorname{arcctg} x)'$$

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=-(\arccos x)'.$$

Поред таблица извода, наводимо тзв. правила диференцирања:

$(C\cdot f(x))'=C\cdot f'(x)$

$(u\pm v)'=u'\pm v'$ (извод збира и разлике)

$(u\cdot v)'=u'v+uv'$ (извод производа)

$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$ (извод количника)

Треба запамтити и следеће.

$y=f(\varphi(x))\Rightarrow y'=f'(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)$, односно

$y=f(u)$ и $u=\varphi(x)\Rightarrow y'=f'(u)\cdot u'$ - ово је *извод сложене функције.*

За инверзну функцију важи: $y'_x=\frac{1}{x'_y}$

У следећим примерима бавићемо се практичним израчунавањима извода.

Пример 22. Израчунати изводе следећих функција

а) $y=(x+3)\ln x$; *б)* $y=(x^2+1)\operatorname{arctg} x$; *в)* $y=\frac{x+3}{x-2}$; *г)* $y=\frac{x^2-2}{x^2+1}$;

д) $y=\frac{\sin x}{\cos x+1}$; *ђ)* $y=\ln\frac{1-\cos x}{1+\cos x}$; *е)* $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$.

Решење. *а)* Користимо правило за извод производа.

$y'=(x+3)'\cdot\ln x+(x+3)\cdot(\ln x)'=\ln x+(x+3)\cdot\frac{1}{x}$.

б) $y'=(x^2+1)'\operatorname{arctg} x+(x^2+1)\cdot(\operatorname{arctg} x)'=2x\operatorname{arctg} x+(x^2+1)\cdot\frac{1}{1+x^2}=$
$=2x\operatorname{arctg} x+1$.

в) Користимо правило за извод количника.

---

*) $y=C$ је функција-*константа.*

**) Ово нису *минималне* таблице. Нпр. $\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$, па се може применити случај извода функције $y=x^n$.

$$y' = \frac{(x+3)'(x-2)-(x-2)'(x+3)}{(x-2)^2} = \frac{1\cdot(x-2)-1\cdot(x+3)}{(x-2)^2} = \frac{-5}{(x-2)^2}.$$

г) $$y' = \frac{2x(x^2+1)-2x(x^2-2)}{(x^2+1)^2} = \frac{6x}{(x^2+1)^2}.$$

д) $$y' = \frac{\cos x(\cos x+1)+\sin x\cdot\sin x}{(\cos x+1)^2} = \frac{\cos^2 x+\cos x+\sin^2 x}{(\cos x+1)^2} =$$
$$= \frac{1+\cos x}{(\cos x+1)^2} = \frac{1}{\cos x+1},\ \cos x \neq -1,\ \text{тј. } x \neq \pi+2k\pi,\ k\in Z.$$

ђ) Користићемо правило за извод сложене функције.

$$y' = \frac{1}{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}\cdot\left(\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right)' = \frac{1+\cos x}{1-\cos x}\cdot\frac{\sin x(1+\cos x)+\sin x(1-\cos x)}{(1+\cos x)^2} =$$
$$= \frac{1}{1-\cos x}\cdot\frac{\sin x+\sin x\cos x+\sin x-\sin x\cos x}{1+\cos x} = \frac{2\sin x}{1-\cos^2 x} = \frac{2\sin x}{\sin^2 x} =$$
$$= \frac{2}{\sin x},\ \sin x\neq 0,\ \text{тј. } x\neq k\pi,\ k\in Z.$$

е) $$y' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right) =$$
$$= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.\ \spadesuit$$

Извод функције $y = f(x)$ је функција $y' = f'(x)$. Ако је функција $y' = f'(x)$ диференцијабилна, тада се може наћи њен извод. Нови извод називамо *другим изводом* функције $f(x)$ и означавамо га са y'' или са $f''(x)$:

(19) $\boxed{y'' = (y')',\ \text{односно}\ f''(x) = (f'(x))'}$ (други извод)

Уопште, *виши изводи* функција се дефинишу индуктивно:

(20) $\boxed{y^{(n)} = (y^{(n-1)})'}$ (n-ти извод)

Пример 23. Наћи следеће изводе:

а) $y'' = ?$ ако је $y = \ln\frac{1-\cos x}{1+\cos x}$; *б)* $y''' = ?$ ако је $y = x^2e^{-x}$;

в) $y''' = ?$ ако је $y = \sqrt[3]{1-x}$; *г)* $y'' = ?$ ако је $y = \sqrt{x^2+3}$.

Решење. *а)* Према претходном примеру је $y' = \frac{2}{\sin x}$, па је

$$y'' = \left(\frac{2}{\sin x}\right)' = -\frac{2\cos x}{\sin^2 x}.\ \text{(Извод сложене функције: } \left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{1}{u^2}\cdot u'.)$$

б) $y' = 2xe^{-x} + x^2e^{-x}\cdot(-1) = (2x-x^2)e^{-x}$, па је $y'' = (2-2x)e^{-x} + (2x-x^2)e^{-x}\cdot(-1) = (2-4x+x^2)e^{-x}$. Коначно је $y''' = (y'')' = (-4+2x)e^{-x} + (2-4x+x^2)e^{-x}\cdot(-1) = (-6+6x-x^2)e^{-x}$.

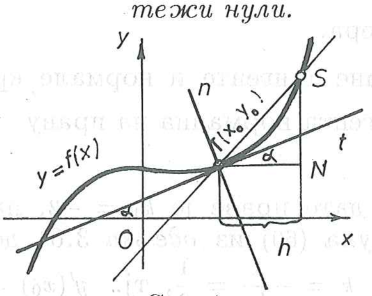
в) Изразићемо функцију као степен, па ћемо користити из таблице случај $(x^n)' = nx^{n-1}$. Дакле $y = (1-x)^{\frac{1}{3}}$, па је $y' =$
$= \dfrac{1}{3}(1-x)^{-\frac{2}{3}} \cdot (-1) = -\dfrac{1}{3}(1-x)^{-\frac{2}{3}}$. Сада је $y'' = (y')' = \dfrac{2}{9}(1-x)^{-\frac{5}{3}} \cdot (-1) =$
$= -\dfrac{2}{9}(1-x)^{-\frac{5}{3}}$, и $y''' = (y'')' = -\dfrac{10}{27}(1-x)^{-\frac{8}{3}}$.

г) Слично претходном задатку, из $y = (x^2+3)^{\frac{1}{2}}$, добијамо: $y' =$
$= \dfrac{1}{2}(x^2+3)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = x(x^2+3)^{-\frac{1}{2}}$. Сада имамо: $y'' = (y')' = 1 \cdot (x^2+3)^{-\frac{1}{2}} +$
$+x \cdot \left(-\dfrac{1}{2}\right)(x^2+3)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+3}} - \dfrac{x^2}{\sqrt{(x^2+3)^3}} = \dfrac{3}{\sqrt{(x^2+3)^3}}$. ♠

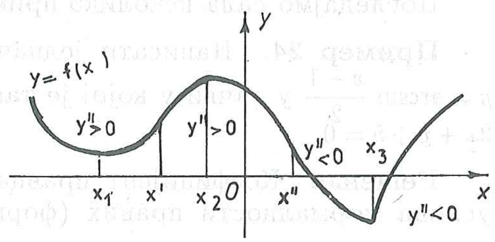
Изводи имају велику примену код испитивања функција. Навешћемо неке од њих.

У ТРЕЋОЈ ГЛАВИ смо решавали *проблем тангенти* кривих другог реда преко система једначина. Строго дефинисање појма тангенте, наводи нас на коришћење првог извода. Шта је заправо тангента криве? Одговор потражимо уз помоћ сл. 4. Уочимо сечицу ST криве $y = f(x)$. Ако тачку S "померамо" по кривој, приближавајући је тачки T, сечица ће се "приближавати" положају тангенте t, а поклопиће се са тангентом, када се тачка S поклопи са T. У том смислу кажемо:

Тангента криве $y = f(x)$ у тачки T је гранични положај сечице у тој тачки , када дужина тетиве тежи нули.



Сл. 4



Сл. 5

У *одељку* 3.6 смо утврдили да је коефицијент правца праве $k = \operatorname{tg}\alpha$, где је α угао одређен осом Ox и правом. У нашем случају је (из троугла TSN):

$$\boxed{k = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = y'(x_0)} \tag{21}$$

То нам омогућује да одредимо једначине тангенте и нормале на криву $y = f(x)$ у тачки $T(x_0,\ y_0)$.

$$(22) \qquad (t) \quad \boxed{y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)} \quad \text{(тангента криве)}$$

$$(23) \qquad (n) \quad \boxed{y - y_0 = -\frac{1}{y'(x_0)}(x - x_0)} \quad \text{(нормала криве)}$$

Из дефиниције првог извода лако се долази до закључка да је *функција монотоно растућа у интервалима у којим је* $y' > 0$, а *монотоно опадајућа када је* $y' < 0$.

Према сл. 5 је $y' < 0$ за $x \in (-\infty,\ x_1) \cup (x_2,\ x_3)$ и функција опада, а $y' > 0$ за $x \in (x_1,\ x_2) \cup (x_3,\ +\infty)$ и функција расте.

У тачкама x_1, x_2, x_3 функција на сл. 5 има тзв. *локалне екстремуме*, које једноставно називамо *максимумом* ($f(x_2)$), односно *минимумом* ($f(x_1)$ и $f(x_3)$).

Код испитивања особина функција важне податке добијамо из другог извода. Тако, ако је на неком интервалу $y'' < 0$, тада је функција *конкавна**) у примеру на сл. 5 то је случај на интервалима $(x',\ x'')$ и $(x_3,\ +\infty)$. Функција је *конвексна* (испупчена "гледајући одоздо") на интервалима на којим је $y'' > 0$. На сл. 5 то су интервали $(-\infty,\ x')$ и $(x'',\ x_3)$.

Напоменимо још да постоје и тзв. *превојне тачке* функције. Тачка x_0 је превојна тачка ако и само ако је функција дефинисана за $x = x_0$ и y'' мења знак у тој тачки.

Ако функција има први извод у локалном екстремуму за $x = x_0$, тада је $f'(x_0) = 0$, а ако има и други извод, тада је $f''(x_0) > 0$ у минимуму, а $f''(x_0) < 0$ у максимуму.

Погледајмо сада неколико примера.

Пример 24. Написати једначине тангенте и нормале криве $y = \arcsin \dfrac{x-1}{2}$ у тачки у којој је тангента нормална на праву $2x + y + 5 = 0$.

Решење. Коефицијент правца дате праве је $k_1 = -2$, па из услова нормалности правих (формула (60) из *одељка* 3.6) добијамо коефицијент правца тангенте: $k = -\dfrac{1}{k_1} = \dfrac{1}{2}$, тј. $y'(x_0) = \dfrac{1}{2}$.
Како је $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \frac{(x-1)^2}{4}}} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{3 - x^2 + 2x}}$, то имамо једначину: $\dfrac{1}{\sqrt{3 - x_0{}^2 + 2x_0}} = \dfrac{1}{2}$, чије је решење $x_0 = 1$. Заменом у функцију добијамо: $y_0 = \arcsin 0 = 0$. Тангента у тачки $T(1,\ 0)$ је: $y = \dfrac{1}{2}(x - 1)$, тј. $x - 2y - 1 = 0$, а нормала је $y = -2(x - 1)$, тј. $2x + y - 2 = 0$. ♠

---

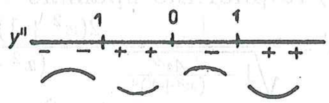
*) У разним уџбеницима конкавност (удубљеност) дефинише се двојако. Овде се *конкавном* сматра функција која је "удубљена гледајући одоздо".

Пример 25. Испитати монотоност и конкавност функција:
а) $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$; *б)* $y = x \ln^2 x$; *в)* $y = \sqrt[3]{x^2}$; *г)* $y = \arcsin \dfrac{2x}{x^2 + 1}$.

Решење. *а)* $y' = \dfrac{1(x^2 - 1) - 2x^2}{(x^2 - 1)^2} = -\dfrac{x^2 + 1}{(x^2 - 1)^2}$ и $y'' = \dfrac{2x(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^3}$.

Знак y' и знак y'' одредимо као у ДРУГОЈ ГЛАВИ, водећи рачуна о чињеници да су $x = 1$ и $x = -1$ тачке прекида.

Сл. 6



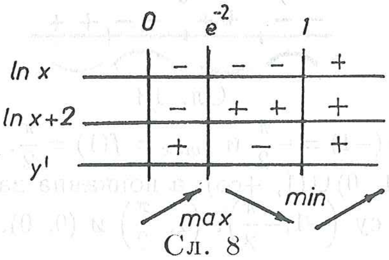
Сл. 7

Према шеми на сл. 6 је $y' < 0$ за $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$ и функција стално опада. (У тачкама $x = 1$ и $x = -1$ функција није дефинисана.) Функција нема екстрема.

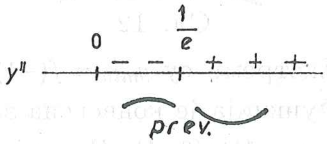
Према сл. 7, функција је конкавна за $x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1)$, а конвексна за $x \in (-1, 0) \cup (1, +\infty)$. Тачка $(0, 0)$ је превојна.

Слично поступамо и у осталим случајевима.

б) $y' = \ln^2 x + 2 \ln x$ и $y'' = \dfrac{2 \ln x + 2}{x}$, $x > 0$. Ради одређивања знака, напишимо: $y' = \ln x(\ln x + 2)$ и $y'' = \dfrac{2}{x}(\ln x + 1)$. Сада имамо шеме:



Сл. 8



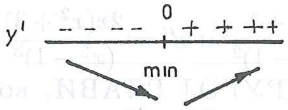
Сл. 9

Према сл. 8, функција расте за $x \in (0, e^{-2}) \cup (1, +\infty)$ и функција опада за $x \in (e^{-2}, 1)$. Екстремне вредности су: $y_{max} = f(e^{-2}) =$
$= e^{-2}(\ln e^{-2})^2 = \dfrac{1}{e^2} \cdot (-2)^2 = \dfrac{4}{e^2}$ и $y_{min} = f(1) = 0$.

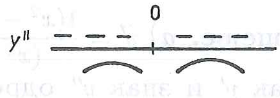
На основу знака y'', сл. 9, закључујемо да је функција конкавна за $x \in (0, \dfrac{1}{e})$, а конвексна за $x \in (\dfrac{1}{e}, +\infty)$. Коначно $(\dfrac{1}{e}, \dfrac{1}{e})$ је превојна тачка.

в) Из $y = x^{\frac{2}{3}}$, добијамо: $y' = \dfrac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x^3}}$ и $y'' = -\dfrac{2}{9} x^{-\frac{4}{3}} = -\dfrac{2}{9\sqrt[3]{x^4}}$, $x \neq 0$. Видимо да је $y'' > 0$ за $x \neq 0$, а y' има исти знак као $\sqrt[3]{x}$, односно као x.

Према сл. 10, функција опада за $x < 0$, а расте за $x > 0$. У тачки $(0,\ 0)$ је минимум. Према сл. 11, функција је конкавна за $x \neq 0$ и нема превојних тачака.



Сл. 10



Сл. 11

г) Користимо правило за извод сложене функције:

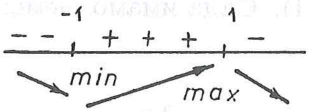
$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{4x^2}{(x^2+1)^2}}}\cdot\frac{2(x^2+1)-2x\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2+1}{\sqrt{(x^2-1)^2}}\cdot\frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)\,|\,x^2-1\,|} = \begin{cases} \dfrac{2}{x^2+1}, & x \in (-1,\ 1) \\ -\dfrac{2}{x^2+1}, & x \notin [-1,\ 1] \end{cases},\ x \neq 1 \text{ и } x \neq -1.$$

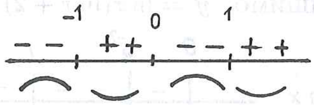
Одавде налазимо други извод:

$$y'' = \begin{cases} \dfrac{-4x}{(x^2+1)^2}, & x \in (-1,\ 1) \\ \dfrac{4x}{(x^2+1)^2}, & x \notin [-1,\ 1] \end{cases},\ x \neq 1 \text{ и } x \neq -1.$$

Знак y' (сл. 12) и y'' (сл. 13) одређују монотоност и конкавност. Функција расте за $x \in (-1,\ 1)$, а опада за $x \in (-\infty,\ -1) \cup (1,\ +\infty)$.



Сл. 12



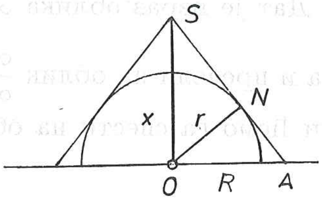
Сл. 13

Екстреми су $y_{min} = f(-1) = \arcsin(-1) = -\dfrac{\pi}{2}$ и $y_{max} = f(1) = \dfrac{\pi}{2}$.

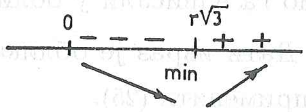
Функција је конвексна за $x \in (-1,\ 0) \cup (1,\ +\infty)$, а конкавна за $x \in (-\infty, -1) \cup (0,\ 1)$. Превојне тачке су $\left(-1, -\dfrac{\pi}{2}\right)$, $\left(1,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ и $(0,\ 0)$. ♠

Пример 26. Око полулопте полупречника r *cm* описати купу минималне запремине, тако да база купе лежи у равни великог круга полулопте.

Решење. Нека је x висина купе, а R полупречник њене базе. Тада је запремина купе: $V = \dfrac{1}{3}\pi R^2 x$. Изразићемо R^2 преко x и r. Уочимо сличне троуглове ASO, AON и OSN, сл. 14. Добијамо следеће релације: $r^2 = AN \cdot SN = \sqrt{R^2-r^2}\cdot\sqrt{x^2-r^2}$. Одавде је $R^2 = \dfrac{r^2x^2}{x^2-r^2}$, па је $V = \dfrac{1}{3}\dfrac{\pi r^2 x^3}{x^2-r^2}$. Сада налазимо V' и знак извода: $V' = \dfrac{\pi r^2 x^2(x^2-3r^2)}{3(x^2-r^2)^2}$. Знак V' и монотоност функције $V(x)$ одређујемо преко сл. 15.



Сл. 14



Сл. 15

Минимум запремине добијамо за $x = r\sqrt{3}$, тј. $R = r\sqrt{\frac{3}{2}}$. ♠

У вези са изводом поменимо и *диференцијал функције*, којег означавамо са dy. За сада о диференцијалу само оволико:

$$\boxed{dy = f'(x)dx} \quad \text{(диференцијал функције)} \tag{24}$$

Извод има важну примену у израчунавању граничних вредности неких функција. Користимо тзв. *Лопиталово правило.*

Ако израз $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ има облик $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$ када $x \to a$, а функције $f(x)$ и $\varphi(x)$ су диференцијабилне у околини тачке $x = a$, тада је:

$$\boxed{\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}} \quad \text{(Лопиталово правило)} \tag{25}$$

ако лимес на десној страни једнакости постоји.

Навешћемо неколико примера израчунавања граничних вредности функција, коришћењем Лопиталовог правила.

Пример 27. Коришћењем Лопиталовог правила израчунати следеће граничне вредности:

а) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x - x}{x^3}$; *б)* $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^2}e^{-\sqrt[3]{x}}$;

в) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1})$; *г)* $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(x+2))$.

Решење. *а)* $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos^2 x} - 1}{3x^2} =$

$\displaystyle= \lim_{x\to 0}\frac{1}{3}\cdot\frac{1-\cos^2 x}{x^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{3}\cdot 1^2\cdot\frac{1}{1} = \frac{1}{3}$. (Дати израз је облика $\frac{0}{0}$.)

б) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{2}{3}}e^{-x^{\frac{1}{3}}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\frac{2}{3}}}{e^{x^{\frac{1}{3}}}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}}{e^{x^{\frac{1}{3}}}\cdot\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2x^{\frac{1}{3}}}{e^{x^{\frac{1}{3}}}} =$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\frac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}}}{e^{x^{\frac{1}{3}}}\cdot\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{e^{\sqrt[3]{x}}} = \dfrac{2}{+\infty} = 0$. Дат је израз облика $\infty\cdot 0$, али смо га написали у облику разломка и превели на облик $\dfrac{\infty}{\infty}$.

в) Дати израз је облика $\infty-\infty$, али ћемо га свести на облик $\dfrac{0}{0}$, па применити (25).

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{e^x-1+xe^x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{e^x+e^x+xe^x} = \frac{1}{2}.$$

г) Дати израз, облика $\infty\cdot 0$, напишемо у облику $\dfrac{0}{0}$, па применимо Лопиталово правило: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}(x+2)}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{1+(x+2)^2}}{-\frac{1}{x^2}} =$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1+x^2+4x+4} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2(1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2})} = 1. \spadesuit$$

ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

248. Израчунати први извод функције.

а) $y=\dfrac{2x+3}{x^2-5x+5}$; *б)* $y=\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x$; *в)* $y=\dfrac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$;

г) $y=\arcsin\sqrt{x}$; *д)* $y=2x-\sqrt{x^2+2x-3}$; *ђ)* $y=\sin^2 3x$;

е) $y=\operatorname{arcctg}\dfrac{1+x}{1-x}$; *ж)* $y=\sqrt{xe^x+x}$.

249. Под којим углом крива $y=\operatorname{tg}x$ сече осу Ox?

250. Написати једначине тангенте и нормале параболе $y^2=x$ у тачки са апсцисом 4.

251. У којој је тачки тангента параболе $y=x^2-7x+3$ паралелна правој $5x+y+1=0$?

252. Наћи екстремуме функције $y=2x+3\sqrt[3]{x^2}$.

253. Одредити димензије ваљка тако да му при минималној површини запремина износи $54\pi\ cm^3$.

254. У одсечак параболе $y=x^2-12$, одређен осом Ox, уписати правоугаоник максималне површине.

255. Користећи се Лопиталовим правилом израчунати:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-2x^2-x+2}{x^3-7x+6}$; *б)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^3}$; *в)* $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{\pi}{x}}{\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{2}}$; *д)* $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$; *ђ)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)\cdot\operatorname{ctg} x}{x}$;

е) $\lim\limits_{x\to 1}\ln x\cdot\ln(x-1)$; *ж)* $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$.

4.4 ИСПИТИВАЊЕ ФУНКЦИЈА - ЦРТАЊЕ ГРАФИКА

Користећи се изводима и лимесима испитиваћемо функције и цртаћемо њихове графике. Ради систематичности и прегледности рада начинићемо шему стандардних поступака, који ће нам открити битне особине испитиваних функција. Ево те шеме:

1^0 *Област дефинисаности функције*

2^0 *а) Нуле функције.* (Пресеци са осом Ox, ако их има, а умемо да их одредимо.)

б) Знак функције (ако можемо да одредимо).

в) Разне особине које могу олакшати испитивање и цртање графика: *парност* (симетричност графика), *периодичност* (за тригонометријске функције), пресек са осом Oy.

3^0 *Асимптоте*

а) Вертикалне (понашање функције у околини тачака прекида).

б) Хоризонталне ($\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$).

в) Косе ($y=kx+n$ - видети *пример* 20 и 28 *г)*)

4^0 *Изводи*

а) Знак y' (монотоност и екстремуми).

б) Знак y'' (конкавност и превојне тачке).

5^0 *Цртање графика:* Уношењем свих података из претходних испитивања (1^0, 2^0, 3^0, 4^0) у координатни систем, уз помоћ скица знака y' и y'' (као у *примеру 25*), нацртамо график функције.

Како функционише ова шема, показаће следећи примери.

Пример 28. Испитати дате функције и нацртати графике.

а) $y=\dfrac{x^2-5x+6}{x^2+1}$; *б)* $y=\dfrac{x}{x^2-4}$; *в)* $y=2\sin x+\sin 2x$;

г) $y=\sqrt{\dfrac{x^3}{x-2}}$; *д)* $y=x^2\ln x$; *ђ)* $y=\arcsin\dfrac{2x}{x^2+1}$.

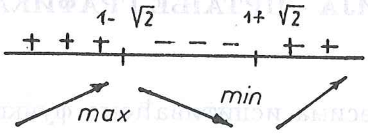
Решење. **(а)** $y=\dfrac{x^2-5x+6}{x^2+1}$

1^0 Функција је *дефинисана* за $x \in (-\infty,\ +\infty)$, јер је $x^2+1 \neq 0$, $\forall x \in R$.

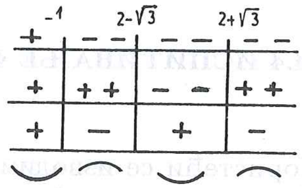
2^0 а) *Нуле* су $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ (јер је $x^2 - 5x + 6 = 0$ за $x = 2$ или $x = 3$).

б) Знак функције зависи само од бројиоца, јер је именилац позитиван. Дакле, $y > 0$ за $x \in (-\infty,\ 2) \cup (3,\ +\infty)$, а $y < 0$ за $x \in (2,\ 3)$.

в) Пресек са осом Оу је $f(0) = 6$.



Сл. 16



Сл. 17

3^0 *Асимптоте*

а) Вертикалних асимптота нема, јер нема тачака прекида.

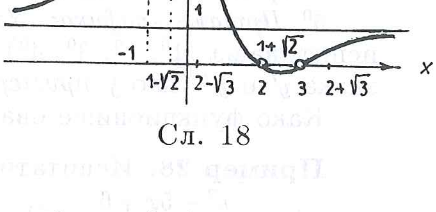
б) Хоризонтална асимптота је $y = 1$ и то с леве и десне стране, јер је $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2-5x+6}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-5x+6}{x^2+1} = 1$.

в) Косих асимптота нема, јер с обе стране има хоризонталну.

4^0 *Изводи*

а) $y' = \dfrac{5(x^2-2x-1)}{(x^2+1)^2}$. Знак y' зависи само од бројиоца . Скицу знака имамо на сл. 16 . Стрелице показују рашћење и опадање функције. Екстреми су: $y_{max} = f(1-\sqrt{2}) \approx 7$ и $y_{min} = f(1+\sqrt{2}) \approx -0,03$.

б) $y'' = \dfrac{-10(x+1)(x^2-4x+1)}{(x^2+1)^3}$ има нуле: -1, $2+\sqrt{3}$, $2-\sqrt{3}$. Скица знака и конкавности је на сл. 17. Превојне тачке су нуле другог извода.



Сл. 18

5^0 График видимо на сл. 18.

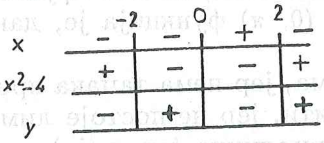
(б) $y = \dfrac{x}{x^2-4}$

1^0 Због $x^2 - 4 = 0$ за $x = 2$ или $x = -2$, функција је дефинисана за $x \in (-\infty,\ -2) \cup (-2,\ 2) \cup (2,\ +\infty)$. Прекиди су $x = -2$ и $x = 2$.

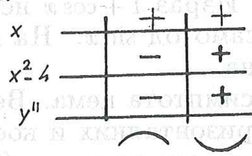
2^0 *а)* Нула функције је $x = 0$.

б) Знак видимо према сл. 19: $y > 0$ за $x \in (-2,\ 0) \cup (2,\ +\infty)$ и $y < 0$ за $x \in (-\infty,\ -2) \cup (0,\ 2)$.

в) Функција је непарна, јер је $f(-x) = -f(x)$, па је график симетричан у односу на координатни почетак. Због тога ћемо даље разматрати функцију само за $x > 0$.



Сл. 19



Сл. 20

3^0 Асимптоте

а) Кандидати за вертикалне асимптоте су тачке прекида $x = -2$ и $x = 2$. Испитаћемо тачку $x = 2$.

$$\lim_{x \to 2-0} \frac{x}{x^2-4} = \lim_{x \to 2-0} \frac{x}{(x-2)(x+2)} = \frac{2}{(2-0-2)\cdot 4} = \frac{2}{-0} = -\infty.$$

$$\lim_{x \to 2+0} \frac{x}{(x-2)(x+2)} = \frac{2}{(2+0-2)\cdot 4} = \frac{2}{+0} = +\infty.$$

Права $x = 2$ је вертикална асимптота (а такође и права $x = -2$).

б) Како је $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x^2-4} = 0$, то је оса Ox хоризонтална асимптота с обе стране.

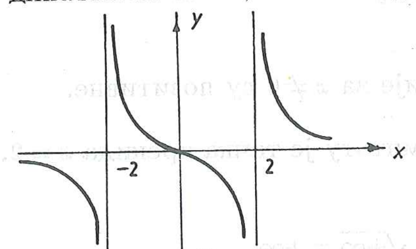
в) Косих асимптота нема.

4^0 Изводи

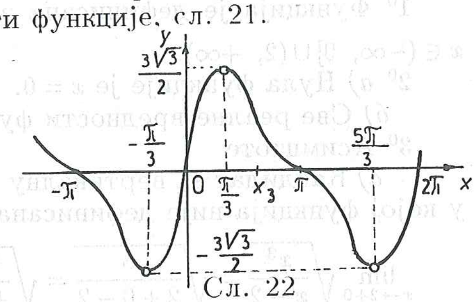
а) $y' = -\dfrac{x^2+4}{(x^2-4)^2}$, па је функција монотоно опадајућа. (Бројилац и именилац не мењају знак). Екстремума нема.

б) $y'' = \dfrac{2x(x^2+12)}{(x^2-4)^3}$. Знак y'' зависи од x и од x^2-4, као што се види на скици, сл. 20. Функција има превојну тачку $x = 0$.

5^0 На основу спроведеног испитивања, цртамо детаљно десни део графика, а леви део пресликамо симетрично у односу на координатни почетак, због непарности функције, сл. 21.



Сл. 21



Сл. 22

(в) $y = 2\sin x + \sin 2x$

1^0 Функција је дефинисана за $x \in (-\infty, +\infty)$.

2^0 *а)* Функција је периодична, са периодом 2π, али како је и непарна, биће довољно да је испитамо на интервалу $[0, \pi]$.

Можемо написати: $y = 2\sin x + 2\sin x\cos x = 2\sin x(1+\cos x)$. Нуле функције су $x = 0$ и $x = \pi$.

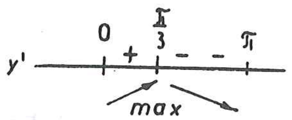
б) Израз $1 + \cos x$ не може бити негативан, па знак функције зависи само од $\sin x$. На интервалу $x \in (0,\ \pi)$ функција је, дакле, позитивна.

3^0 Асимптота нема. Вертикалних нема, јер нема тачака прекида, а хоризонталних и косих не може бити, јер не постоје лимеси кад x тежи $+\infty$ или $-\infty$. (То важи за периодичне функције).

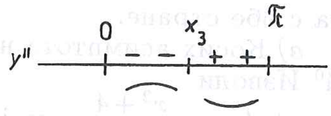
4^0 Изводи

а) $y' = 2\cos x + 2\cos 2x = 2(2\cos^2 x + \cos x - 1)$, па је $y' = 0$ ако је $\cos x = \dfrac{1}{2}$ или $\cos x = -1$, тј. ако је $x = \dfrac{\pi}{3}$ или $x = \pi$. На основу знака првог извода, сл. 23, налазимо да је $y_{max} = f(\dfrac{\pi}{3}) = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

б) $y'' = -2\sin x - 4\sin 2x = -2\sin x(1 + 4\cos x)$. Други извод је једнак нули за $x_1 = 0$, $x_2 = \pi$ и $x_3 = \arccos(-\dfrac{1}{4})$. (Приближно $x_3 = \dfrac{5\pi}{9}$). Знак y'' видимо на сл. 24. Превојне тачке су x_1, x_2 и x_3.



Сл. 23



Сл. 24

5^0 Ради прецизнијег одређивања графика, одредићемо нагиб криве у тачкама x_1 и x_2: $y'(0) = 4$ и $y'(\pi) = 0$. График је на сл. 22.

(г) $y = \sqrt{\dfrac{x^3}{x-2}}$

1^0 Функција је дефинисана за $\dfrac{x^3}{x-2} \geq 0$, а то је испуњено за $x \in (-\infty,\ 0] \cup (2,\ +\infty)$.

2^0 *а)* Нула функције је $x = 0$.

б) Све реалне вредности функције за $x \neq 0$ су позитивне.

3^0 Асимптоте

а) Кандидат за вертикалну асимптоту је тачка прекида $x = 2$, у којој функција није дефинисана:

$$\lim_{x\to 2+0} \sqrt{\frac{x^3}{x-2}} = \sqrt{\frac{8}{2+0-2}} = \sqrt{\frac{8}{+0}} = \sqrt{+\infty} = +\infty.$$

Права $x = 2$ је вертикална асимптота. (Леви лимес не тражимо, јер за $x \to 2-0$ функција није дефинисана).

б) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x^3}{x-2}} = \lim_{x\to-\infty} \sqrt{\frac{x^3}{x-2}} = +\infty$, па функција нема хоризонталне асимптоте.

в) Како је $y=\sqrt{\dfrac{x^3}{x-2}}=\sqrt{x^2}\sqrt{\dfrac{x}{x-2}}=|x|\sqrt{\dfrac{x}{x-2}}=\begin{cases} x\sqrt{\frac{x}{x-2}}, & x>2 \\ -x\sqrt{\frac{x}{x-2}}, & x<0, \end{cases}$

то је $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{\dfrac{x}{x-2}}\right)=-1$ и $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{y}{x}=1$. Даље је $n=$

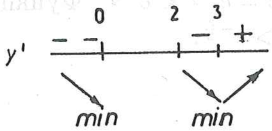
$$=\lim_{x\to-\infty}\left(-x\sqrt{\frac{x}{x-2}}+x\right)=\lim_{x\to-\infty}x\left(1-\sqrt{\frac{x}{x-2}}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x(1-\frac{x}{x-2})}{1+\sqrt{\frac{x}{x-2}}}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\frac{2x}{x-2}}{1+\sqrt{\frac{x}{x-2}}}=\frac{-2}{1+1}=-1,\text{ а } n_1=\lim_{x\to+\infty}\left(x\sqrt{\frac{x}{x-2}}-x\right)=1.$$ Значи,

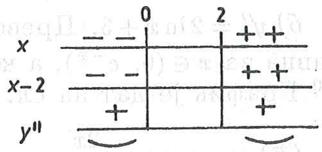
функција има две косе асимптоте: леву $y=-x-1$ и десну $y=x+1$.

4^0 Изводи

а) Како је $y'=(x-3)\sqrt{\dfrac{x}{(x-2)^3}}$, то је $y'>0$ за $x>3$, а $y'<0$ за $x\in(-\infty,\ 0)\cup(2,\ 3)$, сл. 25. Екстремуми су: $y_{min}=f(3)=3\sqrt{3}$ и $y_{min}=f(0)=0$.



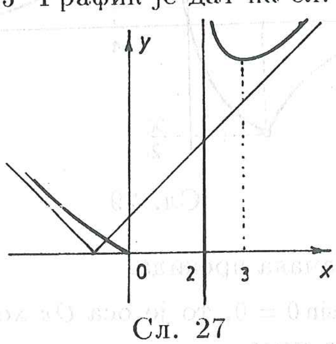
Сл. 25



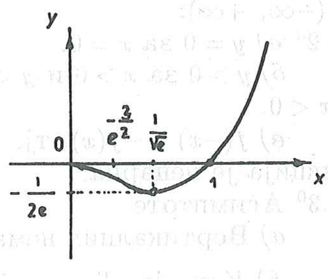
Сл. 26

б) Други извод је $y''=\dfrac{3x}{(x-2)^3\sqrt{\frac{x^3}{x-2}}}$, па његов знак зависи од $\dfrac{x}{x-2}$, сл. 26. Функција је конвексна у области дефинисаности.

5^0 График је дат на сл. 27.



Сл. 27



Сл. 28

(д) $y=x^2\ln x$

1^0 Функција је дефинисана за $x>0$.

2^0 *а)* $y=0$ за $x=1$, јер је $\ln 1=0$.

б) Знак функције се поклапа са знаком од $\ln x$. Дакле, $y > 0$ за $x > 1$ и $y < 0$ за $x \in (0,\ 1)$.

3^0 Асимптоте

а) Тачка прекида је $x = 0$, али је $\lim\limits_{x\to+0} x^2 \ln x = \lim\limits_{x\to+0} \dfrac{\ln x}{\dfrac{1}{x^2}} =$

$= \lim\limits_{x\to+0} \dfrac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{2}{x^3}} = \lim\limits_{x\to+0} \dfrac{-x^2}{2} = -0$, па функција нема вертикалне асимптоте. (Користили смо Лопиталово правило.)

б) Нема хоризонталне асимптоте, јер је $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 \ln x = +\infty$. Такође нема косе асимптоте, јер је $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{y}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} x \ln x = +\infty$.

4^0 Изводи

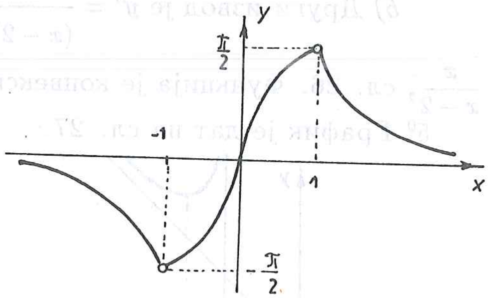
а) $y' = x(2\ln x + 1)$, па је $y' > 0$ за $x > e^{-\frac{1}{2}}$, а $y' < 0$ за $x \in (0,\ e^{-\frac{1}{2}})$. Минимум је $y_{min} = f(e^{-\frac{1}{2}}) = e \ln e^{-\frac{1}{2}} = -\dfrac{1}{2e}$.

б) $y'' = 2\ln x + 3$. Превојна тачка је $x = e^{-\frac{3}{2}} < e^{-\frac{1}{2}}$. Функција је конкавна за $x \in (0,\ e^{-\frac{3}{2}})$, а конвексна за $x > e^{-\frac{3}{2}}$.

5^0 График је дат на сл. 28.

(ђ) $y = \arcsin \dfrac{2x}{x^2+1}$

1^0 Функција је дефинисана за $-1 \le \dfrac{2x}{x^2+1} \le 1$. Решавањем овог система неједначина, добијамо да је област дефинисаности функције $x \in (-\infty,\ +\infty)$.



Сл. 29

2^0 *а)* $y = 0$ за $x = 0$.

б) $y > 0$ за $x > 0$ и $y < 0$ за $x < 0$.

в) $f(-x) = -f(x)$, тј. функција је непарна.

3^0 Асимптоте

а) Вертикалних нема, јер нема тачака прекида.

б) Како је $\lim\limits_{x\to+\infty} \arcsin \dfrac{2x}{x^2+1} = \arcsin 0 = 0$, то је оса Ox хоризонтална асимптота, а косих асимптота нема.

4^0 Изводи

Према *примеру* 25 *г)*, сл. 12 и сл. 13, видимо интервале монотоности и конкавности, као и екстремуме и превојне тачке.

5^0 График је дат на сл. 29. ♠

ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

256. Испитати функције и нацртати графике.

а) $y = \dfrac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$; *б)* $y = \dfrac{x^3}{x^2 - x}$; *в)* $y = (x+1)\ln^2(x+1)$;

г) $y = x - 2 - \sqrt{x^2 - x - 6}$; *д)* $y = \operatorname{arctg}\dfrac{x+2}{x-2}$; *ђ)* $y = x + \sqrt[3]{x^2}$.

4.5 НЕОДРЕЂЕНИ ИНТЕГРАЛ

Нека је дата функција $y = f(x)$. Претпоставимо да постоји функција $F(x)$, таква да је $F'(x) = f(x)$. У *одељку* 4.3 смо одређивали извод ако је дата нека функција, а сада нас занима одређивање функције чији је извод задат. Такву функцију називамо *примитивном (прим) функцијом.**) Дакле, ако је $F'(x) = f(x)$, где је $f(x)$ дата функција, тада је $F(x)$ *примитивна функција за* $f(x)$.

О постојању примитивне функције знамо:

> *Ако је $y = f(x)$ непрекидна функција на неком интервалу, тада на том интервалу постоји функција $F(x)$, таква да је:*

$$\boxed{F'(x) = f(x)} \quad \text{(примитивна функција)} \tag{26}$$

Знамо да је извод константе C једнак нули, па отуда закључујемо: ако је $F(x)$ примитивна функција за $f(x)$, тада је свака функција $F(x) + C$ такође примитивна функција за $f(x)$.

Уводимо сада појам **неодређеног интеграла.**

> *Ако је $F(x)$ примитивна функција функције $f(x)$, тада се $F(x) + C$ назива неодређеним интегралом функције $f(x)$, што означавамо са:*

$$\boxed{\int f(x)dx = F(x) + C} \quad \text{(неодређен интеграл)} \tag{27}$$

(Читамо: "(Неодређени) интеграл еф од x де x једнак је $F(x)+C$").

Релације (26) и (27) јасно говоре шта је то неодређени интеграл. Сада ћемо се упустити у израчунавање неодређених интеграла.

Једноставније интеграле лако израчунавамо на основу искустава са изводима. На пример:

$$\int dx = \int 1 \cdot dx = x + C, \text{ јер је } \; x' = 1,$$

*) $F'(x)$ читамо: "еф *прим* од x"

$$\int x dx = \frac{x^2}{2} + C, \text{ јер је } \left(\frac{x^2}{2}\right)' = 2 \cdot \frac{x}{2} = x,$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C, \text{ јер је } (-\cos x)' = \sin x, \text{ итд.}$$

Слично таблицама извода, начинићемо и **таблицу интеграла**, коју *треба запамтити*:

$$\int dx = x + C \qquad \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int x^k dx = \frac{x^{k+1}}{k+1} + C, \ k \neq -1 \qquad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \qquad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C \qquad \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln|x + \sqrt{x^2+a}| + C$$

Наведимо и неколико особина неодређених интеграла:

$$\int d(F(x)) = F(x) + C \qquad \left(\int f(x) dx\right)' = f(x)$$

$$\int Cf(x)dx = C \int f(x)dx, \text{ где је } C \text{ реална константа.}$$

$$\int (f(x) + g(x))\, dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

Корисно је запамтити и следеће: $\displaystyle\int \frac{f'(x)dx}{f(x)} = \ln|f(x)| + C$

јер, према правилу за извод сложене функције: $(\ln|f(x)|)' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$.

Пример 29. Израчунати следеће неодређене интеграле:

а) $\displaystyle\int \frac{(x^2-2)^2}{x^3} dx$; *б)* $\displaystyle\int x\sqrt{x\sqrt[3]{x}} dx$; *в)* $\displaystyle\int 2^{2x} e^x dx$;

г) $\displaystyle\int \frac{x^2 dx}{1+x^2}$; *д)* $\displaystyle\int \operatorname{tg}^2 x dx$; *ђ)* $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin 2x}$.

Решење. *а)* $\int \frac{x^4-4x^2+4}{x^3}dx = \int (x - \frac{4}{x} + \frac{4}{x^3})dx = \int xdx -$
$-4\int \frac{dx}{x} + 4\int x^{-3}dx = \frac{x^2}{2} - 4\ln|x| + 4\frac{x^{-2}}{-2} + C = \frac{x^2}{2} - 4\ln|x| - \frac{2}{x^2} + C.$

б) $\int x(x\cdot x^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}}dx = \int x\cdot x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{\frac{1}{6}}dx = \int x^{\frac{5}{3}}dx = \frac{x^{\frac{5}{3}+1}}{\frac{5}{3}+1} + C = \frac{3}{8}\sqrt[3]{x^8} + C.$

в) $\int 2^{2x}e^x dx = \int (2^2e)^x dx = \int (4e)^x dx = \frac{(4e)^x}{\ln 4e} + C = \frac{2^{2x}e^x}{1+2\ln 2} + C.$

г) $\int \frac{x^2+1-1}{1+x^2}dx = \int (1 - \frac{1}{1+x^2})dx = \int dx - \int \frac{dx}{1+x^2} =$
$= x - \operatorname{arctg} x + C.$

д) $\int \frac{\sin^2 x dx}{\cos^2 x} = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = \operatorname{tg} x - x + C.$

ђ) $\int \frac{1}{2\sin x\cos x}dx = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{2\sin x\cos x}dx = \frac{1}{2}\int \frac{\sin x}{\cos x}dx + \frac{1}{2}\int \frac{\cos x}{\sin x}dx =$
$= -\frac{1}{2}\int \frac{(\cos x)'}{\cos x}dx + \frac{1}{2}\int \frac{(\sin x)'}{\sin x}dx = -\frac{1}{2}\ln|\cos x| + \frac{1}{2}\ln|\sin x| + C =$
$= \ln\sqrt{\frac{\sin x}{\cos x}} + C = \ln\sqrt{\operatorname{tg} x} + C.$ ♠

Најчешће, подинтегралну функцију није могуће свести простим трансформацијама на облик који решавамо таблицама интеграла. Једна од метода којој често прибегавамо у решавању интеграла, јесте **смена променљиве**. Уочићемо два типа смене.

Први, ако интеграл има облик: $\int f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)dx$, решава се сменом: $\varphi(x) = t$, одакле је $\varphi'(x)dx = dt$. Дати интеграл прелази у $\int f(t)dt$, па ако ово знамо, онда смо завршили посао.

Други тип смене извршава се тако што се x замени неком диференцијабилном, строго монотоном функцијом $\varphi(t)$.*) Ову функцију бирамо тако да се подинтегрална функција трансформише у функцију чији интеграл знамо. Добијамо: $\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$. Одређивање ове смене је ствар искуства, и ми ћемо неке стандардне случајеве овде обрадити.

Када се после извршене смене нађе интеграл, он је облика $F(t)+C$, па треба вратити почетну променљиву x. У првом случају добијемо $F(\varphi(x)) + C$, а у другом $F(\varphi^{-1}(x)) + C$.

Практично увођење смене приказаћемо на следећем примеру.

---

*) $x = \varphi(t)$ мора бити строго монотона функција да би била инверзибилна, тј. да постоји $t = \varphi^{-1}(x)$.

Пример 30. Израчунати интеграле:

а) $\displaystyle\int \sin(2x-\frac{\pi}{3})dx$; *б)* $\displaystyle\int \frac{\ln x dx}{x}$; *в)* $\displaystyle\int \frac{(\arcsin x)^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}$; *г)* $\displaystyle\int \frac{(x-2)dx}{\sqrt{9-x^2}}$;

д) $\displaystyle\int \frac{x-\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}dx$; *ђ)* $\displaystyle\int \frac{dx}{e^{-x}+e^x}$; *е)* $\displaystyle\int \sqrt{4-x^2}dx$;

ж) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$; *з)* $\displaystyle\int \frac{2dx}{\cos x}$; *и)* $\displaystyle\int \frac{\sin 2x dx}{\sin^6 x+\cos^6 x-\frac{1}{4}}$.

Решење. *а)* Уведимо смену: $2x-\dfrac{\pi}{3}=t$, одакле је $2dx=dt$, односно $dx=\frac{1}{2}dt$, па дати интеграл прелази у:

$$\frac{1}{2}\int \sin t dt = -\frac{1}{2}\cos t + C = -\frac{1}{2}\cos(2x-\frac{\pi}{3})+C.$$

Напомена. Често се сусрећемо са подинтегралним функцијама облика $f(ax+b)$. Сменом $ax+b=t$, функција се упрости. Међутим, није тешко наћи интеграл по дефиницији, без увођења смене (формула (27)), користећи се чињеноцом да је $(ax+b)'=a$. Нпр.

$\displaystyle\int \sin 2x dx = -\frac{1}{2}\cos 2x + C$, затим $\displaystyle\int e^{-x}dx = -e^{-x}+C$,

$\displaystyle\int \frac{dx}{5x-7} = \frac{1}{5}\ln|5x-7|+C$, $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 3x} = \frac{1}{3}\operatorname{tg} 3x + C$, итд.

б) $\displaystyle\int \frac{\ln x dx}{x}$ решавамо сменом: $\ln x = t \Rightarrow \dfrac{dx}{x} = dt$. Добијамо: $\displaystyle\int t dt = \frac{1}{2}t^2 + C = \frac{1}{2}\ln^2 x + C$.

в) Сменом $\arcsin x = t \Rightarrow \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = dt$, добијамо: $\displaystyle\int t^2 dt = \frac{1}{3}t^3 + C = \frac{1}{3}(\arcsin x)^3 + C$.

г) $\displaystyle\int \frac{(x-2)dx}{\sqrt{9-x^2}} = \int \frac{x dx}{\sqrt{9-x^2}} - 2\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$. Даље је, за први интеграл с десне стране једнакости смена: $9-x^2=t^2$, $t>0 \Rightarrow -2x dx = 2t dt \Rightarrow x dx = -t dt$, а за други уводимо смену $x=3z \Rightarrow dx = 3dz$. Тако добијамо: $\displaystyle -\int \frac{t dt}{\sqrt{t^2}} - 2\int \frac{3dz}{\sqrt{9-9z^2}} = -\int dt - 2\int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = -t - 2\arcsin z = -\sqrt{9-x^2} - 2\arcsin\frac{x}{3} + C$.

д) Сменом $x=t^6$, $t>0 \Rightarrow dx = 6t^5 dt$, добијамо: $\displaystyle\int \frac{t^6-t^2}{t^3}\cdot 6t^5 dt = \int (6t^8-6t^4)dt = \frac{6}{9}t^9 - \frac{6}{5}t^5 + C = \frac{2}{3}\sqrt[6]{x^9} - \frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5} + C = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} - \frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5} + C$.

ђ) $\displaystyle\int \frac{dx}{e^{-x}+e^x} = \int \frac{e^x\,dx}{1+e^{2x}}$. Сменом $e^x = t \Rightarrow e^x dx = dt$, добијамо: $\displaystyle\int \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arctg} t + C = \operatorname{arctg}(e^x) + C$.

е) Смена $x = 2\sin t,\ t \in \left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right], \Rightarrow dx = 2\cos t dt$, даје:

$$\int \sqrt{4-4\sin^2 t}\cdot 2\cos t dt = 4\int \sqrt{1-\sin^2 t}\cdot \cos t dt = 4\int |\cos t|\cos t dt =$$
$$= 4\int \cos^2 t dt = 4\int \frac{1+\cos 2t}{2} dt = 2\int dt + \int 2\cos 2t dt =$$
$$= 2t + \sin 2t + C = 2\arcsin\frac{x}{2} + 2\sin t\cos t + C = 2\arcsin\frac{x}{2} + x\sqrt{1-\frac{x^2}{4}} + C =$$
$$= 2\arcsin\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\sqrt{4-x^2} + C.^{*)}$$

ж) Уводимо смену $x = \operatorname{tg} t,\ t \in \left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow dx = \frac{dt}{\cos^2 t}$, па добијамо:
$$\int \frac{\frac{dt}{\cos^2 t}}{\sqrt{\left(1+\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}\right)^3}} = \int \frac{dt}{\cos^2 t\sqrt{\left(\frac{\cos^2 t+\sin^2 t}{\cos^2 t}\right)^3}} = \int \frac{dt}{\cos^2 t\frac{1}{\sqrt{\cos^6 t}}} =$$
$$= \int \cos t dt = \sin t + C = \frac{\operatorname{tg} t}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}} + C = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C.$$

з) $\displaystyle\int \frac{2dx}{\cos x} = \int \frac{2\cos x dx}{\cos^2 x} = \int \frac{2\cos x dx}{1-\sin^2 x}$. Сада уводимо смену: $\sin x = t \Rightarrow \cos x dx = dt$, па имамо: $\displaystyle\int \frac{2dt}{1-t^2} = \int \frac{1+t+1-t}{(1-t)(1+t)} dt =$
$$= \int \frac{dt}{1-t} + \int \frac{dt}{1+t} = -\ln|1-t| + \ln|1+t| + C = \ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right| + C.$$

и) Најпре ћемо трансформисати подинтегралну функцију:
$$\int \frac{\sin 2x dx}{(\sin^2 x)^3 + (\cos^2 x)^3 - \frac{1}{4}} =$$
$$= \int \frac{\sin 2x dx}{(\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x - \sin^2 x\cos^2 x + \cos^4 x) - \frac{1}{4}} =$$
$$= \int \frac{\sin 2x dx}{(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 3\sin^2 x\cos^2 x - \frac{1}{4}} = \int \frac{\sin 2x dx}{1 - \frac{3}{4}\cdot 4\sin^2 x\cos^2 x - \frac{1}{4}} =$$
$$= \int \frac{\sin 2x dx}{\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\sin^2 2x} = \frac{4}{3}\int \frac{\sin 2x dx}{1-\sin^2 2x} = \frac{4}{3}\int \frac{\sin 2x dx}{\cos^2 2x}.$$

Сада уводимо смену: $\cos 2x = t,\ x \in (0,\ \pi),\ \Rightarrow -2\sin 2x dx = dt$, па добијамо: $\displaystyle -\frac{2}{3}\int \frac{dt}{t^2} = \frac{2}{3t} + C = \frac{2}{3\cos 2x} + C$. ♠

---

*) Из $x = 2\sin t$ је $\sin t = \frac{x}{2}$, па је $\cos t = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{1-\frac{x^2}{4}}$.

Наведимо још два случаја интеграла, у којима морамо прво довести квадратни полином на канонични облик, па онда увести смену.

Пример 31. Израчунати интеграле:

$$а)\ \int \frac{dx}{x^2+2x+5};\quad б)\ \int \frac{x-3}{x^2-x+1}dx;\quad в)\ \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x-2}};\quad г)\ \int \frac{(x-4)dx}{\sqrt{6x-x^2}}.$$

Решење. *а)* $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+2x+1+4} = \int \frac{dx}{(x+1)^2+4} =$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{dx}{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2} + C.$$

(Увели смо смену: $\dfrac{x+1}{2} = t \Rightarrow dx = 2dt$.)

б) Дати интеграл ћемо написати у облику збира једног интеграла облика $\displaystyle\int \frac{f'(x)dx}{f(x)}$ и другог као под *а)*. Како је $(x^2-x+2)' = = 2x-1$, поступићемо на следећи начин.

$$\int \frac{x-3}{x^2-x+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x-6}{x^2-x+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{(2x-1)-5}{x^2-x+1}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}dx - \frac{5}{2}\int \frac{dx}{x^2-x+1} = \frac{1}{2}\ln|x^2-x+1| - \frac{5}{2}\int \frac{dx}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2-x+1| - \frac{5}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$$ (Овде смо имали смену:

$x - \dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}t \Rightarrow dx = \dfrac{\sqrt{3}}{2}dt$, па је: $\displaystyle -\frac{5}{2}\int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} =$

$$= -\frac{5}{2}\int \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}dt}{\frac{3}{4}t^2+\frac{3}{4}} = -\frac{5}{\sqrt{3}}\int \frac{dt}{t^2+1} = -\frac{5}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg} t = -\frac{5}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}.)$$

в) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x-2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-2)^2-6}} = \ln|x-2+\sqrt{x^2-4x-2}| + C,$

где је уведена смена: $x-2 = t \Rightarrow dx = dt$.

г) $\displaystyle\int \frac{x-3-1}{\sqrt{6x-x^2}}dx = -\int \frac{-x+3}{\sqrt{6x-x^2}}dx - \int \frac{dx}{\sqrt{9-9+6x-x^2}} = -\int dt-$

$$-\int \frac{dx}{\sqrt{9-(x-3)^2}} = -\sqrt{6x-x^2} - \int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = -\sqrt{6x-x^2} - \arcsin z + C =$$

$= -\sqrt{6x-x^2} - \arcsin\dfrac{x-3}{3} + C$. (Код првог интеграла смо имали смену: $6x-x^2 = t^2 \Rightarrow (3-x)dx = tdt$, а код другог $x-3 = 3z \Rightarrow dx = 3dz$.)

Научићемо и **методу парцијалне интеграције**. Полазећи од правила за диференцирање производа: $d(UV) = UdV + VdU$, добијамо: $UdV = d(UV) - VdU$. Интегралимо леву и десну страну једнакости: $\int UdV = \int d(UV) - \int VdU$, па је коначно:

$$\boxed{\int UdV = UV - \int VdU} \quad \text{(парцијална интеграција)} \tag{28}$$

Ова формула се користи најчешће када је U нека функција које нема у таблици интеграла, нпр. $U = \ln x$, $U = \arcsin x$, и сл, а њен извод је функција коју можемо интегралити (или се диференцирањем више пута подинтегрална функција своди на повољан облик *) Искуства из наредних примера помоћиће нам да то разјаснимо.

Пример 32. Методом парцијалне интеграције израчунати:
а) $\int x^2 e^x dx$; *б)* $\int 2x \ln^2 x dx$; *в)* $\int \ln \frac{x}{x-2} dx$;
г) $\int \frac{dx}{(1+x^2)^2}$; *д)* $\int (\arcsin x)^2 dx$; *ђ)* $\int 2x \operatorname{arctg} x dx$.

Решење. *а)* $I = \int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2\int x e^x dx =$

$$\begin{pmatrix} U = x^2; & dV = e^x dx \\ dU = 2xdx; & V = \int e^x dx = e^x \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} U = x; & dV = e^x dx \\ dU = dx; & V = e^x \end{pmatrix}$$

$$= x^2 e^x - 2xe^x + 2\int e^x dx = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + C = e^x(x^2 - 2x + 2) + C.$$

(Применили смо формулу (28) два пута: први пут је степен x^2 смањен на x^1, а у следећем кораку је нестало x под интегралом.)

б) $\int 2x \ln^2 x dx = x^2 \ln^2 x - \int x^2 \ln x \cdot \frac{dx}{x} = x^2 \ln^2 x - \int x \ln x dx =$

$$\begin{pmatrix} U = \ln^2 x; & dV = 2xdx \\ dU = 2\ln x \cdot \frac{dx}{x}; & V = 2\int xdx = x^2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} U = \ln x; & dV = xdx \\ dU = \frac{dx}{x}; & V = \frac{x^2}{2} \end{pmatrix}$$

$$= x^2 \ln^2 x - \frac{x^2}{2}\ln x + \frac{1}{2}\int xdx = x^2 \ln^2 x - \frac{x^2}{2}\ln x + \frac{x^2}{4} + C.$$

в) $\int \ln \frac{x}{x-2} dx = x \ln \frac{x}{x-2} + \int \frac{2xdx}{x(x-2)} = x \ln \frac{x}{x-2} + 2\int \frac{dx}{x-2} =$

$$\begin{pmatrix} U = \ln \frac{x}{x-2}; & dV = dx \\ dU = -\frac{2dx}{x(x-2)}; & V = \int dx = x \end{pmatrix}$$

---

*) Под *повољним обликом* подразумевамо функцију чији интеграл знамо да израчунамо.

$$= x\ln\frac{x}{x-2} + 2\ln|x-2| + C.$$

г) $\displaystyle\int \frac{1}{(1+x^2)^2}dx = \int \frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^2}dx = \int \frac{1+x^2}{(1+x^2)^2}dx - \int \frac{x^2dx}{(1+x^2)^2} =$

$$= \int \frac{dx}{1+x^2} - \int \frac{x\cdot xdx}{(1+x^2)^2} = \operatorname{arctg} x + \frac{x}{2(1+x^2)} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+x^2} =$$

$$\begin{pmatrix} U = x; & dV = \dfrac{xdx}{(1+x^2)^2} \\ dU = dx; & V = \int \dfrac{xdx}{(1+x^2)^2} = -\dfrac{1}{2(1+x^2)} \end{pmatrix}$$

$= \dfrac{1}{2}\operatorname{arctg} x + \dfrac{x}{2(1+x^2)} + C$. (Овде смо рачунали $\displaystyle\int \frac{xdx}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2} =$ $= -\dfrac{1}{2t}$, где је уведена смена $1+x^2 = t \Rightarrow 2xdx = dt$.)

д) $\displaystyle\int (\arcsin x)^2 dx = x(\arcsin x)^2 - \int 2\arcsin x \cdot \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = x(\arcsin x)^2 +$

$$\begin{pmatrix} U = (\arcsin x)^2; & dV = dx \\ dU = 2\arcsin x \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx; & V = x \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} U = 2\arcsin x; & dV = \dfrac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} \\ dU = \dfrac{2dx}{\sqrt{1-x^2}}; & V = -\sqrt{1-x^2} \end{pmatrix}$$

$$+2\sqrt{1-x^2}\arcsin x - \int 2dx = x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x - 2x + C.$$

(При другој парцијалној интеграцији имали смо: $V = \displaystyle\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} =$ $= -\displaystyle\int dt = -t$, где је уведена смена $\sqrt{1-x^2} = t \Rightarrow -\dfrac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = dt$.)

ђ) $\displaystyle\int 2x \operatorname{arctg} x dx = x^2 \operatorname{arctg} x - \int \frac{x^2}{1+x^2}dx = x^2\operatorname{arctg} x - \int \frac{x^2+1-1}{1+x^2}dx =$

$$\begin{pmatrix} U = \operatorname{arctg} x; & dV = 2xdx \\ dU = \dfrac{dx}{1+x^2}; & V = \int 2xdx = x^2 \end{pmatrix}$$

$$= x^2\operatorname{arctg} x - \int dx + \int \frac{dx}{1+x^2} = x^2 \operatorname{arctg} x - x + \operatorname{arctg} x + C. \quad \spadesuit$$

Пример 33. Израчунати интеграле:

а) $\displaystyle\int e^{\sqrt{x}}dx$ *б)* $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}dx$; *в)* $\displaystyle\int e^{-x}\sin 2xdx$;

г) $\displaystyle\int e^{\arcsin x}dx$; *д)* $\displaystyle\int e^{-x}\left(4\sqrt{x} + \frac{1}{x\sqrt{x}}\right)dx$.

Решење. *а)* Најпре уведемо смену: $x = t^2$, $t \geq 0 \Rightarrow dx = 2tdt$. Дати интеграл прелази у $\displaystyle\int 2te^t dt$, на који применимо парцијалну интеграцију.

$$\int 2te^t dt = 2te^t - 2\int e^t dt = 2te^t - 2e^t + C = 2e^t(t-1) + C = 2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1) + C$$

$$\begin{pmatrix} U = 2t; & dV = e^t dt \\ dU = 2dt; & V = \int e^t dt = e^t \end{pmatrix}$$

б) $$I = \int \sqrt{1-x^2}dx = \int \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$\begin{pmatrix} U = x; & dV = \dfrac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} \\ dU = dx; & V = -\sqrt{1-x^2} \end{pmatrix}$$

$= \arcsin x + x\sqrt{1-x^2} - \int \sqrt{1-x^2}dx = \arcsin x + x\sqrt{1-x^2} - I.$

После парцијалне интеграције добили смо полазни интеграл. Означимо га са I и тражени интеграл добијамо као решење једначине, по непознатој I: $I = \arcsin x + x\sqrt{1-x^2} - I.$

Одавде је: $I = \int \sqrt{1-x^2}dx = \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + C.$

в) $$I = \int e^{-x}\sin 2x dx = -e^{-x}\sin 2x + 2\int e^{-x}\cos 2x dx =$$

$$\begin{pmatrix} U = \sin 2x; & dV = e^{-x}dx \\ dU = 2\cos 2x dx; & V = -e^{-x} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} U = \cos 2x; & dV = e^{-x}dx \\ dU = -2\sin 2x dx; & V = -e^{-x} \end{pmatrix}$$

$$= e^{-x}\sin 2x - 2e^{-x}\cos 2x - 4\int e^{-x}\sin 2x dx = -e^{-x}(\sin 2x + 2\cos 2x) - 4I.$$

Као у претходном случају, тражени интеграл је решење једначине: $I = -e^{-x}(\sin 2x + 2\cos 2x) - 4I$, а то је:

$$I = \int e^{-x}\sin 2x dx = -\frac{1}{5}e^{-x}(\sin 2x + 2\cos 2x) + C$$

г) $$I = \int e^{\arcsin x}dx = xe^{\arcsin x} - \int e^{\arcsin x} \cdot \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = xe^{\arcsin x} +$$

$$\begin{pmatrix} U = e^{\arcsin x}; & dV = dx \\ dU = e^{\arcsin x} \cdot \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}; & V = x \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} U = e^{\arcsin x}; & dV = \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} \\ & V = -\sqrt{1-x^2} \end{pmatrix}$$

$$+\sqrt{1-x^2}e^{\arcsin x} - \int \sqrt{1-x^2}e^{\arcsin x} \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = e^{\arcsin x}(x + \sqrt{1-x^2}) -$$

$$-\int e^{\arcsin x}dx = e^{\arcsin x}(x + \sqrt{1-x^2}) - I.$$

Као у претходном задатку, добијамо једначину по непознатој I, која даје решење: $I = \int e^{\arcsin x}dx = \frac{x+\sqrt{1-x^2}}{2} \cdot e^{\arcsin x} + C.$

$$д)\ I=\int e^{-x}\left(4\sqrt{x}+\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)dx=4\int e^{-x}\sqrt{x}dx+\int\frac{e^{-x}dx}{x\sqrt{x}}=I_1+I_2.$$

Рачунамо I_1: $I_1=4\int e^{-x}\sqrt{x}dx=-4\sqrt{x}e^{-x}+2\int e^{-x}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}dx=$

$$\begin{pmatrix} U=4\sqrt{x}; & dV=e^{-x}dx \\ dU=\frac{2}{\sqrt{x}}dx; & V=-e^{-x}\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} U=\frac{2}{\sqrt{x}}=2x^{-\frac{1}{2}}; & dV=e^{-x}dx \\ dU=-x^{-\frac{3}{2}}dx=-\frac{dx}{x\sqrt{x}}; & V=-e^{-x}\end{pmatrix}$$

$$=-4\sqrt{x}e^{-x}-\frac{2}{\sqrt{x}}e^{-x}-\int\frac{e^{-x}dx}{x\sqrt{x}}=-2e^{-x}(2\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}})-I_2.$$

Према томе: $I=\int e^{-x}\left(4\sqrt{x}+\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)dx=-2e^{-x}\left(2\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)-I_2+I_2$,

тј. $\int e^{-x}\left(4\sqrt{x}+\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)dx=-2e^{-x}\left(2\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)+C.$ ♠

Проблем одређивања непознате функције може бити задат у виду тзв. **диференцијалне једначине**. То је веза облика: $f(x,\ y,\ y')=0$. Диференцијалне једначине могу бити изузетно сложене и о њима постоји веома обимна теорија. Ми ћемо се позабавити само најједноставнијом: *диференцијалном једначином која раздваја променљиве*. То је једначина облика:

(29) $$\boxed{y'=f(x)\cdot g(y)}$$

Решавамо је једноставно. Како је $y'=\frac{dy}{dx}$, то дата једначина прелази у облик: $\frac{dy}{g(y)}=f(x)dx$, одакле је: $\int\frac{dy}{g(y)}=\int f(x)dx+C$, где је C *интеграциона константа*. Тако добијемо тзв. *опште решење* диференцијалне једначине. Ако уместо C ставимо неку одређену вредност, добићемо тзв. *партикуларно решење*.

Пример 34. Решити диференцијалне једначине:
а) $\operatorname{tg}x\sin^2 y+\cos^2 x\operatorname{ctg}y y'=0$; *б)* $yy'=xe^{x^2+y^2}$; *в)* $y'=\sin(x+y)-1$.

Решење. *а)* Стављајући $y'=\frac{dy}{dx}$, раздвојимо променљиве (x на десну и y на леву страну) и добијемо: $-\frac{\operatorname{ctg}ydy}{\sin^2 y}=\frac{\operatorname{tg}xdx}{\cos^2 x}$, одакле је $-\int\frac{\operatorname{ctg}ydy}{\sin^2 y}=\int\frac{\operatorname{tg}xdx}{\cos^2 x}$. Стављајући на левој страни једнакости: $\operatorname{ctg}y=z\Rightarrow-\frac{dy}{\sin^2 y}=dz$ и на десној страни: $\operatorname{tg}x=t\Rightarrow\frac{dx}{\cos^2 x}=dt$, добићемо: $2\int zdz=2\int tdt$, па је $z^2=t^2+C$, односно $\operatorname{ctg}^2 y=\operatorname{tg}^2 x+C$, што представља опште решење дате једначине.

б) $y\dfrac{dy}{dx} = xe^{x^2} \cdot e^{y^2} \Rightarrow ye^{-y^2}dy = xe^{x^2}dx$. Одавде је $e^{-y^2} = -e^{x^2} + C$, односно $e^{x^2} + e^{-y^2} = C$ - то је опште решење. (Код интеграљења смо увели смене: $-y^2 = z \Rightarrow -2ydy = dz$ и $x^2 = t \Rightarrow 2xdx = dt$.)

в) Најпре уведемо смену: $x + y = z \Rightarrow 1 + y' = z'$, тј. $y' = z' - 1$, па дата једначина прелази у облик: $z' = \sin z$, одакле је $\dfrac{dz}{\sin z} = dx$. Решење је $\displaystyle\int \frac{dz}{\sin z} = x + C$. Како је $\displaystyle\int \frac{dz}{\sin z} = \int \frac{\sin z dz}{\sin^2 z} = \int \frac{\sin z dz}{1-\cos^2 z} = \int \frac{dt}{t^2-1}$, за $\cos z = t$, то је даље: $\displaystyle\int \frac{dz}{\sin z} = \frac{1}{2}\int \frac{2dt}{t^2-1} = \frac{1}{2}\int \frac{1+t+1-t}{(t-1)(t+1)}dt = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t-1} - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t+1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| = \ln\sqrt{\frac{1-\cos z}{1+\cos z}} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{z}{2}\right|$. Према томе, опште решење дате једначине је: $\ln\left|\operatorname{tg}\dfrac{x+y}{2}\right| = x + C$ или $\operatorname{tg}\dfrac{x+y}{2} = C_1e^x$. (Овде је $C_1 = e^C$.) ♠

Ради увежбавања читаоцу се препоручује да самостално реши следеће задатке.

ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

257. Израчунати следеће интеграле:

а) $\displaystyle\int \frac{2x+3}{2x+1}dx$; *б)* $\displaystyle\int \frac{xdx}{(x+1)^2}$; *в)* $\displaystyle\int \frac{x^2dx}{x^2+2}$; *г)* $\displaystyle\int \frac{x^2-5x+6}{x^2+4}dx$;

д) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arctg}\frac{x}{2}}{4+x^2}dx$; *ђ)* $\displaystyle\int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}}dx$; *е)* $\displaystyle\int \frac{x^3}{4-x^2}dx$; *ж)* $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{7-5x^2}}$;

з) $\displaystyle\int e^{-x^2-1}xdx$; *и)* $\displaystyle\int \frac{e^{\frac{1}{x}}dx}{x^2}$; *ј)* $\displaystyle\int \operatorname{tg} xdx$; *к)* $\displaystyle\int \sin^4 xdx$;

л) $\displaystyle\int \sin 2x\cos 4xdx$; *љ)* $\displaystyle\int \operatorname{tg}^3 xdx$; *м)* $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{1+\ln x}}{x}dx$;

н) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\cos^2 x}$; *њ)* $\displaystyle\int \frac{xdx}{x^2-7x+13}$; *о)* $\displaystyle\int \frac{2x-8}{\sqrt{1-x-x^2}}dx$.

258. Методом парцијалне интеграције израчунати интеграле:

а) $\displaystyle\int \frac{x^2dx}{(1+x^2)^2}$; *б)* $\displaystyle\int \frac{xdx}{e^x}$; *в)* $\displaystyle\int x\sin x\cos xdx$;

г) $\displaystyle\int e^{2x}\cos xdx$; *д)* $\displaystyle\int \arcsin xdx$; *ђ)* $\displaystyle\int \sin(\ln x)dx$;

е) $\displaystyle\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}dx$; *ж)* $\displaystyle\int \frac{\ln(\ln x)}{x}dx$; *з)* $\displaystyle\int \frac{x^2dx}{\sqrt{9-x^2}}$.

259. Решити диференцијалне једначине:

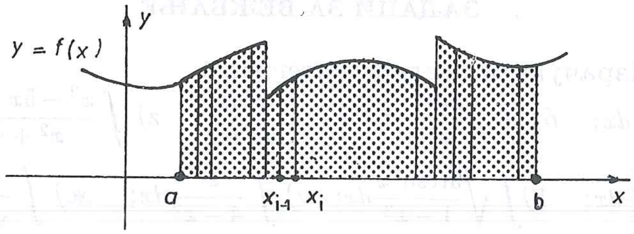
а) $xy' + y = y^2$; *б)* $xyy' + x^2 = 1$;
в) $xy^2 + x + (x^2y - y)y' = 0$; *г)* $2x - y + (4x - 2y + 3)y' = 0$.

4.6 ОДРЕЂЕНИ ИНТЕГРАЛ

Уочимо функцију $y = f(x)$, која је на интервалу $[a,\ b]$ ограничена, са коначно много прекида. Извршимо поделу интервала $[a,\ b]$ на n интервала, као на сл. 30. Тада **одређеним интегралом**, у ознаци $\int\limits_a^b f(x)dx$, називамо следећу граничну вредност:

(30) $$\boxed{\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{n\to+\infty \\ max(x_i - x_{i-1}) \to 0}} \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) \cdot f(\xi_i)}$$ (одређен интеграл)

где је $\xi_i \in [x_{i-1},\ x_i]$. Ако ова граница постоји и коначна је, кажемо да је функција $y = f(x)$ *интеграбилна* на интервалу $[a,\ b]$.



Сл. 30

Може да се докаже следећа веза између одређеног и неодређеног интеграла:

(31) $$\boxed{\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)}$$ (Њутн-Лајбницова формула)

где је $F(x)$ примитивна функција функције $f(x)$. Поступак решавања одређеног интеграла формулом (31) иде овако:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

До идеје о одређеном интегралу се дошло при израчунавању површина површи ограничених кривим линијама, пре свега при израчунавању површине круга.

Вредност интеграла $\int_a^b f(x)dx$, према сл. 30, је површина одређена делом криве $y = f(x)$ и одсечком $[a,\ b]$ осе Ox (на сл. 30 осенчено).

Одређен интеграл се одликује следећим особинама:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx \ ; \qquad \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

$\int_a^b Cf(x)dx = C \cdot \int_a^b f(x)dx$, C је константа;

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$, где је $m \leq f(x) \leq M$, $x \in [a,\ b]$.

Пример 35. Израчунати интеграле

$a)$ $\int_1^2 (x^2 - 2x + 5)dx$; $б)$ $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{ctg} x dx$; $в)$ $\int_{-\pi}^{\pi} \sin x dx$.

Решење. Користићемо се формулом (31).

$$a)\ \int_1^2 (x^2 - 2x + 5)dx = \left(\frac{x^3}{3} - x^2 + 5x\right)\Big|_1^2 = \frac{2^3}{3} - 2^2 + 5 \cdot 2 - \left(\frac{1^3}{3} - 1^2 + 5 \cdot 1\right) =$$

$$= \frac{8}{3} - 4 + 10 - \frac{1}{3} + 1 - 5 = \frac{13}{3}.$$

$$б)\ \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{\sin x} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin x)' dx}{\sin x} = \ln(\sin x)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \ln(\sin\frac{\pi}{2}) - \ln(\sin\frac{\pi}{6}) =$$

$$= \ln 1 - \ln\frac{1}{2} = \ln 2.$$

$$в)\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin x dx = (-\cos x)\Big|_{-\pi}^{\pi} = -\cos\pi + \cos(-\pi) = -(-1) + (-1) = 0.^{*)}$$ ♠

Приликом израчунавања одређених интеграла упражњаваће-

---

*) За сваку непарну функцију $f(x)$ је $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.

мо сва корисна искуства из рада са неодређеним интегралима, уз неопходне измене.

Тако, *парцијална интеграција код одређеног интеграла*, у складу са Њутн-Лајбницовом формулом, врши се на следећи начин:

$$\boxed{\int_a^b U\,dV = U\cdot V\Big|_a^b - \int_a^b V\,dU} \tag{32}$$

Приликом *смене променљиве* морамо водити рачуна да нова променљива на интервалу $x \in [a,\ b]$ испуњава услове у погледу дефинисаности, диференцијабилности и инверзибилности. *Заменом променљиве обавезно се мењају и границе.* Ако је, на пример, интервал интеграције $[1,\ 2]$, не може се увести смена $x=\sin t$, јер $\sin t \notin (1,\ 2]$, али, могућа је смена $x = 2\sin t$, и сл.

Код неодређеног интеграла, ако смо увели нову променљиву, морали смо на крају да се вратимо на првобитну променљиву x. Код одређеног интеграла то није неопходно.

Пример 36.Израчунати интеграле.

а) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^3 x dx$; *б)* $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x dx}{1+e^{2x}}$; *в)* $\displaystyle\int_0^3 \sqrt{x+1}dx$;

г) $\displaystyle\int_0^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}dx$; *д)* $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{5+3\cos x}$; *ђ)* $\displaystyle\int_0^{2\sqrt{3}} \frac{dx}{(4+x^2)^{\frac{3}{2}}}$.

Решење. *а)* $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 x \sin x dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (1-\cos^2 x)\sin x dx = \int_1^{\frac{1}{2}} (t^2-1)dt =$

$\displaystyle= \left(\frac{t^3}{3}-t\right)\Big|_1^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{\frac{1}{8}}{3}-\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{3}-1\right) = \frac{5}{24}$. (Увели смо смену: $\cos x = t \Rightarrow$ $\Rightarrow -\sin x dx = dt$. Даље, како је $\cos 0 = 1$ и $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, то су за t одређене границе: $t_1 = 1,\ t_2 = \frac{1}{2}$.)

б) Уводећи смену: $e^x = t$, добијамо $e^x dx = dt$. Границе за t добијамо из: $e^0 = t_1 \Rightarrow t_1 = 1$ и $e^1 = t_2 \Rightarrow t_2 = e$. Тако добијамо:

$$\int_0^1 \frac{e^x dx}{1+e^{2x}} = \int_1^e \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arctg} t\Big|_1^e = \operatorname{arctg} e - \operatorname{arctg} 1 = \operatorname{arctg} e - \frac{\pi}{4}.$$

в) Смена је: $x+1 = t^2 \Rightarrow dx = 2tdt$, затим $t_1 = \sqrt{0+1} = 1$ и

$t_2=\sqrt{3+1}=2$. Тако добијамо: $\int\limits_0^3\sqrt{x+1}dx=\int\limits_1^2 t\cdot 2tdt=\int\limits_1^2 2t^2dt=$

$=\frac{2}{3}t^3\Big|_1^2=\frac{16}{3}-\frac{2}{3}=\frac{14}{3}$.

г) Уводимо смену: $e^x-1=t^2,\ t\geq 0\Rightarrow e^x=t^2+1\Rightarrow e^xdx=2tdt$. Затим: $e^0=t^2+1\Rightarrow t=0$ и $e^{\ln 5}=t^2+1\Rightarrow 5=t^2+1\Rightarrow t^2=4\Rightarrow t=2$. Према томе: $\int\limits_0^{\ln 5}\frac{e^x\sqrt{e^x+1}dx}{e^x+3}=\int\limits_0^2\frac{t\cdot 2tdt}{t^2+4}=\int\limits_0^2\frac{(2t^2+8)-8}{t^2+4}dt=\int\limits_0^2 2dt-$

$-8\int\limits_0^2\frac{dt}{t^2+4}=2t\Big|_0^2-4\operatorname{arctg}\frac{t}{2}\Big|_0^2=4-0-4(\operatorname{arctg}1-\operatorname{arctg}0)=4-4\cdot\frac{\pi}{4}=4-\pi$.

д) Уводимо смену: $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t\Rightarrow x=2\operatorname{arctg}t\Rightarrow dx=\frac{2dt}{1+t^2}$. Даље је: $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\operatorname{tg}0=0$ и $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1$, па добијамо: $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{5+3\cos x}=$

$$=\int\limits_0^1\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{5+\frac{3(1-t^2)}{1+t^2}}=\int\limits_0^1\frac{dt}{4+t^2}=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{2}\Big|_0^1=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{2}.$$

ђ) (Уводимо смену: $x=2\operatorname{tg}t\Rightarrow dx=\frac{2dt}{\cos^2 t}$. Даље је $4+x^2=4+4\operatorname{tg}^2 t=4\left(1+\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}\right)=4\cdot\frac{\cos^2 t+\sin^2 t}{\cos^2 t}=\frac{4}{\cos^2 t}$ и из $0=2\operatorname{tg}t$ је $t=0$, а из $2\sqrt{3}=2\operatorname{tg}t$ је $t=\frac{\pi}{3}$, па добијемо: $\int\limits_0^{2\sqrt{3}}\frac{dx}{(4+x^2)^{\frac{3}{2}}}=\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\frac{2dt}{\cos^2 t}}{\left(\frac{4}{\cos^2 t}\right)^{\frac{3}{2}}}=$

$$=\frac{1}{4}\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\cos tdt=\frac{1}{4}\sin t\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-0\right)=\frac{\sqrt{3}}{8}.\ \spadesuit$$

Сада ћемо решити неколико одређених интеграла парцијалном интеграцијом..

Пример 37. Израчунати интеграле:

а) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}x\cos^2 xdx$; *б)* $\int\limits_1^{e}\ln xdx$; *в)* $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\cos 2xdx$;

Решење. *а)* $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos^2 x dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} x(1+\cos 2x)dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} xdx+$

$$+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos 2xdx = \frac{x^2}{4}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{x}{4}\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin 2xdx = \frac{\pi^2}{64}+\frac{\pi}{16}+\frac{1}{8}\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$\begin{pmatrix} U = x; & dV = \cos 2xdx \\ dU = dx; & V = \frac{1}{2}\sin 2x \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\pi^2}{64}+\frac{\pi}{16}-\frac{1}{8}.$$

б) $\displaystyle\int_1^e \ln xdx = x\ln x\Big|_1^e - \int_1^e dx = e\ln e - 1\cdot\ln 1 - x\Big|_1^e = e-(e-1) = 1.$

$$\begin{pmatrix} U = \ln x; & dV = dx \\ dU = \dfrac{dx}{x}; & V = x \end{pmatrix}$$

в) $\displaystyle I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\cos 2xdx = \frac{1}{2}e^x\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\sin 2xdx =$

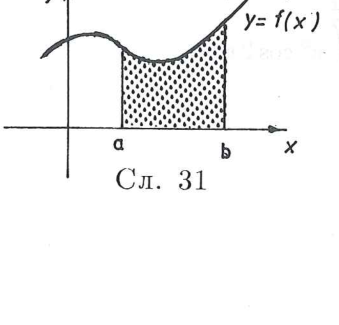
$$\begin{pmatrix} U = e^x; & dV = \cos 2xdx \\ dU = e^x dx; & V = \int\cos 2xdx = \frac{1}{2}\sin 2x \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} U = e^x; & dV = \sin 2xdx \\ dU = e^x dx; & V = -\frac{1}{2}\cos 2x \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{2}}\sin\pi - \frac{1}{2}e^0\sin 0 + \frac{1}{4}e^x\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\cos 2xdx =$$

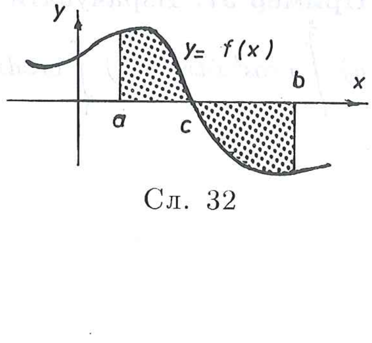
$= 0+\frac{1}{4}e^{\frac{\pi}{2}}\cdot\cos\pi-\frac{1}{4}e^0\cos 0-\frac{1}{4}I.$ Тражени интеграл је решење једначине: $I = -\frac{1}{4}e^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}I$, односно: $I = -\frac{1}{5}(e^{\frac{\pi}{2}}+1)$. ♠

Користећи се дефиницијом одређеног интеграла, добићемо следеће, веома корисне формуле.

Површина равне површи, ограничене осом $0x$, кривом $y = f(x)$ и правим $x = a$ и $x = b$, дефинише се формулом:



Сл. 31



Сл. 32

$$\boxed{P=\int\limits_a^b |f(x)|dx} \quad \text{(површина равне површи)} \tag{33}$$

Према сл. 31 $P=\int\limits_a^b f(x)dx$, а према сл. 32 $P=\int\limits_a^c f(x)dx-\int\limits_c^b f(x)dx$.

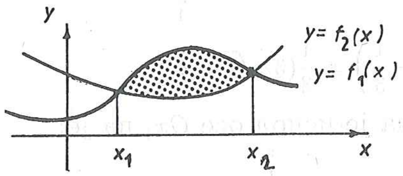
Ако је површ ограничена са две криве, као на сл. 33, тада је

$$\boxed{P=\int\limits_{x_1}^{x_2} (f_1(x)-f_2(x))dx} \tag{34}$$

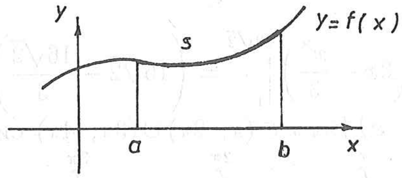
где су границе x_1 и x_2 решења једначине $f_1(x)=f_2(x)$.

Дужину s лука криве $y=f(x)$ између тачака чије су апсцисе a и b, дефинишемо преко интеграла:

$$\boxed{s=\int\limits_a^b \sqrt{1+y'^2}dx} \quad \text{(дужина лука криве)} \tag{35}$$



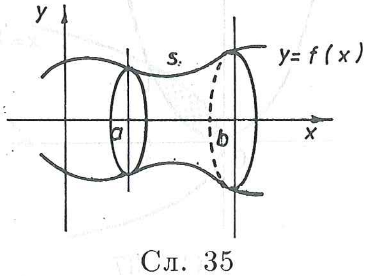
Сл. 33



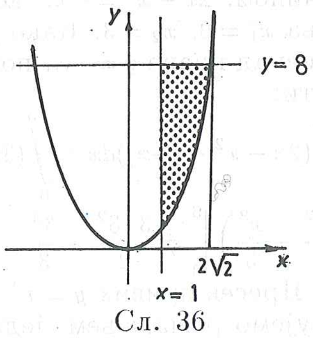
Сл. 34

Површину P површи (омотача), која настаје обртањем лука криве $y=f(x)$, око осе Ox, сл. 35, дефинишемо са:

$$\boxed{P=2\pi\int\limits_a^b |y|\,\sqrt{1+y'^2}dx} \quad \text{(површина обртне површи)} \tag{36}$$



Сл. 35



Сл. 36

Запремину тела, ограниченог обртном површи из формуле (36) и двама круговима (полупречника $f(a)$ и $f(b)$), сл. 35, дефинишемо:

(37) $$\boxed{V = \pi \int_a^b y^2 dx} \quad \text{(запремина обртног тела)}$$

Пример 38. Израчунати површине површи, ограничених датим линијама.

а) $y = 4x - x^2$, $y = 0$; *б)* $y = x^2$, $y = 8$, $x \geq 1$;
в) $y = \sin x$, $y = 0$, $0 \leq x \leq 4\pi$; *г)* $y = 2x - x^2$, $y = -x$;
д) $y = x^2$, $x = y^2$; *ђ)* $x^2 + y^2 = r^2$.

Решење. *а)* $4x - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 4$. Дата површ је одсечак параболе: $P = \int_0^4 (4x - x^2)dx = \left(2x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^4 = \left(2 \cdot 4^2 - \frac{4^3}{3}\right) - \left(2 \cdot 0^2 - \frac{0^3}{3}\right) = \frac{32}{3}$.

б) На сл. 36 је дата површ осенчена. Пресек параболе $y = x^2$ и праве $y = 8$ добијамо из $x^2 = 8 \Rightarrow x = 2\sqrt{2}$. Дакле: $P = \int_1^{2\sqrt{2}} (8 - x^2)dx =$

$$= \left(8x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_1^{2\sqrt{2}} = \left(16\sqrt{2} - \frac{16\sqrt{2}}{3}\right) - \left(8 - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}(32\sqrt{2} - 23).$$

в) За $x \in (\pi, 2\pi) \cup (3\pi, 4\pi)$ синусоида је испод осе Ox, па је:

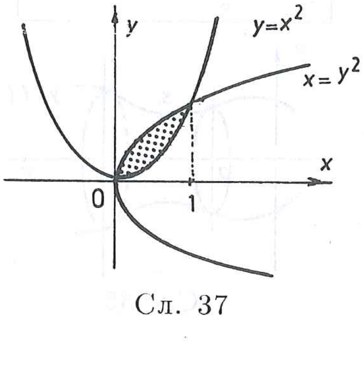
$$P = \int_0^\pi \sin x dx - \int_\pi^{2\pi} \sin x dx + \int_{2\pi}^{3\pi} \sin x dx - \int_{3\pi}^{4\pi} \sin x dx = 4\int_0^\pi \sin x dx =$$

$$= -4\cos x\Big|_0^\pi = -4(\cos\pi - \cos 0) = 8.$$

г) Пресечне тачке параболе $y = 2x - x^2$ и праве $y = -x$, одређујемо једначином: $2x - x^2 = -x$, која има решења $x_1 = 0$, $x_2 = 3$. Како је парабола изнад праве $y = -x$, површина ће бити:

$$P = \int_0^3 (2x - x^2 - (-x))dx = \int_0^3 (3x - x^2)dx =$$

$$= \left(\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^3 = \frac{3 \cdot 3^2}{2} - \frac{3^3}{3} = \frac{9}{2}.$$



Сл. 37

д) Пресек кривих $y = x^2$ и $x = y^2$ одређујемо решавањем једначине:

$x = (x^2)^2$, односно $x - x^4 = 0$. Њена решења су $x = 0$ и $x = 1$, сл. 37. Према томе:

$$P = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)dx = \left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right) - 0 = \frac{1}{3}.$$

ђ) Дата крива је круг. Из једначине је $y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$, па је $P = 4\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}dx$. Уведимо смену: $x = r\sin t \Rightarrow dx = r\cos t dt$, па из $0 = r\sin t$ и $r = r\sin t$, добијамо границе за t: $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Сада је

$$P = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2 - r^2\sin^2 t} \cdot r \cdot \cos t dt = 4r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = 2r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t)dt =$$

$$= 2r^2\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2r^2\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\sin\pi\right) - 2r^2\left(0 + \frac{1}{2}\sin 0\right) = r^2\pi. \quad ♠$$

Пример 39. Израчунати дужину s лука криве (ако је крива затворена, онда обим криве).

а) $y^2 = 4x$, $\frac{1}{2} \le x \le 1$, $y > 0$; *б)* $y = \ln x$, $1 \le x \le \sqrt{3}$; *в)* $x^2 + y^2 = r^2$.

Решење. *а)* $y = 2\sqrt{x}$, па је $y' = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Према томе:

$$s = \int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{1 + \frac{1}{x}}dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{\frac{x+1}{x}}dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{x+1}{\sqrt{x(x+1)}}dx = \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{2x+2}{\sqrt{x^2+x}}dx =$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}dx + \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+x}} = \sqrt{x^2+x}\Big|_{\frac{1}{2}}^1 + \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}}} =$$

$$= \sqrt{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\ln\left|x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2+x}\right|\Bigg|_{\frac{1}{2}}^1 = \sqrt{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{2} + \sqrt{2}\right) -$$

$$-\frac{1}{2}\ln\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \ln\sqrt{\frac{3+2\sqrt{2}}{2+\sqrt{3}}}.$$

б) $y' = \frac{1}{x}$, па је $s = \int_1^{\sqrt{3}} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}dx = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}dx$. Уведимо смену: $x^2+1 = t^2 \Rightarrow xdx = tdt$. За $x = 1$ је $t = \sqrt{2}$, а за $x = \sqrt{3}$ је $t = 2$. Дакле:

$$s = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2} \cdot xdx = \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{t^2 dt}{t^2-1} = \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{(t^2-1)+1}{t^2-1}dt = \int_{\sqrt{2}}^2 dt + \frac{1}{2}\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{2dt}{t^2-1} =$$

$= t\Big|_{\sqrt{2}}^{2} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\Big|_{\sqrt{2}}^{2}$ *) $= 2-\sqrt{2}-\dfrac{1}{2}\ln 3 - \ln(\sqrt{2}-1)$.

в) Обим круга рачунаћемо као $4s$, где је s лук између тачака $(r,\ 0)$ и $(0,\ r)$. Из једначине круга је $y=\sqrt{r^2-x^2}$, па је $y' = \dfrac{-x}{\sqrt{r^2-x^2}}$ и $1+y'^2 = 1+\dfrac{x^2}{r^2-x^2} = \dfrac{r^2-x^2+x^2}{r^2-x^2} = \dfrac{r^2}{r^2-x^2}$. Према томе:

$$O = 4\int_0^r \sqrt{\frac{r^2}{r^2-x^2}}dx = 4r\int_0^r \frac{dx}{\sqrt{r^2-x^2}} = 4r\arcsin\frac{x}{r}\Big|_0^r = 4r(\arcsin 1 -$$
$$-\arcsin 0) = 4r\cdot\tfrac{\pi}{2} = 2r\pi.$$ (Видети *пример* 31 *г)*).

Пример 40. Израчунати запремину тела одређеног ротацијом датог лука око осе Ox.

а) $y=\sin^2 x,\ x\in[0,\ \pi]$; *б)* $y=x^2-2x,\ y\le 0$; *в)* $y=\dfrac{1}{1+x^2},\ x\in[0,\ 1]$.

Решење. *а)* $V=\pi\displaystyle\int_0^\pi \sin^4 x dx = \pi\int_0^\pi\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx =$

$$=\frac{\pi}{4}\int_0^\pi(1-2\cos 2x+\cos^2 2x)dx = \frac{\pi}{4}\int_0^\pi dx - \frac{\pi}{4}\int_0^\pi 2\cos 2x dx + \frac{\pi}{4}\int_0^\pi \frac{1+\cos 4x}{2}dx =$$

$$=\frac{\pi}{4}x\Big|_0^\pi - \frac{\pi}{4}\sin 2x\Big|_0^\pi + \frac{\pi}{8}\int_0^\pi dx + \frac{\pi}{8}\int_0^\pi \cos 4x dx = \frac{\pi^2}{4} - 0 + \frac{\pi}{8}x\Big|_0^\pi + \frac{\pi}{32}\sin 4x\Big|_0^\pi =$$

$$=\frac{\pi^2}{4}+\frac{\pi^2}{8}=\frac{3\pi^2}{8}.$$

б) $y=0 \Rightarrow x^2-2x=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=2$. Према томе:

$$V=\pi\int_0^2(x^2-2x)^2dx = \pi\int_0^2(x^4-4x^3+4x^2)dx = \pi\left(\frac{x^5}{5}-x^4+\frac{4x^3}{3}\right)\Big|_0^2 = \frac{16\pi}{15}.$$

в) $V=\pi\displaystyle\int_0^1\frac{1}{(1+x^2)^2}dx = \pi\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+\frac{x}{2(1+x^2)}\right)\Big|_0^1 =$

$$=\pi\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}1+\frac{1}{2(1+1)}\right)-\pi\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}0+\frac{0}{2}\right)=\pi\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4}+\frac{1}{4}\right)=\frac{\pi^2}{8}+\frac{\pi}{4}.$$

(Видети решење *примера* 32 *г)*). ♠

Пример 41. Израчунати површину омотача обртног тела, које настаје ротацијом датог лука око осе Ox.

а) $y=\sin x,\ x\in[0,\ \pi]$; *б)* $y=\dfrac{1}{3}(3-x)\sqrt{x},\ x\in[0,\ 3]$.

*) Видети *пример* 30. *з)*.

Решење. *а)* Како је $y' = \cos x$, то је, према формули (36), површина омотача: $P = 2\pi\int\limits_0^{\pi}\sin x\sqrt{1+\cos^2 x}dx$. Уведемо смену: $\cos x = t \Rightarrow -\sin x dx = dt$, $t_1 = \cos 0 = 1$ и $t_2 = \cos\pi = -1$, па је:

$$P = -2\pi\int\limits_1^{-1}\sqrt{1+t^2}dt = 2\pi\int\limits_{-1}^{1}\frac{1+t^2}{\sqrt{1+t^2}}dt = 2\pi\int\limits_{-1}^{1}\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} + 2\pi\int\limits_{-1}^{1}\frac{t^2dt}{\sqrt{1+t^2}} =$$

$$\begin{pmatrix} U = t; & dV = \frac{tdt}{\sqrt{1+t^2}} \\ dU = dt; & V = \sqrt{1+t^2} \end{pmatrix}$$

$= 2\pi\ln|t+\sqrt{1+t^2}|\Big|_{-1}^{1} + 2\pi t\sqrt{1+t^2}\Big|_{-1}^{1} - 2\pi\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{1+t^2}dt$. Последњи интеграл је P, па P налазимо из једначине:

$P = 2\pi(\ln(1+\sqrt{2}) - \ln(\sqrt{2}-1)) + 2\pi(\sqrt{2}+\sqrt{2}) - P$, односно из:

$$2P = 2\pi\ln\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} + 4\pi\sqrt{2} \Rightarrow P = 2\pi(\ln(1+\sqrt{2}) + \sqrt{2}).$$

$$\left(\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}\cdot\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} = (\sqrt{2}+1)^2\right).$$

б) Како је $y' = -\frac{1}{3}\sqrt{x} + \frac{3-x}{6\sqrt{x}} = \frac{1-x}{2\sqrt{x}}$, то је

$$P = 2\pi\int\limits_0^3\frac{1}{3}(3-x)\cdot\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{(1-x)^2}{4x}}dx = \frac{2\pi}{3}\int\limits_0^3(3-x)\sqrt{x}\sqrt{\frac{1+2x+x^2}{4x}}dx =$$

$$= \frac{2\pi}{3}\int\limits_0^3(3-x)\sqrt{x}\cdot\frac{x+1}{2\sqrt{x}}dx = \frac{\pi}{3}\int\limits_0^3(3-x)(x+1)dx = \frac{\pi}{3}\int\limits_0^3(2x+3-x^2)dx =$$

$$= \frac{\pi}{3}\left(x^2+3x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^3 = \frac{\pi}{3}(9+9-9) = 3\pi. \quad ♠$$

ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

260. Израчунати одређене интеграле:

а) $\int\limits_1^5\frac{dx}{\sqrt{2x-1}}$; *б)* $\int\limits_0^a\sqrt{a^2-x^2}dx$; *в)* $\int\limits_0^1\operatorname{arctg} x dx$;

г) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{1+2\sin^2 x}$; *д)* $\int\limits_0^1 x^3e^{x^2}dx$; *ђ)* $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos x dx$.

261. Израчунати површину површи ограничене линијама.

а) $y = x(3-x)^2,\ y = 0$; *б)* $x^2 - 12y = 0,\ x - 2y = 0$;
в) $y^2 = 4x,\ y^2 = x^3$; *г)* $y^2 = 2x + 1,\ y = x - 1$; *д)* $y = x^3,\ y = 4x$.

262. Израчунати дужину лука криве

а) $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x,\ x \in [1,\ e]$; *б)* $y = \ln(x + \sqrt{x^2-1}),\ x \in [\sqrt{2},\ \sqrt{5}]$;
в) $y = \frac{\sqrt{x}}{3}(x-3),\ x \in [0,\ 3]$; *г)* $y = \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin x,\ x \in [0,\ 1]$.

263. Израчунати површину омотача обртног тела, које настаје ротацијом датог лука око осе Ox.

а) $y = \frac{1}{4}(x^2 - 2\ln x),\ x \in [1,\ e]$; *б)* $y = \frac{\sqrt{x}}{6}(x - 12),\ x \in [0,\ 12]$;
в) $y = \ln(\sqrt{x^2-1} - x),\ x \in [-2,\ -1]$; *г)* $y = \cos x,\ x \in [0,\ \frac{\pi}{2}]$.

264. Израчунати запремину обртног тела одређеног ротацијом лука криве око осе Ox:

а) $y^2 = x,\ x \in [0,\ 1]$; *б)* $y = \sin x,\ x \in [0,\ \pi]$;
в) $y = \operatorname{tg} x,\ x \in [0,\ \frac{\pi}{4}]$; *г)* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

265. Израчунати запремину тела које настаје ротацијом око осе Ox равне површи ограничене линијама.

а) $y = x^2$ и $y = x$; *б)* $y^2 = 4x$ и $y^2 = x^3$; *в)* $y^2 = 8x$ и $y = x^2$.

4.7 ПРИМЕРИ МАТУРСКИХ ПИСМЕНИХ ЗАДАТАКА

На крају, пошто смо утврдили најважније теме из сва четири разреда средње школе, за оне који полажу на матури испит из математике, дајемо три угледне варијанте писмених задатака. Оне ће нам послужити да одмеримо колико смо спремни за један овакав озбиљан испит.

(А)

266. Израчунати вредност израза:

$$R = \left(\frac{4}{a + \frac{1}{b + \frac{1}{c}}} : \frac{1}{a + \frac{1}{b}} - \frac{4}{b(abc + a + c)} \right)^{-\frac{1}{2}},$$

за $a = \sqrt[3]{5,32}$, $b = \sqrt[4]{1,005}$, $c = 7,04$.

267. Решити систем једначина: $(2x^2 = y^2 + z^2 \wedge xyz = 64)$, знајући да $\log_y x$, $\log_z y$ и $\log_x z$ образују геометријску прогресију.

268. Дата је права $(a): 4x - 3y + 9 = 0$.

а) Написати једначину параболе, облика $y^2 = 2px$, која додирује праву a.

б) На добијеној параболи одредити тачку P која је најближа правој $4x + y + 4 = 0$.

в) Одредити одстојање тачке P од праве a.

269. Ако су a, b и c странице троугла ABC, R полупречник описаног круга и h_a висина из темена A, доказати да је $b \cdot c = 2R \cdot h_a$. Затим утврдити да је $R = \dfrac{abc}{4P}$.

270. Дата је функција: $y = \operatorname{arctg} \dfrac{x+1}{x}$.

а) Испитати дату функцију и нацртати њен график.

б) Израчунати површину површи коју ограничава график дате функције са осом Ox за $x \in \left[-1, -\dfrac{1}{2}\right]$.

(Б)

271. Ако сваки од четири броја, који чине аритметичку прогресију, увећамо редом за 5, 6, 9 и 15, добићемо геометријску прогресију. Наћи те бројеве.

272. Дата је квадратна функција: $y = (k-2)x^2 - 2kx + 2k - 3$, где је k реалан параметар.

а) За које вредности k је функција негативна за свако x?

б) Одредити вредност параметра k, тако да је збир реципрочних вредности квадрата нула функције једнак 2.

273. Решити једначину: $\sin^2 x(\operatorname{tg} x + 1) = 3 \sin x(\cos x - \sin x) + 3$.

274. У праву купу полупречника r и висине $H = r\sqrt{2}$ уписана је коцка, тако да јој једна страна лежи у основи купе, а остала четири темена припадају омотачу купе. Одредити размеру запремина купе и коцке.

275. Дата је функција $y = x^3 - 3x^2 + 4$.

а) Испитати дату функцију и нацртати њен график.

б) Израчунати запремину тела које настаје ротацијом око осе Ox равне површи, ограничене датом кривом и осом Ox.

(В)

276. Дата је једначина: $\dfrac{3x}{a^3 - 8} - \dfrac{a}{a^2 + 2a + 4} = \dfrac{x-1}{a-2}$.

а) Решити по x дату једначину и дискутовати решења.

б) Одредити параметар a, тако да решење једначине буде позитивно.

277. Решити неједначину: $\sqrt{x^4 - 2x^2 + 1} > 1 - x$.

278. Дата је једначина: $2x^2 - 2(2\cos\alpha - 1)x + 2\cos^2\alpha - 5\cos\alpha + 2 = 0$.

а) За које вредности α, $0 \leq \alpha \leq \pi$, дата једначина има реална различита решења?

б) Испитати знак решења.

279. Дат је правоугли трапез са основицама 10 cm и 6 cm и оштрим углом од 60^0. Израчунати запремину и површину тела које настаје обртањем датог трапеза око дужег крака.

280. Дата је елипса: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Израчунати површину те елипсе.

ПЕТА ГЛАВА

Да ли смо спремни за упис на факултет? Да ли смо савладали математику предвиђену за средњу школу? Да ли смо од свега, што смо у претходним главама изучавали, усвојили све или већину важнијих чињеница?

Ово су све важна питања и кад бисмо знали тачне одговоре на њих, конкурисали бисмо на жељени факултет без неизвесности и безразложног страха. Ако не знате одговоре, потражите их у овој ГЛАВИ. Не мора нико да Вас "преслишава"-можете и сами!

Пред Вама је 481 задатак, који су ранијих година служили за проверу знања и одабирање кандидата на свим факултетима. (На оним факултетима на којим се тражи знање математике, на којим се поред математике изучавају многи стручни предмети са озбиљном математичком подлогом.) За те задатке се може рећи да су "класични", углавном стандардни, па због тога нема значаја који су задаци дати прошле, претпрошле, или "тамо неке" године. Стога овде није наглашено када су задаци били постављени, већ само на ком факултету. И ова чињеница не значи много, јер би задаци, дати на једном факултету, могли бити задати на било ком другом факултету. Сви се они задају према истом програму, према програму средње школе, који сте могли да савладате у претходним главама овог Приручника. Чак се последњих година дају исти задаци за скоро све факултете.

Како ћете сами оценити своје знање?

Први услов, без којег не вреди ни покушавати рад у ПЕТОЈ ГЛАВИ, јесте **усвајање свих** (или скоро свих) **формула** , које су у ранијим главама јасно наглашене и прокоментарисане. То можете лако проверити, а уз мало труда можете и испунити овај *важан почетни услов* .

Други услов, јесте **дисциплина у раду**. Увек *настојте да сами решите задатке* , а ако Вам то никако не полази за руком, потражите решења у ШЕСТОЈ ГЛАВИ.

После сваких двадесетак пређених задатака оцените искрено шта (колико) сте самостално решили. Ако стандардно решавате, без помоћи, бар 50% задатака, можете бити задовољни. А онда, нека Вам то задовољство буде стимуланс да даљим упорним радом повећате проценат успеха.

Задатке немојте бирати! Радите их редом, не обраћајући пажњу на назив факултета са којег су ти задаци.

Правите обавезно статистику задатака које нисте успели да решите. Запишите из којег су поглавља– које главе. Тако ћете сами утврдити које поглавље нисте довољно савладали. Онда се вратите на то поглавље, пажљиво га проучите, прорадите *примере* који су тамо урађени, затим решите *ЗАДАТКЕ ЗА ВЕЖБАЊЕ* из тог поглавља. Кад утврдите да сте "попунили ранију празнину у знању", покушајте да решите задатке које претходно нисте знали. Бићете веома задовољни што сте тако напредовали!

Неколико последњих узорака су у виду тестова. *Немојте заокруживати "решења" на памет или на срећу* ! **Пре заокруживања решите задатак** ! Бодове доносе само потпуно тачни резултати. И најмања грешка доноси негативне поене. Да бисте постигли сигурност и тачност у раду *решавајте свак и задатак до краја–до коначног резултата.* Половично решавање, са изговором "Даље знам" или "Даље је једноставно", може Вам се осветити на испиту.

5.1.ПРОГРАМ ЗА КЛАСИФИКАЦИОНИ ИСПИТ НА ПРИРОДНО МАТЕМАТИЧКОМ И ТЕХНИЧКИМ ФАКУЛТЕТИМА У БЕОГРАДУ

- Основне логичке операције. Појам функције.
- Рационални алгебарски изрази. Полиноми.
- Линеарна функција. Линеарне једначине и неједначине. Системи линеарних једначина и неједначина.
- Квадратна функција. Квадратне једначине и неједначине. Системи квадратних једначина.
- Алгебарске и ирационалне једначине и неједначине.
- Појам логаритма. Логаритамска и експоненцијална функција. Логаритамске и експоненцијалне једначине и неједначине.
- Тригонометријске функције. Идентитети, једначине и неједначине. Примена тригонометрије на троугао.
- Комплексни бројеви.
- Аналитичка геометрија у равни (права, круг, елипса, хипербола и парабола).
- Планиметрија (првенствено геометрија троугла, четвороугла и круга).

- Стереометрија (призма, пирамида, зарубљена пирамида, ваљак, купа, зарубљена купа, сфера и делови сфере и лопта).
- Комбинаторика. Биномна формула. Аритметичка и геометријска прогресија.
- Појам граничне вредности. Изводи и примена извода.

5.2.ЗАДАЦИ СА РАНИЈИХ ИСПИТА

Електротехнички факултет у Београду

(А)

281. Одредити два троцифрена броја чији се производ пише само тројкама. Да ли је решење јединствено?

282. Проверити да ли једнакост $\dfrac{\cos 3t}{\cos t} - \dfrac{\cos 6t}{\cos 2t} = 2(\cos 2t - \cos 4t)$ представља идентичност?

Решити једначину $\dfrac{\cos 3t}{\cos t} = \dfrac{\cos 6t}{\cos 2t}$.

283. Решити неједначину: $\log_5 x \geq \log_{25}(3x-2)$.

284. У урни се налази 100 разнобојних куглица: 28 црвених, 20 зелених, 12 жутих, 20 плавих, 10 белих и 10 црних. Колико најмање куглица треба извући из урне да би међу њима сигурно било 15 куглица исте боје?

285. За троугао ABC дата су четири тврђења: 1^o Троугао ABC је правоугли; 2^o Угао BAC је од 30^o; 3^o $AB = 2BC$; 4^o $AC = 2BC$. Зна се да су два тврђења тачна, а два нетачна. Одредити обим троугла ABC ако је $BC = 1$.

(Б)

286. Упростити израз:
$$E = \frac{(b-c)^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{(c-a)^2}{(b-c)(b-a)} + \frac{(a-b)^2}{(c-a)(c-b)}, \ (a \neq b \neq c \neq a).$$

287. Одредити бројеве A, B, C тако да за сваки природан број n важи једнакост: $\dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{2^2} + \dfrac{3}{2^3} + \cdots + \dfrac{n}{2^n} = \dfrac{An+B}{2^n} + C$.

288. Одредити све петоцифрене бројеве $\overline{34x5y}$ који су дељиви са 36.

289. Решити по x једначину: $\sin x + 2\sin x \cos(a-x) = \sin a$.

290. Дат је паралелограм $ABCD$. Дијагонала AC и дуж BE, где је E средиште странице DC, деле овај паралелограм на четири дела. Ако је површина паралелограма једнака S, израчунати површину сваког од ових делова.

(B)

291. Решити једначину: $\log \operatorname{tg} x + \log \operatorname{tg} 2x = 0$.

292. Странице троугла ABC су a, b, c. Наћи полупречнике сфера, које додирују раван троугла ABC у тачкама A, B, C и додирују се међусобно.

293. Одредити a и b тако да

$$\sum_{k=1}^{n} k(2k-1) = n(n+1)(an+b).$$

294. Графички приказати скуп тачака $M(x,\ y)$ чије координате задовољавају неједнакост $|\,x+y\,|^{-x+y+1} < 1$.

295. На шаховском турниру учествовало је 5 играча, који су одиграли по једну партију, свако са сваким. Као што је уобичајено, за победу се добија 1 поен, за реми $\frac{1}{2}$ поена и за пораз 0 поена. По завршетку турнира је уочено:

а) Није било играча са истим бројем поена.
б) Победник није ремизирао ни једну партију.
в) Другопласирани играч није изгубио ни једну партију.
г) Играч који је освојио четврто место није победио ни у једној партији.

Одредити резултате свих партија.

(Г)

296. Збир неколико узастопних природних бројева је 1986. Одредити те бројеве.

297. Дужине паралелних страница једнакокраког трапеза су a и b. Ортогонална пројекција средишта једног крака на други крак поклапа се са једним од крајева другог. Колика је површина трапеза. Специјално $a = 14$, $b = 6$.

298. Решити једначину $x = 1 - 1986(1 - 1986x^2)^2$.

299. Решити једначину $4c^2 \sin(x+\beta)\sin(x+\alpha) = (a+b)^2 + 2ab$, где су a, b и c странице, а α и β оштри углови правоуглог троугла.

300. Свака од четири кугле, које леже на равном столу (и додирују сто), додирује остале три кугле. Три кугле имају полупречник R. Колики је полупречник четврте кугле?

(Д)

301. Ако је $a_n = \dfrac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}}$ израчунати збир $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{99}$.

302. Доказати да је $P(x) = A(x^3 - x)$, где је A константа, једини полином који задовољава једнакост $(x-1)P(x+1) = (x+2)P(x)$.

303. Доказати следеће тврђење: ако је у правоуглом троуглу један угао 15^o, тада је полупречник описаног круга троугла једнак геометријској средини катета.

304. Броју 523 дописати три цифре, тако да добијени број буде дељив са 7, 8 и 9.

305. Дата је функција $y = x^3 + px + q$.

а) Ако је M максимум и m минимум дате функције, доказати да је $Mm = q^2 + \dfrac{4}{27}p^3$.

б) Одредити p и q, тако да $x = -2$ буде нула дате функције и $M - m = 4$.

(Ђ)

306. Дат је Паскалов троугао биномних коефицијената

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & .
\end{array}$$

на којем смо уочили трећи низ (здесна), уоквирен на слици.

1^o Испитати чему је једнака разлика квадрата било која два узастопна броја у том низу.

2^o На основу резултата под 1^o одредити функцију $x \mapsto f(x)$, такву да је $T_n = f(S_n)$, где је: $S_n = 1 + 2 + \cdots + n$ и $T_n = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$.

307. 1^o Одредити за које вредности непознате x важи једнакост

$$\sqrt{x^2-1} + x\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} = 0.$$

2^o Решити неједначину $\frac{1}{x} < \frac{1}{a}$, где је a реалан параметар, различит од нуле.

3^o Доказати једнакост:

$$\frac{1}{\log_a B} + \frac{1}{\log_{a^2} B} + \cdots + \frac{1}{\log_{a^n} B} = \frac{n(n+1)}{2} \log_B a,$$

где су a и B позитивни бројеви, различити од јединице.

308. Странице a, b, c троугла ABC образују аритметички низ са диференцијом $d = \frac{r}{4}$, где је r полупречник уписаног круга у троуглу ABC. Одредити однос $a : b : c$.

309. Дата је једначина $\sin^2 x + 2p \sin x + q = 0$, где су p и q реални параметри. Посматрајући ове параметре као координате тачке $M(p,\ q)$ у равни Opq, одредити област у овој равни, тако да дата једначина има:

а) максималан број различитих реалних решења.

б) да нема реалних решења.

в) за $p = \frac{1}{4}$, $q = 0$, написати сва решења дате једначине.

310. Тежишне дужи тетраедра су дужи чији су крајеви темена тетраедра и тежишта наспрамних страна. Доказати да се четири тежишне дужи тетраедра секу у једној тачки (у тежишту тетраедра). У којој размери тежиште дели сваку тежишну дуж (рачунајући од темена тетраедра).

Електронски факултет у Нишу

(А)

311. Нека су a и b реални бројеви ($b \neq -1$) и $a = \frac{1-b}{1+b}$. Доказати да је $\left(\frac{a}{1-a^2}\right)^2 + \left(\frac{b}{1-b^2}\right)^2 \geq \frac{1}{2}$. Када важи једнакост?

312. Решити једначине:

а) $\sin(\pi \operatorname{tg} x) = \cos(\pi \operatorname{tg} x)$ *б)* $5(\sin x + \cos x)^2 + 7 = 12 \sin x + 12 \cos x$

313. Решити систем једначина: $yx^{\log_y x} = x^{\frac{5}{2}} \ \wedge\ l_4 y \cdot \log_y(3x - y) = 1$.

314. У праву кружну зарубљену купу је уписана лопта и друга лопта је описана око купе. Однос полупречника лопти је $\sqrt{6} : 1$. Наћи размеру полупречника база зарубљене купе.

(Б)

315. Решити једначину: $64^{\frac{1}{x}} - 2^{3+\frac{3}{x}} + 12 = 0$.

316. Решити једначину: $\dfrac{1+\sin x+\cos x+\sin 2x+\cos 2x}{\operatorname{tg} 2x}=0.$

317. Решити неједначину: $\mid x^2-2x-3 \mid < 3x-3.$

318. Нека су $R=15$ и $r=6$, полупречници описаног и уписаног круга правоуглог троугла. Одредити дужине страница троугла.

(В)

319. Решити систем једначина: $\dfrac{\log(x-y)-2\log 2}{1-\log(x+y)}=1$

$$\frac{\log x-\log 3}{\log y-\log 7}=-1$$

320. Решити неједначину: $\dfrac{3x-7}{4x+2}<\frac{7}{15}.$

321. Пирамида чија је запремина $V=108\ cm^3$, а висина $H=9\ cm$, пресечена је једном равни паралелном са основом, на одстојању $6\ cm$ од основе. Израчунати површину пресека и запремину одсечене пирамиде.

322. Наћи сва решења једначине: $\sin 4x+\sin 2x=\cos x.$

(Г)

323. Наћи збир: $(20+14\sqrt{2})^{\frac{1}{3}}+(20-14\sqrt{2})^{\frac{1}{3}}.$

324. Решити систем једначина: $x^y=y^x \wedge x^p=y^q,\ p\neq q.$

325. Решити једначину: $\sin^3 x\cos x-\sin x\cos^3 x=\frac{1}{4}.$

326. По x решити неједначину: $1<\dfrac{ax+b}{ax-b}<2$, где су a и b позитивни бројеви.

327. Кроз произвољну тачку K у троуглу ABC конструисане су три праве паралелне страницама троугла, које деле троугао на шест делова од којих сутри троуглови површина $P_1,\ P_2,\ P_3$. Наћи површину P троугла ABC.

Факултет техничких наука у Новом Саду, електро одсек

(А)

328. Упростити израз: $\dfrac{a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}}{(a^2-ab)^{\frac{3}{2}}}:\dfrac{a^{\frac{-2}{3}}\sqrt[3]{a-b}}{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}$, па израчунати његову вредност за $a=1$ и $b=\dfrac{3}{5}.$

329. За које m израз $mx^2 - 2m^2x + m^3 + m^2 - 3m - 4$ има негативну вредност за сваки реалан број x?

330. У квадратну мрежу димензија $1 \times n$ треба поставити k домина димензија 1×2, тако да свака домина прекрива тачно два суседна квадрата и домине се не преклапају. На колико се различитих начина то може учинити?

331. Дата је парабола $y^2 = 6x$ и права $x - 2y + 10 = 0$.

а) Одредити једначину тангентне параболе, тако да буде паралелна са датом правом.

б) Написати једначину круга, који додирује дату праву, а центар му је додирна тачка тангенте и параболе.

332. Видети *задатак* 319.

333. Решити једначину: $\sin x + \sqrt{3} \cos x - 2 = 0$.

334. У једнакокраком трапезу $ABCD$ је $AB = 2$ и $\alpha = 60^o$. Дијагонала BD, симетрала датог угла и висина CK која одговара основици AB, секу се у једној тачки. Одредити дужину мање основице CD.

335. Израчунати запремину паралелепипеда коме су све стране ромбови странице a и оштрог угла 60^o.

336. Доказати да је $6^{2n} + 3^{n+2} + 3^n$ дељиво са 11 за сваки природан број n.

337. Три дата броја су прва три члана геометријског низа. Ако се другом броју дода 12, низ прелази у аритметички. Ако се потом трећем броју дода 96, поново добијамо геометријски низ. Који су дати бројеви?

(Б)

338. Решити неједначину: $\dfrac{3x^2 + 6x - 9}{2x + 1} \geq x + 1$.

339. Ако је $\log_{ab} \dfrac{2}{9} = \log_a x = \log_b (1 - x)$, одредити x.

340. Цифре датог троцифреног броја образују аритметичку прогресију. Ако тај број поделимо збиром његових цифара добићемо 26, а ако том броју додамо 198, добићемо број написан истим цифрама, али у обрнутом поретку. Који је дати троцифрени број?

341. Тачка $M(2,\ 1)$ дели тетиву AB круга $x^2 + y^2 = 25$ у размери $2:1$. Одредити координате тачака A и B.

342. Решити једначину: $\sin(2x - \frac{3\pi}{2}) + \cos(2x + \frac{3\pi}{2}) = -1$.

343. Страница квадрата $ABCD$ је $a = 12\ cm$. Израчунати полупречник круга уписаног у троугао AMN, где је M средиште странице BC, а N средиште странице CD.

344. Доказати да се при дељењу израза $3^{4n+1} + 10 \cdot 3^{2n}$ са 64 добија остатак 13 за сваки $n \in N$.

(B)

345. Испитати да ли је израз $14n^3 + 51n^2 + 7n$ дељив са 6 за сваки природан број n.

346. Решити неједначину: $(x^2 - 4x)^2 \leq 1$.

347. Дата је једначина: $x^2 - 3px + 1 - 2p^2 = 0$. Одредити вредност параметра p, тако да збир квадрата решења једначине буде 50.

348. Решити систем једначина: $\log_2 a \cdot b = 2 \wedge (\log_2 a)^2 + (\log_2 b)^2 = 10$.

349. Решити једначину: $\sin(3x + \frac{\pi}{6}) = \sin(3x - \frac{\pi}{4})$.

350. Дата је права $4x + 6y = 1990$ и парабола $y^2 = 4x$. Наћи узајамно нормалне тангенте параболе, од којих је једна паралелна датој правој.

351. Геометријска прогресија има паран број чланова. Збир чланова на непарним местима износи 85, а збир чланова на парним местима износи 170. Одредити количник прогресије.

352. Површина омотача праве правилне тростране пирамиде и површина њене основе су у размери $\sqrt{3} : 1$. Одредити косинус угла под којим је страна омотача нагнута према основи.

Машински факултет у Београду

(A)

353. Из места A у место B пошла су истовремено истим путем два аутомобила. Први је стигао у B 15 минута пре другог. Брзина другог је за 2 km/h мања од брзине првог. Израчунати брзине оба аутомобила, ако дужина пута износи 36 km.

354. Сфера је пресечена са две паралелне равни чије је међусобно растојање 3 cm, тако да центар сфере није између њих. Те равни у пресеку са сфером одређују два круга полупречника 9 cm и 12 cm. Израчунати површину сфере.

355. Одредити све $x \in R$ за које је $\log_2 \dfrac{x-1}{x+2} < 1$.

356. Решити једначину: $2^{1+2\cos 6x} + 16^{\sin^2 3x} = 9$.

357. Тачке $A(5,\ 5)$, $B(-2,\ 4)$ и $C(2,\ -4)$ су темена једног троугла. Наћи једначину круга који садржи тачку A, а центар му је ортоцентар троугла ABC.

(Б)

358. Одредити све реалне вредности x за које је

$$4x - 2 < 3\sqrt{6 - x - x^2}.$$

359. Ако позитивни бројеви a^2, b^2 и c^2 образују аритметичку прогресију, доказати да бројеви $\dfrac{1}{b+c}$, $\dfrac{1}{a+c}$ и $\dfrac{1}{a+b}$ такође образују аритметичку прогресију.

360. Обим ромба износи $2p$ *cm*, а збир његових дијагонала је m *cm*. Израчунати површину ромба.

361. Доказати да је површина лопте полупречника a мања од површине омотача зарубљене праве кружне купе, описане око те лопте.

362. Наћи најмању вредност функције $f(x) = (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)^2$.

363. Решити систем једначина $2^{\sin x + \cos y} = 1 \wedge 16^{\sin^2 x + \cos^2 y} = 4$.

364. Одредити једначину геометријског места центара свих кругова који додирују праву $y + 4 = 0$ и круг $x^2 + y^2 = 4$ (споља).

365. Израчунати $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\log_3 3 + \log_3 9 + \log_3 27 + \cdots + \log_3 3^n}{n^2}$

(В)

366. Из места A у место B је кренуло теретно возило. Један сат касније из места A је кренуло путничко возило. У место B су возила стигла истовремено. Да су возила кренула истовремено, једно из места A и друго из B, једно другом у сусрет, срела би се после $1\frac{1}{5}$ часова. Колико је времена провело теретно возило на путовању од A до B?

367. Дата је квадратна једначина $x^2 - (3m+8)x + (m+2)^2 = 0$. За које ће вредности реалног параметра m корени бити реални, и то један мањи од 2, а други већи од 2?

368. Решити неједначину: $\log_2(\log_4 x) + \log_4(\log_2 x) \leq -4$.

369. У геометријској прогресији је $a_1 + a_5 = 51$ и $a_2 + a_6 = 102$. За које n је збир првих n чланова једнак 3069?

370. Нека се дијагонале AC и BD трапеза $ABCD$ секу у тачки E и нека права кроз E, паралелна основицама AB и CD трапеза, сече краке у F и G. Доказати да је E средиште дужи FG.

371. У једнакостраничан троугао странице a је уписан квадрат. Обе фигуре ротирају око висине троугла, заједничке симетрале. Одредити размеру запремина тела добијених ротацијом квадрата и троугла.

372. Углови троугла су $\alpha = 45^o$ и $\beta = 30^o$, а обим је $6(3+\sqrt{2}+\sqrt{3})$. Израчунати странице и површину тог троугла.

373. Доказати идентичност: $\operatorname{tg} 3\alpha = \dfrac{3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha}{-3\cos\alpha + 4\cos^3\alpha}$.

374. Решити једначину: $\cos^2 x + \cos^2 2x - \cos^2 3x - \cos^2 4x = 0$.

375. Одредити једначину круга чији је центар на оси Ox и који са параболом $y^2 = 12x$ има заједничку тангенту у тачки $(3,\ 6)$. Нацртати одговарајућу слику.

Машински факултет у Нишу

(А)

376. За које вредности реалног параметра a једначина $x^2 - 4x - \log_2 a = 0$ има реална решења?

377. Катете правоуглог троугла су $3\ cm$ и $4\ cm$. Наћи растојање између центара уписаног и описаног круга.

378. Решити једначину: $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 1$.

379. На правој $2x - 3y + 21 = 0$ наћи тачку која је једнако удаљена од апсцисне осе и тачке $A(1,\ 2)$.

380. Израчунати $\cos\alpha$ ако је $\sin\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

(Б)

381. Наћи сва решења једначине $\sin 5x \cos 3x = \sin 6x \cos 2x$.

382. Доказати идентитет $\operatorname{tg}\left(\alpha + \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1+\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}$.

383. Решити једначину $\log_2(x+14) = 6 - \log_2(x+2)$.

384. Наћи дијагоналу и крак једнакокраког трапеза чије су основице $a = 20$ и $b = 12$, ако је центар круга описаног око трапеза на већој основици.

385. Тачке $A(1,\ 1)$, $B(3,\ 1)$, $C(1,\ 4)$ су темена правоуглог троугла. Одредити једначину праве која садржи хипотенузину висину.

(В)

386. Наћи $\sin 18^o$ користећи се једнакошћу $\sin 36^o = \cos 54^o$.

387. Решити једначину $\log \sqrt[5]{x} = \dfrac{18 - \log x}{3 + \log x^2}$.

388. Решити неједначину: $8 \cdot \dfrac{3^{x-2}}{3^x - 2^x} > 1 + \left(\dfrac{2}{3}\right)^x$.

389. Наћи координате тачке S, која полови лук $\overset{\frown}{M_1M_2}$ круга $x^2 + y^2 = 25$, ако је $M_1(5,\ 0)$, $M_2(3,\ y > 0)$.

390. Центар уписаног круга једнакокраког троугла дели висину која одговара основици на одсечке 5 *cm* и 3 *cm*, рачунајући од темена. Израчунати дужине страница тог троугла.

Машински факултет у Крагујевцу

(А)

391. Решити и дискутовати решења једначине $x^3 + kx(x-1) - 1 = 0$ у зависности од реалног параметра k.

392. Решити систем једначина
$$\log(x^2 + y^2) + 1 = \log 13$$
$$\log(x + y) - \log(x - y) = 3\log 2.$$

393. Дата је запремина V једнакоивичне тростране пирамиде. Наћи њену површину P.

394. Наћи једначину круга који додирује обе координатне осе и пролази кроз тачку $M(2,\ 1)$.

395. Доказати да је $\cos^2\alpha + \cos^2\left(\dfrac{2\pi}{3} + \alpha\right) + \cos^2\left(\dfrac{2\pi}{3} - \alpha\right) = \dfrac{3}{2}$.

(Б)

396. Решити неједначину $\dfrac{|\,x-2\,|}{x^2 - 3x + 2} \geq 2$.

397. *a)* Решити једначину: $3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} = 12^x + 12^{x+1}$.

б) Без коришћења рачунских помагала доказати неједнакост: $(\log_2 e)^{-1} + (\log_3 e)^{-1} < 2$. $(e \approx 2,72)$

398. Ако су A' и C' тачке у којима круг, одређен теменима A, B и C паралелограма $ABCD$, сече праве AD и CD, доказати да је $A'B \cdot A'D = A'C \cdot A'C'$.

399. Основа пирамиде је правоугаоник. Две бочне стране су нормалне на раван основе, а друге две су нагнуте према основи под угловима од 45^o и 60^o. Висина пирамиде је $H = 3\sqrt{3}\ cm$. Израчунати запремину пирамиде.

400. Ако су α, β и γ углови троугла и $\sin(\alpha - \beta) = \sin^2\alpha - \sin^2\beta$, доказати да је троугао правоугли или једнакокраки.

401. Права $3x + y - 6 = 0$ сече круг $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 8 = 0$. Одредити дужину тетиве и централни угао који јој одговара.

(B)

402. Дата је једначина $\dfrac{1}{x-m} + \dfrac{1}{x+3m} = 1$, где је m реалан параметар.

а) Доказати да су за сваку вредност параметра m решења дате једначине реална.

б) Одредити вредност параметра m, тако да дата једначина има два решења којима је збир квадрата једнак 4.

403. Решити неједначине: *а)* $\dfrac{x-2}{3x} < 1$; *б)* $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\log\frac{3x}{x-2}} > 1$.

404. Решити једначину: $(\sin 3x + \cos 3x)^2 = -\sin 6x$.

405. Дијагонале једнакокраког трапеза су узајамно нормалне. Израчунати површину трапеза ако је крак $c = 2\sqrt{5}\ cm$, а размера основица $3:1$.

406. Бочне ивице правилне зарубљене тростране пирамиде су нагнуте према равни основе под углом $\dfrac{\pi}{4}$. Одредити запремину пирамиде ако су њене основне ивице a и b $(a > b)$.

407. Дата је парабола $y^2 = 4x$ и права $x + 2y - 3 = 0$.

а) Наћи једначину праве која пролази кроз жижу дате параболе и нормална је на дату праву.

б) Наћи координате пресечних тачака добијене праве и дате параболе.

Грађевински факултет у Београду

(А)

408. Уверити се да је вредност израза

$$A = \frac{a^4-(a-1)^2}{(a^2+1)^2-a^2} + \frac{a^2-(a^2-1)^2}{a^2(a+1)^2-1} + \frac{a^2(a-1)^2-1}{a^4-(a+1)^2}$$

једнака једном природном броју за све изузев неколико реалних вредности a. Који је то природан број и који су изузеци?

409. Решити неједначину $\dfrac{x-3}{x^2+x} < -1$.

410. Решити једначину $\sqrt{9-5x} = \sqrt{3-x} + \dfrac{6}{\sqrt{3-x}}$.

411. Оштар угао ромба је 30^o, а његова већа дијагонала има дужину d_1. У тај ромб је уписан правоугаоник, тако да се једна од његових дијагонала поклапа са мањом дијагоналом ромба. Израчунати површину тог правоугаоника.

412. Решити једначину $\dfrac{\sin x}{1+\cos x} = \sin\dfrac{x}{2}$.

413. Решити неједначину $\log_x |\, x-1 \,| \le 1$.

414. У пресечним тачкама круга $x^2+y^2=25$ и елипсе $16x^2+$ $+27y^2=576$ повучене су тангенте на круг. Израчунати површину тако добијеног тангентног четвороугла.

415. У ком су односу запремина правоуглог паралелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и тетраедра AB_1CD_1?

(Б)

416. Решити једначину $(1-\operatorname{tg} x)(1+\sin 2x) = 1+\operatorname{tg} x$.

417. Доказати да је тангента у тачки C круга описаног око троугла ABC паралелна правој DE, где су D и E пресеци правих AC и BC с произвољним кругом који пролази кроз тачке A и B.

418. Решити неједначину $\log_{(2x+3)} x^2 < 1$.

419. Једнакостранични троугао ABC странице a ротира око праве која садржи теме A и паралелна је висини кроз теме B. Израчунати површину и запремину добијеног обртног тела.

420. Решити једначину $\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}} + \sqrt{x-\sqrt{x^2-1}} = \sqrt{2(x+1)}$.

421. Дате су тачке: $A(5,\ 2)$, $B(-2,\ 3)$ и $C(1,\ -6)$. Израчунати координате центра S описаног круга, тежишта T и ортоцентра V, троугла ABC. Показати да тачке S, T и V леже на истој правој и одредити једначину те праве.

422. Унутар квадрата странице 10 изабрана је 201 тачка. Доказати да, без обзира на начин њиховог избора, међу њима постоје три тачке које су темена троугла површине:
а) мање од 1, *б)* мање или једнаке $\frac{1}{2}$.

(В)

423. Исти као *задатак* 288.

424. Исти као *задатак* 409.

425. Решити једначину $4\sin^2 x\cos x + 3\sin x = 4\sin^3 x + \cos x$.

426. Графички приказати скуп свих тачака $M(x,\ y)$, за које важи: $\log_x y = \log_y x$.

427. Израчунати површину и косинусе углова троугла коме је једно теме центар круга $x^2 + y^2 - 4x - 8y - 5 = 0$, а друга два темена су тачке у којима круг сече осу Ox.

428. Основа четворостране пирамиде је ромб са оштрим углом α и краћом дијагоналом d. Наћи површину пирамиде ако све бочне стране те пирамиде заклапају са њеном основом исти угао β.

Грађевински факултет у Нишу

(А)

429. Основне ивице правилне тростране зарубљене пирамиде су $a = 18\ cm$ и $b = 6\ cm$, а бочна ивица заклапа са равни веће основе угао $\alpha = \frac{\pi}{3}$. Одредити запремину те пирамиде.

430. Решити једначину $\operatorname{tg}(x + \frac{\pi}{3}) - \operatorname{ctg} x = 0$.

431. Дата је функција $f(x) = 1 + \dfrac{x+1}{x^2 - 3x + 2}$.

а) Испитати знак функције.

б) Одредити пресечне тачке графика функције с координатним осама.

432. Права $x-2y-6=0$ сече параболу $y^2=2x$ у двема тачкама. Одредити једначине тангената параболе у тим тачкама и наћи угао између њих.

433. Решити једначину $(2+i)x^2-(5-i)x+2-2i=0$.

(Б)

434. Дат је систем једначина $\begin{aligned} x^2+y^2-12x-8y+44&=0\\ x-y+n&=0\end{aligned}$

Одредити интервале за реалан параметар n, када су решења

а) реална и неједнака

б) реална и једнака

в) конјуговано комплексна.

435. Наћи сва решења једначине $\sin 2x+\operatorname{tg} x-2=0$.

436. Исти као *задатак* 427.

437. Дата је функција $f(x)=x^3+ax^2+x+2$.

а) Одредити реалан параметар a, тако да функција има екстремну вредност за $x=-1$.

б) За добијену вредност параметра a испитати промене функције и скицирати њен график.

(В)

438. Израчунати: $\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}+\dfrac{3}{\sqrt{3}-2}+\dfrac{15}{3-\sqrt{3}}\right)\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}+5}$.

439. Наћи реалне бројеве x и y тако да $(4+3i)x-(2-i)y-10i=0$.

440. Број 21 раставити на два сабирка, тако да збир њихових квадрата буде 261.

441. Решити једначину $9^x+6^x=2\cdot 4^x$.

442. Решити неједначину $\log_2(x+1)+\log_2 x^{-1}>1$.

443. Решити једначину: $\cos 4x+2\cos^2 x=0$.

444. Ако је $\operatorname{tg} x=\dfrac{n}{n+1}$, $\operatorname{tg} y=\dfrac{1}{2n+1}$ и $0<x<\dfrac{\pi}{2}$, $0<y<\dfrac{\pi}{2}$, одредити $x+y$.

445. Одредити једначину круга који је концентричан са кругом $x^2+y^2+6x+2y+5=0$ и пролази кроз тачку $M(1,\ -4)$.

446. Када се омотач купе развије у раван добија се четвртина круга полупречника $4\sqrt{5}$. Израчунати запремину те купе.

447. Бројеви 3, x_1, x_2, x_3, x_4, 13 су узастопни чланови аритметичког низа. Одредити непознате бројеве x_1, x_2, x_3, x_4.

Технолошко металуршки факултет у Београду

(А)

448. Доказати да је $z=\dfrac{a^2-1}{2}$ решење једначине:

$$\frac{a^2-2z}{2z+1}-\frac{a^2+2z}{1-2z}=\frac{2(a^4-1)}{4z^2-1}.$$

449. Решити неједначину: $\dfrac{x+1}{x+2}>\dfrac{x}{x+1}$.

450. Ако a, b и c образују аритметичку прогресију, доказати да и бројеви $\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$, $\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{c}}$ и $\dfrac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}$ образују аритметичку прогресију.

451. Доказати да је површина једнакокраког трапеза, чија је средња линија дуж m, а дијагонале су му узајамно нормалне, једнака m^2.

452. Осовински пресек праве купе, полупречника основе r, је једнакостраничан троугао. На ком растојању од врха треба поставити раван паралелну основи, тако да она полови запремину купе?

453. Испитати да ли је $x=\dfrac{11}{12}\pi$ решење једначине:

$$\sin(x-\frac{\pi}{2})+\sin(x-\pi)=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

454. Аналитички испитати узајамни положај круга $x^2+y^2-6x-8y=0$ и праве $y=-12x-20,5$.

455. Одредити за коју вредност параметра k права $y=kx+1$ додирује параболу $y=x^2-2x+2$.

456. Доказати да је n^2+3n-4 паран број. (n је природан број.)

457. Извести формулу за дужину круга.

(Б)

458. У извесну количину 75%-ог алкохола додато је 12 литара воде, чиме је добијен 51%-ни алкохол. Колика је била првобитна количина алкохола?

459. У једначини $2x^2-2(m-3)x+2m^2-17=0$ одредити вредност параметра m, тако да су јој корени везани релацијом $x_1^2+x_2^2=19$.

460. Решити неједначину: $\dfrac{-2x^2+3x-1}{x^2+x+1}<0$.

461. Решити једначину $8^{\log x}+3^{1-\log x}\cdot 24^{\log(10x)}=73$.

462. Висине паралелограма се односе као $2:3$, његов обим износи $40\ cm$, а оштар угао 30^o. Израчунати површину паралелограма.

463. Прав ваљак чија је висина $H=20\ cm$, пресечен је са равни која је паралелна његовој оси, на растојању $4\ cm$ од осе. Та раван одсеца од основа кружне одсечке чији су лукови 60^o. Наћи површину пресека.

464. Одсечак праве чија је једначина $3x+2y=6$, између координатних оса, је хипотенуза једнакокраког правоуглог троугла. Наћи координате темена тог троугла.

465. Доказати идентитет $\dfrac{\sin x+\sin 3x}{1+\cos 2x}=2\sin x$, $x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in Z$.

466. Наћи први извод функције $y=\dfrac{x\ln x}{1+x}$.

467. Израчунати $\displaystyle\int\frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$.

(B)

468. Упростити израз $A=\dfrac{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}$, ако је $x=\dfrac{2ab}{b^2+1}$ $(a>0, b\neq 0)$.

469. Решити неједначину $\dfrac{x+1}{x-1}<-1$.

470. Одредити решења једначине $x^2-3x-4=|\,x+1\,|$. Једначину решити графичким путем.

471. Решити једначину: $\sin x\cos 5x=\sin 9x\cos 3x$.

472. Дужине катета правоуглог троугла су a и b. Одредити дужину симетрале правог угла тог троугла.

473. Основа пирамиде је правоугаоник површине S. Две бочне стране су нагнуте према основи под угловима α и β, а друге две стране су нормалне на основу. Изразити запремину пирамиде преко S, α и β.

474. Испитати ток и скицирати график функције $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$.

475. Одредити a тако да круг $(x-a)^2 + y^2 = 2$ додирује праву $y - x = 1$.

Саобраћајни факултет у Београду

(А)

476. У једначини $x^2 + (k+3)x + k + 21 = 0$ одредити k тако да буде $\dfrac{x_1}{x_2} + \dfrac{x_2}{x_1} < 1$.

477. Око правоуглог троугла је описан круг. Ако се над његовим катетама као пречницима опишу полукругови, ван троугла, добиће се две површи облика полумесеца. Доказати да је збир површина тих полумесеца једнак површини троугла.

478. Доказати да је $\cos\dfrac{2\pi}{7} + \cos\dfrac{4\pi}{7} + \cos\dfrac{6\pi}{7} = -\dfrac{1}{2}$.

479. Дате су тачке: $A(-2,\ -5)$, $B(7,\ 7)$, $C(-9,\ 19)$. Написати једначину круга описаног око троугла ABC.

480. Ивице правоуглог паралелепипеда, чија је дијагонала $D = 12\ cm$, а површина $P = 72\ cm^2$, чине аритметичку прогресију. Колике су те ивице?

481. Израчунати (без употребе рачунских помагала)

$$10^{0,5-\log(0,375\sqrt{10})} - \log_2 0,0625.$$

482. Око лопте су описани једнакостранични ваљак и једнакостранична купа. Доказати да површине ова три тела стоје у истој размери као и њихове запремине.

483. Решити једначину: $1 + \sin x - \sin 2x = \cos x + \cos 2x - \cos 3x$.

484. Дате су тачке $A(-2,\ 5)$, $B(2,\ -3)$ и права $3x + 4y - 19 = 0$. Написати једначину круга који садржи тачке A и B и додирује дату праву, а затим одредити координате додирне тачке.

485. Ивице правоуглог паралелепипеда, чија је дијагонала $D = 6\ cm$, а површина $P = 72\ cm^2$, чине геометријску прогресију. Колике су ивице?

(Б)

486. *а)* Наћи решења једначине $\sqrt{\log_x \sqrt{3x}} \cdot \log_3 x = -1$.

б) Решити систем неједначина $-1 \leq \dfrac{2x}{x^2+1} \leq 1$.

487. Дате су функције: $f_1(x) = (k+1)x^2 + 4kx + 4k$ и $f_2(x) = x^2 + (3k+1)x + 3k$. Одредити k тако да за свако x из скупа реалних бројева буде $f_1(x) > f_2(x)$.

488. Основа праве призме је правоугли троугао површине $9\sqrt{3}\ cm^2$, са углом од 30^o. Површина највеће бочне стране је $8\ cm^2$. Наћи запремину призме.

489. Дата су два темена троугла, $A(-10,\ 2)$, $B(6,\ 4)$ и пресек висина тог троугла $H(5,\ 2)$. Одредити треће теме троугла.

490. Решити једначину: $2\cos 2x + 2\sin^2 x - 3\cos x = -1$.

491. *а)* Решити једначину: $2^{2x+1} + 4 = 9 \cdot 2^x$.

б) Решити неједначину: $2^{\log_{0,5} \frac{2x}{x-3}} < 1$.

492. Дата је функција $f(x) = (m-1)x^2 - 2(m+1)x + m$. Одредити реалан број m тако да за свако x из скупа реалних бројева буде испуњено $f(x) < 0$. Затим наћи теме оне параболе која пролази кроз тачку $(-1,\ -7)$.

493. Око једнакокраког трапеза је описан круг полупречника 2. Угао између крака и веће основице је 60^o, а већа основица се поклапа са пречником круга. Наћи дужине свих страница трапеза.

Ако круг и трапез ротирају око веће основице трапеза, изразити у процентима колики део запремине добијене лопте чини запремина тела добијеног ротацијом трапеза.

494. У којим тачкама на кругу $x^2 + y^2 = 2$ тангенте образују са осом Ox угао од 135^o? Написати једначине тих тангенти.

495. Решити једначину $2\sin^2 x + 4\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2} + \cos 2x = \sqrt{3} + 1$.

(B)

496. Нацртати графике функција:

а) $y = |\,1 - x\,| - 1$; *б)* $y = x^2 - 3x + 2$; *в)* $y = 3\sin 2x$.

497. Ако је $\log 2 = a$ и $\log 3 = b$ одредити $\log_5 216$.

498. За које вредности реалног параметра m једначина

$$(2-m)x^2 + mx + 1 - m = 0$$

има реална решења која задовољавају услов: $x_1^2 + x_2^2 \geq 1$?

499. Решити једначину: $\sqrt{x+6} - \sqrt{2x+10} + \sqrt{x-2} = 0$.

500. Одредити углове и обим оштроуглог троугла чије су странице $a=\sqrt{3}+1$, $b=2$ и површина $P=\frac{1}{2}(3+\sqrt{3})$.

501. Решити једначину $2\sin^2 x+\sqrt{3}\sin 2x+4\cos^2 x=1$.

502. Дате су тачке $A(-1,\ 3)$, $B(-6,\ -2)$ и $S(7,\ 11)$. Одредити тачку C тако да се у троуглу ABC висине секу у тачки S.

Фармацеутски факултет у Београду

(А)

503. Ако је $2x=\sqrt{3}$ израчунати $\dfrac{1+x}{1+\sqrt{1+x}}+\dfrac{1-x}{1-\sqrt{1-x}}$.

504. Нека су a и b решења једначине $kx^2-(2k+1)x+1=0$. Одредити реалан број k тако да буде $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=5$.

505. Решити систем једначина: $x^{x+y}=y^{x-y}\ \wedge\ x^2y=1$.

506. Решити једначину: $2\sin^2 x-3\sin x+1=0$.

507. Нека је $f(x)=2^x+2^{-x}$. Израчунати
$$f(x+y)+f(x-y)-f(x)\cdot f(y).$$

(Б)

508. Ако је $x+y=u$, $xy=v$, израчунати x^5+y^5 помоћу u и v.

509. Одредити реалан број a тако да израз $x_1^2+x_2^2$ буде минималан, где су x_1 и x_2 решења једначине $x^2+(a-1)x-2a=0$.

510. Решити систем једначина $3^x2^y=576\ \wedge\ \log_2(y-x)=2$.

511. Ако је $\sin x+\cos x=m$, исказати вредност израза $\dfrac{1+\cos 2x}{\operatorname{ctg}\frac{x}{2}-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$ помоћу m.

512. *а)* Ако је $f\left(\dfrac{x+2}{2x+1}\right)=5x+3$, одредити $f(x)$.

б) Нека је $g(x)=a+bc^x$. Одредити константе a, b, c ако је $g(0)=5$, $g(1)=14$, $g(2)=50$.

(В)

513. Ако је $x+y+z=2$, $x^2+y^2+z^2=6$, $x^3+y^3+z^3=8$, израчунати вредност израза xyz.

514. Решити систем једначина $x+\sqrt{xy}+y=14 \wedge x^2+xy+y^2=84$.

515. Решити неједначину: $5^x-3^{x+1}>2(5^{x-1}-3^{x-2})$.

516. Решити једначину: $1+\sin x+\cos x+\sin 2x+\cos 2x=0$.

517. Ако за свако $x\in R$ важи $\frac{1}{2}f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=x$, наћи $f(2)$.

Пољопривредни факултет у Београду

(А)

518. Упростити израз $\dfrac{x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}}{1-x}+\dfrac{1-x^{-\frac{1}{2}}}{1+x^{\frac{1}{2}}}$.

519. Решити једначину: $\log_2\frac{x}{4}=\dfrac{15}{\log_2\frac{x}{8}-1}$.

520. Решити једначину: $\sin^2 x-2\cos^2 x+\frac{1}{2}\sin 2x=0$.

521. У квадрату $ABCD$ тачка M је средиште станице CD. Изразити дијагоналу $d=AC$ преко одсечка $x=AM$.

522. Решити неједначину: $\dfrac{1}{4x-1}<\dfrac{3}{4x+1}$.

(Б)

523. Упростити израз $\dfrac{1}{m+\dfrac{1}{n+\dfrac{1}{p}}}:\dfrac{1}{m+\dfrac{1}{n}}-\dfrac{1}{n(mnp+m+p)}$.

524. Решити неједначину $\log_3(x^2-x+3)<2$.

525. Решити једначину: $\cos^2 x+\sin^2 2x=1$.

526. У коцку ивице $a=4\ cm$ уписана је лопта. Колико је пута запремина коцке већа од запремине лопте?

527. Решити неједначину: $(2x-3)(3x-7-x^2)>0$.

(В)

528. Скуп решења неједначине $3-2x>0$ је:
а) $\left(\frac{2}{3},+\infty\right)$; *б)* $\left(\frac{3}{2},+\infty\right)$; *в)* $\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right)$; *г)* $\left(-\infty,\frac{3}{2}\right)$; *д)* $\left(-\infty,\frac{2}{3}\right)$.

529. Која од наведених формула није тачна:
а) $1+\cos 2x = 2\cos^2 x$; *б)* $\sin 2x = 2\sin x\cos x$; *в)* $\sin 3x = 3\sin x\cos x$;
г) $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$; *д)* $1-\cos 2x = 2\sin^2 x$?

530. *"Сви студенти су положили испит"*. Супротан исказ је :
а) Ниједан студент није положио испит.
б) Бар један студент није положио испит.
в) Бар један студент је положио испит.
г) Најмање један студент је положио испит.
д) Само један студент није положио испит.

531. Решење неједначине $\frac{2-x}{3+x} < 0$ је:
а) $(-\infty,\ 2)\cup(3,\ +\infty)$; *б)* $(-\infty,\ -2)\cup(3,\ +\infty)$; *в)* $(-3,\ -2)$;
г) $(-\infty,\ -3)\cup(-2,\ +\infty)$; *д)* $(2,\ 3)$.

532. Само једна од наведених формула је тачна.
а) $\sqrt{x+y}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$; *б)* $\log(x+y)=\log x+\log y$; *в)* $a^{x+y}=a^x+a^y$;
г) $\sqrt{x^2}=x$; *д)* $\sin 3x\cos 3x = \frac{1}{2}\sin 6x$.

533. Од следећих низова који је растући:
а) $\sin\frac{\pi}{6}$, $\sin\frac{\pi}{4}$, $\sin\frac{\pi}{2}$, $\cos\frac{\pi}{2}$, $\cos\pi$; *б)* $\cos\pi$, $\cos\frac{\pi}{2}$, $\sin\frac{\pi}{4}$, $\sin\frac{\pi}{6}$, $\sin\frac{\pi}{2}$;
в) $\cos\frac{\pi}{2}$, $\cos\pi$, $\sin\frac{\pi}{6}$, $\sin\frac{\pi}{4}$, $\sin\frac{\pi}{2}$; *г)* $\cos\pi$, $\sin\frac{\pi}{6}$, $\sin\frac{\pi}{4}$, $\sin\frac{\pi}{2}$, $\cos\frac{\pi}{2}$;
д) $\cos\pi$, $\cos\frac{\pi}{2}$, $\sin\frac{\pi}{6}$, $\sin\frac{\pi}{4}$, $\sin\frac{\pi}{2}$.

534. Који од следећих израза има вредност 1?
а) $\log_2\sqrt{2}+\sin\frac{\pi}{6}$; *б)* $\log_2\left(\sin\frac{\pi}{2}\right)$; *в)* $\sin\frac{3\pi}{2}-\cos\pi$; *г)* $\log_2\sqrt{2}+\sin\frac{\pi}{3}$;
д) $\log_2\left(1+\cos\frac{\pi}{2}\right)$.

535. Решење неједначине $x^2+2x^4\geq 0$ је:
а) $(-3,\ 1)$; *б)* $(-\infty,\ +\infty)$; *в)* $(-\infty,\ -3)\cup(3,+\ \infty)$; *г)* $(-1,\ 3)$;
д) $(-\infty,-1)\cup(3,+\infty)$.

536. *"Живојиновић никад није победио Лендла"*. Супротан исказ је:
а) Лендл никад није победио Живојиновића.
б) Живојиновић је бар једном изгубио од Лендла.
в) Живојиновић никад није изгубио од Лендла.
г) Лендл је бар једном победио Живојиновића.
д) Лендл је бар једном изгубио од Живојиновића.

537. Решење једначине $3\log_2 5x = -6$ је:
а) $\frac{4}{5}$; *б)* $\frac{2}{5}$; *в)* $\frac{6}{5}$; *г)* $-\frac{1}{20}$; *д)* $\frac{1}{20}$.

538. Који се од наведених израза разликује од осталих по бројној вредности:
а) $\log_2\left(\sin^2\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{6}\right)$; *б)* $\log_2\left(1+\sin\frac{\pi}{2}\right)$; *в)* $2+\sin\frac{3\pi}{2}+\log_2\left(\sin\frac{\pi}{2}\right)$;
г) $\sin(\pi\log_2\sqrt{2})$; *д)* $\log_2 4-\cos 0$?

539. Решење неједначине $(x+1)(x-1)^2>0$ је:
а) $(-1,\ +\infty)$; *б)* $(-\infty,\ -1)\cup(1,\ +\infty)$; *в)* $(-1,\ 1)$; *г)* $(-\infty,\ +\infty)$;
д) $(-1,\ 1)\cup(1,\ +\infty)$.

540. Шта је исправно (сви изрази су дефинисани):
а) $\frac{ab+ac+d}{a^2}=\frac{b+c+d}{a}$;
б) $\frac{(a-1)^2+2(a-1)^4-(1-a)^3}{(a-1)^6}=\frac{1+2(a-1)^2+(1-a)}{(a-1)^4}$;
в) $\frac{(b+2)^2-3(b+2)^4+(b+2)^3}{(b+2)^6}=\frac{1-3(b+2)^2+(b+2)}{(b+2)^3}$;
г) $\frac{(a-1)^2+2(a-1)^4-(1-a)^3}{(a-1)^6}=\frac{1+2(a-1)^2+(a-1)}{(a-1)^4}$;
д) $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{e}{f}=\frac{a+c+e}{bdf}$?

541. Који се пар састоји из различитих бројева:
а) $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2},\ \cos\frac{3\pi}{2}$; *б)* $\log_2(1+\sin\frac{\pi}{2}),\ 2+\cos\pi$; *в)* $\log_2(1+\cos\frac{\pi}{2}),\ 1+\cos\pi$;
г) $\log_2(1-\cos\frac{\pi}{2}),\ 1+\cos\pi$; *д)* $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4},\ \sin\frac{3\pi}{2}$.

542. Решење неједначине $\log_2(2-x)>0$ је:
а) $(-\infty,\ -1)$; *б)* $(-\infty,\ 1)$; *в)* $(-1,\ +\infty)$; *г)* $(1,\ +\infty)$; *д)* $(0,\ 1)$.

Природно математички факултет у Београду

(А)

543. Ако је $x=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}\right)$, $a>0,\ b>0$, доказати да је

$$\frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}-x}=\begin{cases}\dfrac{b-a}{2b}, & \text{ако је } a\geq b,\\[2mm] \dfrac{a-b}{2a}, & \text{ако је } a<b.\end{cases}$$

544. Одредити минимум функције $f(x)=max\{x^2-1,\ 1-|\,2x-1\,|\}$.

545. Решити неједначину $\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\leq\frac{1}{\sqrt{3}}$.

546. Колико решења има једначина $\sin x = \dfrac{x}{100}$?

547. Решити неједначину $\log_{\frac{1}{3}}(\log_4(x^2-5)) > 0$.

548. Доказати да је $\underbrace{44\ldots4}_{n}\underbrace{88\ldots8}_{n-1}9 = \left(\dfrac{2\cdot 10^n+1}{3}\right)^2$, $n = 1, 2, \ldots$

549. Четири човека обављају неки посао. Ако први, други и трећи раде заједно, заврше посао за 6 часова, ако први, други и четврти раде заједно - за $7,5$ часова, а трећи и четврти за 10 часова. За колико часова заврше посао ако раде сви заједно?

550. Дате су две међусобно управне полуправе p и q са заједничком почетном тачком O, на полуправој p тачке A, B, C и на полуправој q тачка D, такве да је $OA = AB = BC = OD$. Доказати да је права AD тангента круга описаног око троугла BCD.

551. Површина праве купе је два пута већа од површине лопте уписане у ту купу. Одредити однос запремине купе и лопте.

(Б)

552. Ученици једне школе уче енглески, француски и руски језик. Енглески учи 30 ученика, француски 25, а руски 28. Ученика који уче и енглески и руски има 8, оних који уче и енглески и француски има 10, а ученика који уче и руски и француски има 7. Два ученика уче сва три језика. Колико ученика има у школи?

553. Нека су p и q реални бројеви. Доказати да је $p+q-2pq = \dfrac{1}{2}$ ако и само ако је један од њих једнак $\dfrac{1}{2}$.

554. Нека су h_a, h_b и h_c висине троугла, а r полупречник његовог уписаног круга. Доказати да је $\dfrac{1}{h_a}+\dfrac{1}{h_b}+\dfrac{1}{h_c}=\dfrac{1}{r}$.

555. Који је од бројева $2^{\sqrt{\log_2 1985}}$ и $1985^{\sqrt{\log_{1985} 2}}$ већи?

556. Решити систем једначина $|\,x\,|+|\,y\,| = 1 \wedge max\{|\,x\,|, |\,y\,|\} = 1$

557. Доказати да је за сваки оштар угао θ испуњено:
$$\operatorname{tg}\theta + \operatorname{ctg}\theta \geq 2.$$

558. Наћи све комплексне бројеве z за које је $z^2 + |\,z\,|^2 = 0$.

559. Решити неједначину $|\,x^2-5x+5\,| < 1$.

560. Доказати да је за сваки природан број n испуњено:
$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}.$$

561. У круг полупречника 9 *cm* је уписан четвороугао са нормалним дијагоналама. Растојања дијагонала од центра круга су 3 *cm* и 7 *cm*. Наћи дужине страница четвороугла.

(В)

562. Решити једначину: $|x| + |x-1| + |x-2| = 3$.

563. Решити неједначину $\log(x-1) \leq \log(3x^2 - 7x + 3)$.

564. Шта је веће: $\cos 100$ или $\cos 101$?

565. Решити једначину: $\cos x + \cos 2x = 0$.

566. Доказати да је $\dfrac{1}{\sqrt{1}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n}} \leq 2\sqrt{n} - 1$, за свако $n \in N$.

567. Доказати да тачке симетричне ортоцентру троугла, у односу на праве одређене његовим страницама, леже на кругу описаном око тог троугла.

(Г)

568. Доказати да је $\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \dfrac{2n-1}{2n} < \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$, $n \in N$.

569. Решити једначину $|x^2 + x - 2| + |x^2 - x - 2| = 2$.

570. Решити једначину $4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$.

571. Решити једначину $\sin x + \cos x = 1$.

572. Решити неједначину $x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots < 1$.

573. Одредити a и b тако да полином $x^3 + ax^2 + bx - 5$ буде дељив са $x^2 + x + 1$.

574. Доказати да се дужи, које спајају темена тетраедра са тежиштима наспрамних страна, секу у једној тачки.

575. Констуисати троугао ABC ако су познате симетрале p, q, r страница AB, BC, CA и права s, која садржи тачку A.

576. Израчунати угао диедра правилног тетраедра.

577. На параболи $y = x^2$ одредити тачку која је најближа правој $y = 2x - 4$.

(Д)

578. Доказати да за сваки природан број n важи неједнакост
$$\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} < 2^n.$$

579. Купац има новчаницу од 100 динара и жели за сав новац да купи 100 оловака. Оловке могу бити плаве, црвене или жуте. Плава оловка стаје 5 динара, црвена 3 динара, а три жуте оловке стају 1 динар. На колико је начина могуће обавити куповину?

580. Полином x^8+x^4+1 написати као производ четири квадратна тринома.

581. Одредити вредност реалног параметра a, тако да систем једначина $x^2+y^2=8 \quad \wedge \quad y=ax+4$ има тачно једно решење.

582. Израчунати $\log_4(4^4 \cdot 8^8 \cdot 16^{16})$.

583. За геометријски низ (a_n) познато је $S_1 = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ и $S_2 = \dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \cdots + \dfrac{1}{a_n}$. Наћи $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$.

584. На хипотенузи BC правоуглог троугла ABC дате су тачке D и E, такве да је $BE = AB$ и $CD = AC$. Израчунати угао DAE.

585. Трапез ротира једном око веће, а други пут око своје мање основице. Запремине добијених обртних тела се односе као $3:4$. Одредити размеру основица трапеза.

586. Ако је $2\operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{tg}^2\beta\operatorname{tg}^2\gamma + \operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{tg}^2\beta + \operatorname{tg}^2\beta\operatorname{tg}^2\gamma + \operatorname{tg}^2\gamma\operatorname{tg}^2\alpha = 1$, израчунати $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma$.

587. Написати једначину круга са центром $C(3, -1)$, који на правој $2x - 5y + 18 = 0$ одсеца тетиву дужине 6.

Природно математички факултет у Новом Саду

(А)

588. Решити једначину $\log_{\sqrt{5}}(4^x - 6) - \log_{\sqrt{5}}(2^x - 2) = 2$.

589. Два круга полупречника R и r додирују се споља у тачки T. Њихова заједничка унутрашња тангента сече заједничку спољашњу тангенту у тачки A. Доказати да је $AT^2 = Rr$.

590. Решити једначину $\sin^4 x + \cos^4 x + \sin 2x - 1 = 0$.

591. Дате су праве $a:\ x+y-4=0$ и $b:\ x-y-4=0$ и променљива права s која пролази кроз координатни почетак. Ако су A и B редом тачке пресека праве s са правим a и b, одредити геометријско место средишта дужи AB, када права s ротира око коордитатног почетка.

592. Квадрат $n \times n$ подељен је на n^2 јединичних квадрата правим које су паралелне његовим страницама. Колико у добијеној мрежи има

а) правоугаоника,

б) квадрата,

чија су темена чворови мреже, а странице су паралелне страницама основног квадрата?

593. Круг k полупречника r додирује краке угла α, $\alpha = 60^o$. Круг k_1 полупречника r_1 додирује краке угла α и круг k, круг k_2 полупречника r_2 $(r_2 < r_1)$ додирује краке угла α и круг k_1, итд. Наћи збир површина бесконачног низа кругова k, k_1, k_2, ...

(Б)

594. Одредити све вредности параметра m за које су оба корена једначине $x^2 - 4x + m(m-6) = 0$: *а)* реална; *б)* позитивна.

595. Хипотенузина висина дели хипотенузу правоуглог троугла на одсечке дужина 9 и 16. Наћи полупречник круга уписаног у тај троугао.

596. Решити једначину $8\cos^6 x - 8\sin^6 x = 3\sin 4x$.

597. Дате су тачке $A(-2,\ 1)$, $B(7,\ -2)$, $C(2,\ 7)$, $D(8,\ 1)$. За које вредности параметра r круг $(x-2)^2+(y-3)^2 = r^2$ сече сваку од дужи AB и CD у по две тачке?

598. Решити систем једначина
$$5\,|\log_2 x\,| - \log_3 y^2 = 0$$
$$\log_2 x^2 - \log_{\frac{1}{3}} y = 9.$$

599. На свакој страници квадрата уочено је, изузев темена, по $(n-2)$ тачака $(n > 1)$. Нека је S скуп тачака који се састоји од темена квадрата и свих уочених тачака. Колико има различитих троуглова чија су темена из скупа S?

Филозофски факултет у Нишу-група математика

(А)

600. Ако ученици једног разреда седе по двоје у клупи, онда за једног ученика нема места. Ако ученици седе по троје у клупи, четири клупе остају празне. Колико има клупа, а колико ученика?

601. Одредити реалан параметар m тако да корени једначине $4x^2 - 4(m-2)x + m = 0$ буду позитивни.

602. Одредити геометријску прогресију од три члана, код које збир чланова износи 14, а збир логаритама тих чланова за основу 2 износи 6.

603. Решити једначину $\log_{\cos x} \sin x + \log_{\sin x} \cos x = 2$.

604. Дате су тачке $A(2,\ 1)$, $B(4,\ 2)$ и $C(-2,\ 2)$. Одредити све тачке из којих се дужи AB и AC виде под правим углом.

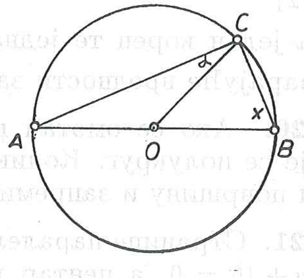
605. Паралелне странице трапеза су a и b. Одредити дужину одсечка који спаја средишта дијагонала трапеза.

(Б)

606. Израчунати вредност израза $\dfrac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}$, за $x = \dfrac{a+\dfrac{1}{a}}{2}$.

607. Одредити два узастопна природна броја који су дати изразима $2(n-3)(n+1)$ и $(n-2)(2n-1)$, где је $n \in N$.

608. Углови једног четвороугла у степенима дати су редом: x, $x+20$, $x+30$, $x+50$. Одредити x и доказати да је тај четвороугао трапез.



609. Према датој слици изразити x преко α. (AB је пречник, C тачка на кругу, O центар круга.)

610. Доказати да је $\log_b a \cdot \log_c b \cdot \log_a c = 1$.

611. Дата је једначина $x^2 - 2(m+1)x + 3m + 1 = 0$, где је $m \in R$.
а) Одредити природу решења једначине у зависности од m.
б) Одредити m тако да је $x_1^2 + x_2^2 = (x_1+2)(x_2+2) - 2(x_1+x_2)$.

612. Доказати да три различита броја не могу бити истовремено три узастопна члана једне аритметичке и једне геометријске прогресије.

613. Доказати да решење једначине $x + \cos\alpha \cos 2\alpha \cos 4\alpha = \dfrac{\sin 8\alpha}{8 \sin \alpha} + 1$ не зависи од α.

614. Наћи тачку $B(x,\ y)$ симетричну тачки $A(1,\ 3)$ у односу на праву $x + 2y - 2 = 0$.

615. За пражњење базена служе пумпе A и B. Ако ради само пумпа A базен се испразни за 2 сата и 14 минута, а ако раде обе пумпе базен се испразни за 1 сат и 38 минута. За колико се времена испразни базен ако ради само пумпа B?

(B)

616. Решити неједначину $\log_2(x+1)+\log_{(x+1)}2\geq\frac{5}{2}$.

617. Решити једначину $\frac{\sin x+\sin 2x}{\sin 3x}=-1$.

618. Доказати да је $x=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}\right)$ решење једначине $\frac{2b\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}=a-b,\ a\cdot b\neq 0$.

619. Нека су x_1 и x_2 корени једначине $x^2-(1-m)x+m^2=0$. Формирати једначину са непознатом z чији су корени $z_1=\frac{x_1}{x_2}$ и $z_2=\frac{x_2}{x_1}$. У једначини са непознатом z наћи такву вредност за m, да један корен те једначине буде $\frac{1}{4}$. За ту вредност m наћи одговарајуће вредности за x_1 и x_2.

620. Ако се омотач купе са изводницом x развије у раван, добије се полукруг. Колики је угао осног пресека при врху купе? Наћи површину и запремину купе у функцији од x.

621. Странице паралелограма припадају правим $y=3x-16$ и $x-3y+16=0$, а центар паралелограма је тачка $O(4,\ 4)$. Наћи једначине преосталих двеју страница и испитати да ли је овај паралелограм ромб.

Технички факултети у Београду

Сви тестови су бодовани на исти начин.
Задаци 1-5 вреде по 3 поена, задаци 6-10 по 4 поена, задаци 11-14 по 5 поена, задаци 15-17 по 7 поена и задаци 18-20 по 8 поена. Погрешан одговор доноси -10% од броја поена за тачан одговор. Заокруживање N не доноси ни позитивне ни негативне поене. У случају заокруживања више од једног одговора, као и незаокруживања ниједног одговора, добија се -1 поен.

(A)

622. Дати су искази: I $\log((-2)(-3))=\log(-2)+\log(-3)$, II $\log(-3)^2 = 2\log(-3)$, III $\log(-2)^4 = 2\log(-2)^2$,

IV $\log\dfrac{-2}{-3} = \log 2 - \log 3$. Тачни су:

A) ниједан ; B) сви ; C) I и IV ; D) II и III ; E) III и IV.

623. Вредност израза $\left(\dfrac{2}{5}+\dfrac{3}{7}\cdot\dfrac{12}{5}\right)^{-2}$ је:

A) 1 ; B) 0,49 ; C) $\sqrt{\dfrac{10}{7}}$; D) $\left(\dfrac{175}{348}\right)^2$; E) $\dfrac{400}{361}$.

624. Ако су $a, b \in R$ и $a^2 \neq b^2$, вредност израза $\dfrac{a^3-b^3}{a^2-b^2}$ је:

A) $a-b$; B) $\dfrac{a^2+b^2}{a+b}$; C) $\dfrac{a^2+ab+b^2}{a-b}$; D) $\dfrac{a^2-ab+b^2}{a+b}$; E) $\dfrac{a^2+ab+b^2}{a+b}$.

625. За $a=\left(2+\sqrt{3}\right)^{-1}$ и $b=\left(2-\sqrt{3}\right)^{-1}$ израз $(a+1)^{-1}+(b+1)^{-1}$ има вредност:

A) 1 ; B) $\sqrt{3}$; C) $\dfrac{1}{3}$; D) $1+\sqrt{3}$; E) 2.

626. Хипотенуза правоуглог троугла два пута је већа од катете. Оштри углови тог троугла су:

A) 45^o, 45^o ; B) 30^o, 60^o ; C) $26^o35'32''$, $63^o24'28''$;
D) 18^o, 72^o ; E) 15^o, 75^o.

627. Колико решења у интервалу $(0,\ 2\pi)$ има једначина

$$\sin^2 x + \cos x + 1 = 0?$$

A) Ниједно ; B) једно ; C) два ; D) три ; E) бесконачно много.

628. Дате су функције: $f_1(x)=x$, $f_2(x)=\dfrac{x^2}{x}$, $f_3(x)=\sqrt{x^2}$,

$f_4(x)=(\sqrt{x})^2$. Тачан је исказ:

A) међу датим функцијама нема међусобно једнаких ;
B) све су функције међусобно једнаке ; C) $f_1=f_2\neq f_3$;
D) $f_1=f_3\neq f_4$; E) $f_1\neq f_3=f_4$.

629. Производ свих решења једначине $x^2-2\,|\,x\,|-3=0$ је:

A) 3 ; B) -3 ; C) -1 ; D) -9 ; E) 9.

630. Ако је $\log_3 7=a$, $\log_3 2=b$, тада је $(\log_2 7+\log_7 2)^{-1}$ једнако:

A) $\dfrac{a^2-b^2}{ab}$; B) $\dfrac{a^2+b^2}{ab}$; C) $\dfrac{ab}{a^2+b^2}$; D) $\dfrac{2a+7b}{3ab}$; E) $\dfrac{7a+2b}{ab}$.

631. Ако је површина лопте 324π њена запремина је:

A) $18^3\pi$; B) $18^3\pi^2$; C) 972π ; D) 2916π ; E) 108π.

632. У фигуру ограничену луком криве $2x^2-y=6$ и осом Ox уписан је правоугаоник тако да су му два темена на оси Ox. Максимална површина тог правоугаоника јесте:

A) 8 ; B) 8,5 ; C) 9 ; D) 9,5 ; E) 10.

633. Израз $\sin^4 x + \cos^4 x$ идентички је једнак изразу:
A) 1 ; B) $\sin 4x + \cos 4x$; C) $1 + \cos^2 2x$; D) $\dfrac{1 - 2\cos 4x}{2}$; E) $\dfrac{3 + \cos 4x}{4}$.

634. Права $ax + y - 5 = 0$ додирује елипсу $9x^2 + 16y^2 = 144$ ако и само ако је:
A) $a = \pm 2$; B) $a = \pm\frac{3}{4}$; C) $a = \pm\frac{\pi}{4}$; D) $a = \pm\frac{6}{5}$; E) $a = \pm 1$.

635. Једначина $\sqrt{2x+14} - \sqrt{x-7} = \sqrt{x+5}$

A) има два реална позитивна решења ; B) има два реална решења од којих је само једно позитивно ; C) има само једно реално решење ; D) има четири реална позитивна решења ; E) нема реалних решења.

636. Кроз тачку у троуглу ABC повучене су праве паралелне страницама троугла. На тај начин формирана су три мања троугла чије су површине 1, 4 и 9. Површина троугла ABC је:
A) 36 ; B) 64 ; C) 48 ; D) 24 ; E) 27.

637. Корени једначине $x^2 - x + a - 2 = 0$ задовољавају услов: $\dfrac{x_1}{x_2} + \dfrac{x_2}{x_1} + \dfrac{1}{2}x_1x_2 + 4 = 0$. Тада је:
A) $-1 \le a \le 1$; B) $a = \pm 1$; C) $a = \pm\sqrt{2}$; D) $a = \sqrt{3}$ или $a = 4 - \sqrt{3}$;
E) $0 < a < 1$.

638. Нека је M скуп свих реалних вредности параметра m таквих да једначина $2\log x = \log(x+m) + 2\log 2$ има два реална различита решења. Скуп M је:
A) Скуп R ; B) празан скуп ; C) $\{m:\ m > -1\}$;
D) $\{m:\ -1 < m < 0\}$; E) $\{m:\ m \ge 0\}$.

639. На фудбалском турниру такмичење се одвија у m група $(m > 1)$ са по $2k$ екипа $(k > 1)$ у свакој групи. У групама екипе играју свака са сваком и прве две екипе из сваке групе улазе у финалну групу. У финалној групи екипе играју свака са сваком, с тим што екипе које су се састале у предтакмичењу не играју међусобно нову утакмицу. Ако је на турниру број утакмица непаран, одредити m и $2k$.
A) $m = 6,\ 2k = 4$ је једино решење ; B) $m = 3,\ 2k = 6$ је једино решење ; C) постоје тачно два решења ; D) постоји више од два решења ; E) задатак нема решења.

640. За које је вредности реалног параметра m двострука неједнакост $-3 < \dfrac{x^2 + mx - 2}{x^2 - x + 1} < 2$ задовољена за свако реално x?

A) $-6 < m < -1$; B) $-6 < m < 7$; C) $-6 \leq m \leq 7$; D) $-1 < m < 2$; E) ни за једно m.

641. Полазећи од збира прогресије $1 + x + x^2 + x^3 + x^4$ (или на неки други начин) могу се израчунати $\cos\frac{2\pi}{5}$ и $\cos\frac{4\pi}{5}$. Збир $\cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5}$ једнак је:

A) $-\frac{\sqrt{5}}{4}$; B) $-\frac{1}{2}$; C) $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$; D) $-\frac{1+\sqrt{5}}{4}$; E) $-\frac{1}{4}$.

(Б)

642. Израз $\left(\frac{1}{1+\sqrt{7}} + \frac{1}{1-\sqrt{7}}\right)^{-2} + \left(\frac{1}{1+\sqrt{7}}\right)^{-2} + \left(\frac{1}{1-\sqrt{7}}\right)^{-2}$ има вредност:

A) 25 ; B) $(1+\sqrt{7})^2$; C) $\frac{-7}{51}$; D) 17 ; E) 20.

643. Ако је реципрочна вредност броја $x+2$ четири пута "мања" од броја $x-1$, онда је збир свих вредности броја x које задовољавају овај услов:

A) 0 ; B) 1 ; C) -1 ; D) -6 ; E) не постоји ни једно такво x.*)

644. Ако је a реалан број и $|a| \neq 2$, тада је вредност израза $\left(\frac{a+1}{a^2-4} + \frac{1-a^2}{a^3+8}\right) : \frac{1}{(a-1)^2+3}$ једнака:

A) $\frac{a-2}{a+1}$; B) $\frac{a+1}{a-2}$; C) a ; D) 1 ; E) $\frac{a+1}{(a^3+8)(a^2-2a+4)}$

645. Ако је $10^{2\log 3} = 8x + 5$, тада је x једнако:

A) 0 ; B) $\frac{5}{8}$; C) $\frac{1}{2}$; D) $\frac{9}{8}$; E) $\frac{1}{8}(\log 9 - 5)$.

646. Тетива круга је за 2 мања од пречника, а одстојање центра круга од тетиве за 2 мање од полупречника круга. Дужина ове тетиве једнака је:

A) 6 ; B) 8 ; C) 10 ; D) $5\sqrt{2}$; E) задатак нема решења.

647. Ако је $f(x) = \log_6 x + 3\log_3 9x$, онда је $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$ једнако:

A) 0 ; B) 12 ; C) 18 ; D) $\log_3 x + 2$; E) $3\log_3 9$.

648. Ако је $f\left(\frac{x}{x+1}\right) = (x-1)^2$, тада је $f(3)$ једнако

A) 6,25 ; B) 7,35 ; C) 4 ; D) 9 ; E) 5,15.

649. Ако се број страница правилног многоугла повећа за два, његов се угао повећа за 9°. Број страница многоугла једнак је:

*) Четири пута "мање" подразумева се да је подељено са 4.

A) 8 ; B) 9 ; C) 10 ; D) 12 ; E) задатак нема решења.

650. Збир свих троцифрених бројева дељивих са 11 износи:
A) 33660 ; B) 40733 ; C) 41624 ; D) 44550 ; E) 53031.

651. Коефицијент правца праве нормалне на праву повучену кроз тачке $A(-2,\ -1)$ и $B(2,\ 2)$ једнак је
A) -1 ; B) $\frac{3}{4}$; C) $-\frac{3}{4}$; D) $\frac{4}{3}$; E) $-\frac{4}{3}$.

652. Дате су функције $f_1(x)=1,\ f_2(x)=\operatorname{tg}\frac{x}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$, $f_3(x)=\frac{|\sin x|}{\sqrt{1-\cos^2 x}}$ и $f_4(x)=\frac{\sqrt{1+\cos 2x}}{|\sqrt{2}\cos x|}$. Тачан је следећи исказ:
A) Све су функције међусобно једнаке ; B) Међу датим функцијама нема међусобно једнаких ; C) $f_1\neq f_2=f_3\neq f_4\neq f_1$;
D) $f_1\neq f_2=f_3=f_4$; E) $f_1\neq f_3=f_4\neq f_2\neq f_1$.

653. Ако су праве $x+4y-25=0$ и $4x+9y-75=0$ тангенте елипсе $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$, онда је $a+b$ једнако:
A) $12\sqrt{3}$; B) 20 ; C) 18 ; D) 24 ; E) $14\sqrt{2}$.

654. Вредност реалног параметра m за коју је збир квадрата корена једначине $x^2-mx+m-3=0$ најмањи, припада интервалу:
A) $(-\infty,\ -5]$; B) $(-5,\ -2]$; C) $(-2,\ 2]$; D) $(2,\ 5]$; E) $(5,\ +\infty)$.

655. Максимална запремина ваљка уписаног у сферу полупречника R једнака је:
A) $\frac{2}{3}R^3\pi$; B) $\frac{2}{3\sqrt{3}}R^3\pi$; C) $\frac{16}{27}R^3\pi$; D) $\frac{4}{3\sqrt{3}}R^3\pi$; E) $\frac{1}{\sqrt{2}}R^3\pi$.

656. Дата је једначина $\sqrt[3]{x+\sqrt{x^2-1}}+\sqrt[3]{x-\sqrt{x^2-1}}=1$.
A) Једначина има три решења у интервалима $(-\infty,\ -1]\cup[1,+\infty)$;
B) Једначина има само једно решење које је у интервалу $(-\infty,\ -1]$
C) Једначина има само једно решење које је у интервалу $[1,\ +\infty)$;
D) Једначина има два реална негативна решења ;
E) Једначина нема решења.

657. Ако је у троуглу ABC угао код темена A два пута већи од угла код темена B, а странице су $AC=2$, $AB=3$, тада је страница BC једнака:
A) 3 ; B) $2\sqrt{3}$; C) $2\sqrt{2}$; D) $\sqrt{10}$; E) $\frac{10}{3}$.

658. Дат је 1990-цифрен број $1234512345\ldots12345$. У броју се, идући слева надесно, редом прецртавају све цифре на непарним местима. Непрецртане цифре у постојећем поретку чине нови број у коме се понавља исти поступак прецртавања. Овај се поступак

понавља све док не буду прецртане све цифре. Која је цифра последња прецртана?
A) 1 ; B) 2 ; C) 3 ; D) 4 ; E) 5.

659. Вредност производа $\sin 20^o \sin 40^o \sin 80^o$ једнака је:
A) $-\frac{1}{2}$; B) $\frac{1}{4}$; C) $\frac{1}{3\sqrt{2}}$; D) $\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$; E) $\frac{1}{8}\sqrt{3}$.

660. Збир углова, под којима се са 100, 200 и 300 метара удаљености од подножја види торањ који стоји на хоризонталној равни, износи 90^o. Висина торња је:
A) $100\ m$; B) $90\ m$; C) $95\ m$; D) $64\sqrt{2}\ m$; E) $58\sqrt{3}\ m$.

661. Решења неједначине $\log_{\frac{1}{9}}(x^2-4) \geq \log_{\frac{1}{9}}(2\,|\,x\,|-1)$ су интервали:
A) $[-1,\ 3]$; B) $(-\infty,\ -2)\cup(2,\ +\infty)$; C) $[3,\ +\infty)$;
D) $(-4,\ -3]\cup[3,\ 4)$; E) $[-3,\ -2)\cup(2,\ 3]$.

(B)

662. Вредност израза $\left\{\left[2^{-1} : \left(\frac{1}{4}\right)^{-3}\right]\cdot 8\right\}^{0,25}$ је:
A) 4 ; B) -4 ; C) $\frac{1}{4}$; D) 2 ; E) $\frac{1}{2}$.

663. Ако је $|\,x\,| \neq |\,y\,|$ тада је $\frac{x^3+y^3}{x+y}:(x^2-y^2)+\frac{2y}{x+y}-\frac{xy}{x^2-y^2}$ идентички једнако:
A) 1 ; B) $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$; C) $\frac{x-y}{x+y}$; D) $\frac{xy}{x+y}$; E) $\frac{x^2-xy+y^2}{x-y}$.

664. У једнакокраком троуглу крак је два пута већи од основице. Ако је α угао између кракова, онда је $\sin\frac{\alpha}{2}$ једнако:
A) $\frac{1}{4}$; B) $\frac{1}{2}$; C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; D) $\frac{\sqrt{15}}{4}$; E) $\frac{\sqrt{15}}{15}$.

665. Једначина праве која пролази кроз тачку $P(2,\ 3)$ и нормална је на праву $2x-y-1=0$ је
A) $x+2y+2=0$; B) $2x+y-7=0$; C) $2x+2y-10=0$;
D) $x+2y-8=0$; E) $x-y+1=0$.

666. Који правилан многоугао има 44 дијагонале?
A) десетоугао ; B) једанаестоугао ; C) дванаестоугао ;
D) тринаестоугао ; E) четрнаестоугао.

667. Вредност израза $\left(\frac{2}{\sqrt{3}-1}+\frac{3}{\sqrt{3}-2}-\frac{15}{\sqrt{3}-3}\right)(\sqrt{3}+5)^{-1}$ је:
A) $\sqrt{3}+1$; B) $\sqrt{3}$; C) 1 ; D) $\frac{1}{2}$; E) $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

668. Ако је $f(x-2) = x^3 - 2x - 1$, тада је $f(1)$ једнако:
A) -2 ; B) 5 ; C) 10 ; D) 20 ; E) 25.

669. Скуп тачака у равни чије су координате x и y и задовољавају дату једначину $x^2 - 4x + 2y^2 + 4y - 4 = 0$ представља
A) круг ; B) елипсу ; C) хиперболу ; D) параболу ;
E) две праве које се секу.

670. Једначина $|x+2| = 2(3-x)$
A) нема решења ; B) има само једно решење ; C) има тачно два решења ; D) има тачно четири решења ; E) има бесконачно много решења.

671. Ако је $\log_5 8 = a$ и $\log_5 9 = b$, тада је $\log_5 6$ једнак:
A) $\dfrac{6}{3a+2b}$; B) $\dfrac{6}{2a+3b}$; C) $\dfrac{2a+3b}{6}$; D) $\dfrac{3a+2b}{6}$; E) $\dfrac{5}{2a+3b}$.

672. Дате су функције: $f_1(x) = 2\log_2 x$, $f_2(x) = \log_2 x^2$, $f_3(x) = 2\log_2|x|$, $f_4(x) = \dfrac{2}{\log_x 2}$. Тачан је следећи исказ:
A) све су функције међу собом једнаке ; B) међу датим функцијама нема једнаких ; C) $f_1 = f_2 = f_3 \neq f_4$; D) $f_1 = f_4 \neq f_2 = f_3$;
E) $f_1 \neq f_2 = f_3 \neq f_4$.

673. Израз $\dfrac{\cos^3 x + \sin^3 x}{2 - \sin 2x}$ идентички је једнак:
A) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$; B) $\cos x + \sin x$; C) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$;
D) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$; E) 1.

674. У аритметичком низу први, пети и једанаести члан образују геометријски низ. Ако је први члан 24, десети члан аритметичког низа је:
A) 48 ; B) 50 ; C) 51 ; D) 54 ; E) 72.

675. Збир квадрата решења једначине $x^2 + 3\alpha x + \alpha^3 = 0$ је $\dfrac{7}{4}$, ако и само ако је
A) $\alpha = 1$; B) $|\alpha| = 1$; C) $\alpha = \dfrac{1}{4}$; D) $|\alpha| = \dfrac{1}{3}$; E) $|\alpha| = \dfrac{1}{2}$.

676. Кошаркашки тим сачињавају 5 бекова, 4 центра и 3 крила. На колико се начина од њих може саставити петорка, ако у њој морају играти бар 2 бека и бар 1 центар?
A) 540 ; B) 1440 ; C) 792 ; D) 243 ; E) 125.

677. Сва решења неједначине $\dfrac{x-2}{x^2+3x-4} > \dfrac{1}{3}$ обухваћена су интервалима:

A) $(-4,\ 1)$; B) $(2,\ +\infty)$; C) $[0,\ 2)$; D) $(-5,\ 0]$;
E) скуп реалних бројева.

678. Решење једначине $\log_3(3-2\cdot 3^{x+1})=2+2x$ припада интервалу
A) $[-8,\ -4]$; B) $[-4,\ 0]$; C) $[0,\ 4]$; D) $[4,\ 8]$; E) $[8,\ 12]$.

679. Висина праве купе најмање запремине, описане око сфере датог полупречника R је:
A) $2R$; B) $R\sqrt{2}$; C) $3R$; D) $2\sqrt{R}$; E) $4R$.

680. Сва решења једначине $\sin x+\cos x+\operatorname{tg} x=\dfrac{1}{\cos x}$ су:
A) $x=(2k+1)\pi,\ k\in Z$; B) $x=k\pi,\ k\in Z$; C) $x=2k\pi,\ k\in Z$;
D) $x=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in Z$; E) $x=\dfrac{\pi}{4}+2k\pi,\ k\in Z$.

681. На страници AB паралелограма $ABCD$ површине 1 дата је тачка M, тако да је $AB=3\ AM$. Ако је N тачка пресека правих AC и DM, тада је површина троугла AMN једнака:
A) $\dfrac{1}{12}$; B) $\dfrac{1}{15}$; C) $\dfrac{1}{18}$; D) $\dfrac{1}{24}$; E) $\dfrac{1}{27}$.

(Г)

682. Свеже печурке садрже 90% воде, а суве 12%. Колико се килограма сувих печурки може добити од 22 килограма свежих?
A) 2,464 ; B) 2,5 ; C) 2,64 ; D) 4,576 ; E) 4,84.

683. Ако је $f(x)=ax^2+bx+c$, тада је $f(x+3)-3f(x+2)+3f(x+1)$ за свако реално x једнако:
A) $f(x)$; B) $f(-x)$; C) 0 ; D) $-f(x)$; E) $7f(x)-2c$.

684. Ако $a\in R\setminus\{-1,\ 0,\ 1\}$, израз $\left[\dfrac{1}{a-1}-\dfrac{a^3+1}{a^4-a}\right]:\dfrac{a+1}{a-a^3}$ има вредност:
A) 1 ; B) $\dfrac{1-a-a^2}{1+a+a^2}$; C) $\dfrac{1-a-a^2}{(a^3-a^2)(a^3-1)}$; D) $\dfrac{a^2+a-1}{a^2+a+1}$;
E) $\dfrac{a+1}{1+a+a^2}$.

685. Вредност израза $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-10}\cdot 27^{-3}+0,2^{-4}\cdot 25^{-2}+\left(64^{-\frac{1}{9}}\right)^{-3}$ износи:
A) $\dfrac{3}{25}$; B) 1 ; C) $\dfrac{5}{3}$; D) 3 ; E) 8.

686. Производ свих решења једначине $|\,4x-6\,|-2x-12=0$ је:
A) -18 ; B) -9 ; C) -6 ; D) 3 ; E) 9.

687. Геометријско место тачака $(x,\ y)$ темена парабола

$y = x^2 + kx + k + 1,\ k \in R$, одређено је са:
A) $y = 2-(x+1)^2$; B) $y = x^2+2x$; C) $y = 3x$; D) $y = (1-3x)^2$;
E) $y = \dfrac{3}{4}$.

688. Дате су реалне функције $f_1(x) = (x-1)^2$, $f_2(x) = |\ x-1\ |^2$
$f_3(x) = \sqrt{\dfrac{(x-1)^5}{x-1}}$, $f_4(x) = |\ x-1\ |\sqrt{x^2-2x+1}$ и $f_5(x) = (x-1)\sqrt{(x-1)^2}$.
Тачно је тврђење:
A) све дате функције су међусобно различите ;
B) $f_3 \neq f_1 = f_2 = f_4 \neq f_5$; C) $f_1 = f_2 = f_3 = f_4 \neq f_5$;
D) $f_3 \neq f_1 = f_2 \neq f_4$ и $f_5 \neq f_1$; E) све дате функције су једнаке.

689. Тачка симетрична тачки $M\left(\dfrac{2}{5},\ \dfrac{4}{5}\right)$ у односу на праву $x - 3y - 4 = 0$ је:
A) $(2,-3)$; B) $\left(\dfrac{8}{5}, -\dfrac{14}{5}\right)$; C) $\left(\dfrac{3}{2}, -\dfrac{5}{2}\right)$; D) $(2,-4)$; E) $\left(\dfrac{5}{3}, -3\right)$.

690. У троуглу ABC је $AB = AC$ и угао код темена A је већи од 30^o. Нека је D тачка на страници BC таква да угао BAD износи 30^o, и нека је E тачка на страници AC таква да је $AE = AD$. Угао EDC једнак је:
A) 10^o ; B) 12^o ; C) 15^o ; D) 18^o ; E) 30^o.

691. На сегменту $[0,\ 3\pi]$ број решења једначине $\sin 2x = \cos x$ је:
A) 2 ; B) 3 ; C) 4 ; D) 5 ; E) 7.

692. Скуп свих вредности реалног параметра m за које су корени квадратне једначине $(m-2)x^2 - 2mx + 2m + 2 = 0$ реални и различитог знака одређен је интервалима
A) $(\ -1,\ 2)$; B) $(\ 1-\sqrt{5},\ -1) \cup (2,\ 1+\sqrt{5})$; C) $(\ 1-\sqrt{5},\ 1+\sqrt{5})$;
D) $(\ 2,\ +\infty)$; E) $\emptyset$.

693. Ако су $a,\ b,\ c,\ d$ позитивни реални бројеви различити од 1, вредност израза $\log_b a \cdot \log_c b \cdot \log_d c \cdot \log_a d$ је:
A) $ab : d$; B) $\log_{abcd}(a+b+c+d)$; C) ad ; D) $\dfrac{ad}{bc}$; E) 1.

694. Ако су праве $x + y - 8 = 0$ и $x + 3y + 16 = 0$ тангенте елипсе $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, уређени пар $(a,\ b)$ је:
A) $(6,\ 5)$; B) $(6,\ 2\sqrt{6})$; C) $(2\sqrt{10},\ 5)$; D) $(2\sqrt{10},\ 2\sqrt{6})$;
E) $(4\sqrt{2},\ 3\sqrt{2})$.

695. Ако странице троугла ABC су $AB = 5$, $BC = 6$, $AC = 9$, тада је полупречник описаног круга тог троугла:
A) $\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$; B) $\dfrac{22}{5}$; C) $\dfrac{27\sqrt{2}}{8}$; D) $\dfrac{7}{2}\sqrt{2}$; E) $2\sqrt{6}$.

696. Око полулопте полупречника r описана је права купа минималне запремине чија је основа у равни основе полулопте. Запремина те купе износи:
A) $\frac{4}{5}r^3\pi$; B) $\frac{2\sqrt{2}}{3}r^3\pi$; C) $\frac{\sqrt{2}}{2}r^3\pi$; D) $\frac{\sqrt{3}}{2}r^3\pi$; E) $\frac{4}{3}r^3\pi$.

697. Једначина $\sin^4 x + \cos^4 x = a$, $a \in R$, има бар једно решење ако и само ако
A) $-1 < a < 1$; B) $0 \leq a \leq 1$; C) $0 \leq a \leq \frac{1}{2}$;
D) $\frac{1}{2} \leq a \leq 1$; E) $-1 < a < \frac{1}{2}$.

698. На тениском турниру учествује 2^n такмичара. Турнир се игра по куп систему, тј. у наредно коло се пласира победник у мечу, а поражени испада из даљег такмичења. Сваки меч се игра у три добијена сета. Познато је да је на целом турниру одиграно укупно $2^{n+1} + 4n^2 + 184$ сетова. Број такмичара на турниру је:
A) 32 ; B) 64 ; C) 128 ; D) 256 ; E) 512.

699. Тетиве AB и AC круга k су једнаке, а тетива AD сече BC у тачки E. Ако је $AC = 12$ и $AE = 8$ тада је AD једнако:
A) 16 ; B) $12\sqrt{2}$; C) 17 ; D) 18 ; E) $12\sqrt{3}$.

700. Ако је низ функција $f_n(x)$, $n \in N$, дефинисан на следећи начин:
$f_1(x) = \frac{x}{x-1}$, $f_2(x) = \frac{1}{1-x}$, $f_{n+2}(x) = f_{n+1}(f_n(x))$, $n \in N$, онда је $f_{1992}(1992)$ једнако:
A) -1991 ; B) $\frac{-1}{1991}$; C) $\frac{1}{1992}$; D) $\frac{1991}{1992}$; E) $\frac{1992}{1991}$.

701. Систем једначина
$2^{1+\sqrt{xy}} + 3^{x+y-1} = a \ \wedge \ 8^{1+\sqrt{xy}} + 27^{x+y-1} = a^3 - 3a^2 + 3a$, $a \in R$,
има бар једно решење (x, y), $x, y \in R$ ако и само ако је
A) $a \geq 3$; B) $1 + \sqrt{2} \leq a \leq 1 + 2\sqrt{2}$; C) $3 \leq a \leq 1 + 2\sqrt{2}$;
D) $a > 1$; E) $\sqrt{2} \leq a \leq 4$.

(Д)

702. Ако је $A(x_0, y_0)$ тачка на правој $3x - 4y + 1 = 0$ која је најближа тачки $B(2, 3)$, тада је $x_0 + y_0$ једнако :
A) $\frac{19}{4}$; B) $\frac{24}{5}$; C) $\frac{14}{3}$; D) $\frac{43}{9}$; E) $\frac{17}{6}$.

703. За свако $a > 1$, $\left(\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a+1}} + \frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{a-1}}\right) : \left(1 + \sqrt{\frac{a+1}{a-1}}\right)$ једнако је:
A) $\sqrt{a^2-1}$; B) $a - 1$; C) $\sqrt{a-1}$; D) $a^2 - 1$; E) $2\sqrt{a(a-1)}$.

704. Нека је $P(x) = ax^2+bx+c$. Ако је $P(0) = 4$, $P(1) = 5$, $P(-1) = 9$, тада је скуп $\{a,\ b,\ c\}$ једнак:
A) $\{1,\ 2,\ 4\}$; B) $\{4,\ 5,\ 9\}$; C) $\{-2,\ 4,\ 3\}$; D) $\{0,\ -1,\ -2\}$;
E) $\{8,\ 9,\ -1\}$.

705. Вредност израза $\left(\dfrac{\left(0,5:1,25+\dfrac{7}{5}:1\dfrac{4}{7}-\dfrac{3}{11}\right)\cdot 3}{\left(1,5+\dfrac{1}{4}\right):18\dfrac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{5}}$ једнака је

A) $\dfrac{2}{3}$; B) 2 ; C) $\sqrt[3]{\dfrac{3}{2}}$; D) 3 ; E) $\dfrac{1}{3}$.

706. Збир прва четири члана аритметичке прогресије је 92, а збир првих девет чланова је 342. Колико првих чланова треба сабрати да би се добио збир 840?
A) 11 ; B) 13 ; C) 15 ; D) 17 ; E) 21.

707. Ако је $a > 0$, $b > 0$ и $a^2+b^2 = 14ab$, тада је вредност израза $\log_2(a+b) - \dfrac{1}{2}(\log_2 a + \log_2 b)$:
A) $\log_2 ab$; B) 0 ; C) $\dfrac{1}{2}$; D) 1 ; E) 2.

708. Број решења једначине $2\sin^4 x - 2\cos^4 x - 1 = 0$ на интервалу $[-\pi,\ \pi]$ једнак је:
A) 6 ; B) 3 ; C) 5 ; D) 2 ; E) 4.

709. Неједнакост $x+1 > \sqrt{5-x}$ је тачна, ако и само ако је:
A) $1 < x \leq 5$; B) $x < -2$ или $x > 1$; C) $-2 < x < 1$;
D) $-1 < x \leq 5$; E) $x < -2$.

710. Ако су $a+ib$, $c+id$ (a, b, c, d реални бројеви, $i = \sqrt{-1}$) решења једначине $z^2 = -15-8i$, тада је $a\cdot b\cdot c\cdot d$ једнако :
A) 15 ; B) -12 ; C) 12 ; D) 16 ; E) -16.

711. Права $kx - 3y - 24 = 0$ је тангента хиперболе $x^2 - y^2 = 36$ ако и само ако k има вредност:
A) 5 или -5 ; B) 1 или -1 ; C) 1 или -2 ; D) 2 или -2 ;
E) 3 или -1.

712. Збир квадрата свих реалних решења једначине $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) = 15$ је:
A) 18 ; B) 25 ; C) 36 ; D) $\dfrac{44}{25}$; E) 23.

713. У оштроуглом троуглу задане су странице $a = 1$, $b = 2$ и површина $P = \dfrac{12}{13}$. Збир квадрата синуса углова троугла једнак је:

A) $\frac{134}{65}$; B) $\frac{352}{169}$; C) $\frac{1868}{845}$; D) $\frac{28}{13}$; E) $\frac{88}{39}$.

714. Збир свих вредности параметра a, за које је разлика корена једначина $(a-2)x^2-(a-4)x-2=0$ једнака 3, је:

A) 2 ; B) -5 ; C) $\frac{9}{2}$; D) 4 ; E) $\frac{11}{4}$.

715. Максимална запремина праве купе дате изводнице s једнака је:

A) $2\pi s^3\frac{\sqrt{3}}{27}$; B) $\pi s^3\frac{\sqrt{3}}{24}$; C) $3\pi s^3\frac{\sqrt{2}}{4}$; D) $2\pi s^3\frac{\sqrt{3}}{3}$; E) $\pi s^3\frac{\sqrt{2}}{6}$.

716. Једначина $x-a=2\mid 2\sqrt{x^2-a^2}\mid$ има максималан број решења ако и само ако је:

A) $a<0$ или $a>2$; B) $a\le -2$ или $a\ge -\frac{1}{2}$;

C) $-2<a<0$; D) $|a|\le 1$; E) $-2<a<-\frac{1}{2}$.

717. Ако је $ax^3=by^3=cz^3$ и $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$ (x, y, z, a, b, c реални бројеви, $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}\neq 0$), тада је израз $\frac{\sqrt[3]{ax^2+by^2+cz^2}}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}}$ једнак:

A) $\frac{\sqrt[3]{9(a^3+b^3+c^3)}}{a+b+c}$; B) $\sqrt[3]{\frac{ab+bc+ac}{a^2+b^2+c^2}}$;

C) $1+\sqrt[3]{a-b}+\sqrt[3]{b-c}+\sqrt[3]{c-a}$; D) не зависи од a, b, c ; E) $\frac{a+b+c}{3\sqrt[3]{abc}}$.

718. Основице трапеза $ABCD$ су $AB=8$ и $CD=4$. Нека је N тачка на страници BC таква да је површина троугла ABN четири пута мања од површине трапеза. Ако је M тачка пресека правих AN и CD, тада је CM једнако:

A) 13 ; B) $\frac{64}{5}$; C) $\frac{40}{3}$; D) 14 ; E) $\frac{49}{4}$.

719. На шаховском турниру учествује 8 играча. Свако игра са сваким по једну партију. У свакој партији победник добија 1 поен, поражени добија 0 поена, а при нерешеном исходу оба играча добијају по 0,5 поена. На крају турнира сви играчи су освојили различит број поена. Ако је петопласирани играч освојио 2,5 поена, ако постоји играч који је освојио 3,5 поена и ако другопласирани има мање поена од збира поена четвртог, седмог и осмог, тада је број поена првопласираног и другопласираног једнак:

A) 7 и 6 ; B) 6,5 и 6 ; C) 7 и 5,5 ; D) 6,5 и 5,5 ; E) 7 и 5.

720. Нека је S скуп свих реалних бројева x за које важи $\log_x\frac{62x^2-35x+6}{35-6x}\ge 3$. Тада, за неке реалне бројеве a, b, c, d, e, f, g,

$(a < b < c < d < e < f < g)$, скуп S је облика:
A) $(a,\ b] \cup [c,\ d) \cup (d,\ e] \cup [f,\ g]$; B) $[a,\ b] \cup (c,\ d] \cup [e,\ f)$;
C) $(a,\ b] \cup [c,\ d] \cup [e,\ f)$; D) $[a,\ b] \cup [c,\ d] \cup [e,\ +\infty)$; E) $(a,\ b] \cup [c,\ d)$.

721. Вредност производа $\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{5\pi}{7}$ једнака је:
A) $\frac{1}{4}$; B) $\frac{\sqrt{2}}{8}$; C) $\frac{1}{8}$; D) $\frac{\sqrt{2}}{16}$; E) $\frac{\sqrt{3}}{16}$.

(Ђ) - јуни

722. Збир целих бројева који су решења неједначине $x^2 - 3x \leq 4$ једнак је:
A) -3 ; B) 0 ; C) 9 ; D) 7 ; E) 10 .

723. Дат је круг $x^2 + y^2 = 169$. Дужина његове тетиве чије је средиште тачка $S(3,\ 4)$ једнака је:
A) 20 ; B) 22 ; C) 23 ; D) 24 ; E) 25 .

724. Нека су x и y реални бројеви. Испитати који су од следећих исказа тачни:

(I) За свако x и свако y је $\sqrt{x}\cdot\sqrt{y} = \sqrt{x\cdot y}$;

(II) За свако x и свако $y \neq 0$ је $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = \sqrt{\frac{x}{y}}$;

(III) За свако $x \neq 0$ и свако $y \neq 0$ је $\log(x\cdot y) = \log x + \log y$.

A) Сви ; B) Ниједан ; C) Само (I) ; D) Само (II) ; E) Само (III)

725. Цена кошуље је 64 динара. После поскупљења за 20% дошло је до појефтињења за 20%. Нова цена кошуље (у динарима) је:
A) 61.44 ; B) 65.60 ; C) 64 ; D) 70 ; E) 66 .

726. Ако је $f(x) = \frac{2x+1}{x-2}$ $(x \neq 2)$, тада је $f(f(x))$ једнако:
A) $\frac{x+2}{x-1}$; B) $\frac{1}{x}$; C) $\frac{x}{2}$; D) $-\frac{5x}{3}$; E) x .

727. Ако је $\operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{3}{4}$, онда је $\operatorname{tg}\alpha$ једнако:
A) 5 ; B) 6 ; C) 8 ; D) 9 ; E) 7 .

728. Нека је ABC правоугли троугао ($\sphericalangle C = 90^\circ$) и нека су његове катете $BC = a$ и $AC = b$. Ако је D пресечена тачка симетрале правог угла и хипотенузе AB и D' нормална пројекција тачке D на катету AC, тада је DD' једнако:
A) $\frac{ab}{a+b}$; B) $\frac{a}{2}$; C) $\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$; D) $a\sqrt{2}$; E) $\frac{2ab}{a+b}$.

729. Нека је $P(x) = ax^2+bx+c$. Ако је $P(1) = 1$, $P(0) = 2$, $P(-1) = 7$, онда су коефицијенти a, b, c елементи скупа:
A) $\{1,\ 2,\ 3\}$; B) $\{-1,\ 2,\ 3\}$; C) $\{1,\ 2,\ -3\}$; D) $\{-1,\ -2,\ 3\}$; E) $\{-1,\ -2,\ -3\}$.

730. Ако се регистарске таблице на аутомобилима састоје од 2 слова азбуке, која има 30 слова, и иза њих четвороцифреног броја (од 0000 до 9999), онда је број различитих таблица једнак:
A) $435 \cdot 10^4$; B) $9 \cdot 10^6$; C) $64 \cdot 10^5$; D) 94000 ; E) $24 \cdot 10^5$.

731. Само једна од правих: (p_1) $x+y-2=0$, (p_2) $x+y-4=0$, (p_3) $x+2y-3=0$, (p_4) $2x+y-3=0$, (p_5) $x+y+1=0$ није ни тангента, ни сечица круга $(x-1)^2+(y-1)^2=2$. Која?
A) p_1 ; B) p_2 ; C) p_3 ; D) p_5 ; E) p_4 .

732. Тежишне дужи AD и CE троугла ABC секу се у тачки T. Средиште дужи AE је тачка F. Однос површина троуглова TFE и ABC је:
A) $1:12$; B) $1:8$; C) $1:9$; D) $1:6$; E) $1:16$.

733. Ако је $\left(z+\dfrac{1}{z}\right)^2 = 3$, тада је $z^3 + \dfrac{1}{z^3}$ једнако:
A) 1 ; B) 0 ; C) 2 ; D) 3 ; E) 6 .

734. Ако је n-ти члан аритметичке прогресије $a_n = m$, а m-ти члан те исте прогресије $a_m = n$ $(n > m)$, онда је члан a_{n-m} једнак:
A) $2m-2$; B) $2n$; C) $2m$; D) $2n-2$; E) $n-m+1$.

735. Ако је $3^{x+2} + 9^{x+1} = 810$ и $x \in R$, тада x припада интервалу:
A) $(4,\ +\infty)$; B) $(3,\ 4]$; C) $(2,\ 3]$; D) $(1,\ 2]$; E) $[-2,\ 2)$.

736. Скуп реалних вредности x за које је тачна неједначина $\log_{2x}(x^2+1) < 1$ је:
A) $\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right) \cup \left(\dfrac{1}{2},\ 1\right)$; B) $\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right)$; C) $\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right) \cup \left(\dfrac{1}{2},\ +\infty\right)$; D) $(1,\ +\infty)$
E) $(0,\ 1)$.

737. Једначина по x: $3\sin x + 4\cos x = \lambda$ $(\lambda \in R)$ има решења у скупу реалних бројева ако и само ако је:
A) $\lambda < 7$; B) $-7 \le \lambda \le 7$; C) $\lambda \le 5$; D) $-7 < \lambda < 7$; E) $-5 \le \lambda \le 5$.

738. У троуглу су дате две странице $a = 15$, $b = 13$ и полупречник описаног круга $R = 8.125$ (8 целих и 125 хиљадитих). Трећа страница c тог троугла је:
A) 16 ; B) 17 ; C) 15 ; D) 14 ; E) 21 .

739. Дате су тачке $A(-6,\ 2)$ и $B(-3,\ 4)$ и елипса $4x^2 + 9y^2 = 72$. Тачка елипсе $C(x_0,\ y_0)$ за коју $\triangle ABC$ има највећу површину је:

A) $C\left(2\sqrt{2},\ \dfrac{2\sqrt{10}}{3}\right)$; B) $C\left(4,\ \dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)$; C) $C\left(2\sqrt{3},\ \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$;
D) $C(3\sqrt{2},\ 0)$; E) $(3,\ -2)$.

740. Збир квадрата најмање и највеће вредности функције $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$ на сегменту $[-1,\ 2]$ износи:
A) 41 ; B) 40 ; C) 42 ; D) 50 ; E) 52 .

741. У дату праву купу полупречника основе r и висине $H = r\sqrt{2}$ уписана је коцка $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тако да основа $ABCD$ припада основи купе, а темена A_1, B_1, C_1, D_1 припадају омотачу купе. Однос запремина купе и коцке је:
A) $4\pi : 1$; B) $2\pi : 1$; C) $4\pi : 3$; D) $2\pi : 3$; E) $3\pi : 4$.

(E) - **септембар**

742. Растојање пресечне тачке правих $4x - 3y = 0$ и $y - x = 1$ од координатног почетка је:
A) 7 ; B) 1 ; C) -1 ; D) 5 ; E) -7 .

743. Ако је $f(x + 1995) = 2x + 1995$, онда је $f(1994)$ једнако:
A) 1995 ; B) 1994 ; C) 1993 ; D) 1992 ; E) 1996 .

744. Симетрале два унутрашња угла α и β троугла ABC заклапају угао 137^o. Трећи угао γ једнак је:
A) 86^o ; B) 89^o ; C) 113^o ; D) 98^o ; E) 94^o.

745. Узастопна појевтињења од 10% и 20% еквивалентна су једнократном појевтињењу од:
A) 28% ; B) 15% ; C) 72% ; D) 30% ; E) Ниједан од ових одговора

746. Вредност израза $\sqrt{\dfrac{4}{3}} - \sqrt{\dfrac{3}{4}}$ једнака је:
A) $-\dfrac{\sqrt{3}}{6}$; B) $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$; C) $\dfrac{\sqrt{-3}}{6}$; D) $\dfrac{5\sqrt{3}}{6}$; E) 1 .

747. Квадрат и једнакостранични троугао имају једнаке обиме. Површина троугла је $9\sqrt{3}$. Дијагонала квадрата је:
A) $\dfrac{9}{2}$; B) $2\sqrt{5}$; C) $4\sqrt{2}$; D) $\dfrac{9\sqrt{2}}{2}$; E) Ниједан од ових одговора

748. Скуп свих вредности реалног параметра m, за које је разлика већег (x_1) и мањег (x_2) решења квадратне једначине $x^2 + 6x + m = 0$ већа од 4, је:
A) $(-\infty,\ 5)$; B) $(-\infty,\ 5]$; C) $(5,\ +\infty)$; D) $(9,\ +\infty)$; E) $(5,\ 9)$.

749. Неједначина $\frac{2x}{x^2+1} \geq -1$ је тачна ако и само ако је:
A) $x \in [-1,\ 1]$; B) $x \in (-\infty,\ +\infty)$; C) $x \in (-1,\ 1)$; D) $x \in (0,\ 1)$; E) $x \in \{1\}$.

750. Ако је $\cos 2\alpha = -\frac{63}{65}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ и $\cos\beta = \frac{7}{\sqrt{130}}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$, тада је $\alpha + \beta$ једнако:
A) $\frac{\pi}{4}$; B) $\frac{\pi}{3}$; C) $\frac{\pi}{2}$; D) $\frac{2\pi}{3}$; E) $\frac{3\pi}{4}$.

751. Око круга пречника 15 *cm* описан је једнакокраки трапез чија је дужина крака 17 *cm*. Мања основица трапеза једнака је:
A) 6 *cm* ; B) 12 *cm* ; C) 9 *cm* ; D) 10 *cm* ; E) 8 *cm* .

752. Једначина $x^3+ax+b=0$ (a и b реални бројеви) има решења $x_1 = 1$ и $x_2 = 2$. Производ свих решења те једначине једнак је:
A) 2 ; B) 6 ; C) 1 ; D) 10 ; E) -6 .

753. Ако је код правоуглог троугла полупречник уписаног круга $r = 2$ *cm* и полупречник описаног круга $R = 5$ *cm*, онда су катете тог троугла (у *cm*):
A) 4.5 и 8.5; B) 9 и $\sqrt{19}$; C) 6 и 8 ; D) 5 и 9 ; E) 4 и 9 .

754. Скуп реалних вредности x за које је тачна неједначина $\sqrt{x+2} < 4 - x$ је:
A) $[-2,\ 2)$; B) $(7,\ +\infty)$; C) $(-2,\ 4)$; D) $(2,\ 7)$; E) $(-\infty,\ 2) \cup (7,\ +\infty)$

755. Збир три броја који образују растућу геометријску прогресију је 126. Ако је средњи члан 24, најмањи члан је једнак:
A) 4 ; B) 8 ; C) 2 ; D) 6 ; E) 3 .

756. На 6 нумерисаних седишта на једној клупи распоредити 3 девојке и 3 младића тако да никоје две особе истог пола не седе једна до друге. То се може учинити на следећи број начина:
A) 72 ; B) 6 ; C) 36 ; D) 720 ; E) 118 .

757. Број решења једначине $1-\sin 2x = \cos x - \sin x$ која припадају сегменту $[0,\ 2\pi]$ једнак је:
A) 1 ; B) 2 ; C) 3 ; D) 4 ; E) 5 .

758. У коцку $ABCDA_1B_1C_1D_1$ уписана је четворострана пирамида $ABCDA_1$. Ако је површина уписане пирамиде једнака 1, тада је површина коцке:
A) $\frac{7}{4}$; B) $6-3\sqrt{2}$; C) $\sqrt{2}$; D) $\sqrt{3}$; E) $8-4\sqrt{3}$.

759. Дате су функције: $f_1(x) = e^{\ln x}$, $f_2(x) = \ln(e^x)$, $f_3(x) = \sqrt{x^2}$, $f_4(x) = \frac{x^2}{x}$. Тачан је исказ:

A) $f_1 = f_2 = f_3 \neq f_4$; B) Међу функцијама нема једнаких ;
C) $f_1 \neq f_2 = f_3 = f_4$; D) $f_1 = f_4 \neq f_2 = f_3$; E) $f_2 = f_4 \neq f_1 = f_3$.

760. Максимална запремина праве кружне купе уписане у лопту полупречника R је:
A) $\frac{4\pi R^3}{15}$; B) $\frac{\pi R^3}{3}$; C) $\frac{32\pi R^3}{81}$; D) $\frac{10\pi R^3}{27}$; E) $\frac{2\pi R^3}{3}$.

761. Једнакостранични троугао ABC, странице $a = 2\ cm$, ротира око праве p која је нормална на основицу AB троугла и садржи теме A тог троугла. Запремина насталог обртног тела једнака је (у cm^3):

A) π ; B) $\frac{7\pi\sqrt{3}}{3}$; C) $3\sqrt{2}\pi$; D) $2\sqrt{3}\pi$; E) $2\pi\sqrt{5}$.

ШЕСТА ГЛАВА

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА

1. Таутологије су формуле *б)* и *г)*.

2. Како је $\tau(q \ \vee \ \neg q) = \top$, то из прве формуле добијамо $\tau(\top \Rightarrow p) = \bot$. Према таблици импликације закључујемо да је $\tau(p) = \bot$. Из друге формуле је $\tau(q) = \top$, па је $\tau(F(p,\ q)) = \top$, јер се своди на $\top \Leftrightarrow \top$.

3. Начинити одговарајуће истинитосне таблице.

4. $X = \{3,\ 4,\ 7\}$.

5. $card\ A = 17$, $card\ B = 14$.

6. Означимо са $A,\ B,\ C$ редом скупове бројева дељивих са 10, 4, 6. Сваки десети број је дељив са 10, па је $card\ A = 49$. Слично је $card\ B = 124$ и $card\ C = 83$. Ови скупови нису дисјунктни . Тако је, на пример $card\ (A \cap B) = 24$, јер $A \cap B$ је скуп бројева дељивих са 10 и са 4, тј. бројева дељивих са 20 (јер је НЗС$(10,\ 4) = 20$). Одредимо кардиналне бројеве и осталих пресека, па, као у претходном задатку одредимо $card\ (A \cup B \cup C)$ - толико је избрисаних бројева. На табли је остало 316 бројева.

7. Попис би 5 радника довршило по плану у наредна 3 дана. Отуда имамо:

$$\begin{array}{l} \mid 5 \text{ радн.} \uparrow 3 \text{ дана} \mid 8 \text{ час. дн.} \\ \downarrow 3 \text{ радн.} \mid x \text{ дана} \downarrow 10 \text{ час. дн.} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{r} x : 3 = 5 : 3 \\ = 8 : 10 \end{array}\right\} \Rightarrow x = \frac{3 \cdot 5 \cdot 8}{3 \cdot 10} = 4 \text{ дана.}$$

Посао није на време завршен. Касни се за 1 дан.

8. Суво грожђе садржи 88% материјала који не испарава, а у 16 kg биће $0.88 \cdot 16\ kg$, тј. 14.08 kg тог "сувог" материјала. Иста ова количина преставља 20% свежег грожђа. Ако са G означимо тражену количину свежег грожђа, биће $P = 14.08$, $p = 20$. Сада из $G : 14.08 = 100 : 20$, добијамо $G = 70.4\ kg$ свежег грожђа.

9. Нека је c планирана цена и q укупна количина робе. Тада је $\frac{1}{3}q$ робе продато по цени $1.1c$ динара, $\frac{1}{2}q$ робе по цени $0.85c$ и остатак робе, тј. $\frac{1}{6}q$ по цени $x \cdot c$ динара. Планирана је зарада од $q \cdot c$ динара. Тако добијамо једнакост: $\frac{1}{3}q \cdot 1.1c + \frac{1}{2}q \cdot 0.85c + \frac{1}{6}q \cdot xc = c \cdot q$. После скраћивања са $q \cdot c$ и ослобађања од разломка добијамо: $2.2 + 2.55 + x = 6$, па је $x = 1.25$. Остатак робе продат је по цени за 25% већој од планиране.

10. Нека су I_1 и I_2 камате, $I_1 < I_2$. Према услову је $I_1 + I_2 = 600$ и $I_2 - I_1 = 120$, па је $I_1 = 240$ динара, $I_2 = 360$ динара. Даље имамо: $\frac{K \cdot 8 \cdot p}{1200} = 240$, односно $Kp = 36000$ и $\frac{(K+2000) \cdot 9 \cdot p}{1200} = 360$, односно $Kp + 2000p = 48000$. Добијамо најпре: $36000 + 2000p = 48000$, одакле је $p = 6$. Даље је $K = 6000$ динара. Значи, пре 8 месеци је уложено 6000 динара, а пре 9 месеци је уложено 8000 динара.

11. *в)* $(a-b)^3 + b^3 - 3b^2c + 3bc^2 - 3ac^2 + 3a^2c - a^3 = (a-b)^3 - (a-b)(a^2+ab+b^2) + 3c(a-b)(a+b) - 3c^2(a-b) = (a-b)(a^2 - 2ab + b^2 - a^2 - ab - b^2 + 3ac + 3bc - 3c^2) = (a-b)(3c(b-c) - 3a(b-c)) = 3(a-b)(b-c)(c-a)$.

12. *а)* $(x-2)(x+2)(x^2+2x+4)(x^2-2x+4)$; *б)* $(x-a)(x+a)(y-2b)(y+2b)$; *в)* $(x-1)^3(x+1)^2$; *г)* $n^4 + 2n^2 + 1 - n^2 = (n^2+1-n)(n^2+1+n)$; *д)* $(a-b)(b-c)(a+c)$.

13. Слично *примеру* 25.

14. Треба да буде $6x^4 - 7x^3 + ax^2 + 3x + 2 = (x^2 - x + b)(6x^2 + cx + d)$, па даље као у *примеру* 23, други начин. Резултат је $a = -7$, $b = -1$ или $a = -12$, $b = -2$.

15. Из $2x^3 - 12x^2 + 27x - 19 = 2(x-2)^3 + A(x-2)^2 + B(x-2) + C$, итд, добијамо резултат: $2(x-2)^3 + 3(x-2) + 3$.

16. Према *примеру* 20. *ђ)* је $m^3 + n^3 + p^3 - 3mnp = (m+n+p)(m^2 + n^2 + p^2 - mn - np - pm) = 0$ за $m + n + p = 0$, па је $m^3 + n^3 + p^3 = 3mnp$.

17. *а)* $\frac{x+1}{x^2+x-2}$, $x \neq 1$, $x \neq -2$; *б)* $\frac{2a+1}{a(4a^2+2a+1)}$, $a \neq 0$;

в) $\frac{k(k-1)}{k^2+1}$ за $k < 0$, $\frac{k}{1-k}$ за $0 \leq k < 1$, $\frac{k}{k-1}$ за $k > 1$.

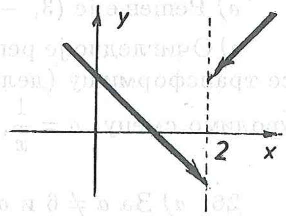
18. *а)* $\frac{x-7}{x+5}$, $x \notin \{-7,\ -5,\ -4,\ -3,\ 0,\ 1,\ 2\}$; *б)* $\frac{-2}{(x-y)(x+y)}$, $x \neq 0$, $x \neq \pm y$, $y \neq 0$;

в) $a + b + c$, $abc \neq 0$, итд. ; *г)* $\frac{1}{(a-x)(c-x)}$, $x \neq a$, $x \neq c$, $a \neq c$;

д) $\frac{16a^{15}}{a^{16} - b^{16}}$. Сабрати најпре два задња разломка , па додати предзадњи итд, $a \neq b$. Слично *примеру* 28. *г)*.

19. *a)* $-\dfrac{625}{168}$; *б)* $\dfrac{m^3}{2(m-1)}$.

20. *a)* $\dfrac{4x}{x^2-1}=\dfrac{A(x+1)+B(x-1)}{(x+1)(x-1)}\Rightarrow$
$\Rightarrow 4x\equiv A(x+1)+B(x-1)$, итд.
$A=2$, $B=2$. *б)* $A=1$, $B=2$, $C=0$.



Сл. 1

21. За $x<2$ је $y=-x+1$. За $x>2$ је $y=x-1$. График је на сл. 1.

22. Дату једначину можемо трансформисати:

$$\frac{x-2000+1995}{1995}+\frac{x-2000+1996}{1996}+\frac{x-2000+1997}{1997}+\frac{x-2000+1998}{1998}=$$
$$=\frac{x-2000+5}{5}+\frac{x-2000+4}{4}+\frac{x-2000+3}{3}+\frac{x-2000+2}{2}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\frac{x-2000}{1995}+1+\frac{x-2000}{1996}+1+\frac{x-2000}{1997}+1+\frac{x-2000}{1998}+1=$$
$$=\frac{x-2000}{5}+1+\frac{x-2000}{4}+1+\frac{x-2000}{3}+1+\frac{x-2000}{2}+1\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(x-2000)\left(\frac{1}{1995}+\frac{1}{1996}+\frac{1}{1997}+\frac{1}{1998}-\frac{1}{5}-\frac{1}{4}-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)=0,$$ одакле је $x=2000$.

23. Како је $\sqrt{x^2-8x+16}=\sqrt{(x-4)^2}=|\,x-4\,|$, имамо: за $x\geq 4$ једначина је еквивалентна са: $\dfrac{2x-5}{3}+(x-4)=\dfrac{2}{3}+\dfrac{x-2}{6}-\dfrac{x-4}{2}\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 12x=48$, па је $x=4$. За $x\leq 4$ једначина је еквивалентна са: $\dfrac{2x-5}{3}-$ $-(x-4)=\dfrac{2}{3}+\dfrac{x-2}{6}-\dfrac{x-4}{2}\Leftrightarrow 0\cdot x=0$, па је решење свако x из услова $x\leq 4$. Решења су из скупа природних бројева, па је $x\in\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$.

24. *a)* Због $a^2-5a+6=(a-2)(a-3)$ имамо: За $a\neq 2$ и $a\neq 3$ јединствено решење је: $x=\dfrac{1}{a-2}$. За $a=2$ нема решења. За $a=3$ једначина је еквивалентна са $0\cdot x=0$, па је решење свако реално x.

б) Једначина је еквивалентна са $(c-a)(c^2+ac+a^2)x=(c-a)(c+a)$, $a\neq 0$, $c\neq 0$, $x\neq\dfrac{1}{a}$, $x\neq\dfrac{1}{c}$. За $c\neq a$ јединствено решење је $x==\dfrac{c+a}{a^2+ac+c^2}$, а за $c=a$ добијамо $0\cdot x=0$, па је решење свако реално x, осим $x=\dfrac{1}{a}$.

25. *a)* Уводимо нове непознате: $a=\dfrac{1}{x-y+2}$, $b=\dfrac{1}{x+y-1}$, итд. Решење је $x=7$, $y=4$.

б) Упутство: Из прве једначине налазимо да је $x-3 = |\,y-4\,| \;+1$, итд. Решења су $(5,\ 5)$ и $(5,\ 3)$.

в) Решење је $(3,\ -1,\ -1)$.

г) Очигледно је решење $(0,\ 0,\ 0)$. Ако је $x \neq 0$, $y \neq 0$ и $z \neq 0$, једначине се трансформишу (деле се редом са (xy), (yz) и (xz)). У добијени систем уводимо смену: $a = \dfrac{1}{x}$, $b = \dfrac{1}{y}$, $c = \dfrac{1}{z}$. Решење је $(1,\ 2,\ 3)$.

26. *а)* За $a \neq 6$ и $a \neq -2$ је $x = \dfrac{a-9}{a-6}$, $y = \dfrac{a}{a-6}$. Ако је $a = 6$ систем није сагласан, а ако је $a = -2$, систем има бесконачно много решења.

б) За $k = 0$ систем није сагласан. За $k = -3$, друга једначина је еквивалентна са $0 \cdot y = 0$, па је решење сваки пар облика $(1+3y,\ y)$. Ако је $k \neq 0$ и $k \neq -3$, решење је $\left(2,\ -\dfrac{1}{k}\right)$.

в) Сабирањем свих датих једначина добијамо: $(x+y+z)(a+2) = a^2+a+1$. За $a = -2$ систем није сагласан (добијамо $0 = 3$). Одузимајући једначине датог система од последње једначине, закључујемо: за $a \neq -2$ и $a \neq 1$ је $x = \dfrac{-a-1}{a+2}$, $y = \dfrac{1}{a+2}$, $z = \dfrac{(a+1)^2}{a+2}$. Ако је $a = 1$, систем је еквивалентан једначини $x+y+z = 1$, па има бесконачно много решења.

27. *а)* Према сл. 2, уочавамо три случаја.

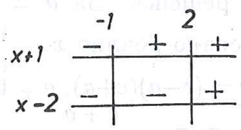
1^o За $x \leq -1$, решавамо неједначину: $-(x+1) > -2(x-2)$, из које добијамо $x > 5$, што за $x \leq -1$ нема решења.

2^o За $x \in [-1,\ 2]$ имамо неједначину: $x+1 > -2(x-2)$, која даје $x > 1$, па је $x \in (1,\ 2]$ решење у овом случају.

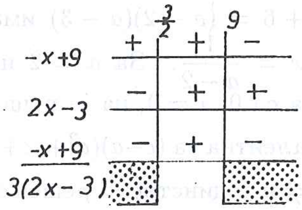
3^o За $x \geq 2$, дата неједначина има облик $x+1 > 2(x-2)$, одакле је $x < 5$, а то значи $x \in [2,\ 5)$.

Коначно, решење неједначине је $x \in (1,\ 5)$.

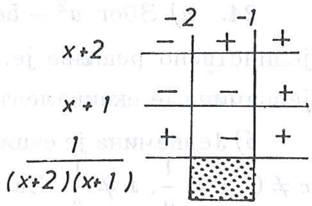
б) Упутство: $x^2-2x-3 = (x-3)(x+1)$. Решење је $2 < x < 5$.



Сл. 2



Сл. 3



Сл. 4

в) Дата неједначина је еквивалентна са $\dfrac{x+1}{2x-3} - \dfrac{2}{3} < 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{-x+9}{3(2x-3)} < 0$. Према сл. 3, видимо да је решење: $x < \dfrac{3}{2} \ \vee \ x > 9$.

г) Дата неједначина је еквивалентна са $\dfrac{x+1}{x+2}-\dfrac{x}{x+1}<0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \dfrac{1}{(x+2)(x+1)}<0$. Према сл. 4, решење неједначине је $x\in(-2,\ -1)$.

28. Слично *примеру* 39. *в)* добијамо решења:

а) За $a>1$ решење је $x>\dfrac{a-2}{a-1}$, за $a<1$ решење је $x<\dfrac{a-2}{a-1}$, а за $a=1$ неједначина је еквивалентна са $0\cdot x>-1$, што важи за свако реално x.

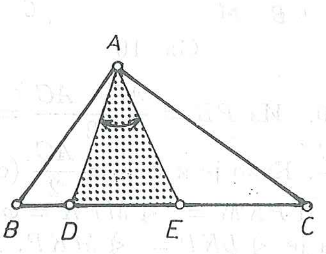
б) За $a=\dfrac{1}{2}$ неједначина је еквивалентна са $0\cdot x>\dfrac{1}{2}$. Значи за $a=\dfrac{1}{2}$ нема решења. За $0<a<\dfrac{1}{2}$ је $x>\dfrac{2-2a}{3-6a}$, а за $a<0$ или $a>\dfrac{1}{2}$ је $x<\dfrac{2-2a}{3-6a}$.

29. $\dfrac{1}{a_1}-1=\dfrac{1-a_1}{a_1}=\dfrac{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5-a_1}{a_1}=\dfrac{a_2+a_3+a_4+a_5}{a_1}$.
Слично израчунамо и остале заграде на левој страни, па, применом неједнакости за средине, добијемо:

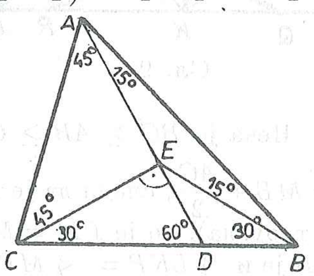
$$\frac{a_2+a_3+a_4+a_5}{a_1}\cdot\frac{a_1+a_3+a_4+a_5}{a_2}\cdot\frac{a_1+a_2+a_4+a_5}{a_3}\cdot\frac{a_1+a_2+a_3+a_5}{a_4}\cdot\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{a_5}\geq$$
$$\geq\frac{4\sqrt[4]{a_2a_3a_4a_5}\cdot4\sqrt[4]{a_1a_3a_4a_5}\cdot4\sqrt[4]{a_1a_2a_4a_5}\cdot4\sqrt[4]{a_1a_2a_3a_5}\cdot4\sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4}}{a_1a_2a_3a_4a_5}=$$
$$=\frac{1024\cdot\sqrt[4]{a_1^4\cdot a_2^4\cdot a_3^4\cdot a_4^4\cdot a_5^4}}{a_1a_2a_3a_4a_5}=\frac{1024\cdot a_1a_2a_3a_4a_5}{a_1a_2a_3a_4a_5}=1024.$$

30. $\dfrac{x}{9x^2+4}=\dfrac{1}{9x+\dfrac{4}{x}}=\dfrac{1}{6\left(\dfrac{3x}{2}+\dfrac{2}{3x}\right)}\leq\dfrac{1}{6\cdot2}=\dfrac{1}{12}$, тј. $\dfrac{x}{9x^2+4}\leq\dfrac{1}{12}$.
Једнакост важи за $x=\dfrac{2}{3}$. (Видети *пример* 41.).

31. Троуглови ABE и ACD су једнакокраки, сл. 5, па сваки има једнаке углове на основици. Тако израчунамо да је $\measuredangle AEB=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\beta}{2}$ и $\measuredangle ADC=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\gamma}{2}$. Збир оштрих углова β и γ је $\dfrac{\pi}{2}$, па је тражени угао
$$\measuredangle DAE=\pi-\measuredangle AEB-\measuredangle ADC=\pi-\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\beta}{2}\right)-\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\gamma}{2}\right)=\frac{\beta+\gamma}{2}=\frac{\pi}{4}.$$



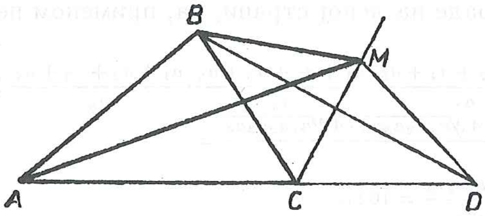
Сл. 5



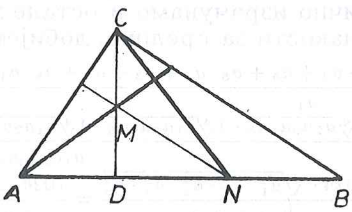
Сл. 6

32. Нека је E подножје нормале из C на AD, сл. 6. Троугао CDE има унутрашње углове од 30^o, 60^o, 90^o, па он представља половину једнакостраничног троугла. Због тога је $CD = 2DE$, па је $DE = BD$. Дакле, троугао BDE је једнакокрак, са спољашњим углом 60^o код врха D. Због тога је $\sphericalangle DBE = 30^o$, па је $\sphericalangle ABE = 45^o - 30^o = 15^o$. Троугао ABD такође има спољашњи угао $\sphericalangle ADC = 60^o$, па је $\sphericalangle BAD = 15^o$. Сада видимо да је $\triangle ABE$ једнакокрак (два угла по 15^o) и $BE = AE$, а такође и троугао BCE (два угла по 30^o) и $BE = CE$. Дакле, биће $AE = CE$, што значи да је правоугли троугао ACE такође једнакокрак (па су му два угла по 45^o). Троугао ABC има углове: 60^o, 45^o, 75^o.

33. Изаберимо тачку D иза C у односу на A, такву да је $CD = BC$, сл. 7. Троуглови BCM и DCM су подударни по ставу СУС, па је $BM = DM$. У троуглу ADM важи: $AM + MD > AD = AC + CD$, па је $AM + BM > AC + BC$.

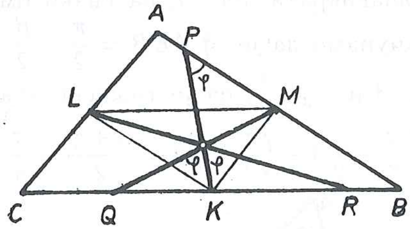


Сл. 7

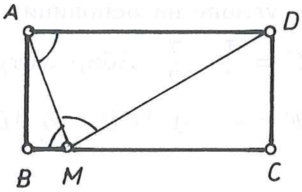


Сл. 8

34. Дуж MN је средња линија троугла BCD, па је паралелна са BC, одакле закључујемо да је $MN \perp AC$. Како је и $CD \perp AN$, следи да је тачка M ортоцентар троугла ACN, сл. 8. Због тога је AM трећа висина овог троугла и $AM \perp CN$.



Сл. 9

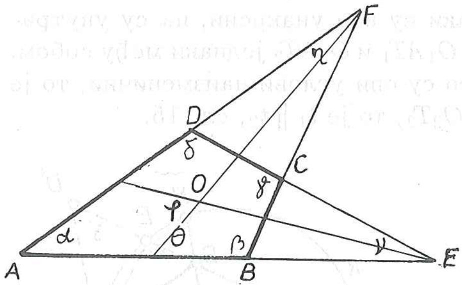


Сл. 10

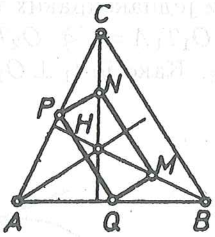
35. Нека је $BC \geq AB \geq CA$, сл. 9. Из $PB = \dfrac{AB + AC}{2} = \dfrac{AB}{2} + \dfrac{AC}{2} = MB + \dfrac{AC}{2}$, следи да је $PM = \dfrac{AC}{2}$. Како је и $MK = \dfrac{AC}{2}$ (средња линија троугла), то је $PM = MK$ па је $\sphericalangle PKM = \sphericalangle MPK = \varphi$. Због $KL \parallel AB$ је и $\sphericalangle LKP = \sphericalangle MPK = \varphi$, па је $\sphericalangle LKP = \sphericalangle MKP$. Дакле, у троуглу KLM права KP је симетрала унутрашњег угла. Слично се доказује и да су праве LR и MQ симетрале углова овог троугла. Према теореми о уписаном кругу троугла, ове три праве се секу у једној тачки.

36. Углови AMB и MAD су једнаки као наизменични, па је и $\measuredangle DMA = \measuredangle DAM$, сл. 10. Дакле $DM = DA$, па је у правоуглом троуглу CDM хипотенуза MD два пута већа од катете CD. Стога је овај троугао половина једнакостраничног троугла странице DM, па је $\measuredangle CMD = 30^o$. Коначно: $\measuredangle AMD = \frac{1}{2} \measuredangle BMD = 75^o$.

37. Према сл. 11 је угао између симетрала $\varphi = \theta + \frac{\nu}{2}$, као спољашњи угао троугла. Слично је и $\theta = \alpha + \frac{\eta}{2}$, па је $\varphi = \alpha + \frac{\eta}{2} + \frac{\nu}{2}$. Из троугла AED израчунавамо: $\alpha + \delta + \nu = 180^o \Rightarrow \nu = 180^o - \alpha - \delta$, а из троугла ABF добијамо: $\eta = 180^o - \alpha - \beta$. Заменом ових вредности добићемо: $\varphi = \alpha + 90^o - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} + 90^o - \frac{\alpha}{2} - \frac{\delta}{2} = 180^o - \left(\frac{\beta}{2} + \frac{\delta}{2}\right) = 180^o - 90^o = 90^o$, јер у тетивном четвороуглу $ABCD$ је $\beta + \delta = 180^o$.



Сл. 11

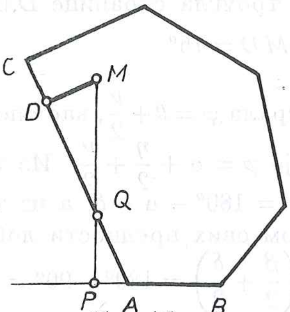


Сл. 12

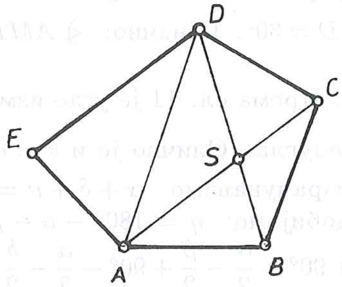
38. Дужи MN и PQ су средње линије троуглова BCH и BCA, сл. 12, па су обе паралелне и једнаке половини странице BC. Због тога је четвороугао $MNPQ$ паралелограм. Дуж PN је средња линија троугла ACH, па је $PN \parallel AH$, а самим тим је $PN \perp BC$. Како је $MN \parallel BC$, следи да је $PN \perp MN$, па је $\measuredangle MNP = 90^o$ и четвороугао $MNPQ$ је правоугаоник.

39. Нека је M унутрашња тачка многоугла, сл. 13 и AB страница најближа тачки M. Докажимо да подножје P нормале из M на AB лежи на AB, а не на продужетку AB. Претпоставимо да је P на продужетку AB. Тад MP сече суседну страницу, рецимо AC у тачки Q, па како је многоугао конвексан, биће $MP > MQ$. Нормално растојање MD тачке M од странице BC је мање од MQ (катета је мања од хипотенузе), па је $MD < MP$, што је немогуће, јер је AB најближа страница. Ова противречност доказује да P не може бити на продужетку странице AB.

40. Нека се дијагонале AC и BD секу у S, сл. 14. Примењујући неједнакости троугла на $\triangle ABS$ и $\triangle CDS$, добијамо: $AS + SB > AB$ и $CS + DS > CD$. Саберемо ове две неједнакости и добијемо да је : $AC + BD > AB + CD$. Слично, из четвороуглова $ABDE$, $BCDE$, $ABCE$ и $ACDE$ добијамо: $AD + BE > AB + DE$, $BD + CE > BC + DE$, $AC+BE > BC+AE$ и $AD+CE > AE+CD$. Кад ове неједнакости саберемо и поделимо са 2, добићемо тражени закључак.

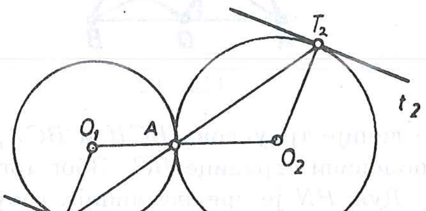


Сл. 13

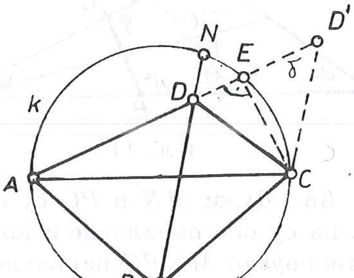


Сл. 14

41. Углови O_1AT_1 и O_2AT_2 једнаки су као унакрсни, па су унутрашњи углови једнакокраких троуглова O_1AT_1 и O_2AT_2 једнаки међу собом. Дакле, $\sphericalangle\ O_1T_1A = \ \sphericalangle\ O_2T_2A$. Пошто су ови углови наизменични, то је $O_1T_1 \parallel O_2T_2$. Како је $t_1 \perp O_1T_1$ и $t_2 \perp O_2T_2$, то је $t_1 \parallel t_2$, сл. 15.



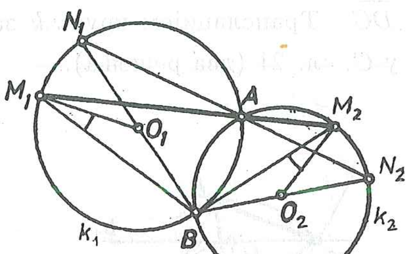
Сл. 15



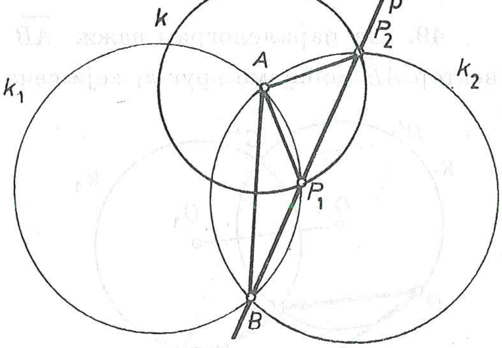
Сл. 16

42. Нека је код темена A једини оштар угао четвороугла $ABCD$, сл. 16. Конструишимо круг k пречника AC. Докажимо да су B и D у кругу. Претпоставимо да је D (на слици тачка D') ван круга. Дуж AD' сече круг у тачки E. Угао AEC је прав (над пречником), а као спољашњи угао троугла ECD' је већи од угла $AD'C$. Следи да је $\sphericalangle AD'C$ оштар, што је немогуће. Тачка D није ни на кругу (јер би био $\sphericalangle ADC = 90^o$). Значи D, а исто тако и B, је у кругу, па је $BD < MN$ (види слику). Како је AC пречник (највећа тетива) то је $MN \leq AC$ и $BD < AC$.

43. Нека су BN_1 и BN_2 пречници, сл. 17. Углови N_1AB и N_2AB су прави (над пречником), па је $\sphericalangle N_1AB + \sphericalangle N_2AB = 180^o$, што значи да су тачке N_1, A и N_2 колинеарне. Због тога су углови M_1AN_1 и M_2AN_2 једнаки, као унакрсни . Међутим , $\sphericalangle M_1BN_1 = \sphericalangle M_1AN_1$ (над истим луком) и слично $\sphericalangle M_2BN_2 = \sphericalangle M_2AN_2$, па је $\sphericalangle M_1BN_1 = \sphericalangle M_2BN_2$. Дакле, једнакокраки троуглови O_1BM_1 и O_2BM_2 имају једнаке углове, па је и $\sphericalangle O_1M_1B = \sphericalangle O_2M_2B$.



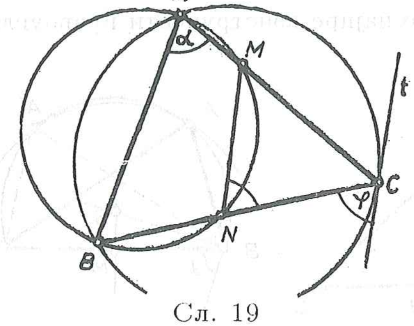
Сл. 17



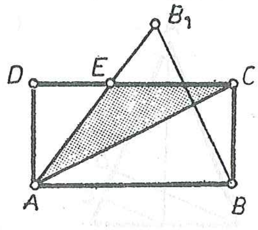
Сл. 18

44. Према сл. 18 је $AP_1 = AP_2$, као полупречници круга k. Због тога и због подударности кругова k_1 и k_2 једнаки су периферијски углови: $\sphericalangle ABP_1 = \sphericalangle ABP_2$. Отуда следи да су тачке A, P_1 и P_2 колинеарне.

45. На сл. 19 су луковима означени једнаки углови: $\varphi = \alpha$ по теореми о тангентном углу. Угао MNC је суплементан са MNB, а угао MNB је суплементан и са α (као насрамни углови тетивног четвороугла), па је $\sphericalangle MNC = \alpha$, а самим тим је $\sphericalangle MNC = \varphi$. Како су $\sphericalangle MNC$ и φ наизменични, следи да је $MN \parallel t$.



Сл. 19



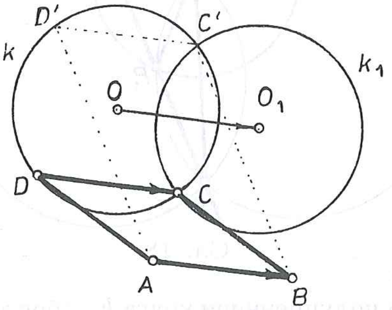
Сл. 20

46. Углови BAC и B_1AC су једнаки због симетрије, а $\sphericalangle ECA =$ $= \sphericalangle BAC$ као наизменични. Дакле и $\sphericalangle ECA = \sphericalangle B_1AC$, па је $\triangle ACE$ једнакокрак.

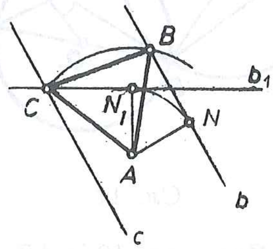
47. Тачка O је центар симетрије квадрата, па тачка $M_1 = \Im_O(M)$ припада правој CD. Слично, тачка $N_1 = \Im_O(N)$ припада правој AB. Кад конструишемо ове две праве, можемо одредити дужину странице квадрата (нормално растојање између правих AB и CD).

48. Тачке B и C су централно симетричне у односу на M (M је средиште дужи BC). Пресликамо $\Im_M(b) = b_1$, па је $b_1 \cap c = \{C\}$, итд.

49. За паралелограм важи: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Транслацијом круга k за вектор $\overrightarrow{AB}$ добијамо круг k_1 који сече k у C, сл. 21 (два решења).



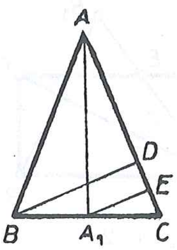
Сл. 21



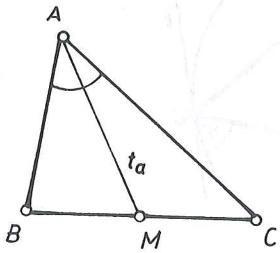
Сл. 22

50. Ротацијом око A за 60^o тачка B праве b пресликава се у тачку C праве c. Стога ротирамо праву b и добијена права b_1 сече c у C, итд, сл. 22. (*Ротација праве b:* конструишемо $AN \perp b$ и на луку са центром A и полупречником AN одредимо тачку N_1, тако да је $\sphericalangle NAN_1 = 60^o$. Права b_1 садржи N_1 и нормална је на AN_1).

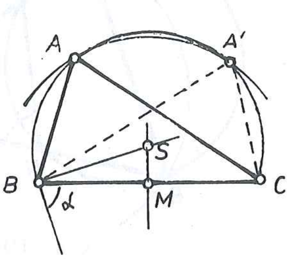
51. *Анализа.* Нека је ABC тражени троугао, $AB = AC$. Висина AA_1 полови основицу. Нормала A_1E на крак AC је средња линија троугла BCD, па је $A_1E = \frac{1}{2}h_b$. Дакле, можемо најпре конструисати правоугли троугао AA_1E, сл. 23.



Сл. 23



Сл. 24

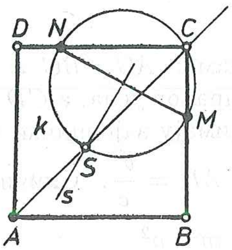


Сл. 25

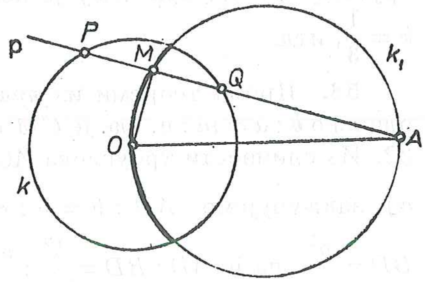
52. Ово је класичан пример кад је дата страница троугла и наспрамни угао, сл. 24. Треба најпре конструисати скуп тачака из којих се дуж

BC види под углом α (користити *теорему о тангентном углу - пример* 66), као на сл. 25, итд.

53. Угао MCN је прав, па се тачка C налази на кругу над пречником MN. Дијагонала AC је симетрала угла MCN, па полови полукруг са оне стране пречника MN, са које није тачка C. Конструкција је приказана на сл. 26.

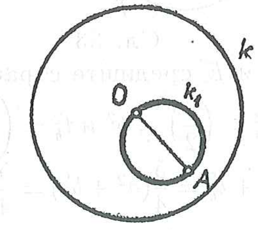


Сл. 26

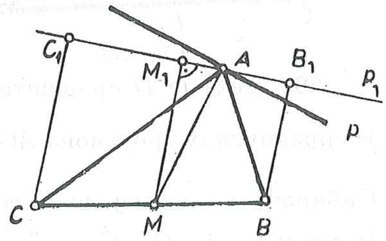


Сл. 27

54. Средиште тетиве је подножје нормале из центра O датог круга на сечицу, на сл. 27 тачка M, па је $\measuredangle\, OMA = 90^o$. То важи за сваку тетиву, па тачка M припада кругу пречника OA, на слици појачан лук. Ако је тачка A у датом кругу, тражени скуп је цео круг, као што је приказано на сл. 28.

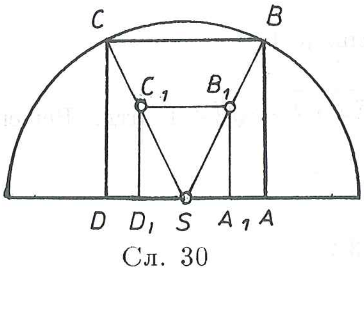


Сл. 28

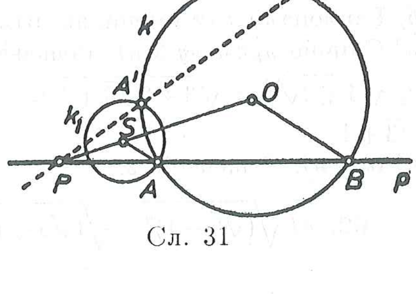


Сл. 29

55. Нека је p_1 произвољна права кроз A и BB_1, CC_1, MM_1 нормале из B, C и средишта M дужи BC на ту праву. Тада је $BB_1 + CC_1 = 2MM_1$ (средња линија трапеза). Троугао AMM_1 је правоугли са хипотенузом AM, сл. 29. Дакле, $MM_1 \leq AM$. Према томе, тражена права p је нормална на тежишну линију AM.



Сл. 30

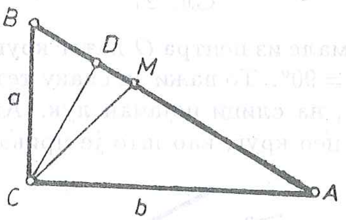


Сл. 31

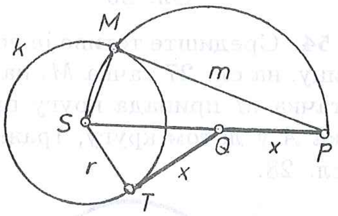
56. Конструишемо најпре квадрат $A_1B_1C_1D_1$, тако да је $SA_1 = SD_1$. Даља конструкција се види на сл. 30.

57. Ако је S тачка дужи OP, таква да је $AS \parallel BO$, тада је $SA : OB = PA : PB$, тј. $SA : OB = 1 : 3$. Како је и $PS : PO = 1 : 3$, произлази да је S, тачка која се лако конструише, центар круга k_1 хомотетичног са датим кругом, сл. 31, при чему је центар хомотетије тачка P, а коефицијент $k = \frac{1}{3}$, итд.

58. Према теореми из *примера* 85 имамо: $AC : BC = AM : MB$, односно $b : a = m : n$, где је CM симетрала правог угла, а CD висина, сл. 32. Из сличности троуглова ACD и ABC (имају заједнички оштар угао α), закључујемо: $AD : b = b : c$, одакле је $AD = \frac{b^2}{c}$. Слично добијамо $BD = \frac{a^2}{c}$, па је $AD : BD = \frac{b^2}{c} : \frac{a^2}{c} = b^2 : a^2 = m^2 : n^2$.



Сл. 32



Сл. 33

59. Нека је D средиште странице BC и E средиште странице AC. Из правоуглих троуглова ACD и BCE је: $t_a^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2$ и $t_b^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + a^2$. Сабирањем ових неједнакости добијамо: $t_a^2 + t_b^2 = \frac{5}{4}(a^2 + b^2) = \frac{5}{4}c^2$. Како је $c = 2t_c$, биће $t_a^2 + t_b^2 = 5t_c^2$.

60. Означимо дуж SP са p. Према сл. 33, из правоуглог троугла STQ добијамо: $x^2 + r^2 = (p - x)^2$. Одавде је $2px = p^2 - r^2 = m^2$, где је $m = PM$. За конструкцију дужи x искористити сл. 71 из доказа Питагорине теореме. ($2p = AB$, $x = BD$, $m = BC$.)

61. *а)* $(2\sqrt{25 \cdot 6} - 3\sqrt{9 \cdot 6} + \sqrt{16 \cdot 6}) \cdot \sqrt{2} = (10\sqrt{6} - 9\sqrt{6} + 4\sqrt{6}) \cdot \sqrt{2} = 5\sqrt{6} \cdot \sqrt{2} = 10\sqrt{3}$.
б) Рационалисати именилац, итд. Решење је 1.
в) Слично *примеру* 3 *в)*. Решење је 8.
г) $\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} = \sqrt{3 + 2\sqrt{3} + 1} = = \sqrt{(\sqrt{3} + 1)^2} = \sqrt{3} + 1$, итд. Решење је: $\sqrt{3} + 1$.
д) Као *в)*. Решење је 2.

62. *а)* $\sqrt{(\sqrt{5} - 1)^2} - \sqrt{(\sqrt{5} + 1)^2} = -2$;

б) $\sqrt{13+4\sqrt{3}}=2\sqrt{3}+1$, итд. Решење је $\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}+1)$.

в) $\sqrt[6]{(2+\sqrt{3})^3(2-\sqrt{3})^2}=\sqrt[6]{(2+\sqrt{3})((2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3}))^2}=\sqrt[6]{2+\sqrt{3}}$.

г) $\sqrt{2}-1=\sqrt[3]{(\sqrt{2}-1)^3}$, итд. Решење је 1.

63. *а)* $2x$. *б)* 1 . *в)* $\sqrt{a^2-1}$.

64. Рационалишемо све разломке, итд. Резултат је 9.

65. Слично *примеру* 5. *а)* $-2-4\sqrt{3}$.

б) $\dfrac{1-a}{\sqrt{a}}$, за $0<a<1$ и $\dfrac{a-1}{\sqrt{a}}$, за $a>1$.

66. *а)* $\dfrac{3}{2}-\dfrac{7}{2}i$. *б)* $-\dfrac{3}{169}+\dfrac{41}{169}i$. *в)* $\dfrac{i}{8}$.

г) $\dfrac{1+i}{1-i}=\dfrac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=i$, па је вредност датог израза 1.

д) $-4+2i$. *ђ)* $\dfrac{z^2}{|z|^2}$.

67. *а)* Рационалишемо леву страну једнакости, итд. $z=12-26i$.

б) $z=\dfrac{8}{5}-\dfrac{4}{5}i$. *в)* $z=1-2i$.

68. *а)* Приметимо да је $z^2=\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}$, $z^3=1$ и $z-z^2=i\sqrt{3}$, па имамо: $(2+z-z^2)(2-z+z^2)=4-(z-z^2)^2=4-(i\sqrt{3})^2=7$.

б) Приметимо да је $R(x)\cdot\dfrac{1-x}{1-x}=\dfrac{1+x^{20}}{1-x}$. Сем тога је $z^2=i$, па је $z^{20}=i^{10}=-1$, због чега је $R(z)=\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1-i}$. После рационалисања имениоца добијемо: $R(z)=1+i(1+\sqrt{2})$.

в) $R(z)=-1-3i\sqrt{3}$.

69. *а)* $x_1=a+3$, $x_2=a-3$.

б) $\dfrac{a}{x(b-1)}-1=\dfrac{a-1}{x^2(b-1)^2}$. Једначина има смисла за $x\neq 0$ и $b\neq 1$. Тада се ослободимо од разломака и средимо: $x^2(b-1)^2-a(b-1)x+a-1=0$. Применимо формулу (8) и добијемо: $x_1=\dfrac{a-1}{b-1}$, $x_2=\dfrac{1}{b-1}$.

в) Сменом $x^2-4x+10=t$ добијамо квадратну једначину. Даље, као у *примеру* 17. *а)*. Решења су: $x_1=1$, $x_2=3$, $x_{3,\,4}=2\pm 3i$.

г) Слично *примеру* 17. *в)*: $x_{1,\,2}=1$, $x_{3,\,4}=\dfrac{-11\pm\sqrt{57}}{8}$.

д) Слично *примеру* 17. *г)*: $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=\dfrac{1}{2}$, $x_{4,\,5}=-2\pm\sqrt{3}$.

ђ) Слично претходном задатку. Провером утврдимо да је $P(-1)=0$. Поделимо $P(x)$ са $(x+1)$ и добијемо симетричан полином, итд. Решења су: $x_1=-1$, $x_2=\frac{1}{2}$, $x_3=2$, $x_{4,5}=-2\pm\sqrt{3}$.

70. Применимо формулу (10). *а)* $\frac{2x+1}{x-3}$, за $x\neq 2$ и $x\neq 3$.

б) $\frac{3x^2-2x}{2x-3}$, за $x\neq 1$ и $x\neq \frac{3}{2}$.

71. *а)* $D=8m+36$. За $m=-\frac{9}{2}$ једначина има једно реално решење. За $m>-\frac{9}{2}$ решења су реална и различита, а за $m<-\frac{9}{2}$ решења су конјуговано комплексна.

б) $D=-4m+16$. За $m=4$ решења су реална и једнака. За $m<4$ решења су реална и различита, а за $m>4$ решења су конјуговано комплексна.

72. $D=-35k^2+72k-4=0$ за $k=2$ или $k=\frac{2}{35}$. За $k=2$ је $x=\frac{2}{3}$, а за $k=\frac{2}{35}$ је $x=-\frac{8}{5}$.

73. Из прве везе је $z=5-x-y$. Елиминишемо z из друге везе и после сређивања добијемо квадратну једначину по x: $x^2-(5-y)x+y^2-5y+8=0$. Решење по x је реалан број ако је $D\geq 0$, тј. ако је $(5-y)^2-4(y^2-5y+8)\geq 0$. Сређивањем добијемо $-3y^2+10y-7\geq 0$, односно $3y^2-10y+7\leq 0$. Применимо формулу (10) и добијамо: $(3y-7)(y-1)\leq 0$. Нацртамо шему знака, као на сл. 12 у *одељку* 1.7 и видимо да је ова неједнакост задовољена за $y\in\left[1,\ \frac{7}{3}\right]$. Формирајући из датих услова квадратну једначину са параметром x или z, добићемо да су вредности за x и z из истог интервала, тј. $x\in\left[1,\ \frac{7}{3}\right]$ и $z\in\left[1,\ \frac{7}{3}\right]$.

74. Слично *примеру* 14. *а)*. За $p=3$ је $x=1$ и за $p=-\frac{41}{12}$ је $x=-\frac{5}{6}$.

б) За $p=2$ је $x=2$, а за $p=4$ је $x=1$.

75. Одузимањем друге једначине од прве, добијамо: $(a-c)(x^2-1)=0$. Како је $a\neq c$, то су $x_1=1$ или $x_2=-1$ заједничка решења. Вратимо x_1 и x_2 у неку од датих једначина. Добићемо услове $a+b+c=0$ или $a-b+c=0$, односно $a+c=-b$ или $a+c=b$, што показује да је у оба случаја $(a+c)^2=b^2$.

76. Према формули (8) је $x_{1,\,2}=k-1\pm\sqrt{k^2-k+3}$. Дискриминанта, дакле, мора бити квадрат целог броја: $k^2-k+3=m^2$, $m\in Z$, односно

$k^2 - k + 3 - m^2 = 0$. Одавде је $k_{1,\,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{4m^2 - 11}}{2}$. Поново је дискриминанта квадрат целог броја, тј. $4m^2 - 11 = n^2$, $n \in Z$. Одавде $4m^2 - n^2 = 11$ или $(2m - n)(2m + n) = 11$. Ово је могуће за $(2m - n = 1$ и $2m + n = 11)$ или $(2m - n = 11$ и $2m + n = 1)$, (у оба случаја је $m = 3$), односно за $(2m - n = -1$ и $2m + n = -11)$ или $(2m - n = -11$ и $2m + n = -1)$, (у оба случаја је $m = -3$). Али, свеједно, ако је $m = 3$ или $m = -3$, биће $k_{1,\,2} = \dfrac{1 \pm 5}{2}$, односно $k_1 = 3$ и $k_2 = -2$. За $k_1 = 3$ је $x_1 = 5$, $x_2 = -1$, а за $k_2 = -2$ је $x_1 = 0$, $x_2 = -6$.

77. Решења морају бити реална ($D \geq 0$), затим $x_1 + x_2 < 0$ (овде је то испуњено јер је $x_1 + x_2 = -2$) и $x_1 \cdot x_2 > 0$ $\left(\dfrac{c}{a} > 0,\;\;\text{тј. } m + 3 > 0\right)$. Дакле: $4 - 4(m + 3) \geq 0$, тј. $m \leq -2$ и $m + 3 > 0$, тј. $m > -3$. Решење је $m \in (-3,\ -2]$.

78. *а)* $x_1 + x_2 = -\dfrac{2m - 1}{m - 1}$ и $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{m - 4}{m - 1}$. Из друге једнакости нађемо: $m = \dfrac{x_1 x_2 - 4}{x_1 x_2 - 1}$, па заменом у прву добијамо: $3(x_1 + x_2) - x_1 x_2 = -7$.
б) $x_1 + x_2 + x_1 x_2 = 11$.

79. Пођемо од услова: $x_1^2 + x_2^2 = \dfrac{10}{9}$, односно $(x_1 + x_2)^2 = \dfrac{10}{9} + 2x_1 x_2$. Даље, као у *примеру* 16: $m_1 = 2$ и $m_2 = \dfrac{1}{2}$.

80. Дат је услов $(x_1 + x_2)^3 = 64$, одакле је $\dfrac{2m}{3} = 4$, односно $m = 6$.

81. *а)* $a \leq \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2}$ или $a \geq \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$.
б) $2x_1 x_2 - 3(x_1 + x_2) + 2 = 0$.
в) Стављајући $x_1 = 2x_2$, добијамо једначину: $4x_2^2 - 9x_2 + 2 = 0$. Дакле $x_2 = 2$ и $x_1 = 4$ или $x_2 = \dfrac{1}{4}$ и $x_1 = \dfrac{1}{2}$.
г) $k_1 = -1$, $k_2 = 1$, $k_3 = -\dfrac{3}{4}$.

82. Стављајући $x_2 = x_1^2$, по Виетовим везама добијамо: $x_1 + x_1^2 = \dfrac{15}{4}$, односно $4x_1^2 + 4x_1 - 15 = 0$, одакле је $x_1 = \dfrac{3}{2}$ или $x_1 = -\dfrac{5}{2}$. Одговарајуће вредности за x_2 су $x_2 = \dfrac{9}{4}$ или $x_2 = \dfrac{25}{4}$. Из $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{m^3}{8}$, добијамо $m = 3$ или $m = -5$.

83. Из $x_1 + x_2 = -p$ и $x_1 \cdot x_2 = q$, добијамо једначине: $p + q = -p$ и $pq = q$. Ако је $q = 0$, онда је и $p = 0$. Ако је $q \neq 0$, тада из друге једначине добијамо $p = 1$, а онда из прве: $q = -2$.

84. Једначина нема смисла за $a = b$ или $a = -b$, или $x = 0$. Ако је $a \neq \pm b$ и $x \neq 0$, једначина је еквивалентна са: $2bx^2 - (a+b)^2x + (a+b)^2(a-b) = 0$. Ако је $b = 0$, добијамо линеарну једначину и $x = a$. Ако је $b \neq 0$ тада је дискриминанта једначине: $D = (a+b)^2(a-3b)^2$. За $a = 3b$ једначина има двоструко решење: $x = 4b$. Ако је $a \neq 3b$, тада је $D > 0$ и решења су реална и различита: $x_1 = \dfrac{a^2 - b^2}{2b}$ и $x_2 = a + b$.

85. *а)* Решење је: $x \in (-1,\ 0) \cup (1,\ +\infty)$.

б) Тражи се заједничко решење неједначина:
$\dfrac{-x^2 + 5x - 7}{x - 4} > -2$ и $\dfrac{-x^2 + 5x - 7}{x - 4} \leq 1$. Решење је $1 \leq x \leq 3$.

в) Решење је сваки број x.

г) $\dfrac{3}{2} \leq x < 2$.

86. Слично *примеру* 19. Заједничка тачка је $P(1,\ -2)$. Апсциса темена је $-\dfrac{b}{2a} = \dfrac{k-1}{k+1}$. Услов $\dfrac{k-1}{k+1} = 1$ је еквивалентан једначини $-1 = 1$, па нема решења за k.

87. Одредимо из првог скупа парабола $\alpha_1 = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{k-3}{2}$ и из другог $\alpha_2 = \dfrac{2}{k}$. Из услова $\alpha_1 = \alpha_2$ добијамо $k = -1$ или $k = 4$. Пошто се тражи минимум, може бити само $k = 4$. Тражене параболе су $y = x^2 - x + 3$ и $y = 4x^2 - 4x + \dfrac{15}{4}$. Координате темена обеју парабола су $\alpha = \dfrac{1}{2}$, $\beta = \dfrac{11}{4}$, па су то тражене криве, а заједничко теме је $T\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{11}{4}\right)$.

88. Мора бити $p - 2 < 0$ и $D = 4p^2 - 4(p-2)(2p-3) < 0$, тј. $p < 2$ и $-p^2 + 7p - 6 < 0$. Последња неједнакост је испуњена за $(p < 1 \ \vee \ p > 6)$. Решење задатка је $p < 1$.

89. $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (2m-1)^2 - 2(-4m-3) = 4m^2 + 4m + 7$. Добијени трином има минимум за $m = -\dfrac{4}{8} = -\dfrac{1}{2}$.

90. $\dfrac{1}{x_1^2} + \dfrac{1}{x_2^2} = \dfrac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^2 x_2^2} = \dfrac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2}{(x_1x_2)^2} = \dfrac{4(m+1)^2 - 2m}{m^2} =$
$= \dfrac{4m^2 + 6m + 4}{m^2} > 8$. Сређивањем добијамо неједначину:
$\dfrac{-4m^2 + 6m + 4}{m^2} > 0$, $m \neq 0$. Решење је $x \in \left(-\dfrac{1}{2},\ 0\right) \cup (0,\ 2)$.

91. Морају бити задовољени услови: $D \geq 0$, $f(3) > 0$ и $\alpha = -\dfrac{b}{2a} > 3$. Добијемо систем неједначина: $36k^2 - 4(9k^2 - 2k + 2) \geq 0 \ \wedge \ 9 - 18k + 9k^2 -$

$-2k+2>0 \wedge 3k>3$, односно $8k-8 \geq 0 \wedge 9k^2-20k+11>0 \wedge k>1$. Решење овог система је $k>\dfrac{11}{9}$.

92. Функција сече x осу за $D>0$, тј. ако је: $4(m-1)^2-4(m+5)=4(m+1)(m-4)>0$. Како је $f(-2)=5(m+1)$, а $f(3)=-5(m-4)$, биће $f(-2)\cdot f(3)=-25(m+1)(m-4)<0$ (јер из претходног услова је $(m+1)(m-4)>0$). То потврђује да су вредности $f(-2)$ и $f(3)$ супротног знака. (Ако би између -2 и 3 била оба пресека са осом Ox, онда би $f(-2)$ и $f(3)$ били истог знака и $f(-2)\cdot f(3)>0$.)

93. *а)* $(1,\ 2)$ и $(2,\ 1)$.

б) Саберемо једначине и добијемо: $(x+y)^2+(x+y)-6=0$ и сменимо: $x+y=z$, итд. Добијамо: $x+y=2 \vee x+y=-3$, итд. Решења су: $(0,\ 2)$ и $(2,\ 0)$.

в) Прву једначину напишемо као: $x^2(1+y^2+y^4)=525$, а одавде је: $x^2(1+y^2-y)(1+y^2+y)=525$, а другу као: $x(1+y+y^2)=35$. Поделимо прву са другом и добијемо $x(1+y^2-y)=15$. Сада из $\dfrac{x(1+y+y^2)}{x(1+y^2-y)}=\dfrac{35}{15}$ биће $4y^2-10y+4=0$, одакле је $y=2$ или $y=\dfrac{1}{2}$. Решења су $(5,\ 2)$ и $\left(20,\ \dfrac{1}{2}\right)$.

г) Стављајући $x+y=a$ и $xy=b$, добијамо: $\left.\begin{aligned} a(a^2-3b)&=19\\ a^2-2b&=13\end{aligned}\right\}$. Сада прво нађемо a и b, па се вратимо на $x+y=a$ и $xy=b$. За $a=1$ решења су: $(-2,\ 3)$, $(3,\ -2)$. За $a=\dfrac{-1\pm 3\sqrt{17}}{2}$ дати систем нема реалних решења.

94. *а)* Сређивањем добијамо: $\dfrac{9-x}{\sqrt{3-x}}=\sqrt{9-5x}$, $x\leq\dfrac{9}{5}$. Квадрирамо и средимо. Добијамо једначину $2x^2-3x-27=0$, чија су решења $x_1=-3$, $x_2=\dfrac{9}{2}$. Како је $\dfrac{9}{2}>\dfrac{9}{5}$, једино решење је $x=-3$.

б) $(4x^2+9x+5\geq 0 \wedge 2x^2+x-1\geq 0 \wedge x^2-1\geq 0) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \left(x\leq -\dfrac{5}{4} \vee x=-1 \vee x\geq 1\right)$. Дату једначину можемо написати као: $\sqrt{x+1}(\sqrt{4x+5}-\sqrt{2x-1}-\sqrt{x-1})=0$, па је $x_1=-1$ једно решење (из $\sqrt{x+1}=0$). Даље решавамо: $\sqrt{4x+5}=\sqrt{2x-1}+\sqrt{x-1}$ (слично *примеру* 24 *б)*). После сређивања, за $x\geq 1$, добијамо: $7x^2-26x-45=0$, одакле је $x_2=5$ и $x_3=-\dfrac{9}{7}$. Међутим $x\neq-\dfrac{9}{7}$, јер тада $\sqrt{4x+5}$ није реалан. Решења су: $x_1=-1$ и $x_2=5$.

в) Уведемо смену: $\sqrt{2x-5}=t\geq 0$, па је $x=\dfrac{t^2+5}{2}$. Једначина прелази у: $\sqrt{t^2+2t+1}+\sqrt{t^2+6t+9}=14$, односно $|\,t+1\,|+|\,t+3\,|=14$, итд. Решење за t је $t=5$, па је $x=15$.

г) Мора бити $x<-1\ \vee\ x>1$. Поделимо једначину са $\sqrt[4]{x^2-1}$ и добијамо: $\sqrt[4]{\dfrac{x-1}{x+1}}-\sqrt[4]{\dfrac{x+1}{x-1}}=\dfrac{3}{2}$. Сада уведемо смену: $\sqrt[4]{\dfrac{x-1}{x+1}}=t>0$, итд. Решење је $x=-\dfrac{17}{15}$.

д) Дату једначину напишемо као:
$\sqrt{x-1+2\sqrt{x-1}+1}+\sqrt{x-1-2\sqrt{x-1}+1}=x-1$, па уведемо смену: $\sqrt{x-1}=t>0$, итд. Решење је $x=5$.

ђ) Помножићемо једначину са $(\sqrt[3]{2-x}+\sqrt[3]{7+x})$ па ћемо добити: $2-x+7+x=3(\sqrt[3]{2-x}+\sqrt[3]{7+x})$, односно $\sqrt[3]{7+x}=3-\sqrt[3]{2-x}$. Степенујемо "на трећи" и добијемо: $\sqrt[3]{2-x}(3-\sqrt[3]{2-x})=2$. Како је израз у загради једнак са $\sqrt[3]{7+x}$, биће $\sqrt[3]{2-x}\cdot\sqrt[3]{7+x}=2$. Поново степенујемо и добијемо једначину: $x^2+5x-6=0$, чија су решења: $x_1=1$, $x_2=-6$.

95. *а)* За $x\geq 2$ имамо $\sqrt{x+3}<\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}$. Даље као у *примеру* 25. Решење је $x>\dfrac{2}{3}\sqrt{21}$.

б) За $x\geq 4$ неједначина се своди на $\sqrt{x^2-16}>8-x$. Решење је $x>5$.

в) Неједначина има смисла за $\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{3}{4}\geq 0$ и $x\neq 0$, тј. за: $x\in\left[-\dfrac{2}{\sqrt{3}},\ 0\right)\cup\left(0,\ \dfrac{2}{\sqrt{3}}\right]$. Како је $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{x}<0$ за $x\in(0,\ 2)$, то је према *формули* (17) $x\in\left(0,\ \dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)$ једно решење дате неједначине. Према истој формули, ако је $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{x}\geq 0$, тј. ако је $x\notin[0,\ 2)$, тада решење тражимо из: $\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{3}{4}\geq\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{x}\right)^2$. Ово даје немогућ резултат: $x\in(0,\ 1)$, па је коначно решење $x\in\left(0,\ \dfrac{2}{\sqrt{3}}\right]$.

г) Уведимо смену: $\sqrt[4]{\dfrac{12x}{x-2}}=t,\quad t>0$ па ћемо добити неједначину: $\dfrac{1}{2}t^4-t^2-2t>0$, односно $t^3-2t-4>0$. Одавде је $(t-2)(t^2+2t+2)>0$, тј. $t>2$. Према томе $\sqrt[4]{\dfrac{12x}{x-2}}>2$. Ова неједначина за $x<0\ \vee\ x>2$ даје: $\dfrac{12x}{x-2}>16\Leftrightarrow 2<x<8$, што је и решење полазне неједначине.

д) Неједначина има смисла за $x\leq\dfrac{-5-\sqrt{97}}{6}\ \vee\ x\geq\dfrac{-5+\sqrt{97}}{6}$. Ако је $x\leq\dfrac{-5-\sqrt{97}}{6}<-2$, неједначина је еквивалентна са: $\sqrt{3x^2+5x-6}>x+2$, па је према формули (17), испуњена за $x \leq \dfrac{-5-\sqrt{97}}{6}$. За $x \geq \dfrac{-5+\sqrt{97}}{6}$, неједначина је еквивалентна са: $\sqrt{3x^2+5x-6} < x+2$. После квадрирања добијамо $2x^2+x-10<0 \Leftrightarrow \left(-\dfrac{5}{2}<x<2\right)$. Решење је $\dfrac{-5+\sqrt{97}}{6}<x<2$ (и $x \leq \dfrac{-5-\sqrt{97}}{6}$).

96. Користимо формуле (19). Дато је $z_1=-1$, па је у датој једначини: $-1+z_2+z_3=0 \Rightarrow z_2+z_3=1$, затим $-z_2+z_2z_3-z_1=-(m^2-m+7)$ и $-z_2z_3=3m^2-3m-6$. Заменом прве и треће једнакости у другу добићемо: $1-3m^2+3m+6=-m^2+m-7$, одакле настаје квадратна једначина: $m^2-m-6=0$, која даје $m_1=3$ и $m_2=-2$. За обе вредности m добијамо $z_2+z_3=1$ и $z_2\cdot z_3=-12$, што значи да су z_2 и z_3 решења квадратне једначине $z^2-z-12=0$ (према формули (9)). Дакле, $z_2=4$, $z_3=-3$.

97. Из дате једначине очигледно је $z \neq 0$, па дати услов говори да треба доказати да једначина има пар решења која нису реална. Пошто је $a_4=1$ и $a_0=-9$, треба очекивати да је полином $P(z)$ дељив са (z^2+1), или (z^2+3), или (z^2+9). Непосредним проверавањем утврдимо да је тај делилац (z^2+3). Дата једначина има само два реална решења, јер је еквивалентна са $(z^3+3)(z^2+5z-3)=0$, а у једначини $z^2+5z-3=0$ је $D=25+12>0$. Према Виетовим везама је $z_1\cdot z_2=-3$, што значи да је једно решење позитивно и једно негативно.

98. Користићемо формулу (19). Нека је $at^3+bt^2+ct+d=0$ једначина чија су решења $t_1=z_2z_3$, $t_2=z_1z_3$ и $t_3=z_1z_2$. Из дате једначине је: $z_1+z_2+z_3=-p$, $z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1=q$ и $z_1z_2z_3=-r$, а из наше једначине по t је: $t_1+t_2+t_3=-\dfrac{b}{a}$, $t_1t_2+t_2t_3+t_3t_1=\dfrac{c}{a}$ и $t_1t_2t_3=-\dfrac{d}{a}$. Заменимо t_1, t_2, t_3 преко z_1, z_2, z_3 и добијемо $z_2z_3+z_1z_3+z_1z_2=-\dfrac{b}{a}$, тј. $q=-\dfrac{b}{a}$ или $b=-aq$. Затим: $z_2z_3^2z_1+z_1^2z_2z_3+z_1z_2^2z_3=\dfrac{c}{a}$, односно $z_1z_2z_3(z_1+z_2+z_3)=\dfrac{c}{a}$, па је $rp=\dfrac{c}{a}$, одакле је $c=arp$. Коначно $z_1^2z_2^2z_3^2=-\dfrac{d}{a}$, односно $d=-ar^2$. Тражена једначина је $at^3-aqt^2+arpt-ar^2=0$, односно: $t^3-qt^2+prt-r^2=0$.

99. Нека је $z_1=z_2=z_3=\alpha$ и $z_4=\beta$. Тада имамо Виетове везе: $3\alpha+\beta=-1$ и $3\alpha^2+3\alpha\beta=-18$. Ово решимо као систем једначина са две непознате: $\alpha=-2$, $\beta=5$ или $\alpha=\dfrac{3}{2}$, $\beta=-\dfrac{11}{2}$. Пошто једначина има цела решења, отпада друга комбинација, па је $\alpha=-2$, $\beta=5$. Сада лако израчунавамо $a=-52$, $b=-40$.

100. Нека је z_1 једно и $z_2=-\dfrac{1}{z_1}$ друго решење. Тада из $z.z_2\cdot z_3=-\dfrac{6}{12}$, излази да је $z_3=\dfrac{1}{2}$. Отуда закључујемо да је полином $P(z)=12z^3+$

$+4z^2-17z+6$ дељив са $\left(z-\frac{1}{2}\right)$, односно са $(2z-1)$. После извршеног дељења, дату једначину трансформишемо: $(2z-1)(6z^2+5z-6)=0$, па из $6z^2+5z-6=0$ добијамо $z_1=\frac{2}{3}$ и $z_2=-\frac{3}{2}$.

101. Дати услов је $z_2=\frac{1}{z_1}$, односно $z_1\cdot z_2=1$, па из дате једначине на основу услова $z_1\cdot z_2\cdot z_3\cdot z_4=-10$, добијамо $z_3\cdot z_4=-10$. Ако су z_1 и z_2 нуле неког полинома $Q_1(z)$ другог степена, а z_3 и z_4 нуле полинома $Q_2(z)$, такође другог степена, тада је наша једначина: $Q_1(z)\cdot Q_2(z)=0$. На основу коефицијента дате једначине и услова за $z_1\cdot z_2$ и $z_3\cdot z_4$, закључујемо да је $Q_1(z)=z^2+az+1$, а $Q_2(z)=z^2+bz-10$. Коефицијенте a и b одредићемо на основу једнакости:

$$(z^2+az+1)(z^2+bz-10)=z^4-7z^3+3z^2+37z-10$$

Добијамо: $a=-4$, $b=-3$. Дакле, решења једначине су: $z_1=2+\sqrt{3}$, $z_2=2-\sqrt{3}$, $z_3=5$, $z_4=-2$.

102. Према услову је $z_1+z_2=0=z_3+z_4$. Према Виетовим везама, у датој једначини је $z_1+z_2+z_3+z_4+z_5=\frac{1}{2}$, па је $z_5=\frac{1}{2}$ и $P(z)$ је дељиво са $(2z-1)$. Поделимо и добијемо: $(2z-1)(z^4-z^2-2)=0$. Биквадратна једначина $z^4-z^2-2=0$ даје: $z_1=\sqrt{2}$, $z_2=-\sqrt{2}$, $z_3=i$, $z_4=-i$.

103. Дате једначине можемо записати као: $a^3-a^2z-ay-x=0$, $b^3-b^2z-by-x=0$, $c^3-c^2z-cy-x=0$. Очигледно су a, b, c решења једначине: $t^3-zt^2-yt-x=0$. Применимо формуле (19) на ову једначину, ставимо: $t_1=a$, $t_2=b$, $t_3=c$ и добијамо: $x=abc$, $y=-(ab+bc+ac)$ и $z=a+b+c$.

104. *а)* Имамо: $\frac{10^{x^2}}{10^3}=\frac{1}{10^2}\cdot 10^{3x}\cdot\frac{1}{10^3}\Leftrightarrow x^2=3x-2$. Решења су $x_1=1$, $x_2=2$.

б) $\left(\frac{3}{5}\right)^x\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^{-2x^2+24}=\left(\frac{3}{5}\right)^9$. Решења су $x_1=3$, $x_2=-\frac{5}{2}$.

в) $2^{2x}+4\cdot 2^{2x}=5^{2x}-\frac{5^{2x}}{5}\Leftrightarrow 2^{2x-2}=5^{2x-2}$, одакле је $2x-2=0$, тј. $x=1$.

г) Слично претходном. Решење је $x=-\frac{1}{2}$.

д) Стављајући $5^x=t$, добијамо: $t-\frac{125}{t}=20$, а то је квадратна једначина чија су решења $t_1=25$ и $t_2=-5$. Како је $t>0$, може бити само $t=25$, тј. $5^x=25$, одакле је $x=2$.

ђ) Слично *примеру* 29 *ђ)*. Решења су $x_1=2$, $x_2=-2$.

е) Уведимо ознаке: $a=2^x$, $b=3^x$, $c=5^x$. Тада дата једначина има облик $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ac$. Према неједнакости (23) из ПРВЕ ГЛАВЕ, знамо да је $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac$, а знак једнакости важи само ако је $a = b = c$, тј. ако је $2^x = 3^x = 5^x$, што важи само за $x = 0$.

II решење. Помножимо са 2 и добијемо: $2a^2 + 2b^2 + 2c^2 = 2ab + +2ac + 2bc \Leftrightarrow (a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2 = 0 \Leftrightarrow a - b = 0 = a - c = b - c$, итд.

ж) За $x \leq 0$ имамо једначину $1 - 2^x + 2 - 2^x = 1$, односно $2^x = 1$, па је $x_1 = 0$. За $0 \leq x \leq 1$, имамо: $2^x - 1 + 2 - 2^x = 1 \Leftrightarrow 1 = 1$, важи за свако $x \in [0,\ 1]$. За $x \geq 1$, имамо: $2^x - 1 + 2^x - 2 = 1$, односно $2^x = 2 \Leftrightarrow x = 1$. Решење је $0 \leq x \leq 1$.

з) 1^o За $x_1 = 3$, имамо $0^6 = 0^2$, што је тачно.
2^o За $x_2 = 2$ и $x_3 = 4$, имамо $1 = 1$, што је тачно.
3^o За $x - 3 \neq 0$ и $| x - 3 | \neq 1$ је $x^2 - x = 2$, одакле је још $x_4 = -1$.

105. *а)* $0.008 = \dfrac{8}{1000} = \dfrac{1}{125} = 5^{-3}$ и $0.04 = \dfrac{4}{100} = \dfrac{1}{25} = 5^{-2}$, па добијамо: $5^{-3x} + 5 \cdot 5^{-3x} + \dfrac{5^{-3x}}{125} < 30.04$, а одавде $751 \cdot 5^{-3x} < 3755 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 5^{-3x} < 5 \Leftrightarrow -3x < 1 \Leftrightarrow x > -\dfrac{1}{3}$.

б) Сменом $2^{\sqrt{x}} = t \geq 1$ добијамо: $\dfrac{1}{t^2} + 2 > \dfrac{3}{t}$, односно $\dfrac{2t^2 - 3t + 1}{t^2} > 0$, што даје услове $t < \dfrac{1}{2} \vee t > 1$. Први услов $2^{\sqrt{x}} < \dfrac{1}{2}$, није могућ и важи само $2^{\sqrt{x}} > 1 \Leftrightarrow x > 0$.

в) Ако је $2^x = t$, добијамо: $t^2 - 3t + 2 < 0$, па је $1 < t < 2$, односно $1 < 2^x < 2$, одакле је $0 < x < 1$.

г) $x^2 + x + 1 > 0$ за свако реално x. За $x^2 + x + 1 < 1$, односно за $x^2 + x < 0 \Leftrightarrow x \in (-1,\ 0)$, мора бити $\dfrac{x+5}{x+2} < 3 \Leftrightarrow \dfrac{-2x-1}{x+2} < 0 \Leftrightarrow$ $\left(x < -2 \ \vee\ x > -\dfrac{1}{2}\right)$. Решење је $x \in \left(-\dfrac{1}{2},\ 0\right)$. Ако је $x^2 + x + 1 > 1$, тј. $(x < -1 \ \vee\ x > 0)$, неједначина даје услов $\dfrac{x+5}{x-2} > 3 \Leftrightarrow \dfrac{-2x-1}{x-2} > 0 \Leftrightarrow$ $x \in \left(-2,\ -\dfrac{1}{2}\right)$. Решење је $x \in (-2,\ -1)$. Решење дате неједначине је $x \in (-2,\ -1) \cup \left(-\dfrac{1}{2},\ 0\right)$.

106. *а)* Како је $6.125 = 6\dfrac{1}{8} = \dfrac{49}{8} = \dfrac{7^2}{2^3}$, то је $\log_{\sqrt[3]{5}} 6.125 = \log_5 6.125^3 =$ $= \log_5 \dfrac{7^6}{2^9} = 6 \log_5 7 - 9 \log_5 2 = 12 \log_{25} 7 - 9 \log_5 2 = 12a - \dfrac{9}{b}$.

б) Из $\log_{abc} x = r$, добијамо: $\log_x abc = \dfrac{1}{r}$, односно $\log_x a + \log_x b +$ $+ \log_x c = \dfrac{1}{r}$, па је $\log_x c = \dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{q} - \dfrac{1}{p} = \dfrac{pq - pr - rq}{pqr}$. Коначно: $\log_c x =$

$= \dfrac{pqr}{pq-pr-qr}$.

в) Знамо да је $7^2 = 49$ и $7^3 = 343$. Отуда добијамо:
$(7^3)^{\log_7 7-\log_{49} 14^2} = (7^3)^{\log_7 7-\log_7 14} = 7^{3\log_7 \frac{7}{14}} = 7^{\log_7 (\frac{1}{2})^3} = \dfrac{1}{8}$.

107. *а)* Из датог услова је: $a^2+2ab+b^2 = 9ab$, односно: $\left(\dfrac{a+b}{3}\right)^2 = ab$. Одавде логаритмовањем добијамо тражену везу.

$$б)\ \frac{\dfrac{1}{\log_c a} - \dfrac{1}{\log_c b}}{\dfrac{1}{\log_c a} + \dfrac{1}{\log_c b}} = \frac{\log_c b - \log_c a}{\log_c b + \log_c a} = \frac{\log_c \dfrac{b}{a}}{\log_c ab} = \log_{ab} \frac{b}{a}.$$

в) Извучемо на левој страни $\log_a x \cdot \log_b x \cdot \log_c x$ пред заграду:
$\log_a x \cdot \log_b x \cdot \log_c x \left(\dfrac{1}{\log_c x} + \dfrac{1}{\log_a x} + \dfrac{1}{\log_b x}\right) =$
$= \log_a x \cdot \log_b x \cdot \log_c x(\log_x c + \log_x a + \log_x b) = \log_a x \cdot \log_b x \cdot \log_c x \cdot \log_x abc =$
$= \dfrac{\log_a x \cdot \log_b x \cdot \log_c x}{\log_{abc} x}$.

г) Према (29) је $\dfrac{\log_a x}{\log_c x} = \dfrac{\log_x c}{\log_x a}$. Даље је: $\dfrac{\log_a x - \log_b x}{\log_b x - \log_c x} =$
$= \dfrac{\dfrac{1}{\log_x a} - \dfrac{1}{\log_x b}}{\dfrac{1}{\log_x b} - \dfrac{1}{\log_x c}} = \dfrac{\log_x b - \log_x a}{\log_x c - \log_x b} \cdot \dfrac{\log_x c}{\log_x a}$. Очигледно, да би задата једнакост била исправна, мора бити $\dfrac{\log_x b - \log_x a}{\log_x c - \log_x b} = 1$, тј. $\log_x \dfrac{b}{a} = \log_x \dfrac{c}{b}$. Одавде је $\dfrac{b}{a} = \dfrac{c}{b}$, што даје тражени услов: $b^2 = ac$.

д) $(\log_2 \pi)^{-1} + (\log_5 \pi)^{-1} = \log_\pi 2 + \log_\pi 5 = \log_\pi 10 > \log_\pi \pi^2 = 2$, јер је $\pi^2 = 9.86\cdots < 10$.

ђ) Како је $\log_7 49 = 2$, то је $4 = \log_7^2 49 > \log_7^2 48 = (\log_7 8 + \log_7 6)^2 =$
$= \log_7^2 8 + \log_7^2 6 + 2\log_7 8 \cdot \log_7 6 > 4\log_7 8 \cdot \log_7 6 = 4 \cdot \dfrac{\log_7 8}{\log_6 7}$. (Користили смо Кошијеву неједнакост: $a^2 + b^2 > 2ab$). Дакле, добили смо: $4 > 4 \cdot \dfrac{\log_7 8}{\log_6 7}$, одакле је $\dfrac{\log_7 8}{\log_6 7} < 1$, што значи да је $\log_7 8 < \log_6 7$.

108. *а)* Једначина има смисла ако је: $2-x > 0$, $x > 0$ и $x \neq 1$, тј. ако је $x \in (0,\ 1) \cup (1,\ 2)$. Како је $\log_4(2-x) = \dfrac{1}{2}\log_2(2-x)$ (особина (27)), имамо: $\dfrac{1}{2}\log_2(2-x) \cdot \dfrac{1}{\log_2 x} = 1$, односно: $\log_2(2-x) = \log_2 x^2$. Одавде је $2-x = x^2$, тј. $x_1 = 1$ и $x_2 = -2$, а то није могуће због услова $x \in (0,\ 1) \cup (1,\ 2)$. Дакле, једначина нема решења.

б) За $x > 0$, $x \neq 1$, $x \neq \frac{1}{2}$ и $x \neq \frac{1}{4}$ је: $\frac{1}{\log_2 x} \cdot \frac{1}{\log_2 2x} = \frac{1}{\log_2 4x}$, односно $\log_2 4x = \log_2 x \cdot \log_2 2x$. Одавде је: $2 + \log_2 x = \log_2 x(1 + \log_2 x)$. Уведемо смену $\log_2 x = t$, па је $t^2 = 2$, односно $t_{1,\ 2} = \pm\sqrt{2}$. Из $\log_2 x_1 = \sqrt{2}$ и $\log_2 x_2 = -\sqrt{2}$, добијамо: $x_1 = 2^{\sqrt{2}}$ и $x_2 = 2^{-\sqrt{2}}$.

в) Лева страна једначине је одређена за $x+3 > 0$, $x+3 \neq 1$ и $4-x > 0$, тј. за $x \in (-3,\ -2) \cup (-2,\ 4)$. Користећи особине (24) и (27), изразићемо све логаритме преко основе 2. Нпр. $\log_6(x+3) = \frac{\log_2(x+3)}{\log_2 6}$, затим: $2\log_{\frac{1}{4}}(4-x) = -\log_2(4-x)$. Добијамо једначину: $\frac{\log_2 6}{\log_2(x+3)} - \frac{\log_2(4-x)}{\log_2(x+3)} = 1$, односно: $\log_2 6 - \log_2(4-x) = \log_2(x+3)$, или: $\log_2 \frac{6}{4-x} = \log_2(x+3)$. Одавде је $6 = (x+3)(4-x)$, тј. $x^2 - x - 6 = 0$. Решења ове једначине су -2 и 3. Број -2 је из недозвољеног интервала. Једино решење је $x = 3$.

г) Поступајући слично претходном задатку $(\log_{0.5x} x^2 = \frac{\log_x x^2}{\log_x 0.5x} = \frac{2}{1 - \log_x 2})$, добићемо једначину: $\frac{2}{1-\log_x 2} - \frac{42}{1+4\log_x 2} + \frac{20}{1+2\log_x 2} = 0$. Ставимо: $\log_x 2 = t$ и добијемо $2t^2 + 3t - 2 = 0$, одакле је $t_1 = \frac{1}{2}$ и $t_2 = -2$. Сада из $\log_x 2 = \frac{1}{2}$ и $\log_x 2 = -2$, добијамо: $x_1 = 4$, $x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

д) Логаритмујемо једначину по основи 10: $\log x^{\frac{\log x+5}{3}} = \log 10^{5+\log x}$ одакле је $\frac{\log x + 5}{3} \cdot \log x = 5 + \log x$. Ставимо $\log x = t$, итд. Решења су: $x_1 = 10^{-5}$ и $x_2 = 10^3$.

109. *а)* За $x > 0$, $x \neq 1$, $x - 3y > 0$, $y > 0$ и $y \neq 1$, из прве једначине добијамо: $\frac{\log_x(x-3y)}{\log_x 2} = 2$, одакле је $x - 3y = 4$. Логаритмовањем друге једначине за основу x, добијемо: $\log_x x + \log_x y^{\log_x y} = \log_x y^{\frac{5}{2}}$, односно: $1 + \log_x^2 y = \frac{5}{2}\log_x y$. Одавде је $\log_x y = 2$ или $\log_x y = \frac{1}{2}$. Сада је $y = x^2$ или $y = \sqrt{x}$. Решимо добијене системе једначина: $(x - 3y = 4\ \wedge\ y = x^2)$ нема решења, а други $(x - 3y = 4\ i\ y^2 = x)$ даје $y_1 = 4$ и $y_2 = -1$. Због $y > 0$, једино решење је $x = 16$, $y = 4$.

б) Прва једначина је задовољена за $y_1 = 1$, па је из друге $x_1 = 2$. Како је $x^3 + x + 2$ паран број за $x \in Z$, то је и $y_2 = -1$, $x_2 = 4$ решење дате једначине. Ако је $y \neq 1$ и $y > 0$, тада логаритмовањем прве једначине добијамо $(x^3+x+2)\ln y = 0$. Одавде је $x^3+x+2 = 0$, тј. $(x+1)(x^2-x+2) = 0$, што даје $x + 1 = 0$, односно $x_3 = -1$. Затим налазимо $y_3 = 4$.

в) Према особини (27) логаритама трансформишемо једначине:

$$\log_2 x + \frac{1}{2}\log_2 y + \frac{1}{2}\log_2 z = 2$$
$$\log_3 y + \frac{1}{2}\log_3 z + \frac{1}{2}\log_3 x = 2$$
$$\frac{1}{2}\log_2 z + \frac{1}{4}\log_2 x + \frac{1}{4}\log_2 y = 2$$

Ставимо у првој и трећој једначини: $a = \log_2 x$, $b = \log_2 y$ и $c = \log_2 z$, па добијемо систем : $(2a + b + c = 4 \ \wedge \ a + b + 2c = 8)$, одакле изразимо b и c преко a : $b = -3a$, $c = a + 4$, што значи да је $\log_2 y = -3\log_2 x \Rightarrow y = x^{-3}$ и $\log_2 z = 4 + \log_2 x = \log_2 16x \Rightarrow z = 16x$. Сада заменимо y и z у другу једначину: $2\log_3 x^{-3} + \log_3 16x + \log_3 x = 4 \Rightarrow \log_3 x^{-6} \cdot 16x \cdot x = 4$, односно $\log_3 16x^{-4} = 4$. Одавде је $16x^{-4} = 3^4$, па је $2x^{-1} = 3$, тј. $x = \dfrac{2}{3}$. Дакле: $y = x^{-3} = \dfrac{27}{8}$ и $z = 16x = \dfrac{32}{3}$.

110. *а)* За $x < -\sqrt{5}$ или $x > \sqrt{5}$ је $0 < \log_4(x^2 - 5) < 1$, а одавде: $1 < x^2 - 5 < 4$, односно $6 < x^2 < 9$. Решење је $x \in (-3,\ -\sqrt{6}) \cup (\sqrt{6},\ 3)$.

б) Мора бити $\dfrac{x+1}{x-1} > 0$ и $\log_3 \dfrac{x+1}{x-1} > 0$, тј. $x > 1$. Применимо особину (27) на десној страни неједнакости и: $\log_2 \log_3 \dfrac{x+1}{x-1} < -\log_2 \log_{\frac{1}{3}} \dfrac{x-1}{x+1}$,

одакле је $\log_3 \dfrac{x+1}{x-1} < \left(\log_{\frac{1}{3}} \dfrac{x-1}{x+1}\right)^{-1} = \dfrac{-1}{\log_3 \dfrac{x-1}{x+1}} = \dfrac{1}{\log_3 \dfrac{x+1}{x-1}}$, односно $\log_3^2 \dfrac{x+1}{x-1} < 1$. Одавде је $0 < \log_3 \dfrac{x+1}{x-1} < 1$, тј. $1 < \dfrac{x+1}{x-1} < 3$. Коначно решење је $x > 2$.

в) Разликујемо два случаја. 1^o Нека је $\left(0 < \dfrac{1}{16}(25 - x^2) < 1 \ \wedge \ 24 - 2x - x^2 > 0\right) \Leftrightarrow x \in (-5,\ -3) \cup (3,\ 4)$. Неједначина прелази у: $\dfrac{24 - 2x - x^2}{14} \leq \dfrac{1}{16}(25 - x^2)$, одакле је $x^2 + 16x - 17 \geq 0$, што важи за $x \leq -17$ или $x \geq 1$. Узимајући у обзир ограничења за x, добијамо решење $x \in (3,\ 4)$.

2^o Нека је $\left(\dfrac{1}{16}(25 - x^2) > 1 \ \wedge \ 24 - 2x - x^2 > 0\right) \Leftrightarrow (-3 < x < 3)$. Дата неједначина прелази у: $\dfrac{24 - 2x - x^2}{14} \geq \dfrac{25 - x^2}{16}$, одакле је $-17 \leq x \leq 1$. Уз ограничења за x, добијамо решење: $-3 < x \leq 1$.

Дакле, неједначина је задовољена за $x \in (-3,\ 1] \cup (3,\ 4)$.

г) Слично претходном задатку: разликујемо случајеве: $0 < x^2 - 1 < 1$ и $x^2 - 1 > 1$. У првом случају неједначина прелази у $3x - 1 > x^2$, а у другом: $0 < 3x - 1 < x^2$, итд. Решење је $x \in (1, \sqrt{2}) \cup \left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right)$.

д) Како је $\log_{\frac{1}{x}}(2-x) = -\log_x(2-x)$, дата неједначина се трансформише у: $\log_x(x+1)(2-x) < 0$, итд, слично претходном задатку. Решење је: $x \in (0, 1) \cup \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, 2\right)$.

111. *а)* Резултат је 3.

б) Резултат је -2.

в) $$\frac{\sin(90^o+40^o)\cos(360^o-30^o)\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}(180^o+45^o)}{-1\cos(180^o+40^o)\operatorname{tg}(180^o+30^o)(-\operatorname{ctg}\alpha)} =$$

$$= \frac{\cos 40^o\cdot\cos 30^o\cdot\operatorname{ctg}45^o}{-\cos 40^o\cdot\operatorname{tg}30^o} = -\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = -\frac{3}{2}.$$

г) $\operatorname{tg}1^o\cdot\operatorname{tg}2^o\cdot\ldots\cdot\operatorname{tg}44^o\operatorname{tg}45^o\operatorname{ctg}44^o\cdot\ldots\cdot\operatorname{ctg}2^o\operatorname{ctg}1^o = 1$.

д) $\sin^2 1^o + \sin^2 2^o + \cdots + \sin^2 44^o + \sin^2 45^o + \cos^2 44^o + \cdots + \cos^2 2^o + \cos^2 1^o =$
$= 44 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{89}{2}$.

112. *а)* $$\frac{\sin 20^o\cos 10^o + \cos(180^o-20^o)\cos(90^o+10^o)}{\sin 21^o\cos 9^o + \cos(180^o-21^o)\cos(90^o+9^o)} =$$

$$= \frac{\sin 20\cos 10^o + \cos 20^o\sin 10^o}{\sin 21^o\cos 9^o + \cos 21^o\sin 9^o} = \frac{\sin(20^o+10^o)}{\sin(21^o+9^o)} = 1.$$

б) $\sin\dfrac{5\pi}{8} = \sin\left(\pi - \dfrac{3\pi}{8}\right) = \sin\dfrac{3\pi}{8}$ и $\sin\dfrac{7\pi}{8} = \sin\left(\pi - \dfrac{\pi}{8}\right) = \sin\dfrac{\pi}{8}$, па је:

$$2\sin^4\frac{\pi}{8} + 2\sin^4\frac{3\pi}{8} = \frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{3\pi}{4}\right)^2 =$$
$$= \frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{\pi}{4}\right)^2 = 1 + \cos^2\frac{\pi}{4} = \frac{3}{2}.$$

в) $22^o30' = \dfrac{45^o}{2}$, па је $\operatorname{tg}22^o30' = \sqrt{\dfrac{1-\cos 45^o}{1+\cos 45^o}} = \sqrt{\dfrac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}} =$

$$= \sqrt{\frac{(2-\sqrt{2})^2}{2}} = \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1.$$

г) Слично *примеру* 38 *а)*, израчунамо: $\sin\alpha = -\dfrac{8}{17}$ и $\cos\alpha = -\dfrac{15}{17}$. Сада је $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = \dfrac{240}{289}$ и $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \dfrac{161}{289}$.

д) По формули (37) је $\sin\alpha = \dfrac{12}{13}$ и $\cos\alpha = \dfrac{5}{13}$. Даље је $\cos^2 2\beta =$

$= 1 - \sin^2 2\beta = \dfrac{49}{169}$, па je $\cos 2\beta = \dfrac{7}{25}$, итд. Резултат je: $\sin(\alpha-\beta) = \dfrac{33}{65}$ и $\cos(\alpha-\beta) = \dfrac{56}{65}$.

ђ) $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4}$, па применимо (35). Резултат je: $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{3}{4}$.

е) $\operatorname{tg} 3\alpha = \operatorname{tg}(2\alpha+\alpha)$, итд. Решење je: $\operatorname{tg} 3\alpha = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha(3-\operatorname{tg}^2\alpha)}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha}$.

113. *а)* $2(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)(\sin^4\alpha-\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^4\alpha)-3(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha)+$ $+1 = -\sin^4\alpha-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha-\cos^4\alpha+1 = -(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2+1 = -1+1 = 0.$

б) $2\sin 3\alpha\cos\alpha - 2\sin 3\alpha\cos 3\alpha = 2\sin 3\alpha(\cos\alpha-\cos 3\alpha) =$ $= 2\sin 3\alpha\cdot 2\sin 2\alpha\sin\alpha.$

в) $\dfrac{(1+\cos 2\alpha)+(\cos 3\alpha+\cos\alpha)}{(1+\cos 2\alpha)+\cos\alpha-1} = \dfrac{2\cos^2\alpha+2\cos 2\alpha\cos\alpha}{\cos 2\alpha+\cos\alpha} =$

$$= \frac{2\cos\alpha(\cos\alpha+\cos 2\alpha)}{\cos 2\alpha+\cos\alpha} = 2\cos\alpha.$$

г) $\cos\dfrac{\pi}{5}+\cos\dfrac{3\pi}{5} = 2\cos\dfrac{2\pi}{5}\cos\dfrac{\pi}{5} = \dfrac{4\sin\dfrac{\pi}{5}\cos\dfrac{\pi}{5}\cos\dfrac{2\pi}{5}}{2\sin\dfrac{\pi}{5}} =$

$$= \frac{2\sin\frac{2\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}}{2\sin\frac{\pi}{5}} = \frac{\sin\frac{4\pi}{5}}{2\sin\frac{\pi}{5}} = \frac{\sin\left(\pi-\frac{\pi}{5}\right)}{2\sin\frac{\pi}{5}} = \frac{\sin\frac{\pi}{5}}{2\sin\frac{\pi}{5}} = \frac{1}{2}.$$

д) $\operatorname{tg} 15^o\cdot\operatorname{ctg} 65^o\cdot\operatorname{ctg} 55^o = \operatorname{tg} 15^o\cdot\operatorname{ctg}(60^o+5^o)\cdot\operatorname{ctg}(60^o-5^o) =$

$$= \operatorname{tg} 15^o\cdot\frac{\operatorname{ctg} 60^o\operatorname{ctg} 5^o-1}{\operatorname{ctg} 5^o+\operatorname{ctg} 60^o}\cdot\frac{\operatorname{ctg} 60^o\operatorname{ctg} 5^o+1}{\operatorname{ctg} 5^o-\operatorname{ctg} 60^o} =$$

$$= \operatorname{tg}(3\cdot 5^o)\frac{(\operatorname{ctg}^2 60^o\operatorname{ctg}^2 5^o-1)3\operatorname{tg}^2 5^o}{(\operatorname{ctg}^2 5^o-\operatorname{ctg}^2 60^o)3\operatorname{tg}^2 5^o} = \frac{\operatorname{tg} 5^o(3-\operatorname{tg}^2 5^o)}{1-3\operatorname{tg}^2 5^o}\cdot\frac{1-3\operatorname{tg}^2 5^o}{3-\operatorname{tg}^2 5^o} = \operatorname{tg} 5^o.$$

(Користили смо формулу за $\operatorname{tg} 3\alpha$ из претходног задатка под *е)*).

ђ) Применимо формуле (42) и (40): $(\operatorname{tg} 9^o+\operatorname{tg} 81^o)-(\operatorname{tg} 27^o+\operatorname{tg} 63^o) =$

$$= \frac{\sin 90^o}{\cos 9^o\cos 81^o}-\frac{\sin 90^o}{\cos 27^o\cos 63^o} = \frac{2}{2\sin 9^o\cos 9^o}-\frac{2}{2\sin 27^o\cos 27^o} =$$

$$= \frac{2}{\sin 18^o}-\frac{2}{\sin 54^o} = \frac{2(\sin 54^o-\sin 18^o)}{\sin 18^o\sin 54^o} = \frac{4\cos 36^o\sin 18^o}{\sin 18^o\sin 54^o} = 4.$$

е) $\cos(\alpha+\beta)\cos\gamma-\sin(\alpha+\beta)\sin\gamma+\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma = (\cos(\alpha+\beta+\gamma)+$ $+\cos\alpha)+(\cos\beta+\cos\gamma) = 2\cos\left(\alpha+\dfrac{\beta+\gamma}{2}\right)\cos\dfrac{\beta+\gamma}{2}+2\cos\dfrac{\beta+\gamma}{2}\cos\dfrac{\beta-\gamma}{2} =$

$$= 2\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\left(\cos\left(\alpha+\frac{\beta+\gamma}{2}\right)+\cos\frac{\beta-\gamma}{2}\right) =$$

$$= 4\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

114. *а)* Из $\alpha+\beta=-\gamma$, добијамо: $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\operatorname{tg}(-\gamma)=-\operatorname{tg}\gamma$, а одавде је: $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}=-\operatorname{tg}\gamma$. Треба само да се ослободимо разломка.

б) $\gamma=\dfrac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\Rightarrow 4\gamma=2\pi-(4\alpha+4\beta)$, па је $\sin 4\gamma=-\sin(4\alpha+4\beta)$. Даље је: $(\sin 4\alpha+\sin 4\beta)-\sin 2(2\alpha+2\beta)=$
$=2\sin(2\alpha+2\beta)\cos(2\alpha-2\beta)-2\sin(2\alpha+2\beta)\cos(2\alpha+2\beta)=$
$=2\sin(2\alpha+2\beta)(\cos(2\alpha-2\beta)-\cos(2\alpha+2\beta))=4\sin(\pi-2\gamma)\sin 2\alpha\sin 2\beta=$
$=4\sin 2\alpha\sin 2\beta\sin 2\gamma$.

в) Према *примеру* 45 *г)* је $\sin\dfrac{\gamma}{2}=\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}$, па имамо:

$$\frac{1-\cos\alpha}{2}+\frac{1-\cos\beta}{2}+\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=$$
$$=1+\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{1}{2}(\cos\alpha+\cos\beta)=$$
$$=1+\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=$$
$$=1+\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}-\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=1+\sin\frac{\gamma}{2}\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=$$
$$=1-2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}.$$

г) Из $\alpha+\beta=2\pi-\gamma$, добијамо $\dfrac{\alpha}{2}+\dfrac{\beta}{2}=\pi-\dfrac{\gamma}{2}$, па је $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\alpha}{2}+\dfrac{\beta}{2}\right)=-\operatorname{tg}\dfrac{\gamma}{2}$, итд. Одавде, слично задатку под *а)*, добијемо: $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\dfrac{\gamma}{2}=\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\gamma}{2}$. Сад ову једнакост помножимо са $\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{ctg}\dfrac{\beta}{2}\cdot\operatorname{ctg}\dfrac{\gamma}{2}$ и добићемо тражену једнакост.

д) $2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\left(\cos\dfrac{\gamma-\delta}{2}-\cos\left(\alpha+\dfrac{\gamma+\delta}{2}\right)\right)=$

$$=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\gamma-\delta}{2}-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\left(\alpha+\frac{\gamma+\delta}{2}\right)=$$
$$=\sin\frac{\alpha+\beta-\gamma+\delta}{2}+\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma-\delta}{2}-\sin\frac{3\alpha+\beta+\gamma+\delta}{2}+\sin\frac{\alpha-\beta+\gamma+\delta}{2}=$$
$$=\sin(\pi-\gamma)+\sin(\pi-\delta)-\sin(\pi+\alpha)+\sin(\pi-\beta)=\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma+\sin\delta.$$

ђ) Користимо формулу (37): $\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}=\dfrac{1-\dfrac{a}{b+c}}{1+\dfrac{a}{b+c}}=$
$=\dfrac{b+c-a}{a+b+c}$. Слично добијемо: $\operatorname{tg}^2\dfrac{\beta}{2}=\dfrac{a+c-b}{a+b+c}$ и $\operatorname{tg}^2\dfrac{\gamma}{2}=\dfrac{a+b-c}{a+b+c}$.

115. *а)* $\cos\alpha+\cos\beta-1-\cos(\alpha+\beta)-\dfrac{1}{2}=0$

$\Leftrightarrow 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}-2\cos^2\dfrac{\alpha+\beta}{2}-\dfrac{1}{2}=0$ (помножимо са -2)

$$\Leftrightarrow 4\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}-4\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}+\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}-\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2+\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}-\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=0\right)\wedge\left(\sin\frac{\alpha-\beta}{2}=0\right)\quad (a^2+b^2=0\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow a=0\ \wedge\ b=0)$.

Како су α и β углови троугла, из $\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}=0$ следи: $\alpha=\beta$. Тада прва заграда прелази у једнакост $2\cos\alpha-1=0$, односно $\cos\alpha=\dfrac{1}{2}$. Значи, $\alpha=\beta=\dfrac{\pi}{3}$, па је и $\gamma=\dfrac{\pi}{3}$. Троугао је једнакостраничан.

б) Због $\gamma=\pi-(\alpha+\beta)$ је $\sin\gamma=\sin(\alpha+\beta)$, па имамо:

$$2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=0\ \text{(јер је } \frac{\alpha+\beta}{2}<\frac{\pi}{2} \text{ и } \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\neq 0)$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{\alpha-\beta}{2}=\cos\frac{\gamma}{2}\ \text{(јер } \sin\frac{\alpha+\beta}{2}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\gamma}{2}\right)=\cos\frac{\gamma}{2}.)$$

$$\Leftrightarrow \alpha-\beta=\pm\gamma\ \text{(јер су } \frac{\alpha-\beta}{2} \text{ и } \frac{\gamma}{2} \text{ оштри углови)}$$

$\Leftrightarrow \alpha=\dfrac{\pi}{2}\ \vee\ \beta=\dfrac{\pi}{2}$. Троугао је правоугли

в) Помножимо дату једнакост са 2 и применимо формулу (37):

$$1-\cos 2\alpha+1-\cos 2\beta+2(1-\cos^2\gamma)=4$$

$\Leftrightarrow 2\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)+2\cos^2(\alpha+\beta)=0$ (јер је $\cos\gamma=-\cos(\alpha+\beta)$)

$\Leftrightarrow 2\cos(\alpha+\beta)(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta))=0$

$\Leftrightarrow \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma=0\Leftrightarrow(\cos\alpha=0\ \vee\ \cos\beta=0\ \vee\ \cos\gamma=0)$, што значи да је један од углова α, β, γ прав.

116. *а)* Како је $\gamma=\pi-(\alpha+\beta)$ и $\cos\gamma=-\cos(\alpha+\beta)$, то ћемо имати:

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=\cos\alpha+\cos\beta-\cos(\alpha+\beta)-1-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=$$

$$=\frac{3}{2}-2\left(\left(2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}-\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2+\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\leq\frac{3}{2},$$

јер је израз у великој загради увек ≥ 0, као збир квадрата. (Користили смо резултат из претходног задатка под *а)*.)

б) Троугао има бар два оштра угла. Нека су то α и β. Због тога је $0<\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}\leq 1$, па је:

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\sin\gamma\leq$$

$\leq 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}+\sin\gamma = 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}+\sin\gamma+\sin 60^o-\sin 60^o =$
$= 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}+2\sin\dfrac{\gamma+60^o}{2}\cos\dfrac{\gamma-60^o}{2}-\sin 60^o$. Због $\left|\dfrac{\gamma-60^o}{2}\right| < 90^o$, је $0<\cos\dfrac{\gamma-60^o}{2}\leq 1$, и $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma \leq 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}+2\sin\dfrac{\gamma+60^o}{2}-\sin 60^o =$
$= 2\sin\dfrac{180^o-\gamma}{2}+2\sin\dfrac{\gamma+60^o}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 4\sin 60^o\cos\dfrac{60^o-\gamma}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\leq 4\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2} =$
$= \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$. $\left(\text{Важи } \cos\dfrac{60^o-\gamma}{2}=\cos\dfrac{\gamma-60^o}{2}\right)$.

в) Према решењу из претходног задатка (115 *задатак* под *в*)), можемо добити: $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma = 2+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$. Ако су сви углови троугла оштри, онда је $\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma > 0$, а ако је један туп, онда је $\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma < 0$. Отуда следи тражени закључак.

117. *а)* Изразимо $\sin 2x$ и $\sin 3x$ преко $\sin x$ и $\cos x$ и добијемо: $2\sin x\cos x + 3\sin x - 4\sin^3 x = 3\sin x$, а одавде: $2\sin x(\cos x - 2\sin^2 x) = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (\sin x = 0 \ \vee \ \cos x - 2(1-\cos^2 x) = 0)$. Из $\sin x = 0$ је $x_1 = k\pi, \quad k\in Z$. Из $2\cos^2 x + \cos x - 2 = 0$ је $\cos x = \dfrac{-1+\sqrt{17}}{4}$ $\left(\cos x \neq \dfrac{-1-\sqrt{17}}{4} < -1\right)$, па је $x_{2,\,3} = \pm\arccos\dfrac{-1+\sqrt{17}}{4}+2m\pi, \quad m\in Z$.

б) $\sqrt{2}\left(\sin x\cos\dfrac{\pi}{4}-\sin\dfrac{\pi}{4}\cos x\right) = \sin^2 x+\cos^2 x - 2\sin x\cos x$, односно $\sin x - \cos x = (\sin x-\cos x)^2$, или $(\sin x-\cos x)(1-\sin x+\cos x) = 0$. Дакле: $\sin x - \cos x = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} x = 1 \Rightarrow x_1 = \dfrac{\pi}{4}+k\pi, \quad k\in Z$. Остала решења даје услов $1-\sin x+\cos x = 0 \Rightarrow \sin x - \cos x = 1$. Одавде је:
$x_2 = \dfrac{\pi}{2}+2m\pi\ , \quad x_3 = \pi+2n\pi, \quad m, n\in Z.$

в) Стављајући $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ и $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = \dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}$, $x \neq \dfrac{k\pi}{2}$, $k\in Z$, на десној страни једнакости, после сређивања добијемо: $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = \operatorname{tg} x$, одакле је $\operatorname{ctg} x = 0$. Дакле, једначина нема решења.

г) Уочимо да је $\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-x\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+x\right) = \dfrac{1}{2}\left(\cos 2x+\dfrac{1}{2}\right)$, па лева страна једнакости прелази у: $4\cos 3x(\sin x\cos 2x + \dfrac{1}{2}\sin x) = 4\cos 3x\cdot\dfrac{1}{2}\sin 3x =$ $= \sin 6x$. Сада из $\sin 6x = 1$ добијамо: $x = \dfrac{\pi}{12}+k\dfrac{\pi}{3}, \quad k\in Z$.

д) $\dfrac{1-\cos 2x^2}{2}+\dfrac{1-\cos 4x^2}{2} = \dfrac{1-\cos 6x^2}{2}+\dfrac{1-\cos 8x^2}{2}$. Даље применом формула (41), добијемо: $2\cos x^2\sin 2x^2\sin 5x^2 = 0$. Решења су:

$x = \pm\sqrt{\dfrac{2k+1}{2}\pi} \ \vee \ x = \pm\sqrt{\dfrac{n\pi}{5}}, \quad k, \ n \in Z.$

ђ) $(\sin x + \sin 3x) + \sin 2x = 0$

$\Leftrightarrow 2\sin 2x\cos x + \sin 2x = 0 \Leftrightarrow \sin 2x(\cos x + \frac{1}{2}) = 0$

Решења су: $x_1 = k\dfrac{\pi}{2}$, $x_2 = \dfrac{2\pi}{3} + 2m\pi$, $x_3 = -\dfrac{2\pi}{3} + 2n\pi$, $\quad k, \ m, \ n \in Z.$

е) $\operatorname{arctg} x = \dfrac{\pi}{4} - 2\operatorname{arctg}\dfrac{1}{10}$, а одавде је $x = \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} - 2\operatorname{arctg}\dfrac{1}{10}\right) =$

$= \dfrac{1 - \operatorname{tg}\left(2\operatorname{arctg}\dfrac{1}{10}\right)}{1 + \operatorname{tg}\left(2\operatorname{arctg}\dfrac{1}{10}\right)}$. Означимо $\alpha = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{10}$. Одавде је $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{10}$, па је

$\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha} = \dfrac{\frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{100}} = \dfrac{20}{99}$. Дакле: $x = \dfrac{1 - \frac{20}{99}}{1 + \frac{20}{99}} = \dfrac{79}{119}$.

ж) Ставимо: $\alpha = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{1-x} \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{1-x}$ и $\beta = \operatorname{arcctg}\dfrac{1}{1+x} \Rightarrow$

$\Rightarrow \operatorname{ctg}\beta = \dfrac{1}{1+x} \Rightarrow \operatorname{tg}\beta = (1+x)$. Сада из $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{12}$, добијамо:

$\dfrac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} = 2 - \sqrt{3}$, односно $\dfrac{\frac{1}{1-x} - (1+x)}{1 + \frac{1+x}{1-x}} = 2 - \sqrt{3}$. Одавде излази:

$\dfrac{x^2}{2} = 2 - \sqrt{3} \Rightarrow x^2 = 4 - 2\sqrt{3} = (\sqrt{3} - 1)^2 \Rightarrow x_1 = \sqrt{3} - 1, \quad x_2 = 1 - \sqrt{3}.$

з) Ставимо: $\log_{\sin x}\cos x = \dfrac{1}{\log_{\cos x}\sin x}$. Сменом $\log_{\cos x}\sin x = t$, добијамо једначину: $(t-1)^2 = 0$. Одавде је $t = 1$, тј. $\log_{\cos x}\sin x = 1$. Значи: $\sin x = \cos x$. Решење ове једначине, према задатку под *б)*, било би: $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in Z$. Међутим, како због особина логаритама не може бити $\sin x < 0$, ни $\cos x < 0$, не можемо узети у обзир x из трећег квадранта. Према томе: $x = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in Z$.

и) Како је $0.2 = \dfrac{1}{5}$, то је $0.2^{-2} = 25$. Према особини (26) логаритама, можемо написати: $25^{\log_{25}(\sin^2 x + 5\sin x\cos x + 5)^{-2}} = \dfrac{1}{9}$. Одавде је $(\sin^2 x + 5\sin x\cos x + 5)^{-2} = \dfrac{1}{9}$, односно $\sin^2 x + 5\sin x\cos x + 5 = 3$, или $\sin^2 x + 5\sin x\cos x + 5 = -3$. Поступајући као у *примеру* 47, добијамо из прве једначине: $x_1 = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi, \quad x_2 = -\operatorname{arctg}\dfrac{2}{3} + m\pi, \quad k, \ m \in Z$. Друга једначина нема решења.

ј) Логаритмујемо за основу 10, па је: $(2\cos 3x + 4\cos x - 1)\log\cos 2x = -\log\cos 2x$, односно: $2\log\cos 2x(\cos 3x + 2\cos x) = 0$. Ако је $\log\cos 2x = 0$, тада је $\cos 2x = 1$, па је $x_1 = k\pi,\quad k \in Z$. Остала решења добијамо из $\cos 3x + 2\cos x = 0$, која се трансформише у $\cos x(4\cos^2 x - 1) = 0$. Решења су: $x_2 = \dfrac{\pi}{2} + m\pi$, затим $x_{3,4} = \pm\dfrac{\pi}{3} + n\pi,\ m,\ n, \in Z$.

к) Имамо: $-16 + 0\cdot i = 16(\cos\pi + i\sin\pi)$, па је $z^4 = 16(\cos\pi + i\sin\pi)$, а одавде: $z = 2\left(\cos\dfrac{\pi+2k\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi+2k\pi}{4}\right)$, $k \in \{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$. Решења су: $z_0 = \sqrt{2} + i\sqrt{2},\ \ z_1 = -\sqrt{2} + i\sqrt{2},\ \ z_2 = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$ и $z_3 = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$.

л) $z^3 = \dfrac{-5+2i}{2+5i} = \dfrac{(-5+2i)(2-5i)}{(2+5i)(2-5i)} = i = 0 + i = \cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}$, па је $z = \cos\dfrac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3} + i\sin\dfrac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}$, $k \in \{0,\ 1,\ 2\}$. Решења су: $z_0 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$, $z_1 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$ и $z_2 = -i$.

љ) $z^3 = 1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$, па је
$$z = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3} + i\sin\frac{-\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3}\right),\ k \in \{0,\ 1,\ 2\}.$$ Решења су:
$$z_0 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} - i\sin\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt[6]{2}}{2}(\sqrt{2+\sqrt{3}} + i\sqrt{2-\sqrt{3}}),$$
$$z_1 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt[6]{2}}{2}(-\sqrt{2-\sqrt{3}} + i\sqrt{2+\sqrt{3}}),$$
$$z_2 = \frac{\sqrt[6]{2}}{2}(-\sqrt{2} - i\sqrt{2}).$$

м) $(-1+i)^2 = 1 - 2i + i^2 = -2i$, па је $(-1+i)^8 = (-2i)^4 = 16$. Затим:
$$(-1+i\sqrt{3})^{10} = 2^{10}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)^{10} = 2^{10}\left(\cos\frac{20\pi}{3} + i\sin\frac{20\pi}{3}\right) =$$
$$= 2^{10}\left(\cos\left(6\pi + \frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(6\pi + \frac{2\pi}{3}\right)\right) = 2^{10}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right).$$ Дакле:
$$z^2 = 64\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right),\quad \text{па је}\quad z = 8\left(\cos\frac{\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{2} + i\sin\frac{\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{2}\right),$$
$k \in \{0,\ 1\}$. Решења су: $z_0 = 8\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right) = 4 + 4i\sqrt{3}$ и
$$z_1 = 8\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right) = -4 - 4i\sqrt{3}.$$

н) Сређивањем добијамо да је израз у загради једнак $1 + i$. Даље је $1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$, па је $z^3 = \sqrt{2^{11}}\left(\cos\dfrac{11\pi}{4} + i\sin\dfrac{11\pi}{4}\right)$. Сада

коренујемо и добијемо: $z = 2\sqrt[6]{2^5}\left(\cos\dfrac{\frac{11\pi}{4}+2k\pi}{3} + i\sin\dfrac{\frac{11\pi}{4}+2k\pi}{3}\right)$, $k \in \{0,\ 1,\ 2\}$. Решења су: $z_0 = 2\sqrt[6]{32}\left(\cos\dfrac{11\pi}{12} + i\sin\dfrac{11\pi}{12}\right) =$
$= 2\sqrt[6]{32}\left(-\cos\dfrac{\pi}{12} + i\sin\dfrac{\pi}{12}\right) = \sqrt[6]{32}(-\sqrt{2+\sqrt{3}} + i\sqrt{2-\sqrt{3}})$,
$z_1 = 2\sqrt[6]{32}\left(\cos\dfrac{19\pi}{12} + i\sin\dfrac{19\pi}{12}\right) = 2\sqrt[6]{32}\left(\sin\dfrac{\pi}{12} - i\cos\dfrac{\pi}{12}\right) =$
$= \sqrt[6]{32}(\sqrt{2-\sqrt{3}} - i\sqrt{2+\sqrt{3}})$, $z_2 = 2\sqrt[6]{32}\left(\cos\dfrac{9\pi}{4} + i\sin\dfrac{9\pi}{4}\right) =$
$= \sqrt[6]{32}(\sqrt{2} + i\sqrt{2}) = \sqrt[6]{2^8}(1+i) = 2\sqrt[3]{2}(1+i)$.

118. *а)* Сменимо: $\sin x = t$. Неједначина $2t^2 - 3t + 1 < 0$ је задовољена за $\dfrac{1}{2} < t < 1$, па је $\dfrac{1}{2} < \sin x < 1$. Решење је: $\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$, као и $\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi,\quad k \in Z$.

б) Ослобађањем од двоструког аргумента, лева страна неједначине се трансформише у $\dfrac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x}$, $\sin x \neq 0$ и $\sin x \neq \cos x$, тј. $x \neq k\pi$ и $x \neq \dfrac{\pi}{4} + k\pi$, па је дата неједначина еквивалентна са $\cos^2 x - \sin^2 x > 0$. Решења су: $-\dfrac{\pi}{4} + k\pi < x < k\pi,\ k\pi < x < k\pi + \dfrac{\pi}{4},\quad k \in Z$.

в) Применимо формулу (41) и добијемо: $\sin x \sin 3x < 0$. Како је $\sin x > 0$ за $x \in (0,\ \pi)$, а $\sin 3x > 0$ за $\dfrac{2k\pi}{3} < x < \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in Z$, решење дате неједначине је $\dfrac{\pi}{3} + k\pi < x < \dfrac{2\pi}{3} + k\pi,\ k \in Z$. Решава се лако и квадратном неједначином по $\cos 2x$. (Ставимо $\cos 4x = 2\cos^2 2x - 1$.)

г) Како је $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x} + \dfrac{\cos x}{\sin x} = \dfrac{2}{\sin 2x}$, дата неједнакост прелази у $|\sin 2x| \geq \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \left(\sin 2x \leq -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \vee \sin 2x \geq \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Решења су:
$x \in \left[\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{k\pi}{2}\right]$.

д) Како је $\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$, дата неједначина прелази у $\arcsin x >$ $> \dfrac{\pi}{2} - \arcsin x$, односно $\arcsin x > \dfrac{\pi}{4}$. Одавде излази: $x > \sin\dfrac{\pi}{4}$, односно $x > \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Међутим, $|x| \leq 1$, па је решење: $\dfrac{\sqrt{2}}{2} < x \leq 1$.

ђ) Дата неједначина је задовољена за $0 < \cos 2x + 2\sin x + 1 < 2$. Заменимо: $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$, и после смене $\sin x = t$, добићемо $0 < -2t^2+3t+2 < 2$. Из $-2t^2+3t+2>0$ добијамо $-\frac{1}{2} < t < 2$, а из $-2t^2+3t+2 < 2$ је $t < 0$ или $t > \frac{3}{2}$. Заједничко решење је $-\frac{1}{2} < t < 0$, тј. $-\frac{1}{2} < \sin x < 0$. Решење полазне неједначине је $-\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < 2k\pi$, или $\pi + 2m\pi < x < \frac{7\pi}{6} + 2m\pi$, $k,\ m \in Z$.

е) Према слици 40, $\arcsin a > 0$ за $0 < a \le 1$. Према томе, важи $0 < \log_2 x \le 1$, па је $1 < x \le 2$.

ж) Стављајући $\cos^2 \pi x = 1 - \sin^2 \pi x$, добијамо неједначину: $4^{\sin^2 \pi x} + 3 \cdot 4 \cdot 4^{-\sin^2 \pi x} \le 8$, па за $4^{\sin^2 \pi x} = t > 0$, имамо: $t^2 - 8t + 12 \le 0$. Ова неједначина је задовољена за $2 \le t \le 6$. Због $0 \le \sin^2 \pi x \le 1$, увек је $t \le 6$. Решење даје неједначина $2 \le t$, односно: $4^{\frac{1}{2}} \le 4^{\sin^2 \pi x}$, односно $\sin^2 \pi x \ge \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1 - \cos 2\pi x}{2} \ge \frac{1}{2}$. Одавде добијамо: $\cos 2\pi x \le 0$, па је: $\frac{\pi}{2} + 2k\pi \le 2\pi x \le \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$. Решење је $\frac{1}{4} + k \le x \le \frac{3}{4} + k$, $k \in Z$.

119. *а)* Ставимо $\alpha = \arcsin\frac{5}{13}$, па је $\sin\alpha = \frac{5}{13}$, итд, слично *примеру* 56. Резултат је: $\frac{1}{5}$.

б) Видети *пример* 56. Резултат је $-\frac{\pi}{4}$.

в) Решење је: $\frac{7}{24}$.

г) Ставимо $\alpha = \arccos a \Rightarrow a = \cos\alpha$, па је $0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$, због $0 \le a \le 1$. Нека је $\beta = \arccos(2a^2 - 1)$. Одавде је $\cos\beta = 2a^2 - 1$, па је $0 \le \beta \le \pi$. Даље је: $\cos\beta = 2\cos^2\alpha - 1 = \cos^2\alpha - (1 - \cos^2\alpha) = \cos 2\alpha$, па је $\beta = 2\alpha$. Отуда добијамо: $2\arccos a - \arccos(2a^2 - 1) = 2\alpha - 2\alpha = 0$.

д) $\sqrt{2^9}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)^9 = \sqrt{2^9}(\cos(-3\pi) + i\sin(-3\pi)) = -16\sqrt{2}$.

ђ) Слично *примеру* 53. *б)*. Решење је $\cos 4\alpha + i\sin 4\alpha$.

е) $\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)^{12} = \left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^{12}\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right)^{12} =$
$= (2-\sqrt{3})^6(\cos 5\pi + i\sin 5\pi) = -(2-\sqrt{3})^6$.

ж) Слично *примеру* 55. $z = \sqrt[6]{8\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)} =$

$$= \sqrt[6]{8}\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{6} + i\sin\frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{6}\right),$$ $k \in \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$. Решења су:

$z_0=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=1+i,\ \ z_1=\frac{1-\sqrt{3}}{2}+i\frac{\sqrt{3}-1}{2},$
$z_2=-\frac{\sqrt{3}+1}{2}+i\frac{\sqrt{3}-1}{2},\ \ z_3=-1-i,\ \ z_4=\frac{\sqrt{3}-1}{2}+i\frac{1-\sqrt{3}}{2},$
$z_5=\frac{\sqrt{3}+1}{2}+i\frac{1-\sqrt{3}}{2}.$

з) $z=\sqrt[4]{16\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)}$, итд. Решења су: $z_0=1+i\sqrt{3}$, $z_1=-\sqrt{3}+i,\ \ z_2=-1-i\sqrt{3},\ \ z_3=\sqrt{3}-i.$

и) $(\cos\alpha+i\sin\alpha)^3=\cos 3\alpha+i\sin 3\alpha$, по Муавровој формули, а $(\cos\alpha+i\sin\alpha)^3=\cos^3\alpha+3\cos^2\alpha\cdot i\sin\alpha+3\cos\alpha\cdot i^2\sin^2\alpha+i^3\sin^3\alpha$, по формули за куб бинома. Средимо и изједначимо реалне и имагинарне делове комплексних бројева (према првој од формула (4)).

$\cos 3\alpha+i\sin 3\alpha=(\cos^3\alpha-3\cos\alpha\sin^2\alpha)+i(3\cos^2\alpha\sin\alpha-\sin^3\alpha)$
$\Leftrightarrow(\cos 3\alpha=\cos^3\alpha-3\cos\alpha\sin^2\alpha)\ \wedge\ (\sin 3\alpha=3\sin\alpha\cos^2\alpha-\sin^3\alpha).$

Даље рачунамо:
$\cos 3\alpha=\cos^3\alpha-3\cos\alpha(1-\cos^2\alpha)=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha.$
$\sin 3\alpha=3\sin\alpha(1-\sin^2\alpha)-\sin^3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha.$

ј) Слично претходном задатку, пођемо од $(\cos\alpha+i\sin\alpha)^4$. Решења су: $\cos 4\alpha=8\cos^4\alpha-6\cos^2\alpha,\ \ \sin 4\alpha=4\sin\alpha\cos^3\alpha-4\sin^3\alpha\cos\alpha.$

120. *а)* Из $P=\frac{1}{2}ab\sin\gamma=\frac{1}{4}(a^2+b^2)$, следи да је $\sin\gamma=\frac{a^2+b^2}{2ab}=$ $=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\geq\frac{1}{2}\cdot 2=1$. (У ПРВОЈ ГЛАВИ смо доказали да је $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2$.) Произлази да је $\sin\gamma\geq 1$, за шта постоји само једна могућност: $\sin\gamma=1$, тј. $\gamma=\frac{\pi}{2}$. Пошто је тада $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=2$, следи и да је $a=b$, па се ради о правоуглом једнакокраком троуглу: $\alpha=\beta=\frac{\pi}{4}$.

б) Заменимо $\sin^2 x=\frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$ и добијемо:

$$\frac{1}{\sin^2 x(1-\operatorname{tg}x)}=\frac{1+\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg}^2 x(1-\operatorname{tg}x)}=\frac{1+\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg}x}\cdot\frac{1}{\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}^2 x}=$$
$$=\left(\frac{1}{\operatorname{tg}x}+\operatorname{tg}x\right)\cdot\frac{1}{\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-\operatorname{tg}x\right)^2}>2\cdot\frac{1}{\frac{1}{4}}=8.$$
(закључили смо да је $\frac{1}{\operatorname{tg}x}+\operatorname{tg}x>2$, слично *задатку* под *а)* и $\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-\operatorname{tg}x\right)^2\leq\frac{1}{4}$, јер је $0<\operatorname{tg}x<1$.)

в) Означимо $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}=\alpha$ и $\operatorname{arctg}\frac{1}{3}=\beta$, и даље рачунамо као у *примеру* 57.

г) Слично *примеру* 57. под *б)*.

д) Као претходни задатак.

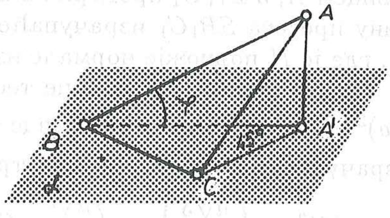
ђ) Из $z+\dfrac{1}{z}=2\cos\alpha$, добијамо: $z^2-2z\cos\alpha+1=0$, па је $z=\cos\alpha\pm$ $\pm\sqrt{\cos^2\alpha-1}=\cos\alpha\pm\sqrt{-\sin^2 x}=\cos\alpha\pm i\sin\alpha$. Ако је $z=\cos\alpha+i\sin\alpha$, тада је $z^n+\dfrac{1}{z^n}=z^n+z^{-n}=(\cos\alpha+i\sin\alpha)^n+(\cos\alpha+i\sin\alpha)^{-n}=\cos n\alpha+i\sin n\alpha+$ $+\cos(-n\alpha)+i\sin(-n\alpha)=\cos n\alpha+i\sin n\alpha+\cos n\alpha-i\sin n\alpha=2\cos n\alpha$. Слично поступамо и у случају кад је $z=\cos\alpha-i\sin\alpha=\cos(-\alpha)+i\sin(-\alpha)$.

е) Ако је $z=\overline{z}$, онда је z реалан број. Доказаћемо да је код нас тај случај. Користићемо и једнакост: $z\cdot\overline{z}=|\,z\,|^2$. Примењено на наш задатак, даје: $z_1\cdot\overline{z_1}=z_2\cdot\overline{z_2}=1$. Дакле: $z=\dfrac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}=\dfrac{(z_1+z_2)\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}}{(1+z_1z_2)\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}}=$ $\dfrac{z_1\overline{z_1}\,\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2\overline{z_2}}{\overline{z_1}\,\overline{z_2}+z_1\overline{z_1}\cdot z_2\overline{z_2}}=\dfrac{\overline{z_2}+\overline{z_1}}{\overline{z_1}\,\overline{z_2}+1}=\overline{z}$.

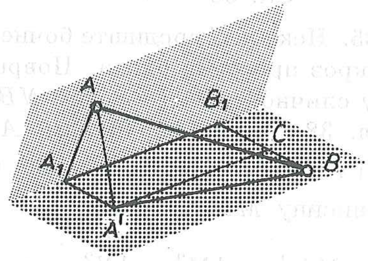
ж) Уочимо да $\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}=\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}$ и $\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}=\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$, па је $f(n)=\cos\dfrac{n\pi}{4}+i\sin\dfrac{n\pi}{4}+\cos\left(-\dfrac{n\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\dfrac{n\pi}{4}\right)=\cos\dfrac{n\pi}{4}+i\sin\dfrac{n\pi}{4}+$ $+\cos\dfrac{n\pi}{4}-i\sin\dfrac{n\pi}{4}=2\cos\dfrac{n\pi}{4}$. Сада имамо: $f(n+4)+f(n)=2\cos\dfrac{(n+4)\pi}{4}+$ $+2\cos\dfrac{n\pi}{4}=2\cos\left(\pi+\dfrac{n\pi}{4}\right)+2\cos\dfrac{n\pi}{4}=-2\cos\dfrac{n\pi}{4}+2\cos\dfrac{n\pi}{4}=0$.

121. Претпоставимо да полиедар има s страна и да свака страна има n_i страница. Пошто је свака ивица заједничка страница за две стране, као што смо видели при доказу Ојлерове теореме, ако је i укупан број ивица, важи једнакост: $n_1+n_2+\cdots+n_s=2i$. Ова једнакост није могућа ако је сваки од бројева n_i непаран и има их непаран број ($s=2k-1$), јер би у том случају збир на левој страни једнакости био непаран.

122. Нека је A' нормална пројекција тачке A на раван, сл. 34. Тада је $AA'=\dfrac{AC}{\sqrt{2}}$. Како је $AB=AC\sqrt{2}$, то је $\sin\varphi=\dfrac{AA'}{AB}=\dfrac{1}{2}$, па је тражени нагиб $\varphi=30^o$.



Сл. 34



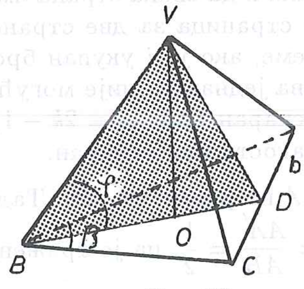
Сл. 35

123. Означимо са A' пројекцију тачке A на другу страну диедра, сл. 35. Тада је $< AA'A_1=90^o$ и $< A'A_1B_1=90^o$, а $< AA_1A'=\dfrac{\pi}{3}$.

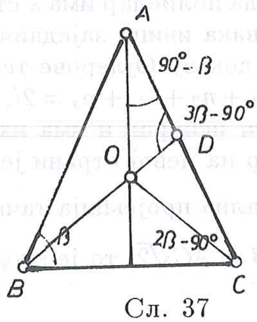
Због тога је $A_1A' = \frac{1}{2}AA_1 = \frac{3}{2}$ и $AA' = \frac{3\sqrt{3}}{2}$. Најпре израчунамо $A'B$ из $A'B^2 = A'C^2 + BC^2 = 6^2 + \left(4 - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{169}{4}$. Одавде добијамо $AB^2 = = (AA')^2 + A'B^2 = \frac{27}{4} + \frac{169}{4} = 49$, па је $AB = 7$.

124. Нека је VO висина пирамиде, сл. 36. Површина пресека је $P = \frac{1}{2}BD \cdot VO$. Из троугла BOV налазимо: $VO = BO \cdot \operatorname{tg}\varphi$. Тачка O је центар описаног круга троугла ABC (види *пример* 6), па је $2BO = \frac{b}{\sin\beta}$ (*одељак* 2.17). Дакле: $VO = \frac{b\operatorname{tg}\varphi}{2\sin\beta}$. Према сл. 37 наћићемо и BD. Троуглови OAC и OBC су једнакокраки, па је: $\sphericalangle BAC = 180^o - 2\beta$, затим $\sphericalangle ACO = \sphericalangle CAO = \frac{1}{2}\sphericalangle BAC = 90^o - \beta$, па је $\sphericalangle OBC = \sphericalangle BCO = 2\beta - 90^o$. Сада је $\sphericalangle ADB = \sphericalangle CBD + \sphericalangle BCD = 3\beta - 90^o$, као спољашњи у троуглу BCD. Коначно, применимо синусну теорему на троугао ABD, и добијемо: $\frac{BD}{\sin(180^o - 2\beta)} = \frac{AB}{\sin(3\beta - 90^o)}$. Одавде је $BD = -\frac{b\sin 2\beta}{\cos 3\beta}$.

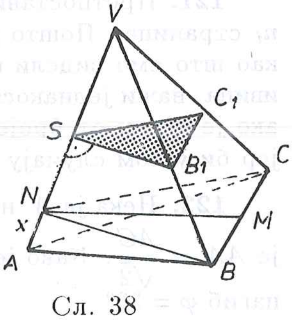
Према томе: $P = -\frac{b^2\cos\beta\operatorname{tg}\varphi}{2\cos 3\beta}$.



Сл. 36



Сл. 37

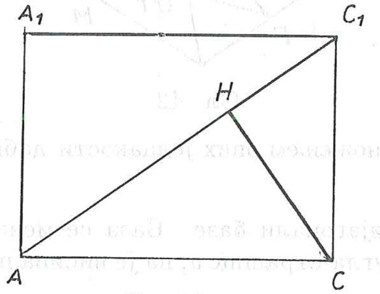


Сл. 38

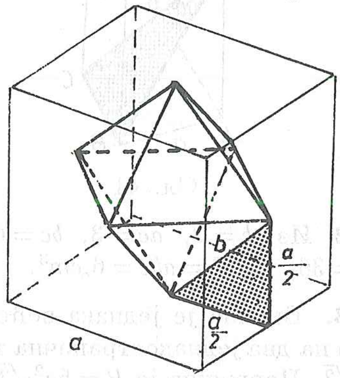
125. Нека је S средиште бочне ивице VA, и B_1, C_1 продори ивица VB и VC кроз пресечну раван. Површину пресека SB_1C_1 израчунаћемо на основу сличности са троуглом NBC, где је N подножје нормале из B на VA, сл. 38. Најпре израчунамо $AN = x$, уз помоћ Питагорине теореме: $VB^2 - VN^2 = AB^2 - AN^2$, односно: $(2a)^2 - (2a - x)^2 = a^2 - x^2$. Одавде $x = \frac{a}{4}$. Сада висину MN троугла BCN израчунавамо из правоуглог троугла AMN: $MN^2 = AM^2 - AN^2$, односно $MN^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{4}\right)^2$. Одавде је $MN = \frac{a\sqrt{11}}{4}$. Површина троугла BCN је: $P_1 = \frac{1}{2}BC \cdot MN = \frac{a^2\sqrt{11}}{8}$. Тражену површину P добијамо из пропорције: $P : P_1 = VS^2 : VN^2$.

Одавде је $P = P_1 \cdot a^2 : \left(\frac{7}{4}a\right)^2 = \frac{16}{49}P_1 = \frac{2a^2\sqrt{11}}{49}$.

126. Нека се тражи одстојање темена C од дијагонале AC_1. Уочимо одговарајући дијагонални пресек ACC_1A_1, сл. 39. Његова површина је $AC \cdot CC_1 = a^2\sqrt{2}$. Исту површину изражавамо као $2 \cdot \frac{1}{2}AC_1 \cdot CH = a\sqrt{3} \cdot CH$, где је CH тражено одстојање. Сада из $a\sqrt{3} \cdot CH = a^2\sqrt{2}$, добијамо: $CH = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.



Сл. 39



Сл. 40

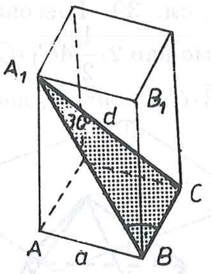
127. Према сл. 40, страницу b октаедра израчунавамо из осенченог троугла: $b = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Површина октаедра је $P = 8 \cdot \frac{b^2\sqrt{3}}{4} = a^2\sqrt{3}$, а запремина је $V = \frac{2}{3}b^2 \cdot H$, где је $H = \frac{a}{2}$. Дакле $V = \frac{a^3}{6}$.

128. Видети претходни задатак. Дата пирамида је половина правилног октаедра: $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$.

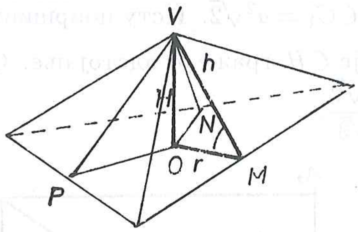
129. Унутрашњи углови троугла A_1BC су $\sphericalangle A_1BC = 90^o$, $\sphericalangle BA_1C = 30^o$ и $\sphericalangle A_1CB = 60^o$ и мања катета $BC = a$, сл. 41. То је, дакле, половина једнакостраничног троугла странице $2a$, па је $A_1B = a\sqrt{3}$. Сада из правоуглог троугла AA_1B израчунамо висину AA_1 квадра $AA_1 = a\sqrt{2}$, па је $V = a^3\sqrt{2}$.

130. Дијагонала квадра са дијагоналама страна образује правоугле троуглове (као што је на сл. 41 троугао CBA_1) из којих израчунавамо основне ивице: $a = 3$ cm, $b = 4$ cm. Висину, према сл. 41, израчунавамо нпр. из троугла ABA_1: $H = 12$ cm. Запремина је 144 cm^3.

131. Из датих услова добијамо систем једначина: $abc = 2080 \wedge \wedge\, ab + ac + bc = 498 \wedge a + b = 29$. Из прве једначине је $ab = \frac{2080}{c}$, па из друге једначине: $ab + c(a+b) = 498$, добијамо $\frac{2080}{c} + 29c = 498$. Ово је квадратна једначина која даје решења: $c_1 = 10$, $c_2 = \frac{208}{29}$. За $c = 10$ cm, основне ивице су 13 cm и 16 cm, а за $c = \dfrac{208}{29}$ cm систем једначина не даје реална решења за a и b.



Сл. 41



Сл. 42

132. Из $ab = 2$, $ac = 3$, $bc = 6$, множењем ових једнакости добијамо $a^2b^2c^2 = 36$, тј. $V = abc = 6\ cm^3$.

133. Висина је једнака већој дијагонали базе. База се може разложити на два једнакостранична троугла странице a, па је висина призме $H = a\sqrt{3}$. Површина је $P = 5a^2\sqrt{3}$.

134. Из $V = B \cdot H$, добијамо $B = \dfrac{24}{5}\ cm^2$. Затим из $aH : bH : cH = 17 : 17 : 16$, добијамо $a = 17k$, $b = 17k$, $c = 16k$. База је једнакокраки троугао, којем лако налазимо висину: $h_c = 15k$. Сада из $B = 120k^2 = \dfrac{24}{5}$, налазимо да је $k = \dfrac{1}{5}$, па су основне ивице: $a = \dfrac{17}{5}\ cm$, $b = \dfrac{17}{5}\ cm$, $c = \dfrac{16}{5}\ cm$.

135. Пресек и база су слични многоуглови, а коефицијент сличности је размера висина дате пирамиде и одсеченог дела који садржи врх. Ако са x означимо удаљеност пресечне равни од базе, добијамо пропорцију $512 : 50 = 16^2 : (16 - x)^2$. Одавде је $x = 11\ cm$.

136. Нека је VO висина пирамиде, VM бочна висина, OM полупречник уписаног круга, сл. 42. Према услову задатка је $\sphericalangle VMO = 45^o$. Како је $r = \dfrac{1}{3}\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$, то из правоуглог троугла MVO добијамо $H = r = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$ и $h = r\sqrt{2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}$. Према томе: $P = \dfrac{a^2}{4}(\sqrt{3} + \sqrt{6})$ и $V = \dfrac{a^3}{24}$.

137. Нека су M, N, P подножје бочних висина VM, VN, VP. Правоугли троуглови VOM, VON, VOP су подударни (заједничка катета VO и једнаки углови), па је $OM = ON = OP$. На основу теореме обрнуте теореми о три нормале, дужи OM, ON, OP су нормалне на одговарајуће основне ивице, па су то полупречници уписаног круга основе.

Израчунамо хипотенузу основе $c = 10\ cm$, па је $r = s - c = 2\ cm$. У правоуглом троуглу VOM, сл. 42, је $\sphericalangle VMO = 30^o$, па је $r = \frac{h\sqrt{3}}{2} = H\sqrt{3}$. Одатле је $h = \frac{4}{\sqrt{3}}$ и $H = \frac{2}{\sqrt{3}}$. (Упореди са троуглом A_1BC из *задатка* 129, сл. 41.). Коначно добијамо: $P = (24 + 16\sqrt{3})\ cm^2$ и $V = \frac{16\sqrt{3}}{3}\ cm^3$.

138. Из омотача добијамо бочну висину: $h = 2\ cm$. Затим $H^2 = h^2 - r^2$, итд. Запремина је $V = \frac{\sqrt{47}}{24}\ cm^3$.

139. Површина је $P = 4 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = a^2\sqrt{3}$. Користећи $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, налазимо висину из $H^2 = a^2 - R^2 = \frac{6a^2}{9}$. Запремина је $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

140. Као у *примеру* 6, закључимо да је пирамида права, и слично добијамо да је $H = \frac{R}{\sqrt{3}}$, где је R полупречник круга описаног око основе. Површина основе је $B = \frac{1}{2} b \cdot h_b$, па је $R = \frac{a^2 b}{4B} = \frac{a^2}{2h_b}$. Дакле: $H = \frac{a^2}{2h_b\sqrt{3}}$ и $V = \frac{1}{3} B \cdot H = \frac{a^3 b\sqrt{3}}{36}$.

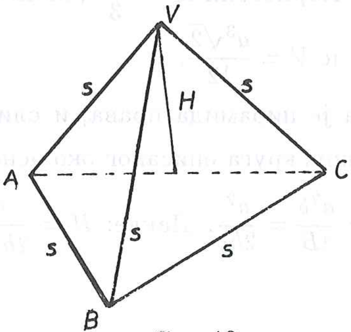
141. Дијагонални пресек је једнакокраки троугао VAC, где је V врх, AC дијагонала базе $ABCD$. Како је $AC = a\sqrt{2}$, то из $\frac{1}{2}AC \cdot H = 12$, добијамо $H = 2\sqrt{2}\ cm$. Сада је $h^2 = H^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$ и $h = \sqrt{17}$, па налазимо $P = (36 + 12\sqrt{17})\ cm^2$.

142. Узимајући троугао са катетама a и b за основу, добићемо пирамиду чија је висина c. Њена запремина је $V = \frac{1}{6}abc$.

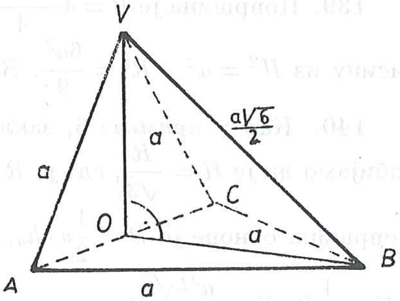
Код површине, три стране лако измеримо. То је $\frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}ac + \frac{1}{2}bc$. Четврта страна има ивице које су хипотенузе трију датих правоуглих страна. Ако ове странице означимо са m, n, p, биће $m = \sqrt{a^2 + b^2}$, $n = \sqrt{b^2 + c^2}$, $p = \sqrt{a^2 + c^2}$. Површину ове стране израчунавамо Хероновим обрасцем. Стога рачунамо: $s = \frac{1}{2}(\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{b^2 + c^2} + \sqrt{a^2 + c^2})$, $s - m = \frac{1}{2}(\sqrt{a^2 + c^2} + \sqrt{b^2 + c^2} - \sqrt{a^2 + b^2})$, $s - n = \frac{1}{2}(\sqrt{a^2 + b^2} - \sqrt{b^2 + c^2} + \sqrt{a^2 + c^2})$, $s - p = \frac{1}{2}(\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{b^2 + c^2} - \sqrt{a^2 + c^2})$. Сада имамо два производа који имају облик разлике квадрата: $s(s - m) = \frac{1}{4}\left((\sqrt{b^2 + c^2} + \sqrt{a^2 + c^2})^2 - (\sqrt{a^2 + b^2})^2\right) = \frac{1}{2}(\sqrt{(b^2 + c^2)(a^2 + c^2)} + c^2)$, $(s-$

$n)(s-p)=\frac{1}{4}\left((\sqrt{a^2+b^2})^2\right)-(\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{a^2+c^2})^2)=\frac{1}{2}(\sqrt{(b^2+c^2)(a^2+c^2)}-$ $-c^2)$. Према томе: $s(s-m)(s-n)(s-p)=\frac{1}{4}((b^2+c^2)(a^2+c^2)-c^4)=\frac{1}{4}(a^2b^2+$ $+b^2c^2+a^2c^2)$. Површина тела је $P=\frac{1}{2}(ab+bc+ac+\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2})$.

143. Две од бочних страна су једнакостранични троуглови, на сл. 43. VAB и VBC, а троугао VAC је правоугли. Њему је подударан троугао ABC, са хипотенузом $AC=s\sqrt{2}$. Дакле, имамо праву пирамиду са основом ABC. Површина је $P=\frac{s^2}{2}(\sqrt{3}+2)\ cm^2$, а запремина $V=\frac{s^3\sqrt{2}}{12}$ (видети *пример* 6).



Сл. 43



Сл. 44

144. Висина VO троугла VAC је и висина пирамиде, сл. 44, па је запремина $V=\frac{1}{3}\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a^3}{8}$. Стране VAB и VBC су подударни једнакокраки троуглови крака a и основице $\frac{a\sqrt{6}}{2}$ (хипотенуза једнакокраког правоуглог троугла VOB). Површина пирамиде је

$P=2\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}+2\cdot\frac{a^2\sqrt{15}}{8}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}(2+\sqrt{5})$.

145. Слично *задатку* 137. Полупречник уписаног круга основе је $r=3$, $H=3$ и $h=3\sqrt{2}$. Запремина пирамиде је $V=48\ cm^3$, а површина $P=48(1+\sqrt{2})\ cm^2$.

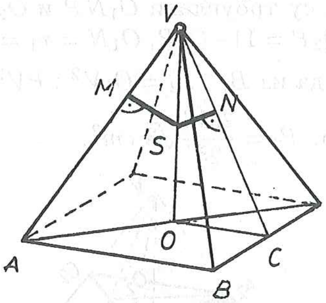
146. Троуглови VSM и VAO су слични, сл. 45, и $AO=\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Имамо пропорцију $VS:SM=VA:AO$, тј. $\frac{H}{2}:7=\sqrt{H^2+\frac{a^2}{2}}:\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Одавде после квадрирања добијамо $\frac{a^2H^2}{8}=49H^2+\frac{49a^2}{2}$, па после множења са $\frac{8}{49a^2H^2}$ биће $\frac{1}{49}=\frac{8}{a^2}+\frac{4}{H^2}$. Посматрајући сличне троуглове VSN и

VCO, водећи рачуна да је $VC = \sqrt{H^2 + \frac{a^2}{4}}$, добијамо: $\frac{1}{25} = \frac{16}{a^2} + \frac{4}{H^2}$. Из ове две једначине је $a^2 = \frac{25 \cdot 49}{3}$ и $H = 70$, па је $V = \frac{85750}{9}\ cm^3$.

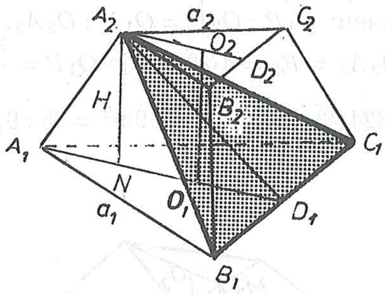
147. Видети *пример* 6: $V = \frac{c^3\sqrt{3}}{48}$.

148. Полупречник круга уписаног у основу једнак је половини бочне висине: $\frac{a\sqrt{3}}{6} = \frac{h}{2}$. Одавде је $a = h\sqrt{3}$. па је $P = \frac{9}{4}h^2\sqrt{3}$.

149. Дијагонални пресек је једнакокраки трапез са основицама $3a\sqrt{2}$ и $2a\sqrt{2}$ и оштрим углом од 45^o. Висина овог трапеза је и висина зарубљене пирамиде: $V = \frac{19}{6}a^3\sqrt{2}$.



Сл. 45



Сл. 46

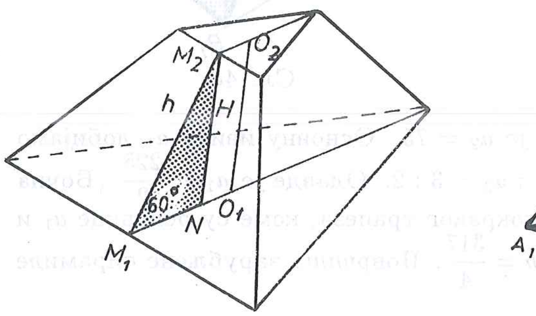
150. Дато је $B_2 = 5625$, па је $a_2 = 75$. Основну ивицу a_1 добијамо из $a_1 : a_2 = 231 : 154$, односно $a_1 : a_2 = 3 : 2$. Одавде је $a_1 = \frac{225}{2}$. Бочна висина h је једнака краку једнакокраког трапеза, коме су основице a_1 и a_2 и висина $H = 77\ cm$. Дакле: $h = \frac{317}{4}$. Површина зарубљене пирамиде је $P = 48000\ cm^2$.

151. Из $h : a_1 : a_2 = 5 : 8 : 2$, рачунамо : $h = 5k$, $a_1 = 8k$, $a_2 = 2k$. Отуда је $P = 168k^2$, а $V = 112k^3$. Из $112k^3 = 1750\ dm^3$, добијамо: $k = 2.5$, па је $P = 1050\ dm^2 = 10.5\ m^2$.

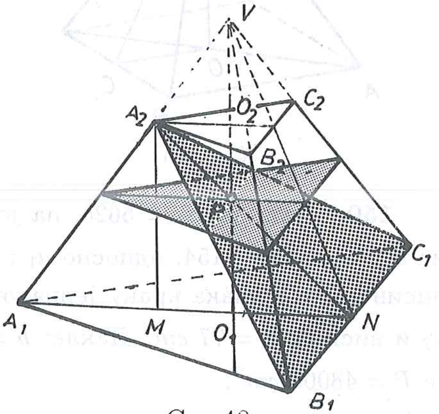
152. Ако су D_1 и D_2 средишта ивица B_1C_1 и B_2C_2, сл. 46, а N подножје нормале из A_2 на A_1D_1, тада је висина A_2D_1, пресека $A_2B_1C_1$, хипотенуза троугла A_2D_1N. Како је $A_1N = R_1 - R_2 = \frac{a_1\sqrt{3}}{3} - \frac{a_2\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$, то је $ND_1 = \frac{a_1\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$. Дуж A_2N је дата висина: $A_2H = 3$. Дакле $A_2D_1 = 6$, па је површина пресека $P = 24\ cm^2$.

153. Висину зарубљене пирамиде одредићемо из правоуглог троугла M_1M_2N, сл. 47. Најпре имамо $M_1N = r_1 - r_2 = \frac{4}{3}\sqrt{3}$, па је $H = 4\ cm$. Запремина полиедра је $V = \frac{208\sqrt{3}}{3}\ cm^3$.

154. Из датог омотача и основних ивица добијамо бочну висину $h = 13\ cm$. Затим, као у претходном задатку (видети троугао M_1M_2N на сл. 47), налазимо $H = 11\ cm$. Даље, из правоуглог троугла MNA_2, сл. 48, израчунавамо $A_2N = \sqrt{421}$, а то је висина пресека $B_1C_1A_2$. Површина тог пресека је $P_1 = 18\sqrt{421}\ cm^2$. Да бисмо израчунали површину P_2 другог пресека користићемо особине паралелних пресека. Због тога нам треба висина O_1P и висина VO_1 замишљене пирамиде, оне пирамиде од које је одсечена наша зарубљена пирамида. Нека је $VO_2 = x$. Тада важи пропорција $(x + 11) : x = 36 : 12$. Одавде је $x = 5.5\ cm$, Дуж O_1P израчунаћемо користећи се чињеницом да су троуглови O_1NP и O_2A_2P слични: $O_1P : O_2P = O_1N : O_2A_2$. Како је $O_2P = 11 - O_1P$, $O_1N = r_1 = 6\sqrt{3}$ и $O_2A_2 = R_2 = 4\sqrt{3}$, то је $O_1P = \frac{33}{5}\ cm$. Сада из $B_1 : P_2 = O_1V^2 : PV^2$, тј. из $324\sqrt{3} : P_2 = 16.5^2 : 9.9^2 = 25 : 9$, добијамо: $P_2 = \frac{2916}{25}\sqrt{3}\ cm^2$.



Сл. 47



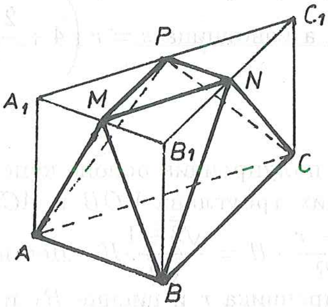
Сл. 48

155. Раван MNP у пресеку са равнима једнакокраких троуглова одређује троугао $A_1B_1C_1$, подударан троуглу ABC и на тај начин одређује правилну тространу призму, сл. 49. Њена висина је једнака висини једнакокраких троуглова: $H = \frac{a}{2}$. Наш полиедар настаје тако што се од призме $ABCA_1B_1C_1$ одсеку тростране пирамиде AA_1MP, BB_1MN и CC_1NP. Дакле: $P = \frac{a^2}{16}(5\sqrt{3} + 3\sqrt{7} + 12)\ cm^2$ и $V = \frac{3a^3}{32}\sqrt{3}\ cm^3$.

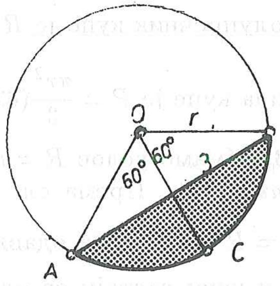
156. Тражена запремина је $V_1 = P_0 \cdot H$. Одсечак је осенчен на сл. 50. Половина пресечне тетиве је висина једнакостраничног троугла странице

r, тј. $3 = \frac{r\sqrt{3}}{2}$. Одавде је $r = 2\sqrt{3}$, па је $H = 2r = 4\sqrt{3}$. Површину одсечка добијамо из: $P_0 = \frac{1}{3}r^2\pi - \frac{r^2\sqrt{3}}{4} = 4\pi - 3\sqrt{3}$, па је $V = (16\pi\sqrt{3} - 36)\ cm^3$.

157. Базе ова три тела представљају једнакостранични троугао, описани круг и уписани круг тог троугла. Дакле, ако је r полупречник уписаног ваљка, онда је $2r$ полупречник описаног ваљка. Висина H им је заједничка. Због тога је $V_1 : V_2 = 4r^2\pi H : r^2\pi H = 4 : 1$.



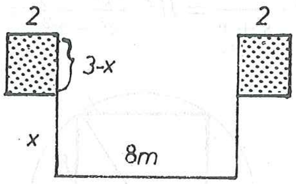
Сл. 49



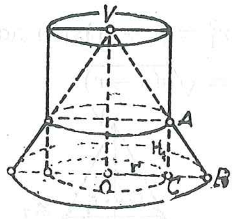
Сл. 50

158. У првом случају је $r_1 = a$, а у другом $r_2 = \frac{a}{2}$. Због тога је $V_1 : V_2 = 4 : 1$ (видети претходни задатак), а $P_1 : P_2 = 4a^2\pi : \frac{3}{2}a^2\pi = 8 : 3$.

159. Део дворишта по ком се расипа ископана земља има површину $(144 - 16\pi)\ m^2$ (шрафирано на сл. 51). Ако је $x\ m$ дубина копања, онда је дебљина насутог слоја земље $(3 - x)\ m$. Непознату x налазимо из услова да је запремина ископане земље једнака запремини насуте земље: $16\pi x = (144 - 16\pi)(3 - x)$. Одавде је $x = 3 - \frac{\pi}{3}$. За $\pi = 3.14$ је $x = 1.95\ m$.



Сл. 51



Сл. 52

160. Висина купе је $H = \frac{s}{2}$, а полупречник $r = \frac{s\sqrt{3}}{2}$. Запремина је $V = \frac{s^3}{8}\ cm^3$.

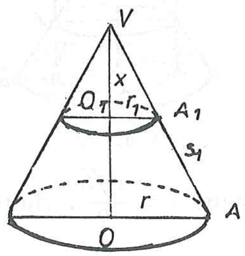
161. Из једнаких запремина, тј. из $r^2\pi H = \frac{1}{3}R^2\pi H$ имамо: $R = r\sqrt{3}$, где је r полупречник ваљка. Из једнаких површина је $2r^2\pi + 2r\pi H =$

$= 3r^2\pi + r\pi s\sqrt{3}$, тј. $s\sqrt{3} = 2H - r$. Како је $s^2 = R^2 + H^2 = 3r^2 + H^2$, заменом $s = \frac{1}{\sqrt{3}}(2H - r)$, добијамо једначину: $8r^2 + 4Hr - H^2 = 0$. Једино позитивно решење ове једначине је $r = \frac{\sqrt{3}-1}{4}H$. Коначно добијамо: $P = \frac{\pi H^2\sqrt{3}}{4}$ и $V = \frac{2-\sqrt{3}}{8}\pi H^3$.

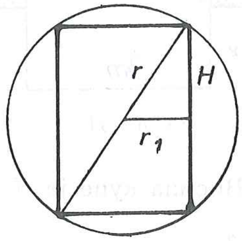
162. Осни пресек купе чине две половине једнакостраничног троугла. Полупречник купе је $R = r(1 + 2\sqrt{3})$, а изводница $s = r\left(4 + \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$. Површина купе је $P = \frac{\pi r^2}{3}(63 + 38\sqrt{3})$.

163. Имамо услов $R = r\sqrt{3}$, где је R полупречник основе купе (као у *задатку* 161). Према сл. 52, из сличних троуглова VOB и ACB је: $H : H_1 = R : (R - r)$, а одавде је $H_1 = \frac{R-r}{R} \cdot H = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}H$. Део ваљка који је у купи састоји се од ваљка полупречника r и висине H_1 и купе полупречника r и висине $H - H_1 = \frac{H}{\sqrt{3}}$. Тражена запремина тела је $V = r^2\pi H\frac{9-2\sqrt{3}}{9}$.

164. Тражимо висину x одсеченог дела пирамиде, сл. 53. Треба да буде: $\pi r_1^2 = \pi(r + r_1)s_1$, односно $r_1^2 = (r + r_1)s_1$, где је s_1 изводница зарубљене купе. Изводница дате купе је $s = \sqrt{r^2 + H^2}$. Из сличних троуглова VOA и VO_1A_1 имамо: $r : r_1 = H : x$ и $s : (s - s_1) = H : x$. Одавде је $r_1 = \frac{r}{H} \cdot x$ и $s_1 = \frac{s}{H}(H - x)$. Сада налазимо: $r + r_1 = \frac{r}{H}(H + x)$. Заменимо ове вредности у $r_1^2 = (r + r_1)s_1$ и добијемо $x^2 = H^2 \cdot \frac{s}{s+r} = H^2 \cdot \frac{s(s-r)}{s^2 - r^2} = s(s - r)$. Дакле: $x = \sqrt{s(s - r)}$.



Сл. 53



Сл. 54

165. Из услова за омотач добијамо једнакост $3s = 5r$, а из осног пресека $rH = 12$. Користећи још везу: $r^2 + H^2 = s^2 = \frac{25r^2}{9}$, добијамо

$H = \frac{4}{3}r$, итд. $V = 84\pi\ dm^3$.

166. Дати ромб је начињен од два једнакостранична троугла. Рачунамо слично *примеру* 10. Резултати су:

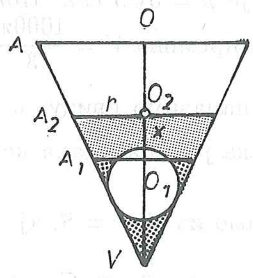
$P = 6a^2\pi\ cm^2$ и $V = \frac{3\pi a^3\sqrt{3}}{4}\ cm^3$.

167. Нека је r_1 полупречник и $2H$ висина уписаног ваљка, сл. 54. Тада је $r^2 = r_1^2 + H^2$. Из услова за површину добијамо: $2\pi r_1^2 + 4\pi r_1 H = 3\pi r^2$. Заменимо $r_1^2 = r^2 - H^2$ и ослободимо се корена, па добијемо једначину: $20H^4 - 12r^2H^2 + r^4 = 0$. Њена решења по H су: $H_1 = \frac{r}{\sqrt{10}}$, $H_2 = \frac{r\sqrt{2}}{2}$. Отуда је $r_1 = \frac{3r}{\sqrt{10}}$ и $r_2 = \frac{r\sqrt{2}}{2}$. Постоје, дакле, два ваљка и $V_1 = \frac{9\pi\sqrt{10}}{50}r^3$, $V_2 = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}r^3$.

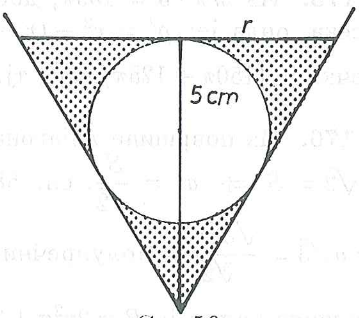
168. На основу формуле (17), калоте на које је сфера пресеком подељена, имају висине $\frac{r}{2}$ и $\frac{3r}{2}$, где је r полупречник лопте. Како је површина пресека $\rho^2\pi = 27\pi$, то је $\rho = 3\sqrt{3}$, па је $r = 6$. Висина купа су $\frac{r}{2}$ и $\frac{3r}{2}$. Запремина дела лопте ван ових купа је 180π.

169. $P = 2500\pi\ cm^2$.

170. Троуглови VOA и VO_1A_1 су слични, па је $VO : OA = VO_1 : O_1A_1$, тј. $16 : 6 = 12 : r_1$, одакле је $r_1 = \frac{9}{2}\ cm$, сл. 55. Запремина наливене воде је $81\pi\ cm^3$, а запремина потопљене лопте $36\pi\ cm^3$. Ако се потапањем лопте ниво воде подигне за $x\ cm$, а полупречник нове "водене" купе означимо са r, тада из сличних троуглова VO_1A_1 и VO_2A_2 следи: $(12 + x) : r = 12 : \frac{9}{2}$. Одавде је $12 + x = \frac{8r}{3}$. Користећи запремину добијамо везу: $117\pi = \frac{1}{3}r^2\pi(12 + x)$, одакле, после замене $12 + x = \frac{8r}{3}$, добијамо $r = \frac{3}{2}\sqrt[3]{39}\ cm$. Дакле $x = \frac{8}{3} \cdot \frac{3}{2}\sqrt[3]{39} - 12 = 1.6\ cm$ приближно.



Сл. 55



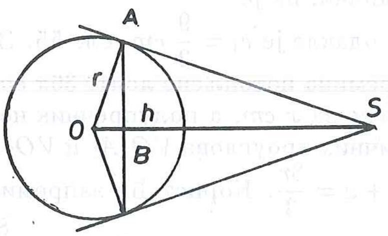
Сл. 56

171. Количина наливене воде једнака је разлици запремина једнакостраничне купе и лопте, сл. 56. Ако са r означимо полупречник ове купе, онда је $\frac{r\sqrt{3}}{3} = 5\ cm$, одакле је $r = 5\sqrt{3}\ cm$. Висина купе је 15 cm, па је $V = \frac{1}{3}(5\sqrt{3})^2\pi \cdot 15 - \frac{4}{3}5^3\pi = \frac{625}{3}\pi\ cm^3 = 654,\ 5\ cm^3$ приближно. Ако изразимо запремину једнакостраничне купе преко H, због $r = \frac{H}{\sqrt{3}}$, имаћемо: $V = \frac{\pi H^3}{9}$. Сада из $\frac{\pi H^3}{9} = \frac{625}{3}\pi$, добијамо $H = \sqrt[3]{1875} = 12.33\ cm$ приближно.

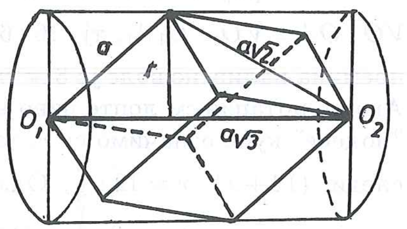
172. Ако са h означимо одстојање центра лопте од пресечне равни, тада је разлика површина калота $2\pi r(r + h) - 2\pi r(r - h) = 4\pi rh$. Полупречник пресека је $\rho = \sqrt{r^2 - h^2}$, па је $4\pi rh = \pi(r^2 - h^2)$. Одавде имамо једначину: $h^2 + 4rh - r^2 = 0$, чије је позитивно решење $h = r(\sqrt{5} - 2)$.

173. $P = 910\pi\ cm^2$.

174. Из $2r\pi h = \frac{1}{3}4r^2\pi$, добијамо висину калоте: $h = \frac{2}{3}r$. Због тога је $OB = \frac{r}{3}$, сл. 57, па је $AB^2 = \frac{8}{9}r^2$. Нека је $OS = x$. Сада из једнакости $SB^2 + AB^2 = SO^2 - OA^2$, тј. из: $\left(x - \frac{r}{3}\right)^2 + \frac{8}{9}r^2 = x^2 - r^2$, добијамо $x = 3r$.



Сл. 57



Сл. 58

175. Из $2r\pi \cdot 5 = 150\pi$, добијамо $r = 15\ cm$. Ако је ρ полупречник пресека, онда је: $\rho^2 = r^2 - (r - h)^2 = 125$, па је $\rho = 5\sqrt{5}\ cm$. Површина одсечка је $(150\pi + 125\pi)\ cm^2$, тј. $275\pi\ cm^2$, а запремина $V = \frac{1000\pi}{3}\ cm^3$.

176. Из површине дијагоналног пресека налазимо ивицу a коцке: $a \cdot a\sqrt{2} = S \ \Rightarrow\ a^2 = \frac{S}{\sqrt{2}}$, сл. 58. Висина ваљка је дијагонала коцке, тј. $H = a\sqrt{3} = \frac{\sqrt{S}\sqrt{3}}{\sqrt[4]{2}}$. Полупречник ваљка добијамо из $H \cdot r = S$, тј. $r = \frac{S}{H}$. Површина ваљка је $P = 2r^2\pi + 2r\pi H = 2\pi\frac{S^2}{H^2} + 2\pi S = \frac{2}{3}\pi S(\sqrt{2} + 3)$.

177. Висина призме је пречник лопте, а то је и пречник круга уписаног у базу призме. Ако означимо катете са a и полупречник уписаног круга (и лопте) са r, тада је $r = s - a\sqrt{2} = a - \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Како је $r = 1$, то је $a = 2 + \sqrt{2}$. Запремина призме је $V = \dfrac{a^2}{2} \cdot H = (6 + 4\sqrt{2})\ cm^3$.

178. Полупречник доње базе је $r_1 = \dfrac{a\sqrt{3}}{6} = 6\ cm$. Према *задатку* 139, висина тетраедра је $h = 12\sqrt{2}\ cm$. Сада из $r_1 : r_2 = h : (h - H)$, тј. из $6 : r_2 = 12\sqrt{2} : 4\sqrt{2}$, добијамо $r_2 = 2\ cm$. Сада се лако добија изводница зарубљене купе: $s^2 = H^2 + (r_1 - r_2)^2$. Одавде је $s = 12\ cm$. Површина зарубљене купе је $P = 136\pi\ cm^2$.

179. База купе је описана око квадрата подударног страни коцке. Дакле, из $a\sqrt{3} = 1$, добијамо $a = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, па је пречник купе $2r = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. Висина купе је $H = \dfrac{3}{4}a = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$, па је $V = \dfrac{\pi\sqrt{3}}{72}\ dm^3$.

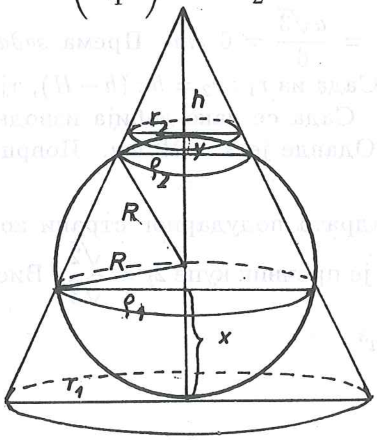
180. Површина ваљка је $P = \dfrac{675\pi}{2}$.

181. Израчунамо висину допунске купе: $h = 20\ cm$. Означимо редом са x и y одстојања пресечних кругова лопте и омотача од горње и доње базе зарубљене купе, сл. 59. Полупречник лопте је $R = 25\ cm$. Користећи се сличним троугловима (уочавамо их у осном пресеку), добијамо следеће везе: $\rho_1 : r_1 = (h+H-x) : (h+H)$, одакле је $\rho_1 = \dfrac{70-x}{3}$. Међутим, $\rho_1^2 = R^2 - (R-x)^2 = 50x - x^2$. Сада из $50x - x^2 = \left(\dfrac{70-x}{3}\right)^2$, добијамо: $x^2 - 59x + 490 = 0$. Решења ове једначине су $x_1 = 10$ и $x_2 = 49$. Друго решење не одговара, јер је $x < 25$. Значи $x = 10$. Слично добијамо $y = 1$. Сада лако израчунамо: $P_1 = 50\pi$ (мања калота), $P_2 = 500\pi$ и $P_3 = 1950\pi$ (појас).

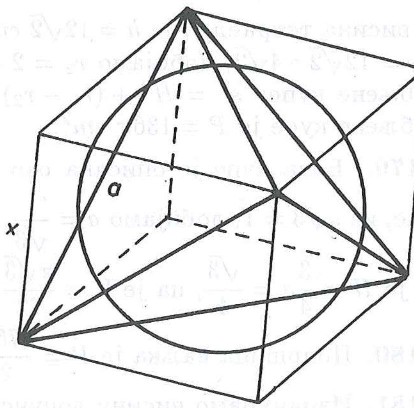
182. Површина је $\dfrac{481}{8}\pi\ cm^2$, а запремина $\dfrac{481}{8}\pi\ cm^3$. (Осни пресек зарубљене пирамиде је једнакокраки тангентни трапез: $2s = 2r_1 + 2r_2$.)

183. Центри четири дате лопте образују правилан тетраедар ивице $2r$. Полупречник ρ наше тражене лопте једнак је $R + r$, где је $R = \dfrac{r\sqrt{6}}{2}$ полупречник лопте описане око тетраедра. Дакле: $\rho = \dfrac{r}{2}(\sqrt{6} + 2)$, па је $P = \pi r^2(10 + 4\sqrt{6})$, а запремина $V = \dfrac{\pi r^3}{3}(22 + 9\sqrt{6})$.

184. Приметимо да дијагонале шест страна коцке образују правилан тетраедар. Означимо са x страницу такве коцке, сл. 60. Из $a = x\sqrt{2}$, добијамо $x = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Сфера уписана у ову коцку додирује свих шест ивица тетраедра. Према томе, полупречник лопте је $\dfrac{x}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$. Површина сфере је $P = 4 \cdot \left(\dfrac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2 \pi = \dfrac{a^2\pi}{2}$.



Сл. 59



Сл. 60

185. Резултати: *а)* 0 , *б)* 1 , *в)* 2.

г) Најпре трећој колони додамо другу, помножену са (-1), па другој додамо прву, помножену са (-1). Затим, првој врсти додамо другу и трећу врсту и, на крају, развијамо по првој врсти. Добићемо:

$$(a+b+c)\begin{vmatrix} c-b & a-c \\ a-c & b-a \end{vmatrix} = (a+b+c)(ab+bc+ac-a^2-b^2-c^2).$$

(Могли смо одмах применити Сарусово правило и даље видети *пример* 20 *ђ)* из *одељка* 1.4.)

д) Резултат је -2.

186. Поступити слично *примеру* 14.*б)*.

187. *а)* Најпре одузмемо другу врсту од прве врсте, па развијемо по првој врсти. Решења су $x_1 = 1$, $x_2 = 2$.

б) Слично претходном задатку. Решења су $x_1 = a$, $x_2 = -\dfrac{a}{2}$.

188. Слично *примерима* 15 и 16. Дајемо само резултате.

а) Ако је $a \neq 6$ и $a \neq -6$, систем има решења $x = \dfrac{2}{a+6}$, $y = \dfrac{3}{a+6}$. За $a = -6$ нема решења, а за $a = 6$ имамо решења $\left(x, \dfrac{1-3x}{2}\right)$.

б) $\Delta = k(k-1)(k+1)$. За $k \neq 0$ и $k \neq 1$ и $k \neq -1$, систем има јединствено решење: $x = \dfrac{a^2+1}{a(a+1)}$, $y = \dfrac{1-a}{a(a+1)}$, $z = \dfrac{a-1}{a}$. За $k = 0$ нема решења. За $k = -1$ нема решења. За $k = 1$ решења система су тројке облика $(1-z,\ 0,\ z)$.

в) Систем има јединствено решење за $pq \neq 12$. За $pq = 12$ и $p \neq 3$ нема решења. За $p = 3$ и $q = 4$ решења система су: $\left(\dfrac{2-2z}{3},\ \dfrac{10z-7}{6},\ z\right)$ (видети *пример* 15. *г)*).

г) $\Delta = (m-1)^2(m+2)$. Ако је $m \neq 1$ и $m \neq -2$, систем има само тривијална решења: $x = y = z = 0$. Ако је $m = 1$, систем је еквивалентан са $x+y+z = 0$, а одавде добијамо решења $(x,\ y,\ -x-y)$. Ако је $m = -2$, решења су $(x,\ x,\ x)$.

189. Према формули (30) је $P = \dfrac{1}{2}\,|\,(2\,\vec{a} - 3\,\vec{b}) \times (3\,\vec{a} + 2\,\vec{b})\,| =$
$= \dfrac{1}{2}\,|\,6\,\vec{a} \times \vec{a} + 4\,\vec{a} \times \vec{b} - 9\,\vec{b} \times \vec{a} - 6\,\vec{b} \times \vec{b}\,| = \dfrac{1}{2}\,|\,13\,\vec{a} \times \vec{b}\,| =$
$= \dfrac{13}{2}\,|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot |\sin(\vec{a},\ \vec{b})\,| = 39\,|\sin(\vec{a},\ \vec{b})\,|$. Треба одредити овај синус. Пођимо од датог услова $|\vec{a} + \vec{b}| = 4$. Одавде је $(\vec{a} + \vec{b})^2 = 16$, тј. $\vec{a}^{\,2} + 2\,\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^{\,2} = 16$. Слично *примеру* 18, налазимо $\cos(\vec{a},\ \vec{b}) = \dfrac{1}{4}$. Одавде је $\sin(\vec{a},\ \vec{b}) = \sqrt{1 - \dfrac{1}{16}} = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$. Дакле $P_\Delta = \dfrac{39\sqrt{15}}{4}$.

190. Према (27) је $\cos\varphi = \dfrac{(\vec{a} + \vec{b})\cdot(2\vec{a} - \vec{b})}{|\vec{a} + \vec{b}| \cdot |\,2\vec{a} - \vec{b}|}$, φ је тражени угао.
$|\vec{a} + \vec{b}\,| = \sqrt{(\vec{a} + \vec{b})^2} = \sqrt{\vec{a}^{\,2} + 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^{\,2}} = \sqrt{1 + 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \dfrac{4}{5} + 1} = 3\sqrt{\dfrac{2}{5}}$,
затим $|\,2\,\vec{a} - \vec{b}\,| = \sqrt{4\,\vec{a}^{\,2} - 4\,\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^{\,2}} = \dfrac{3}{\sqrt{5}}$ и $(\vec{a} + \vec{b})(2\,\vec{a} - \vec{b}) = \dfrac{9}{5}$.
Дакле $\cos\varphi = \dfrac{\frac{9}{5}}{3\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\dfrac{3}{\sqrt{5}}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, па је $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$. Даље $((\vec{a} + \vec{b}) \times (2\,\vec{a} - \vec{b}))\cdot \vec{c}$
$= (2\,\vec{a} \times \vec{a} - \vec{a} \times \vec{b} + 2\,\vec{b} \times \vec{a} - \vec{b} \times \vec{b})\cdot \vec{c} = -3(\vec{a} \times \vec{b})\cdot \vec{c} = -3 \cdot \dfrac{1}{3} = -1$.
Према (32), тражена запремина је $V = 1$.

191. Према дефиницији (29) је $\vec{c} = m \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$, где број m треба одредити из датих услова. Како је $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = (-4,\ -1,\ 3)$, то је $\vec{c} = (-4m,\ -m,\ 3m)$ и $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (3-4m,\ 3-m,\ 5+3m)$. Из $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| = \sqrt{69}$, добијамо: $(3-4m)^2 + (3-m)^2 + (5+3m)^2 = 69$, тј. $m^2 = 1$. Следи да је $m = 1$ или $m = -1$, али услов да $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ чине леви триедар задовољава само $m = -1$. Према томе $\vec{c} = (4,\ 1, -3)$.

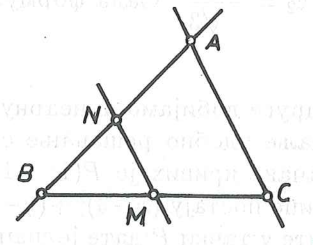
192. Према датим условима имамо једнакости: За $\vec{c} = (x,\ y,\ z)$ је $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ и $\dfrac{(1,\ 1,\ 1)\cdot(x,\ y,\ z)}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ и $|\vec{b} \times \vec{c}| = \sqrt{2}$. Сређивањем добијемо $x^2 + y^2 + z^2 = 1 \ \wedge\ x + y + z = \dfrac{3}{2} \ \wedge\ 2yz - 2xz - 2xy = 0$. Сабирањем прве и треће једначине добијамо $(x-y-z)^2 = 1$, одакле је $x - y - z = 1$ или $x - y - z = -1$. Комбинујући ове две једначине са $x + y + z = \dfrac{3}{2}$, добијамо $x = \dfrac{5}{4}$ или $x = \dfrac{1}{4}$. Не може бити $x = \dfrac{5}{4}$ због $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, па остаје једина могућност $x = \dfrac{1}{4}$. Заменом у прве две једначине и даљем решавањем, добијамо $\vec{c} = \left(\dfrac{1}{4},\ \dfrac{5+\sqrt{5}}{8},\ \dfrac{5-\sqrt{5}}{8}\right)$ или $\vec{c} = \left(\dfrac{1}{4},\ \dfrac{5-\sqrt{5}}{8},\ \dfrac{5+\sqrt{5}}{8}\right)$.

193. Као у *задатку* 191 је $\vec{d} = m\cdot(\vec{a} \times \vec{b}) = (-6m,\ 12m,\ -18m)$, а према (33) је $|(\vec{a} \times \vec{d})\cdot \vec{c}| = 6 \cdot 17.5$, тј. $|-210m| = 105$. Одавде је $m = \dfrac{1}{2}$ или $m = -\dfrac{1}{2}$, односно $\vec{d_1} = (-3,\ 6,\ -9)$ или $\vec{d_2} = (3,\ -6,\ 9)$. Како је $\vec{d_1}\cdot\vec{c} = -15$, а $\vec{d_2}\cdot\vec{c} = 15$, то је $\sphericalangle(\vec{d_1},\ \vec{c})$ туп, а $\sphericalangle(\vec{d_2},\ \vec{c})$ оштар. Тражени вектор је $\vec{d} = (3,\ -6,\ 9)$. Висина је $h = \dfrac{5\sqrt{6}}{6}$ (слично *примеру* 24).

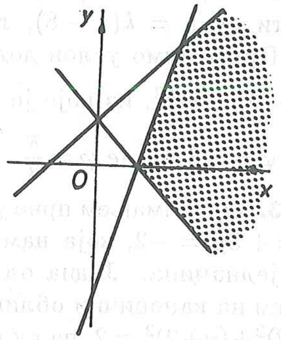
194. Ако је $\vec{c} = (x,\ y,\ z)$, тада из $|\vec{c}| = \sqrt{14}$, добијамо $x^2+y^2+z^2 = 14$, а из $\vec{b}\cdot\vec{c} = 5$, добијамо $6x - 8y + 5z = 5$. Трећу једначину добијамо из услова $H = \dfrac{V}{B}$, тј. $2 = \dfrac{|(\vec{a} \times \vec{b})\cdot \vec{c}|}{|\vec{a} \times \vec{b}|}$. Та једначина гласи $|-4x - 3y| = 10$, а она је еквивалентна са $4x + 3y = 10$ или $4x + 3y = -10$. Како $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ чине леви систем вектора, то је онда $4x + 3y = 10$. Тражени вектор је $\vec{c} = (1,\ 2,\ 3)$.

195. То су праве $\dfrac{5x - 12y - 3}{\sqrt{5^2 + 12^2}} \pm \dfrac{3x + 4y + 1}{-\sqrt{3^2 + 4^2}} = 0$, односно праве $x + 8y + 2 = 0$ и $32x - 4y - 1 = 0$.

196. Теме A је решење система једначина датих правих: $A(-2, -1)$. Како је $M(3, 3)$ средиште странице BC, то је права m кроз M паралелна правој AC, средња линија троугла, па је њена пресечна тачка са правом AB средиште N странице AB, сл. 61. Једначина праве m је (према (49)) $y-3=\frac{3}{2}(x-3)$, односно $3x-2y-3=0$. (Коефицијенти правaца правих AC и m су једнаки, $k=\frac{3}{2}$, према услову паралелности). Пресек правих $3x-2y-3=0$ и $x-3y-1=0$ је тачка $N(1, 0)$. Сада, користимо формулу (43), знајући да је N средиште дужи AB, и налазимо $B(4, 1)$. Слично, користећи тачку M, налазимо $C(2, 5)$. Површина троугла ABC је (према (44)) $P=14$.



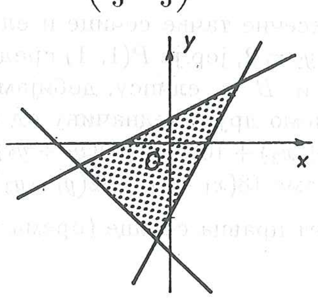
Сл. 61



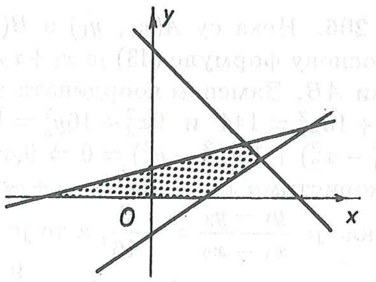
Сл. 62

197. Користићемо формулу (62). Узећемо да је $m=1$, а n ћемо одредити. Једначина праве p је: $x+2y-5+n(2x+3y-7)=0$, односно $(1+2n)x+(2+3n)y-5-7n=0$. На основу услова нормалности (60) добијамо: $2(1+2n)-2(2+3n)=0$. Одавде је $n=-1$, па је једначина праве p: $-x-y+2=0$.

198. Као у претходном задатку одредимо једначине двеју висина h_a: $x-2y-3=0$, и h_b: $x+4y-17=0$. Ортоцентар је пресечна тачка правих h_a и h_b, $H\left(\frac{23}{3}, \frac{7}{3}\right)$.



Сл. 63



Сл. 64

199. Нормални облик праве q је $-\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y-2=0$, где је $p=2$

нормално одстојање координатног почетка од праве. За праву m ово одстојање ће бити $(p+5)$ или $(p-5)$, и још је $m \parallel q$. Према томе, једначина праве m је (два решења) $-\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y-(2+5)=0$ или $-\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y-(2-5)=0$, односно $3x-4y+35=0$ или $3x-4y-15=0$.

200. Решења су дата редом на сл. 62, 63 и 64. (Видети *пример* 26.)

201. Поступамо као код одређивања минималне вредности циљне функције $F=3x-4y$, при ограничењима из *примера* 26. Добијамо решења су: *а)* $F_{min}=F(5,\ 2)=23$; *б)* $F_{max}=F(10,\ 0)=32$.

202. Тражи се угао између тангенти из дате тачке. Једначине тангенти су $y=k(x-8)$, тј. $y=kx-8k$. Сем тога је $p=q=0$ и $r=4$. Применимо услов додира, тј. формулу (65) и добијемо једнакост $16(k^2+1)=64k^2$, из које је $k_1=\frac{1}{\sqrt{3}}$ или $k_2=-\frac{1}{\sqrt{3}}$. Сада формула (59) даје $\operatorname{tg}\varphi=\sqrt{3}$, па је $\varphi=\frac{\pi}{3}$.

203. Одузимањем прве једначине од друге добијамо линеарну једначину $x+3y=-2$, која нам омогућава даље удобно решавање система датих једначина. Једна од пресечних тачака кривих је $P(1,\ -1)$. Довођењем на канонични облик, дате једначине постају $(x-3)^2+(y-1)^2=8$ и $(x-2)^2+(y+2)^2=2$, па су њихове тангенте у тачки P дате једначинама: $t_1:(1-3)(x-3)+(-1-1)(y-1)=8$ и $t_2:(1-2)(x-2)+(-1+2)(y+2)=2$. Њихови коефицијенти праваца су $k_1=-1$ и $k_2=1$. Како је $k_1\cdot k_2=-1$, то су ове тангенте нормалне, па се дати кругови секу под правим углом.

204. *а)* $x+y+2=0$; *б)* $x+y+2=0$ и $2x+5y+25=0$.

205. Дата крива је круг $(x-3)^2+y^2=1$. Ако је $M(x,\ y)$ тачка траженог скупа, S центар круга, N подножје нормале из M на осу Oy, тада имамо услов: $MN=MS-r$, тј. $x=\sqrt{(x-3)^2+y^2}-1$. Сређивањем долазимо до једначине параболе $y^2=8(x-1)$. (Парабола чије је теме померено у тачку $T(1,\ 0)$.)

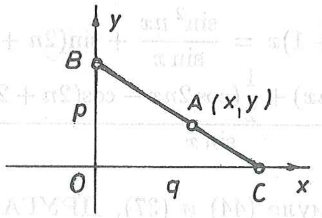
206. Нека су $A(x_1,\ y_1)$ и $B(x_2,\ y_2)$ пресечне тачке сечице и елипсе. На основу формуле (43) је $x_1+x_2=2$ и $y_1+y_2=2$, јер је $P(1,\ 1)$ средиште дужи AB. Заменом координата тачака A и B у елипсу, добијамо: $9x_1^2+16y_1^2=144$ и $9x_2^2+16y_2^2=144$. Одузмемо другу једначину од прве: $9(x_1^2-x_2^2)+16(y_1^2-y_2^2)=0 \Rightarrow 9(x_1-x_2)(x_1+x_2)+16(y_1-y_2)(y_1+y_2)=0$. Искористимо $x_1+x_2=2$ и $y_1+y_2=2$, па имамо $18(x_1-x_2)+32(y_1-y_2)=0$, одакле је $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\frac{9}{16}$, а то је коефицијент правца сечице (према (51)). Једначина сечице је $y-1=-\frac{9}{16}(x-1)$.

207. Нека је $M(x,\ y)$ тачка траженог скупа. Једначина тангенте из M је: $Y-y=k(X-x)$, тј. $Y=kX+y-kx$. Овде је $n=y-kx$.

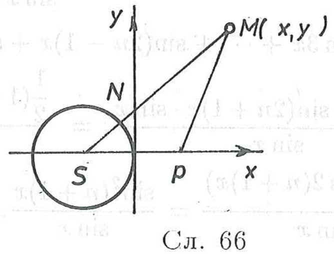
Применимо услов додира (72) и добијемо: $a^2k^2 + b^2 = (y - kx)^2$, одакле имамо квадратну једначину по k: $(a^2 - x^2)k^2 + 2xyk + b^2 - y^2 = 0$. Тангенте треба да су нормалне међу собом, па мора бити $k_1 \cdot k_2 = -1$. Користећи Виетове везе, добијамо: $\dfrac{b^2 - y^2}{a^2 - x^2} = -1$, одакле је $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$. Тражени скуп тачака је круг, полупречника $r = \sqrt{a^2 + b^2}$.

208. Према сл. 65 је $p^2 + q^2 = n^2$. Координате тачака су $B(0,\ p)$, $C(q,\ 0)$, $A(x,\ y)$. Према формули (42) је $x = \dfrac{0 + mq}{1 + m}$ и $y = \dfrac{p + m \cdot 0}{1 + m}$, одакле је $\dfrac{x}{m} = \dfrac{q}{1 + m}$ и $y = \dfrac{p}{1 + m}$. Квадрирањем па сабирањем добијамо: $\dfrac{x^2}{m^2} + y^2 = \dfrac{p^2 + q^2}{(1 + m)^2} = \dfrac{n^2}{(1 + m)^2}$. Ово је елипса облика $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, где је $a = \dfrac{mn}{1 + m}$ и $b = \dfrac{n}{1 + m}$.

209. Асимптота је $y = \dfrac{1}{2}x$, па је $\dfrac{b}{a} = \dfrac{1}{2}$, односно $a = 2b$. Дата тангента је $y = \dfrac{5}{6}x - \dfrac{4}{3}$, па је $k = \dfrac{5}{6}$ и $n = -\dfrac{4}{3}$. Према услову додира (76) је $\dfrac{25}{36}a^2 - b^2 = \dfrac{16}{9}$. Решење система једначина по a и b је $a = 2$, $b = 1$, па је тражена хипербола $x^2 - 4y^2 = 4$.



Сл. 65



Сл. 66

210. Према сл. 66, произвољна тачка $M(x,\ y)$ траженог скупа, задовољава услов $MN = MP$. Слично *задатку* 205, добијамо хиперболу $3x^2 - y^2 = 3$, чија десна грана представља тражени скуп тачака.

211. *Први начин:* $p^2 - 1 = (p - 1)(p + 1)$. Како је p непаран број, то су $(p - 1)$ и $(p + 1)$ два узастопна парна броја, па је један од њих дељив са 2 и један са 4, а самим тим је њихов производ дељив са 8. Сем тога $(p - 1) \cdot p \cdot (p + 1)$ је дељиво са 3 (као производ три узастопна броја), па како p није дељиво са 3, то је или $(p - 1)$ или $(p + 1)$ дељиво са 3. Дакле, $(p - 1)(p + 1)$ је дељиво са $8 \cdot 3 = 24$.

Други начин: Број p је облика $p = 6k \pm 1$, па је $p^2 - 1 = (6k \pm 1)^2 - 1 = 36k^2 \pm 12k = 12k(3k \pm 1)$. Ако је k паран број, онда је $12k$ дељиво са 24, а ако је k непаран број, онда је $(3k \pm 1)$ паран број, па је $12(3k \pm 1)$ дељиво са 24.

212. Нека је $n = 2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11\cdot13$. Тада су сложени сви бројеви редом од $(n+2)$ до $(n+16)$, што се лако проверава. (Сваки од њих је дељив са 2, или са 3, или са 5, или са 7, или са 11, или са 13.)

213. Због $7 \equiv -1(mod\,4)$ је и $7^7 \equiv (-1)^7(mod\,4) \equiv -1(mod\,4)$. Дакле $7^7 = 4k+3$. Тада је $7^{4k+3} = 7^{4k}\cdot 7^3$, па како је $7\cdot7\cdot7\cdot7 = \ldots 1$ (последња цифра је 1), то је и $7^{4k} = \ldots 1$. Међутим $7^3 = 343$, па је $7^{4k}\cdot 7^3 = \ldots 3$. Због тога је $7^{7^7} - 3 = \ldots 3 - 3 = \ldots 0$, што значи да је дељиво са 10.

214. За $n=1$ је $1+h \geq 1+h$, дакле тачно је. Ако $(1+h)^n \geq 1+nh$ помножимо са $1+h$, добијамо: $(1+h)^{n+1} \geq (1+nh)(1+h) =$ $= 1+(n+1)h+nh^2 \geq 1+(n+1)h$, тј. $f(n) \Rightarrow f(n+1)$.

215. *а)* $f(n) \Rightarrow f(n+1)$, јер је $1+3+\cdots+(2n-1)+(2n+1) = n^2+(2n+1) =$ $= (n+1)^2$.

б) За $n=1$ је $\dfrac{1}{1\cdot2} = \dfrac{1}{2}$, што је тачно. Такође је $f(n) \Rightarrow f(n+1)$, јер је $\dfrac{1}{1\cdot2}+\dfrac{1}{2\cdot3}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}+\dfrac{1}{(n+1)(n+2)} = \dfrac{n}{n+1}+\dfrac{1}{(n+1)(n+2)} =$ $= \dfrac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = \dfrac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \dfrac{n+1}{n+2}$.

в) За $n=1$ је $\sin x = \dfrac{\sin^2 x}{\sin x}$. Такође и $f(n) \Rightarrow f(n+1)$, јер је

$$\sin x + \sin 3x + \cdots + \sin(2n-1)x + \sin(2n+1)x = \frac{\sin^2 nx}{\sin x} + \sin(2n+1)x =$$

$$\frac{\sin^2 nx + \sin(2n+1)x\cdot\sin x}{\sin x} = \frac{\frac{1}{2}(1-\cos 2nx)+\frac{1}{2}(\cos 2nx - \cos(2n+2)x)}{\sin x} =$$

$$\frac{\frac{1}{2}(1-\cos 2(n+1)x)}{\sin x} = \frac{\sin^2(n+1)x}{\sin x}.$$

(Формуле (44) и (37), ДРУГА ГЛАВА).

г) За $n=1$ је $\cos\dfrac{x}{2} = \dfrac{\sin x}{2\sin\frac{x}{2}} = \dfrac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}$, што је тачно. $f(n)$ је једнакост дата у тексту задатка. Ако ову једнакост помножимо са $\cos\dfrac{x}{2^{n+1}}$, добићемо: $\cos\dfrac{x}{2}\cdot\cos\dfrac{x}{2^2}\ldots\cos\dfrac{x}{2^n}\cdot\cos\dfrac{x}{2^{n+1}} =$

$$= \frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}\cdot\cos\frac{x}{2^{n+1}} = \frac{\sin x}{2^n\cdot2\sin\frac{x}{2^{n+1}}\cdot\cos\frac{x}{2^{n+1}}}\cdot\cos\frac{x}{2^{n+1}} = \frac{\sin x}{2^{n+1}\sin\frac{x}{2^{n+1}}},$$

тј. $f(n) \Rightarrow f(n+1)$, чиме је тврђење доказано.

д) $\sqrt{2} = 2\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 2\cos\dfrac{\pi}{2^2}$, итд.

216. За $n=1$ је $2! \geq (2!)^1$, што је тачно. Ако тврђење $f(n)$ помножимо са $(2n+2)!$ добићемо: $2!\cdot4!\cdot6!\cdot\ldots\cdot(2n)!\cdot(2n+2)! \geq$

$\geq ((n+1)!)^n \cdot (1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n+1)) \cdot (n+2)(n+3) \ldots (2n+2) =$
$= ((n+1)!)^n (n+1)! \cdot (n+2) \cdot (n+3) \ldots (2n+2) =$
$= ((n+1)!)^{n+1} \cdot (n+2) \cdot (n+3) \ldots (2n+2) \geq$
$\geq ((n+1)!)^{n+1} \cdot (n+2) \cdot (n+2) \ldots (n+2)$. (Сваки из $(n+2)$ –ог чиниоца: $(n+3)$, $(n+4)$, $(n+5)$, $\ldots (2n+2)$, је већи од $(n+2)$.) Даље је: $2! \cdot 4! \cdot 6! \ldots (2n)! \cdot (2n+2)! \geq ((n+1)!)^{n+1} \cdot (n+2)^{n+1} = ((n+1)! \cdot (n+2))^{n+1}$ $= ((n+2)!)^{n+1}$. Дакле: $f(n) \Rightarrow f(n+1)$. Тврђење је доказано.

217. $f(n)$ је тврђење: $3 \cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+1} = 17k$, $k \in N$. За $n = 1$ је $3 \cdot 5^3 + 2^4 = 375 + 16 = 391 = 23 \cdot 17$. Ако уместо n ставимо $(n+1)$, добићемо: $3 \cdot 5^{2(n+1)+1} + 2^{3(n+1)+1} = 3 \cdot 5^{2n+3} + 2^{3n+4} = 3 \cdot 5^2 \cdot 5^{2n+1} + 2^3 \cdot 2^{3n+1} =$ $= 75 \cdot 5^{2n+1} + 8 \cdot 2^{3n+1} = 51 \cdot 5^{2n+1} + 8 \cdot 3 \cdot 5^{2n+1} + 8 \cdot 2^{3n+1} =$ $= 51 \cdot 5^{2n-1} + 8(3 \cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+1}) = 51 \cdot 5^{2n+1} + 8 \cdot 17k = 17(3 \cdot 5^{2n+1} + 8k) = 17k_1$. Дакле: $f(n) \Rightarrow f(n+1)$.

218. Знамо $a_1 = 3$, $d = 7$, $S_n = 345$, тражимо a_n. На основу формуле (86) је: $345 = \dfrac{n}{2}(6 + (n-1) \cdot 7)$. Ово је квадратна једначина $7n^2 - n - 690 = 0$, $n \in N$, која има решење $n = 10$. Дакле, према (84) је $x = 3 + 9 \cdot 7 = 66$.

219. Из $a_1 = 11$ и $a_7 = 35 = a_1 + 6d$, добијамо $d = 4$, па је $a_4 = 11 + 3 \cdot 4 = 23$. Сада у другом низу имамо: $b_1 = 38$ и $b_4 = a_4 = 23$, па из $b_4 = b_1 + 3d_1$, добијамо $d_1 = -5$. Коначно из (84) добијамо $13 = 38 - 5(n-1)$, одакле је $n = 6$.

220. Из датог услова, према (85), важи једнакост: $a - b = b - c$. Доказаћемо да таква веза постоји и између друга три броја. Израчунавамо најпре:

$$\frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} = \frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{(\sqrt{c}+\sqrt{a})(\sqrt{b}+\sqrt{c})} = \frac{b-a}{(\sqrt{c}+\sqrt{a})(\sqrt{b}+\sqrt{c})(\sqrt{b}+\sqrt{a})}.$$

Затим, слично добијамо:

$$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} - \frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{c}-\sqrt{b}}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{c}+\sqrt{a})} = \frac{c-b}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{c}+\sqrt{a})(\sqrt{c}+\sqrt{b})}.$$

У оба случаја су једнаки имениоци, а према првобитном услову је и $b - a = c - b$, па су, дакле, једнаке разлике: $\dfrac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}} - \dfrac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} =$ $= \dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} - \dfrac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}$, и дати разломци одређују аритметички низ.

221. Лако се проверава, директном применом формуле (86) за случајеве S_n, S_{2n} и S_{3n}.

222. За $n = 1$ имамо $S_1 = a_1$, тј. $7 = a_1$. За $n = 2$ је $S_2 = a_1 + a_2$, тј. $20 = 7 + a_2$, па је $a_2 = 13$, итд. Тражени низ је: 7, 13, 19, ...

223. Слично *задатку* 220.

224. Слично *примеру* 39. Овде имамо интерполацију геометријског низа. Дакле: $a_1 = 3$, $a_5 = 768$, па из $768 = 3 \cdot q^4$, добијамо $q = 4$. Тражени бројеви су 12, 48, 192.

225. Имамо услове: $b_3 = b_1 + 120$ и $b_1 + b_2 + b_3 = 195$, тј. $b_1(q^2 - 1) = 120$ и $b_1(1 + q + q^2) = 195$. Поделимо другу једначину с првом и добијемо $\dfrac{1+q+q^2}{q^2-1} = \dfrac{13}{8}$, односно $5q^2 - 8q - 21 = 0$. Ова једначина има само једно позитивно решење: $q = 3$. Тада је $b_1 = 15$. Делови дужи AB су 15 *cm*, 45 *cm*, 135 *cm*.

226. Имамо $b_1 = 2a$, $q = \dfrac{1}{\sqrt{2}} < 1$, па из $S = 8$, према формули (90), добијамо $\dfrac{2a}{1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}} = 8$, одакле је $a = 4 - 2\sqrt{2}$.

227. Уочимо да је: $1 = \dfrac{1}{9}(10 - 1)$, $11 = \dfrac{1}{9}(10^2 - 1)$, $111 = \dfrac{1}{9}(10^3 - 1)$, итд. Значи: $S_n = \dfrac{1}{9}(10 + 10^2 + 10^3 + \cdots + 10^n - n) = \dfrac{1}{81}(10(10^n - 1) - 9n)$.

228. Према услову је: $a = a_1 + 4\alpha = b_1 \cdot q^4$, $b = a_1 + 16d = b_1 \cdot q^{16}$ и $c = a_1 + 36d = b_1 \cdot q^{36}$. Нека је, даље: $a - b = -12d$, $b - c = -20d$ и $c - a = 32d$. Тада је: $a^{b-c} \cdot b^{c-a} \cdot c^{a-b} = \left(b_1 q^4\right)^{-20d} \cdot \left(b_1 q^{16}\right)^{32d} \cdot \left(b_1 q^{36}\right)^{-12d} = b_1^0 q^0 = 1$.

229. Услови су $b^2 = ac$, $2c = b + d$, $a + d = 14$ и $b + c = 12$. Сабирањем друге и треће једначине добијамо $a + 2c = b + 14$, а онда овој једнакости додамо четврту и добијемо: $a + 3c = 26$, одакле је $a = 26 - 3c$. Из четврте је $b = 12 - c$. Сад заменимо a и b у прву једначину и добијемо: $(12 - c)^2 = c(26 - 3c)$. Решења ове једначине су $c = 8$ или $c = \dfrac{9}{2}$. Задатак има два решења: 2, 4, 8, 12 или $\dfrac{25}{2}$, $\dfrac{15}{2}$, $\dfrac{9}{2}$, $\dfrac{3}{2}$.

230. $S = 3^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{1}{4}} \cdot 3^{\frac{1}{8}} \cdot 5^{\frac{1}{16}} \cdot 3^{\frac{1}{32}} \cdot 5^{\frac{1}{64}} \cdots = 3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{32}+\cdots} \cdot 5^{\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\cdots} = 3^{\frac{2}{3}} \cdot 5^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{45}$.

231. Знамо да је пречник круга истовремено и дијагонала уписаног квадрата, па је страница првог уписаног квадрата $a_1 = r\sqrt{2}$. Полупречник круга уписаног у овај квадрат је $r_2 = \dfrac{a_1}{2} = \dfrac{r\sqrt{2}}{2}$, итд. Полупречници кругова чине низ: r, $\dfrac{r\sqrt{2}}{2}$, $\dfrac{r}{2}$, $\dfrac{r\sqrt{2}}{4}$, ..., а странице квадрата: $r\sqrt{2}$, r, $\dfrac{r\sqrt{2}}{2}$, ... Збир обима свих квадрата је $O = 4r\sqrt{2} + 4r + 4\dfrac{r\sqrt{2}}{2} + \cdots = 4r(\sqrt{2} + 1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \ldots) = 8r(\sqrt{2} + 1)$. Збир површина свих кругова је

$P = \pi(r^2 + \frac{r^2}{2} + \frac{r^2}{4} + \ldots) = \pi r^2(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots) = 2\pi r^2.$

232. Рационалишемо све имениоце и заменимо $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \cdots = a_{n-1} - a_n = d$, па сведемо разломке на заједнички именилац:

$$S = \frac{\sqrt{a_2} - \sqrt{a_1} + \sqrt{a_3} - \sqrt{a_2} + \cdots + \sqrt{a_n} - \sqrt{a_{n-1}}}{d} = \frac{\sqrt{a_n} - \sqrt{a_1}}{d} =$$

$$= \frac{a_n - a_1}{d(\sqrt{a_n} + \sqrt{a_1})} = \frac{a_1 + (n-1)d - a_1}{d(\sqrt{a_1} + \sqrt{a_n})} = \frac{n-1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_n}}.$$

233. Општи члан прве прогресије је $a_n = 17 + 4(n-1) = 4n + 13$, а друге $b_m = 5m + 11$. Ако је $a_n = b_m$, онда је $4n + 13 = 5m + 11$, одакле је $n = m + \frac{m-2}{4}$. Услов задатка је испуњен ако је $\frac{m-2}{4}$ природан број, тј. ако је $m = 4k + 2$ и $k \in \{0, 1, 2, \ldots, 99\}$. Првих 100 једнаких чланова датих прогресија су: $c_k = 5(4k+2) + 11 = 20k + 21$. Њихов збир је $c_1 + c_2 + \cdots + c_{100} = 102100$.

234. $S_n = \frac{3}{2} + \frac{7}{4} + \frac{11}{8} + \cdots + \frac{4n-1}{2^n} = \frac{3}{2} + \frac{3+4}{4} + \frac{7+4}{8} + \frac{11+4}{16} + \cdots + \frac{(4n-5)+4}{2^n} = \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{4} + \frac{7}{8} + \cdots + \frac{4n-5}{2^n}\right) + \left(\frac{4}{4} + \frac{4}{8} + \frac{4}{16} + \cdots + \frac{4}{2^n}\right) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + \frac{7}{4} + \frac{11}{8} + \cdots + \frac{4n-5}{2^{n-1}} + \frac{4n-1}{2^n} - \frac{4n-1}{2^n}\right) + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{n-2}}\right) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\left(S_n - \frac{4n-1}{2^n}\right) + \frac{1 - \frac{1}{2^{n-1}}}{\frac{1}{2}}$. Одавде, имамо везу: $S_n = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}S_n - \frac{4n-1}{2^{n+1}} + 2 - \frac{4}{2^n}$. Помножимо ову једнакост са 2 и решимо по S_n. Добијамо: $S_n = 7 - \frac{4n-1}{2^n} - \frac{8}{2^n} = 7 - \frac{1}{2^n}(4n+7)$.

235. $\binom{10}{3} = 120$.

236. *а)* Означимо са n број 123. Решење је број пермутација од елемената n, 4, 5, 6, а то је $4! = 24$.

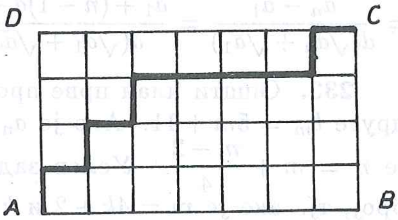
б) Према решењу случаја *а)* је $4! \cdot 3! = 144$.

237. То је број пермутација (с понављањем) од преосталих елемената. *а)* $\frac{8!}{2! \cdot 2! \cdot 3!} = 1680$; *б)* 35 ; *в)* 60 .

238. Три боје се могу распоредити на $3! = 6$ начина, а можемо пермутовати међусобно књиге исте боје. Резултат је: $3! \cdot 2! \cdot 5! \cdot 3! = 8640$ начина.

239. Најпре дамо једном лицу 3 предмета (на $\binom{10}{3}$ начина), па другом 5 предмета (на $\binom{7}{5}$ начина) и трећем преостану 2 предмета. Сем тога, можемо сваком од њих дати 3, или 5, или 2 предмета на 3! начина. Решење је: $\binom{10}{3}\cdot\binom{7}{5}\cdot 3! = 15120$ начина.

240. Према сл. 67 видимо да свака путања од A до C има обавезно 4 деонице по $1\ m$ "горе" и 7 деоница по $1\ m$ "десно". Ако "горе" означимо са g, а "десно" са d, онда ће ознака изабраног пута имати облик пермутације од 11 елемената ($11\ m$) са понављањем. Нпр. уцртана путања на сл. 3 је $gdgdgddddgd$. Укупан број различитих путева је: $\dfrac{11!}{4!\cdot 7!} = 330$.



Сл. 67

241. Из $B_5 = B_{10}$, добијамо $\binom{n}{4} = \binom{n}{9}$. Према особини *б)* из *примера* 4 је $\binom{n}{4} = \binom{n}{n-4}$, па закључујемо да је $n-4=9$, тј. $n=13$. Нека је $B_{k+1} = \binom{13}{k}\left(\sqrt[4]{a^2x}\right)^{13-k}\left(\sqrt[5]{\dfrac{1}{ax^2}}\right)^k = \binom{13}{k}a^{\frac{13}{2}-\frac{7k}{10}}\cdot x^{\frac{13}{4}-\frac{13k}{20}}$. Мора бити $\dfrac{13}{4}-\dfrac{13k}{20}=0$, одакле је $k=5$, па је без x-а шести члан: $B_6 = \binom{13}{5}a^3 = 1287a^3$.

242. Само један члан је рационалан, и то петнаести.

243. Из $\binom{n}{2}-\binom{n}{1} = 35$, тј. $\dfrac{n(n-1)}{2} - n = 35$, добијамо једначину $n^2-3n-70=0$, чије је решење $n=10$. Као у претходном задатку, налазимо да шести члан не садржи x и $B_6 = \binom{10}{5} = 252$.

244. Треба одредити k, тако да буде: $\binom{7}{k}\cdot 3^{7-k}\cdot 2^k >$ $> \binom{7}{k-1}\cdot 3^{8-k}\cdot 2^{k-1}$, односно $\dfrac{\binom{7}{k}}{\binom{7}{k-1}} > \dfrac{3}{2}$. Како је $\dfrac{\binom{7}{k}}{\binom{7}{k-1}} = \dfrac{7-k+1}{k}$, то имамо: $\dfrac{8-k}{k} > \dfrac{3}{2}$, одакле је $k < \dfrac{16}{5}$, тј. $k \le 3$. Највећи је коефицијент четвртог члана: $\binom{7}{3}\cdot 3^4\cdot 2^3 = 22680$.

245. Из $B_2 = 240$, добијамо: $\binom{n}{1}x^{n-1}y = 240$, тј. $nx^{n-1}y = 240$. Остала два услова дају: $n(n-1)x^{n-2}y^2 = 1440$ и $n(n-1)(n-2)x^{n-3}y^3 = 6480$. Ако поделимо другу једначину са првом добијемо $(n-1)\dfrac{y}{x} = 6$, а из друге две: $(n-2)\dfrac{y}{x} = \dfrac{9}{2}$. Кад ове две поделимо, добијемо: $\dfrac{n-2}{n-1} = \dfrac{9}{12}$, одакле је $n=5$. Сада је $\dfrac{y}{x} = \dfrac{3}{2}$, тј. $y = \dfrac{3}{2}x$, па заменом у прву једначину добијемо $5x^4\cdot\dfrac{3x}{2} = 240$. Одавде је $x=2$, па је $y=3$.

246. *а)* Трансформишемо разлику синуса у производ.

$$\lim_{x\to+\infty} 2\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty} 2\sin\frac{x+1-x}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty} 2\sin\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}=0,\quad \left(\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}\to 0, \text{ а } \sin 0=0\right).$$

б) "Рационалишемо" разлике корена:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x})}{(a+x-(a-x))}\cdot$$

$$\cdot\frac{(x^2+ax+a-(x^2-ax+a))}{(\sqrt[3]{(x^2+ax+a)^2}+\sqrt[3]{(x^2+ax+a)(x^2-ax+a)}+\sqrt[3]{(x^2-ax+a)^2})}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2ax(\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x})}{2x(\sqrt[3]{(x^2+ax+a)^2}+\sqrt[3]{(x^2+ax+a)(x^2-ax+a)}+\sqrt[3]{(x^2-ax+a)^2})}$$

$$=\frac{a(\sqrt{a}+\sqrt{a})}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a^2}}=\frac{2a\sqrt{a}}{3\sqrt[3]{a^2}}=\frac{2\sqrt[6]{a^5}}{3}.$$

в) После "рационалисања" разлике корена добијамо:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sqrt{x-2}-x+\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x-2}}+\sqrt{x-\sqrt{x}}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{1-\dfrac{2}{x}}+1\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{1+\sqrt{\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}}}+\sqrt{1-\sqrt{\dfrac{1}{x}}}\right)}=1.$$

г) Слично *примеру* 14. Резултат је: $-\dfrac{1}{2}$.

д) $$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{2\left(\dfrac{1}{2}-\cos x\right)}{\pi-3x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}-\cos x\right)}{\pi-3x}=$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{-4\sin\left(\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{x}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{x}{2}\right)}{6\left(\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{x}{2}\right)}=-\frac{2}{3}\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin\left(\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{x}{2}\right)}{\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{x}{2}}\cdot\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{x}{2}\right)=$$

$$=-\frac{2}{3}\cdot 1\cdot\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

ђ) $$\lim_{x\to 0}\frac{x(\sqrt{1-\operatorname{tg}2x}-\sqrt{1+\operatorname{tg}2x})}{x^2\cdot\dfrac{1-\cos x}{x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{2(\sqrt{1-\operatorname{tg}2x}-\sqrt{1+\operatorname{tg}2x})}{x}=$$

$$(\text{јер }\frac{1-\cos x}{x^2}\to\frac{1}{2})=\lim_{x\to 0}\frac{2(1-\operatorname{tg}2x-1-\operatorname{tg}2x)}{x(\sqrt{1-\operatorname{tg}2x}+\sqrt{1+\operatorname{tg}2x})}=$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-4\sin 2x}{x\cos 2x(\sqrt{1-\operatorname{tg} 2x}+\sqrt{1+\operatorname{tg} 2x})} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-8\sin 2x}{2x}\cdot\frac{1}{\cos 2x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{tg} 2x}+\sqrt{1+\operatorname{tg} 2x}} = -8\cdot 1\cdot\frac{1}{2} = -4.$$

е) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{(1+\sqrt{x})\cos\frac{\pi}{2}x}{1-x} = \lim_{x\to 1}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}x\right)}{1-x}\cdot\lim_{x\to 1}(1+\sqrt{x}) =$

$\displaystyle= \lim_{x\to 1}\frac{\sin\frac{\pi}{2}(1-x)}{\frac{\pi}{2}(1-x)}\cdot 2\cdot\frac{\pi}{2} = \pi$, јер $\displaystyle\frac{\sin\frac{\pi}{2}(1-x)}{\frac{\pi}{2}(1-x)}\to 1$, због $\frac{\pi}{2}(1-x)\to 0$.

ж) $\displaystyle\lim_{x\to -\frac{1}{2}}\frac{2x+1}{\arcsin(2x+1)}\cdot\lim_{x\to -\frac{1}{2}}(4x^2-2x+1) = \lim_{x\to -\frac{1}{2}}\frac{2x+1}{\arcsin(2x+1)}\cdot 3.$

Уведимо смену $\arcsin(2x+1) = y$, (при чему $y\to 0$), а одавде је: $2x+1=\sin y$, па имамо: $\displaystyle\lim_{y\to 0}\frac{3\sin y}{y} = 3.$

з) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\left(1+\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}-1\right) =$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\frac{\ln\left(1+\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}-1\right)}{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}-1}\cdot\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}-1\right) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}-1\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\frac{\frac{1+x}{1-x}-1}{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+1} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\frac{2x}{1-x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+1} = 2\cdot\frac{1}{2} = 1, \text{ јер је}$$

$\displaystyle\lim_{a\to 0}\frac{\ln(1+a)}{a} = 1$. (Овде је $a = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}-1$).

и) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln e^{3x}\left(1-2e^{-3x}\right)}{\ln e^{2x}\left(3e^{-2x}+1\right)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln e^{3x}+\ln(1-2e^{-3x})}{\ln e^{2x}+\ln(3e^{-2x}+1)} =$

$\displaystyle= \lim_{x\to+\infty}\frac{3x+\ln(1-2e^{-3x})}{2x+\ln(3e^{-2x}+1)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{3x}{2x} = \frac{3}{2}$, јер, нпр. $e^{-3x}\to 0$, па $\ln(1-2e^{-3x})\to\ln 1 = 0$.

ј) Уведемо смену: $\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} x = y$ $(y\to 0)$. Одавде је $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} x\right) = \operatorname{ctg} y$, односно $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = \operatorname{ctg} y$, тј. $x = \operatorname{ctg} y$, па је $\displaystyle\lim_{y\to 0}\operatorname{ctg} y\cdot y = \lim_{y\to 0}\cos y\cdot\lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin y} = 1\cdot 1 = 1.$

к) Слично претходном задатку: из $\displaystyle\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = y$ $(y\to 0)$ добијамо $x=\operatorname{ctg} y$. Резултат је 1.

л) Бројиоцу додамо и одузмемо $\cos x + \cos x \cdot \cos 2x$ и добијемо:
$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x + \cos x - \cos x \cdot \cos 2x + \cos x \cdot \cos 2x - \cos x \cos 2x \cos 3x}{x^2} =$
$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} + \lim\limits_{x\to 0} \cos x \cdot \dfrac{1-\cos 2x}{x^2} + \lim\limits_{x\to 0} \cos x \cos 2x \dfrac{1-\cos 3x}{x^2} =$
$= \dfrac{1}{2} + \lim\limits_{x\to 0} 1 \cdot \dfrac{1-\cos 2x}{(2x)^2} \cdot 4 + \lim\limits_{x\to 0} 1 \cdot 1 \cdot \dfrac{1-\cos 3x}{(3x)^2} \cdot 9 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{4}{2} + \dfrac{9}{2} = 7.$ (јер је $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 2x}{(2x)^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 3x}{(3x)^2} = \dfrac{1}{2}$).

љ) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos^2 x \cos 2x}{x^2(1+\cos x\sqrt{\cos 2x})} =$
$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 x + \cos^2 x - \cos^2 x \cdot \cos 2x}{x^2 \cdot 2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 x}{2x^2} + \lim\limits_{x\to 0} \cos^2 x \dfrac{1-\cos 2x}{(2x)^2} \cdot 2 =$
$= \dfrac{1}{2} + 1 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot 2 = \dfrac{3}{2}.$

м) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2^x - 4 + 4 - x^2}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{4(2^{x-2}-1)}{x-2} + \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(2-x)(2+x)}{x-2} =$
$= 4\ln 2 + 4 = 4(\ln 2 + 1).$ (Видети формулу (15).)

н) $\lim\limits_{x\to 0} \left(1 + \dfrac{\cos 2x}{\cos 3x} - 1\right)^{\frac{1}{x^2}} =$

$$= \lim_{x\to 0} \left(\left(1 + \frac{\cos 2x - \cos 3x}{\cos 3x}\right)^{\frac{\cos 3x}{\cos 2x - \cos 3x}}\right)^{\frac{\cos 2x - \cos 3x}{x^2 \cos 3x}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{2\sin\frac{x}{2}\sin\frac{5x}{2}}{x^2 \cdot 1}} = \sqrt{e^5}.$$

$$\left(\lim_{x\to 0} \frac{2\sin\frac{x}{2}\sin\frac{5x}{2}}{x^2} = \lim_{x\to 0} 2 \cdot \frac{\sin\frac{x}{2}}{2\cdot\frac{x}{2}} \cdot \frac{\sin\frac{5x}{2}}{\frac{5x}{2}} \cdot \frac{5}{2} = \frac{5}{2}\right).$$

њ) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+\cos(e^x-1)-1)}{x^2 \dfrac{\sin^2 x}{x^2}} =$
$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+\cos(e^x-1)-1)}{x^2(\cos(e^x-1)-1)} \cdot (\cos(e^x-1)-1) =$
$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-(1-\cos(e^x-1))}{x^2(e^x-1)^2} \cdot (e^x-1)^2 = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-(e^x-1)^2}{x^2} = -1^2 = -1.$

о) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x\operatorname{tg} x)}{x^2} - \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+\cos x - 1)}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x\operatorname{tg} x)}{x \cdot x\operatorname{tg} x} \cdot \operatorname{tg} x -$
$- \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+\cos x - 1)}{x^2(\cos x - 1)} \cdot (\cos x - 1) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x} + \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} =$
$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x\cos x} + \dfrac{1}{2} = 1 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}.$

247. *а)* Тачка прекида је $x = 0$ и $\lim\limits_{x\to -0} \dfrac{x+2}{x} = \dfrac{2}{-0} = -\infty,$

$\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{x+2}{x}=+\infty$, па је $x=0$ вертикална асимптота. Сем тога је $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+2}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+2}{x}=1$, па је $y=1$ хоризонтална асимптота с обе стране. Косих асимптота нема.

б) $y=\dfrac{x+5}{(x-2)(x+2)}$. Тачке прекида функције су $x=2$ и $x=-2$.
$\lim\limits_{x\to-2-0}\dfrac{x+5}{(x-2)(x+2)}=\dfrac{3}{-4(-2-0+2)}=\dfrac{3}{-4(-0)}=\dfrac{3}{+0}=+\infty$. Слично је $\lim\limits_{x\to-2+0}f(x)=-\infty$, па је $x=-2$ вертикална асимптота. Слично утврдимо и за праву $x=2$. Због $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+5}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+5}{x^2-4}=0$, оса Oy је хоризонтална асимптота с обе стране, па косих асимптота нема.

в) Слично *примеру* 20. *г)* налазимо да је $y=-1$ хоризонтална асимптота с леве стране и $y=2x+1$ коса асимптота с десне стране. Вертикалних нема.

г) Функција је дефинисана ако је $x>0$ и $\ln-1\neq 0$, ако је $x\in(0,\ e)\cup(e,\ +\infty)$. Како је $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\ln x+1}{\ln x-1}=\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\ln x\left(1+\dfrac{1}{\ln x}\right)}{\ln x\left(1-\dfrac{1}{\ln x}\right)}=$ $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{1+\dfrac{1}{\ln x}}{1-\dfrac{1}{\ln x}}=1$ (јер $\ln x\to-\infty$, кад $x\to+0$), то у тачки $x=0$ нема вертикалне асимптоте. Међутим, $x=e$ је вертикална асимптота, јер је $\lim\limits_{x\to e-0}\dfrac{\ln x+1}{\ln x-1}=\dfrac{1+1}{1-0-1}=\dfrac{2}{-0}=-\infty$ и $\lim\limits_{x\to e+0}\dfrac{\ln x+1}{\ln x-1}=\dfrac{2}{1+0-1}=+\infty$.
Како је $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x+1}{\ln x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x\left(1+\dfrac{1}{\ln x}\right)}{\ln x\left(1-\dfrac{1}{\ln x}\right)}=1$, то је права $y=1$ хоризонтална асимптота с десне стране. С леве стране (кад $x\to-\infty$) функција није дефинисана. Косих асимптота нема.

д) Функција је дефинисана за $x\neq 0$. У тачки прекида имамо: $\lim\limits_{x\to-0}\left(2x+\ln\left(\dfrac{e^x-1}{e^x+3}\right)^2\right)=-0+\ln\left(\dfrac{1-0-1}{1+3}\right)^2=\ln(+0)=-\infty$ и $\lim\limits_{x\to+0}\left(2x+\ln\left(\dfrac{e^x-1}{e^x+3}\right)^2\right)=+0+\ln\left(\dfrac{1-0-1}{1+3}\right)^2=\ln(+0)=-\infty$, па је $x=0$, тј. оса Oy вертикална асимптота.

Међутим, $k = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{y}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(2 + \dfrac{\ln\left(\dfrac{e^x-1}{e^x+3}\right)^2}{x} \right) = 2 + \dfrac{\ln\dfrac{1}{9}}{-\infty} = 2,$

$n = \lim\limits_{x\to-\infty} (y-2x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \ln\left(\dfrac{e^x-1}{e^x+3}\right)^2 = \ln\dfrac{1}{9} = -2\ln 3$, па је $y = 2x - 2\ln 3$ коса асимптота с леве стране.

Сем тога $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{y}{x} = 2$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} (y-2x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\dfrac{e^x-1}{e^x+3}\right)^2 = \ln 1 = 0,$ па је права $y = 2x$ коса асимптота с десне стране.

248. *а)* $y' = \dfrac{-2x^2-6x+25}{(x^2-5x+5)^2}$; *б)* $y' = \dfrac{4}{\sin^2 2x}$;

в) $y' = \dfrac{-2}{(\sin x - \cos x)^2}$;

г) Користимо правило за извод сложене функције:
$y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$;

д) $y' = 2 - \dfrac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x-3}} = \dfrac{2\sqrt{x^2+2x-3}-x-1}{\sqrt{x^2+2x-3}}$;

ђ) $y' = 2\sin 3x \cdot (\sin 3x)' = 2\sin 3x \cdot 3\cos 3x = 3\sin 6x$;

е) $y' = \dfrac{-1}{1+\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^2} \cdot \left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)' = \dfrac{-1}{1+\dfrac{(1+x)^2}{(1-x)^2}} \cdot \dfrac{1-x+1+x}{(1-x)^2} =$

$= \dfrac{-2}{(1-x)^2+(1+x)^2} = -\dfrac{1}{1+x^2}$;

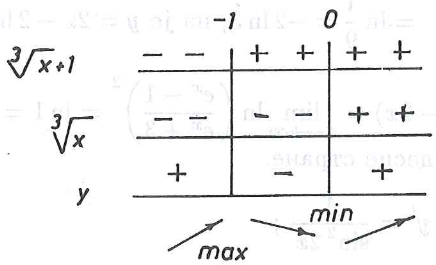
ж) $y' = \dfrac{e^x + xe^x + 1}{2\sqrt{xe^x + x}}$.

249. Тражени угао одређује нагиб тангенте у тачки пресека криве са осом Ox, а то је $y'(0)$. Како је $y' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, то је $\operatorname{tg}\varphi = y'(0) = \dfrac{1}{\cos 0} = 1$, па је $\varphi = 45^o$.

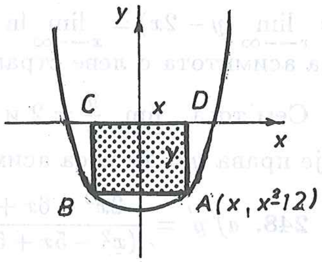
250. Користићемо формуле (22) и (23). Из $y = \sqrt{x}$, добијамо $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, па је $y'(4) = \dfrac{1}{4}$, и $y(4) = 2$ или $y(4) = -2$. Једначина тангенте је $y - 2 = \dfrac{1}{4}(x-4)$, тј. $x - 4y + 4 = 0$, а једначина нормале је $y - 2 = -4(x-4)$, односно: $4x + y - 18 = 0$. (Други пар чине тангента $x + 4y + 4 = 0$ и нормала $4x - y - 18 = 0$ у тачки $(4,\ -2)$ доњег дела параболе: $y = -\sqrt{x}$.)

251. Коефицијент правца дате праве је $k = -5$, па је $y' = -5$. Тражена тачка је $(1,\ -3)$.

252. $y' = 2 + 2x^{\frac{-1}{3}} = 2 + \dfrac{2}{\sqrt[3]{x}} = \dfrac{2(\sqrt[3]{x}+1)}{\sqrt[3]{x}}$. Знак y' одредимо по шеми са сл. 68, а такође и рашћење, односно опадање функције. Видимо да је $y_{max} = f(-1) = 1$ и $y_{min} = f(0) = 0$.



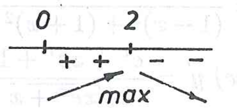
Сл. 68



Сл. 69

253. Површина ваљка је $P = 2r^2\pi + 2r\pi h$, а из дате запремине: $r^2\pi h = 54\pi$, налазимо да је $h = \dfrac{54}{r^2}$. Ако уведемо ознаку $r = x$, биће $h = \dfrac{54}{x^2}$ и $P = 2x^2\pi + \dfrac{108\pi}{x}$. Сада је $P' = 4x\pi - \dfrac{108\pi}{x^2} = \dfrac{4\pi(x^3-27)}{x^2} = \dfrac{4\pi(x-3)(x^2+3x+9)}{x^2}$. Израз $x^2+3x+9>0$ за свако x и $x^2 \geq 0$, па знак P' зависи само од чиниоца $x-3$. Дакле, $P' < 0$ за $x \in (0,\ 3)$, а $P' > 0$ за $x > 3$. Стога P опада за $x \in (0,\ 3)$, а даље расте и за $x = 3$ достиже минимум. Дакле, полупречник ваљка је $r = 3\ cm$, а висина $h = \dfrac{54}{9} = 6\ cm$.

254. Према сл. 69 је $P = 2x(-y) = -2xy$. Како је тачка A на параболи, то су њене координате $(x,\ x^2-12)$, па је површина правоугаоника $P = -2x(x^2-12) = -2x^3 + 24x$. Даље је $P' = -6x^2 + 24$. На основу приложене шеме знака извода видимо да је $P_{max} = P(2) = 32$.



255. *а)* $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-4x-1}{3x^2-7} = \frac{1}{2}$. (Једноставно заменимо $x = 1$.)

б) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - x\sin x - \cos x}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{3x} = -\frac{1}{3}$, јер је $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$.

в) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{x}} = 0$.

г) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{\pi}{x^2}}{\frac{1}{\sin^2\frac{\pi x}{2}}\cdot\frac{\pi}{2}} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{\pi x}{2}}{\left(\frac{\pi x}{2}\right)^2}\cdot\frac{\pi^2}{2} = \frac{\pi^2}{2}$.

$$ђ)\ \lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to0}\frac{x^2-\sin^2 x}{x^2\sin^2 x}=\lim_{x\to0}\frac{x^2-\sin^2 x}{x^4\cdot\dfrac{\sin^2 x}{x^2}}=$$

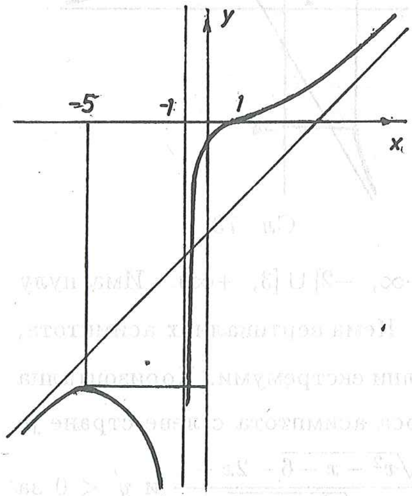
$$=\lim_{x\to0}\frac{x^2-\sin^2 x}{x^4}=\ ^{*)}\lim_{x\to0}\frac{2x-2\sin x\cos x}{4x^3}=\lim_{x\to0}\frac{2x-\sin 2x}{4x^3}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2-2\cos 2x}{12x^2}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos 2x}{6x^2}==\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2 x}{6x^2}=\frac{1}{3}.$$

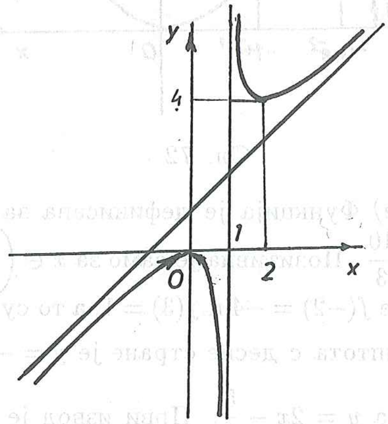
$$ђ)\ \lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)\cdot\cos x}{x\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{\cos x-\cos^2 x}{x^2\dfrac{\sin x}{x}}=\lim_{x\to0}\frac{\cos x-\cos^2 x}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-\sin x+\sin 2x}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{-\cos x+2\cos 2x}{2}=\frac{1}{2}.$$

256. *а)* Функција је дефинисана за $x\neq-1$. Позитивна је за $x>1$. Вертикална асимптота је $x=-1$ (с обе стране функција тежи ка $-\infty$). Коса асимптота с обе стране је $y=x-5$. Први извод је $y'=\dfrac{(x-1)^2(x+5)}{(x+1)^3}$ и $y_{max}=f(-5)=-\dfrac{27}{2}$. Други извод је $y''=\dfrac{24(x-1)}{(x+1)^4}$. Превојна тачка је $x=1$. График је на сл. 70.



Сл. 70



Сл. 71

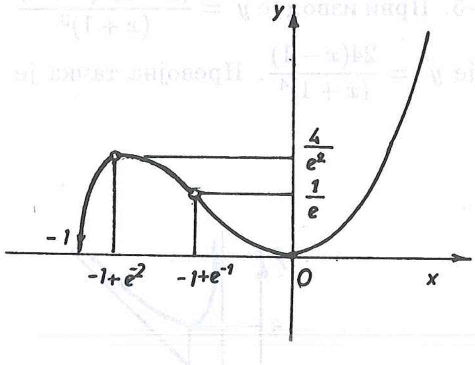
б) Функција је дефинисана за $x\neq0$ и $x\neq1$. Тада је трансформишемо $y=\dfrac{x^3}{x(x-1)}=\dfrac{x^2}{x-1}$. Позитивна је за $x>1$, нема нула. Вертикална асимптота је $x=1$, хоризонталне нема, а коса асимптота је $y=x+1$.

---

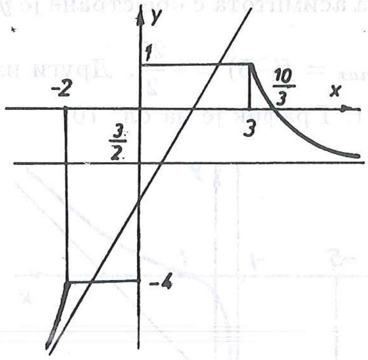
*)Заменили смо $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2 x}{x^2}=1$.

Први извод је $y' = \dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}$. Функција опада за $x \in (0,\ 1) \cup (1,\ 2)$ и има екстремум: $y_{min} = f(2) = 4$. Други извод је $y'' = \dfrac{2}{(x-1)^3}$, па је функција конвексна само за $x > 1$. График видимо на сл. 71. Стрелице на графику означавају да се он прекида у тачки $(0,\ 0)$.

в) Функција је дефинисана за $x > -1$. Позитивна је, осим за $x = 0$, где додирује осу Ox. Кад $x \to -1+0$, функција тежи нули. Нема асимптота. Први извод је $y' = \ln^2(x+1) + 2\ln(x+1)$ и $y' = 0$ за $x_1 = 0$ и $x_2 = -1 + e^{-2}$. Функција опада за $x \in (-1+e^{-2},\ 0)$. Екстремне вредности $y_{min} = f(0) = 0$ и $y_{max} = f(-1+e^{-2}) = \dfrac{4}{e^2}$. Други извод је $y'' = \dfrac{2\ln(x+1)+2}{x+1}$, па је превојна тачка $x = -1 + e^{-1}$, $f(-1+e^{-1}) = \dfrac{1}{e}$. График је дат на сл. 72.



Сл. 72

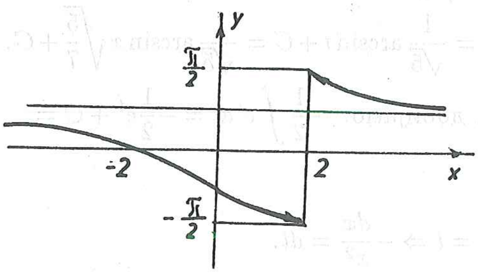


Сл. 73

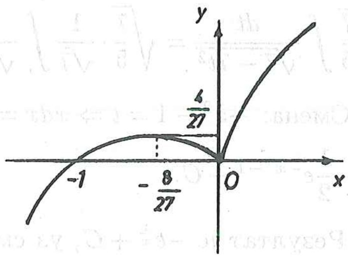
г) Функција је дефинисана за $x \in (-\infty,\ -2] \cup [3,\ +\infty)$. Има нулу $x = \dfrac{10}{3}$. Позитивна је само за $x \in \left(3,\ \dfrac{10}{3}\right)$. Нема вертикалних асимптота, јер је $f(-2) = -4$ и $f(3) = 1$, а то су и локални екстремуми. Хоризонтална асимптота с десне стране је $y = -\dfrac{3}{2}$, а коса асимптота с леве стране је права $y = 2x - \dfrac{5}{2}$. Први извод је $y' = \dfrac{2\sqrt{x^2-x-6} - 2x + 1}{2\sqrt{x^2-x-6}}$ и $y' < 0$ за $x > 3$, а $y' > 0$ за $x < -2$. Други извод је $y'' = \dfrac{25}{2(x^2-x-6)^{\frac{3}{2}}} > 0$, па је функција конвексна, сл. 73.

д) Функција је дефинисана за $x \neq 2$, има нулу $x = -2$. Нема вертикалну асимптоту, јер је $\lim\limits_{x\to 2-0} y = \operatorname{arctg}(-\infty) = -\dfrac{\pi}{2}$ и $\lim\limits_{x\to 2+0} y = \operatorname{arctg}(+\infty) = \dfrac{\pi}{2}$. Хоризонтална асимптота с обе стране је $y = \dfrac{\pi}{4}$, јер

$\lim\limits_{x\to+\infty} y = \lim\limits_{x\to-\infty} y = \operatorname{arctg} 1 = \dfrac{\pi}{4}$. Косих асимптота нема. Први извод је $y' = \dfrac{-2}{x^2+4} < 0$ за $x \neq 2$, па је функција опадајућа. Други извод је $y'' = \dfrac{4x}{(x^2+4)^2}$ и превојна тачка је $f(0) = -\dfrac{\pi}{4}$, сл. 74.



Сл. 74



Сл. 75

ђ) Функција је дефинисана за свако реално x. Има нуле $x_1 = 0$, $x_2 = -1$. Позитивна је за $0 \neq x > -1$. Нема асимптота. Први извод је $y' = \dfrac{3\sqrt[3]{x}+2}{\sqrt[3]{x}}$, па функција опада за $x \in \left(-\dfrac{8}{27}, 0\right)$. Даље: $y_{min} = f(0) = 0$ и $y_{max} = f\left(-\dfrac{8}{27}\right) = \dfrac{4}{27}$. Други извод: $y'' = -\dfrac{2}{9\sqrt[3]{x^4}} < 0$ за $x \neq 0$, па је функција конкавна, сл. 75.

257. *а)* $\displaystyle\int \frac{(2x+1)+2}{2x+1}dx = \int dx + \int \frac{2dx}{2x+1} = x + \ln|2x+1| + C.$
(Увели смо смену: $2x+1 = t \Rightarrow 2dx = dt$.)

б) $\displaystyle\int \frac{x+1-1}{(x+1)^2}dx = \int \frac{dx}{x+1} - 2\int \frac{dx}{(x+1)^2} = \ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + C.$

в) $\displaystyle\int \frac{x^2+2-2}{x^2+2}dx = \int dx - 2\int \frac{dx}{x^2+2} = x - \sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}} + C.$
(Увели смо смену $x = t\sqrt{2} \Rightarrow dx = \sqrt{2}dt$.)

г) $\displaystyle\int \frac{(x^2+4)-5x+2}{x^2+4}dx = \int dx - 5\int \frac{xdx}{x^2+4} + 2\int \frac{dx}{x^2+4} = x - \frac{5}{2}\ln(x^2+4) +$ $+ \operatorname{arctg}\dfrac{x}{2} + C$. (Увели смо смене: $x^2+4 = t \Rightarrow xdx = \dfrac{1}{2}dt$ и (у последњем интегралу): $x = 2z \Rightarrow dx = 2dz$.)

д) Из смене $\operatorname{arctg}\dfrac{x}{2} = t$, добијамо: $dt = \dfrac{1}{1+\dfrac{x^2}{4}} \cdot \dfrac{1}{2}dx = \dfrac{2dx}{x^2+4}$, па дати интеграл прелази у $\displaystyle\frac{1}{2}\int tdt = \frac{1}{4}t^2 + C = \frac{1}{4}\operatorname{arctg}^2\frac{x}{2} + C.$

ђ) Смена је $\arcsin x = t$. Резултат: $\dfrac{2}{3}\sqrt{\arcsin^3 x} + C$.

е) $\displaystyle\int\frac{x^3-4x+4x}{4-x^2}dx=\int\frac{-x(4-x^2)+4x}{4-x^2}dx=-\int xdx+\int\frac{4xdx}{4-x^2}dx=$
$=-\dfrac{x^2}{2}-2\ln\mid 4-x^2\mid+C$. (Смена је: $4-x^2=t\Rightarrow -2xdx=dt$.)

ж) Уводимо смену: $x=t\sqrt{\dfrac{7}{5}}\Rightarrow dx=\sqrt{\dfrac{7}{5}}dt$, па добијамо:

$$\sqrt{\frac{7}{5}}\int\frac{dt}{\sqrt{7-7t^2}}=\sqrt{\frac{7}{5}}\cdot\frac{1}{\sqrt{7}}\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\arcsin t+C=\frac{1}{\sqrt{5}}\arcsin x\sqrt{\frac{5}{7}}+C.$$

з) Смена: $-x^2-1=t\Rightarrow xdx=-\dfrac{1}{2}dt$, добијамо: $-\dfrac{1}{2}\displaystyle\int e^tdt=-\dfrac{1}{2}e^t+C=$
$=-\dfrac{1}{2}e^{-x^2-1}+C$.

и) Резултат је $-e^{\frac{1}{x}}+C$, уз смену $\dfrac{1}{x}=t\Rightarrow-\dfrac{dx}{x^2}=dt$.

ј) $\displaystyle\int\frac{\sin x}{\cos x}dx=-\int\frac{(\cos x)'}{\cos x}dx=-\ln\mid\cos x\mid+C$.

к) $\displaystyle\int\sin^4xdx=\int(\sin^2x)^2dx=\int\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2dx=\frac{1}{4}\int dx-\frac{1}{2}\int\cos 2xdx+$
$\displaystyle+\frac{1}{4}\int\cos^2 2xdx=\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{4}\int\frac{1+\cos 4x}{2}dx=\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{8}\int dx+$
$\displaystyle+\frac{1}{8}\int\cos 4xdx=\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{8}x+\frac{1}{32}\sin 4x+C$. (Види *пример* 30. *е)*.)

л) $\displaystyle\int\sin 2x\cos 4xdx=\frac{1}{2}\int(\sin 6x-\sin 2x)dx=-\frac{1}{12}\cos 6x+\frac{1}{4}\cos 2x+C$.

љ) $\displaystyle\int\frac{\sin^3xdx}{\cos^3x}=\int\frac{\sin^2x\cdot\sin xdx}{\cos^3x}=\int\frac{(1-\cos^2x)\sin xdx}{\cos^3x}$. Уведемо смену:
$\cos x=t\Rightarrow-\sin xdx=dt$, па добијамо $\displaystyle\int\frac{(t^2-1)dt}{t^3}=\int\frac{dt}{t}-\int t^{-3}dt=$
$=\ln\mid t\mid+\dfrac{1}{2t^2}+C=\ln\mid\cos x\mid+\dfrac{1}{2\cos^2x}+C$.

м) Сменом: $1+\ln x=t\Rightarrow\dfrac{dx}{x}=dt$, добијамо: $\displaystyle\int t^{\frac{1}{3}}dt=\frac{3}{4}t^{\frac{4}{3}}+C=$
$=\dfrac{3}{4}\sqrt[3]{(1+\ln x)^4}+C$.

н) $\displaystyle\int\frac{dx}{1+\cos^2x}=\int\frac{\frac{dx}{\cos^2x}}{\frac{1}{\cos^2x}+1}=\int\frac{dt}{1+t^2+1}=\int\frac{dt}{2+t^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}}+$
$+C=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{\operatorname{tg}x}{\sqrt{2}}\right)+C$, где је $\operatorname{tg}x=t\Rightarrow\dfrac{dx}{\cos^2x}=dt$ и $\cos^2x=\dfrac{1}{1+t^2}$.

њ) $\displaystyle\frac{1}{2}\int\frac{2xdx}{x^2-7x+13}=\frac{1}{2}\int\frac{(2x-7)dx}{x^2-7x+13}+\frac{7}{2}\int\frac{dx}{x^2-7x+13}=$

$= \frac{1}{2}\ln(x^2-7x+13) + \frac{7}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-7}{\sqrt{3}} + C$ (видети *пример* 31. *б)*.)

о) Решење: $-2\sqrt{1-x-x^2} - 9\arcsin\frac{2x+1}{\sqrt{5}} + C$. (видети *пример* 31. *г)*.)

258. *а)* $\int \frac{x\cdot x dx}{(1+x^2)^2} = \frac{-x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C$. (Види *пример* 32. *г)*.)

б) $\int xe^{-x}dx = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C = -e^{-x}(x+1) + C$.

$$\begin{pmatrix} u = x\ ; & dv = e^{-x}dx \\ du = dx; & v = \int e^{-x}dx = -e^{-x} \end{pmatrix}$$

в) $\frac{1}{2}\int x\sin 2x dx = -\frac{x}{4}\cos 2x + \frac{1}{4}\int \cos 2x dx = -\frac{x}{4}\cos 2x + \frac{1}{8}\sin 2x + C$.

$$\begin{pmatrix} u = x\ ; & dv = \sin 2x dx \\ du = dx; & v = \int \sin 2x dx = -\frac{1}{2}\cos 2x \end{pmatrix}$$

г) Видети *пример* 33. *в)*. Резултат је: $\frac{1}{5}e^{2x}(\sin x + 2\cos x) + C$.

д) ($u = \arcsin x$, $dv = dx$, итд.) Резултат је: $x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$.

ђ) $I = \int \sin(\ln x)dx = x\sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)dx = x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x) -$

$$\begin{pmatrix} u = \sin(\ln x); & dv = dx \\ du = \cos(\ln x)\cdot\frac{1}{x}dx; & v = x \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} u = \cos(\ln x); & dv = dx \\ du = -\sin(\ln x)\cdot\frac{1}{x}dx; & v = x \end{pmatrix}$$

$-\int \sin(\ln x)dx = x(\sin(\ln x) - \cos(\ln x)) - I$. Тражени интеграл је решење по I једначине: $I = x(\sin(\ln x) - \cos(\ln x)) - I$, тј: .

$$I = \int \sin(\ln x)dx = \frac{x}{2}(\sin(\ln x) - \cos(\ln x)) + C.$$

е) Најпре уведемо смену: $\arcsin\sqrt{x} = t \Rightarrow \frac{dx}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}} = dt$. Сем тога је $\sqrt{x} = \sin t$, па имамо: $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}dx}{\sqrt{1-x}} = 2\int \frac{\sqrt{x}\arcsin\sqrt{x}dx}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}} = 2\int t\sin t dt =$

$$\begin{pmatrix} u = t\ ; & dv = \sin t dt \\ du = dt; & v = \int \sin t dt = -\cos t \end{pmatrix}$$

$= -2t\cos t + 2\int \cos t dt = -2t\sqrt{1-\sin^2 t} + 2\sin t + C =$

$= -2\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x} + 2\sqrt{x} + C$.

ж) Смена: $\ln x = t \Rightarrow \frac{dx}{x} = dt$, итд. Резултат је: $\ln x\cdot(\ln(\ln x) - 1) + C$.

з) $\int \frac{x\cdot x dx}{\sqrt{9-x^2}} = -x\sqrt{9-x^2} + \int \sqrt{9-x^2}dx = -\frac{x}{2}\sqrt{9-x^2} + \frac{9}{2}\arcsin\frac{x}{3} + C$.

$$\begin{pmatrix} u = x\ ; & dv = \dfrac{xdx}{\sqrt{9-x^2}} \\ du = dx; & v = -\sqrt{9-x^2} \end{pmatrix}.$$

(Видети решење *примера* 33. *б*).)

259. *а*) $x\dfrac{dy}{dx} = y^2 - y \Rightarrow \dfrac{dy}{y(y-1)} = \dfrac{dx}{x} \Rightarrow \displaystyle\int \frac{1-y+y}{y(y-1)}dy = \ln \mid x \mid +$ $+\ln C \Rightarrow \displaystyle\int \frac{dy}{y-1} - \int \frac{dy}{y} = \ln C \mid x \mid \Rightarrow \ln\left|\frac{y-1}{y}\right| = \ln C \mid x \mid$. Опште решење једначине је: $\dfrac{y-1}{y} = Cx$.

б) $xy\dfrac{dy}{dx} = 1 - x^2 \Rightarrow ydy = \left(\dfrac{1}{x} - x\right)dx \Rightarrow 2\displaystyle\int ydy = 2\int \frac{dx}{x} - 2\int xdx \Rightarrow$ $\Rightarrow y^2 = 2\ln x - x^2 + C$ - ово је опште решење.

в) $y(x^2-1)\dfrac{dy}{dx} = -x(1+y^2) \Rightarrow \dfrac{ydy}{1+y^2} = -\dfrac{xdx}{x^2-1} \Rightarrow \displaystyle\int \frac{2ydy}{1+y^2} = -\int \frac{2xdx}{x^2-1} \Rightarrow$ $\ln(1+y^2) = -\ln \mid x^2 - 1 \mid + \ln C$. Опште решење је: $1 + y^2 = \dfrac{C}{x^2-1}$.

г) Сменом: $2x - y = z \Rightarrow y' = 2 - z'$, добијемо: $z + (2z+3)(2-z') = 0$. Стављајући $z' = \dfrac{dz}{dx}$, раздвојимо променљиве x и z: $\dfrac{2z+3}{5z+6}dz = dx$, итд. Опште решење је: $3\ln \mid 10x - 5y + 6 \mid = 5x + 10y + C$.

260. *а*) Уводимо смену: $2x - 1 = t^2$, итд. Резултат је: 2.

б) Видети *пример* 30. *е*). Резултат је: $\dfrac{a^2\pi}{4}$.

в) $\displaystyle\int_0^1 \operatorname{arctg} xdx = x \cdot \operatorname{arctg} x\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{xdx}{1+x^2} = 1 \cdot \operatorname{arctg} 1 - 0 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2xdx}{1+x^2} =$

$$\begin{pmatrix} u = \operatorname{arctg} x; & dv = dx \\ du = \dfrac{dx}{1+x^2}; & v = x \end{pmatrix}$$

$= \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_0^1 = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{2}(\ln 2 - \ln 1) = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{2}\ln 2.$

г) Смена је $\operatorname{tg} x = t \Rightarrow \dfrac{dx}{\cos^2 x} = dt$, $t_1 = \operatorname{tg} 0 = 0$, $t_2 = \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4} = 1$, па је $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{\frac{1}{\cos^2 x} + 2\operatorname{tg}^2 x} = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2+2t^2} = \int_0^1 \frac{dt}{1+3t^2}$. Уводимо смену: $t = \dfrac{z}{\sqrt{3}} \Rightarrow$ $\Rightarrow dt = \dfrac{dz}{\sqrt{3}}$, $z_1 = 0$, $z_2 = \sqrt{3}$. Даље је: $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dz}{1+z^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg} z\Big|_0^{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

д) Прво уведемо смену: $x^2 = t \Rightarrow 2xdx = dt$, $t_1 = 0$, $t_2 = 1$, па добијемо:

$$\frac{1}{2}\int_0^1 te^t dt = \frac{1}{2}te^t\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 e^t dt = \frac{1}{2}e - 0 - \frac{1}{2}e^t\Big|_0^1 = \frac{1}{2}e - \frac{1}{2}e + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

$$\begin{pmatrix} u = t; & dv = e^t dt \\ du = dt; & v = e^t \end{pmatrix}$$

ђ) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx = x\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \frac{\pi}{2} - 0 + \cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1.$$

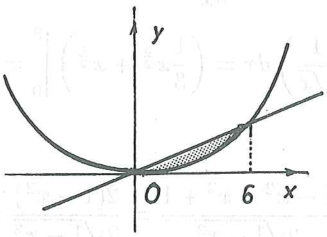
$$\begin{pmatrix} u = x; & dv = \cos x dx \\ du = dx; & v = \sin x \end{pmatrix}$$

261. *а)* $y = 0 \Leftrightarrow x = 0 \ \vee \ x = 3$, па је $P = \displaystyle\int_0^3 x(3-x)^2 dx =$

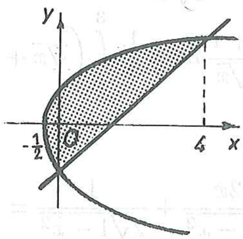
$$= \int_0^3 (9x - 6x^2 + x^3)dx = \left(\frac{9x^2}{2} - 2x^3 + \frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^3 = \frac{27}{4}.$$

б) Систем једначина $x^2 - 12y = 0 \ \wedge \ x - 2y = 0$ даје за x: $x_1 = 0$, $x_2 = 6$.

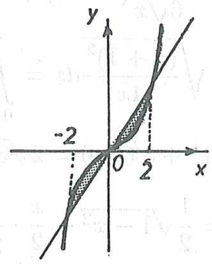
Према сл. 76 имамо: $P = \displaystyle\int_0^6 \left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{12}\right)dx = \left(\frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{36}\right)\Big|_0^6 = 9 - 6 = 3.$



Сл. 76



Сл. 77



Сл. 78

в) Пресек кривих $y^2 = 4x$ и $y^2 = x^3$ добијамо из једначине: $x^3 = 4x$, одакле је: $x = 0 \ \vee \ x = 2 \ \vee \ x = -2$. Није могуће $x = -2$, због $y^2 = 4x$. Према томе: $P = \displaystyle\int_0^2 (2\sqrt{x} - x\sqrt{x})dx = \left(\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\right)\Big|_0^2 = \frac{16\sqrt{2}}{15}.$

г) Тачке пресека даје једначина: $(x-1)^2 = 2x + 1 \Rightarrow x_1 = 0$, $x_2 = 4$. Тражену површину израчунавамо из два дела: одсечак параболе лево од осе Oy и остатак десно од осе Oy, сл. 77. Добијамо:

$$P = P_1 + P_2 = 2\int_{-\frac{1}{2}}^{0}\sqrt{2x+1}dx + \int_0^4 (\sqrt{2x+1} - (x-1))dx =$$

$$= \frac{2}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_{-\frac{1}{2}}^{0} + \left(\frac{1}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{2} + x\right)\Big|_0^4 = \frac{2}{3} + 9 - 8 + 4 - \frac{1}{3} = \frac{16}{3}.$$

д) Границе су $x_1 = -2$, $x_2 = 2$, а према сл. 78 je:

$$P = 2\int_0^2 (4x - x^3)dx = 2\left(2x^2 - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^2 = 8.$$

262. *а)* Како je $y' = \dfrac{x^2-1}{2x}$, а $1 + y'^{\,2} = 1 + \dfrac{(x^2-1)^2}{4x^2} = \dfrac{(x^2+1)^2}{4x^2}$, биће

$$s = \int_1^e \sqrt{1+y'^{\,2}}dx = \int_1^e \frac{x^2+1}{2x}dx = \frac{1}{2}\int_1^e \left(x + \frac{1}{x}\right) = \left(\frac{x^2}{4} + \frac{1}{2}\ln x\right)\Big|_1^e =$$

$$= \frac{e^2}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4}(e^2+1).$$

б) $y' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$, (видети *пример* 22. *е)*), па je $1 + y'^{\,2} = \dfrac{x^2}{x^2-1}$. Даље je:

$$s = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} \sqrt{\frac{x^2}{x^2-1}}dx = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}dx = \sqrt{x^2-1}\Big|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} = \sqrt{5-1} - \sqrt{2-1} = 1.$$

в) $y' = \dfrac{1}{6\sqrt{x}}(x-3) + \dfrac{\sqrt{x}}{3} = \dfrac{x-1}{2\sqrt{x}}$, па je $1 + y'^{\,2} = \dfrac{(x+1)^2}{4x}$. Према томе:

$$s = \int_0^3 \sqrt{\frac{(x+1)^2}{4x}}dx = \int_0^3 \frac{x+1}{2\sqrt{x}}dx = \frac{1}{2}\int_0^3 \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx = \left(\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{1}{2}}\right)\Big|_0^3 =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot 3^{\frac{3}{2}} + 3^{\frac{1}{2}} - 0 = 2\sqrt{3}.$$

г) $y' = \dfrac{1}{2}\sqrt{1-x^2} + \dfrac{x}{2}\cdot\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} + \dfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{1-x^2-x^2+1}{2\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{2(1-x^2)}{2\sqrt{1-x^2}} =$

$= \sqrt{1-x^2}$, па $s = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+(\sqrt{1-x^2})^2}dx = \int_0^1 \sqrt{2-x^2}dx$. Уведемо смену: $x = \sqrt{2}\sin t \Rightarrow dx = \sqrt{2}\cos t dt$, а из $0 = \sqrt{2}\sin t$ je $t_1 = 0$ и из $1 = \sqrt{2}\sin t$ je $t_2 = \dfrac{\pi}{4}$. Према томе: $s = \sqrt{2}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{2-2\sin^2 t}\cdot\cos t dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t dt =$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\cos 2t}{2}dt = \left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}.$$

263. *а)* Према *задатку* 262 *а)* је $\sqrt{1+y'^{\,2}}=\dfrac{x^2+1}{2x}$, па је

$$P=2\pi\int\limits_1^e y\sqrt{1+y'^{\,2}}dx=2\pi\int\limits_1^e\frac{1}{4}(x^2-2\ln x)\cdot\frac{x^2+1}{2x}dx=\frac{\pi}{4}\int\limits_1^e(x^3+x)dx-$$

$$-\frac{\pi}{2}\int\limits_1^e x\ln x dx-\frac{\pi}{2}\int\limits_1^e\frac{\ln x}{x}dx=\frac{\pi}{4}\left(\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_1^e-\frac{\pi}{4}x^2\ln x\Bigg|_1^e+\frac{\pi}{4}\int\limits_1^e xdx-$$

$$\begin{pmatrix} u=\ln x; & dv=xdx\\ du=\dfrac{dx}{x}; & v=\dfrac{x^2}{2}\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}\text{смена: } \ln x=t; & t_1=0\\ \dfrac{dx}{x}=dt; & t_2=1\end{pmatrix}$$

$$-\frac{\pi}{2}\int\limits_0^1 tdt=\frac{\pi}{4}\left(\frac{e^4}{4}+\frac{e^2}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)-\frac{\pi}{4}(e^2\ln e-0)+\frac{\pi}{4}\frac{x^2}{2}\Bigg|_1^e-\frac{\pi}{2}\cdot\frac{t^2}{2}\Bigg|_0^1=$$

$$=\frac{\pi}{4}\left(\frac{e^4}{4}+\frac{e^2}{2}-\frac{3}{4}\right)-\frac{\pi}{4}\cdot e^2+\frac{\pi}{4}\cdot\frac{e^2}{2}-\frac{\pi}{8}-\frac{\pi}{4}+0=\frac{\pi}{4}\left(\frac{e^4}{4}-\frac{9}{4}\right)=\frac{\pi}{16}(e^4-9).$$

б) $y'=\dfrac{x-4}{4\sqrt{x}}\Rightarrow\sqrt{1+y'^{\,2}}=\dfrac{x+4}{4\sqrt{x}}$. Према томе: $I=$

$$=2\pi\int\limits_0^{12}\frac{\sqrt{x}}{6}(x-12)\frac{(x+4)}{4\sqrt{x}}dx=\frac{\pi}{12}\int\limits_0^{12}(x^2-8x-48)=\frac{\pi}{12}\left(\frac{x^3}{3}-4x^2-48x\right)\Bigg|_0^{12}=$$

$=-48\pi$. Тражена површина је $P=48\pi$, а $I<0$ због $y<0$, за $x\in(0,\ 12)$.

в) $y'=-\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$, па $\sqrt{1+y'^{\,2}}=\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2-1}}=\sqrt{\dfrac{x^2}{x^2-1}}=\dfrac{-x}{\sqrt{x^2-1}}$, $x<0$.

$$P=2\pi\int\limits_{-2}^{-1}\ln(\sqrt{x^2-1}-x)\cdot\frac{-x}{\sqrt{x^2-1}}dx=-2\pi\sqrt{x^2-1}\ln(\sqrt{x^2-1}-x)\Bigg|_{-2}^{-1}-$$

$$\begin{pmatrix} u=\ln(\sqrt{x^2-1}-x); & dv=\dfrac{-xdx}{\sqrt{x^2-1}}\\ du=-\dfrac{dx}{\sqrt{x^2-1}}; & v=-\sqrt{x^2-1}\end{pmatrix}$$

$$-2\pi\int\limits_{-2}^{-1}dx=2\pi\sqrt{3}\ln(\sqrt{3}+2)-0-2\pi x\Bigg|_{-1}^{-2}=2\pi\left(\sqrt{3}\ln(\sqrt{3}+2)-1\right).$$

г) $y'=-\sin x$, па је $P=2\pi\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\sqrt{1+\sin^2 x}dx=2\pi\int\limits_0^1\sqrt{1+t^2}dt=$

$$\begin{pmatrix}\text{смена: } \sin x=t & t_1=\sin 0=0\\ \cos xdx=dt, & t_2=\sin\dfrac{\pi}{2}=1\end{pmatrix}$$

$$= \left(\pi \ln \mid t + \sqrt{1+t^2} \mid + \pi t\sqrt{1+t^2}\right)\Big|_0^1 = \pi \ln(1+\sqrt{2}) + \pi\sqrt{2}. \text{ *)}$$

264. *а)* $V = \pi \int\limits_0^1 y^2 dx = \pi \int\limits_0^1 x dx = \dfrac{\pi}{2}.$

б) $V = \pi \int\limits_0^\pi \sin^2 x dx = \dfrac{\pi}{2} \int\limits_0^\pi (1-\cos 2x) dx = \dfrac{\pi}{2}\left(x - \dfrac{1}{2}\sin 2x\right)\Big|_0^\pi = \dfrac{\pi^2}{2}.$

в) $V = \pi \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^2 x dx = \pi(\operatorname{tg} x - x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \pi - \dfrac{\pi^2}{4}$ (видети *пример* 29. *д)*).

$$= \pi \operatorname{tg} x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \pi x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \pi(1-0) - \pi\left(\frac{\pi}{4} - 0\right) = \pi - \frac{\pi^2}{4}.$$

г) $V = \pi \int\limits_{-a}^{a} \dfrac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) dx = \dfrac{4}{3} a^2 b\pi.$

265. *а)* Апсцисе пресечних тачака добијамо из једначине

$x^2 = x \Leftrightarrow x = 0 \ \vee \ x = 1$, па је $V = \pi \int\limits_0^1 \left(x^2 - (x^2)^2\right) dx =$

$$= \pi \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 - \pi \frac{x^5}{5}\Big|_0^1 = \pi\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) = \frac{2\pi}{15}.$$

б) Пресек датих кривих даје границе: $x_1 = 0$, $x_2 = 2$ (видети решење *задатка* 261 *в)*), па је $V = \pi \int\limits_0^2 (4x - x^3) dx = \pi\left(2x^2 - \dfrac{x^4}{4}\right)\Big|_0^2 = \pi(8-4) = 4\pi.$

в) $V = \pi \int\limits_0^2 (8x - x^4) dx = \pi\left(4x^2 - \dfrac{x^5}{5}\right)\Big|_0^2 = \pi\left(16 - \dfrac{32}{5}\right) = \dfrac{48\pi}{5}.$

266. Сређивањем датог израза добијамо:

$$R = \left(\frac{4}{a + \dfrac{c}{bc+1}} : \frac{b}{ab+1} - \frac{4}{b(abc+a+c)}\right)^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\frac{4(bc+1)}{abc+a+c} \cdot \frac{ab+1}{b} - \frac{4}{b(abc+a+c)}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{4(bc+1)(ab+1) - 4}{b(abc+a+c)}\right)^{-\frac{1}{2}} =$$

---

*)Видети решење *примера* 41 *а)*.

$$= \left(\frac{4(ab^2c+bc+ab+1-1)}{b(abc+a+c)}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{4b(abc+a+c)}{b(abc+a+c)}\right)^{-\frac{1}{2}} = 4^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2},$$
јер је $b \neq 0$ и $abc+a+c \neq 0$.

267. Пошто $\log_y x$, $\log_z y$ и $\log_x z$ образују геометријску прогресију, важи једнакост: $\log_z^2 y = \log_y x \cdot \log_x z$. Применимо особине (24) и (29) из ДРУГЕ ГЛАВЕ, па добијемо: $\log_z^2 y = \dfrac{\log_z x}{\log_z y} \cdot \dfrac{1}{\log_z x}$, а одавде је $\log_z^3 y = 1$, па је и $\log_z y = 1$. Дакле $y = z$. Заменимо ово у прву једначину и добијемо: $2x^2 = 2y^2$, па је $x = y$ (јер су x, y и z позитивни бројеви). Дакле: $x = y = z$, па из друге једначине система добијамо: $x^3 = 64$. Систем има јединствено решење: $x = y = z = 4$.

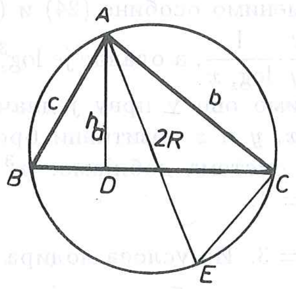
268. *а)* (a): $y = \dfrac{4}{3}x + 3$, па је $k = \dfrac{4}{3}$ и $n = 3$. Из услова додира праве и параболе: $p = 2kn$, добијамо $p = 8$. Тражена парабола има једначину: $y^2 = 16x$.

б) Тражимо додирну тачку тангенте, која је паралелна са датом правом: $y = -4x-4$, чији је коефицијент правца $k_1 = -4$. Једначина тангенте је $y = -4x+n$, а из услова додира је $8 = -8n$ и $n = -1$. Коначно, тражена тангента је $y = -4x - 1$. Додирна тачка је одређена решењем система једначина $y = -4x - 1 \wedge y^2 = 16x$, а то је $x = \dfrac{1}{4}$, $y = -2$.

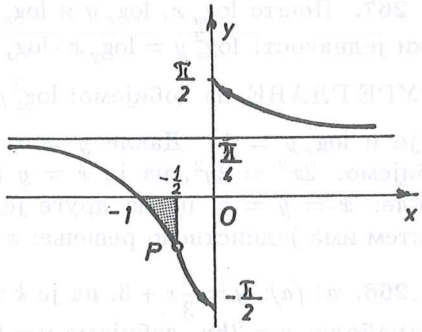
в) Одстојање тачке P од праве a је: $h_P = \left|\dfrac{4 \cdot \frac{1}{4} - 3 \cdot (-2) + 9}{-\sqrt{16+9}}\right| = \dfrac{16}{5}$.

269. Нека је D подножје висине h_a и $AE = 2R$ пречник описаног круга, сл. 79. Угао ACE је прав (периферијски угао над пречником), а $\sphericalangle AEC = \sphericalangle ABC$ (периферијски углови над тетивом AC), па су правоугли троуглови AEC и ABD слични. Из ове сличности закључујемо да је $AE : AC = AB : AD$, тј. $2R : b = c : h_a$. Одавде је $bc = 2R \cdot h_a$. Помножимо ову једнакост са $\dfrac{a}{2}$, па заменимо $\dfrac{ah_a}{2} = P$ и добијемо $\dfrac{abc}{2} = 2RP$. Отуда је $R = \dfrac{abc}{4P}$.

270. *а)* Функција је дефинисана за $x \neq 0$; $y = 0$ за $x = -1$. $\lim\limits_{x\to -0} \operatorname{arctg} \dfrac{x+1}{x} = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{-0} = \operatorname{arctg}(-\infty) = -\dfrac{\pi}{2}$ и $\lim\limits_{x\to +0} \operatorname{arctg} \dfrac{x+1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$, па функција нема вертикалних асимптота. Даље је $\lim\limits_{x\to -\infty} \operatorname{arctg} \dfrac{x+1}{x} = $ $= \operatorname{arctg} 1 = \dfrac{\pi}{4} = \lim\limits_{x\to +\infty} \operatorname{arctg} \dfrac{x+1}{x}$ и $y = \dfrac{\pi}{4}$ је хоризонтална асимптота. Косих асимптота нема. Први извод је $y' = -\dfrac{1}{2x^2+2x+1}$, па функција стално опада. Други извод је $y'' = \dfrac{4x+2}{(2x^2+2x+1)^2}$. За $x < -\dfrac{1}{2}$ је $y'' < 0$, па је функција конкавна. За $x \in \left(-\frac{1}{2},\ 0\right) \cup (0,\ +\infty)$ функција је конвексна. Тачка $P\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{\pi}{4}\right)$ је превојна. График видимо на сл. 80.



Сл. 79



Сл. 80

б) Тражена површ је осенчена на сл. 80: $P = -\int\limits_{-1}^{-\frac{1}{2}} y\,dx =$

$$= -\int\limits_{-1}^{-\frac{1}{2}} \operatorname{arctg}\frac{x+1}{x}\,dx = -x\operatorname{arctg}\frac{x+1}{x}\Big|_{-1}^{-\frac{1}{2}} - \int\limits_{-1}^{-\frac{1}{2}} \frac{x\,dx}{2x^2+2x+1} = -\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(-1) -$$

$$\left(\begin{array}{l|l} u = \operatorname{arctg}\dfrac{x+1}{x}; & dv = dx \\ du = -\dfrac{dx}{2x^2+2x+1}; & v = x \end{array}\right)$$

$$-\frac{1}{4}\int\limits_{-1}^{-\frac{1}{2}} \frac{4x+2-2}{2x^2+2x+1}\,dx = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\int\limits_{-1}^{-\frac{1}{2}} \frac{(4x+2)dx}{2x^2+2x+1} + \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{-\frac{1}{2}} \frac{2dx}{4x^2+4x+2} =$$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\ln(2x^2+2x+1)\Big|_{-1}^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{-\frac{1}{2}} \frac{2dx}{(2x+1)^2+1} = \left(\begin{array}{c} \text{смена}:\ 2x+1=t \\ 2dx = dt,\quad t \in [-1,\ 0] \end{array}\right)$$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\left(\ln\frac{1}{2} - \ln 1\right) + \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{0} \frac{dt}{t^2+1} = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\ln 2 + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t\Big|_{-1}^{0} =$$

$$= \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\ln 2 + 0 - \operatorname{arctg}(-1) = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\ln 2 + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{8} + \frac{1}{4}\ln 2\,.$$

271. Нека је $a_1 = x$. Тада имамо бројеве x, $x+d$, $x+2d$, $x+3d$. После увећавања биће: $x+5$, $x+d+6$, $x+2d+9$, $x+3d+15$. На основу особине (88) из ТРЕЋЕ ГЛАВЕ, чланови добијене геометријске прогресије задовољавају услове: $(x+d+6)^2 = (x+5)(x+2d+9)$ и $(x+2d+9)^2 = (x+d+6)(x+3d+15)$. Сређивањем једначине постају:

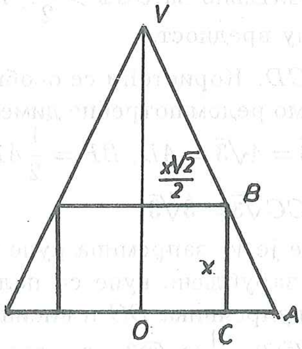
$2x = d^2 + 2d - 9$ и $3x = d^2 + 3d - 9$. Одузимањем прве од друге добијамо: $x = d$. Заменом у прву једначину добијамо $d^2 = 9$, па је $d = 3$ и $x = a_1 = 3$. Тражени бројеви су 3, 6, 9, 12. (Не може бити $d = -3$, јер бисмо додавањем бројева 5, 6, 9, 15 добили низ: 2, 0, 0, 3, а знамо да чланови геометријске прогресије не могу бити нуле.

272. *а)* Морају бити испуњени услови $k - 2 < 0$ и $D < 0$, тј. $4k^2 - 4(k-2)(2k-3) < 0$. Прва неједначина даје $k < 2$, а друга, сређена постаје: $-k^2 + 7k - 6 < 0$ и задовољена је за $k \notin [1, 6]$. Функција ће бити негативна за $\forall x$ ако је $k < 1$.

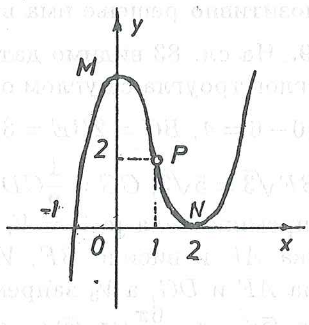
б) $\dfrac{1}{x_1^2} + \dfrac{1}{x_2^2} = \dfrac{x_2^2 + x_1^2}{x_1^2 x_2^2} = \dfrac{(x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2}{(x_1x_2)^2}$. Како је $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} = \dfrac{2k}{k-2}$ и $x_1x_2 = \dfrac{c}{a} = \dfrac{2k-3}{k-2}$, после сређивања добијамо: $\dfrac{1}{x_1^2} + \dfrac{1}{x_2^2} = \dfrac{14k-12}{4k^2-12k+9} = 2$. Решења ове једначине су $k_1 = 1$ и $k_2 = \dfrac{15}{4}$.

273. Једначина има смисла за $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$. Због $3 = 3(\sin^2 x + \cos^2 x)$, (једначину поделимо са $\cos^2 x$) добићемо: $\operatorname{tg}^2 x(\operatorname{tg} x + 1) = 3(\operatorname{tg} x + 1)$, односно $(\operatorname{tg} x + 1)(\operatorname{tg}^2 x - 3) = 0$. Одавде је $\operatorname{tg} x = -1$, $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ или $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$, па су решења: $x_1 = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi$, $x_2 = \dfrac{\pi}{3} + m\pi$, $x_3 = -\dfrac{\pi}{3} + n\pi$, $k, m, n \in Z$.

274. Дијагонални пресек коцке је правоугаоник уписан у осном пресеку купе, сл. 81. Означимо са x ивицу коцке. Тада је дијагонала једне стране $x\sqrt{2}$. Троуглови AOV и ACB су слични, па је $AO : VO = AC : BC$, односно $r : r\sqrt{2} = \left(r - \dfrac{x\sqrt{2}}{2}\right) : x$. Одавде је $x = \dfrac{1}{2}r\sqrt{2}$, а запремина коцке је $V_1 = x^3 = \dfrac{1}{4}r^3\sqrt{2}$. Тражена размера је $V : V_1 = \dfrac{1}{3}r^2\pi H : \dfrac{1}{4}r^3\sqrt{2} = \dfrac{1}{3}r^3\pi\sqrt{2} : \dfrac{1}{4}r^3\sqrt{2} = 4\pi : 3$.



Сл. 81



Сл. 82

275. *а)* Функција је дефинисана за свако реално x. Има нуле $x_1 = -1$ и $x_2 = 2$. ($x^3-3x^2+4 = x^3-4x^2+4x+x^2-4x+4 = x(x^2-4x+4)+(x^2-4x+4) = (x+1)(x-2)^2$.). Нема асимптота. Извод је $y' = 3x^2-6x = 3x(x-2)$, па је $y' > 0$ за $x \in (-\infty,\ 0) \cup (2,\ +\infty)$ - ту функција расте. За $x \in (0,\ 2)$ је $y' < 0$ и функција опада. $M(0,\ 4)$ је максимум, а $N(0,\ 2)$ минимум. Други извод је $y'' = 6x-6$ и $P(1,\ 2)$ је превојна тачка. За $x \in (-\infty,\ 1)$ функција је конкавна, а за $x \in (1,\ +\infty)$ је конвексна. График је на сл. 82.

б) $V = \pi \displaystyle\int_{-1}^{2} (x^3-3x^2+4)dx = \frac{729\pi}{35}$.

276. *а)* За $a \neq 2$ једначина је еквивалентна са $x(a+1)^2 = 4(a+1)$. Ако је $a+1=0$, тј. $a=-1$, једначина је еквивалентна са $0 \cdot x = 0$, што је тачно за свако x. Ако је $a \neq -1$, решење је $x = \dfrac{4}{a+1}$.

б) Решење једначине је позитивно ако је $a+1>0$, а то је испуњено за $a > -1$ и $a \neq 2$, тј. за $a \in (-1,\ 2) \cup (2,\ +\infty)$.

277. Неједначина се своди на $\sqrt{(x^2-1)^2} > 1-x$, тј. на $|\ x^2-1\ | > 1-x$, а она је задовољена за свако x, за које је десна страна негативна. То је испуњено за $x > 1$. За $x \in (-1,\ 1)$, је $1-x^2 > 1-x \Leftrightarrow x(1-x) > 0$, па је $x \in (0,\ 1)$ решење. За $x < -1$ имамо: $x^2-1 > 1-x \Leftrightarrow (x-1)(x+2) > 0$, па је и $x < -2$ решење неједначине. Према томе, решења су:
$x \in (-\infty,\ -2) \cup (0,\ 1) \cup (1,\ +\infty)$.

278. *а)* Решења су реална и различита ако је $D > 0$, тј. ако је $6\cos\alpha - 3 > 0$. То је испуњено за $\cos\alpha > \dfrac{1}{2}$, тј. за $0 \leq \alpha < \dfrac{\pi}{3}$.

б) Ако је $\cos\alpha < \dfrac{1}{2}$ слободан члан једначине: $2\cos^2\alpha - 5\cos\alpha + 2$ је позитиван, а негативан за $\cos\alpha > \dfrac{1}{2}$. Према резултату из *а)* следи да је слободан члан негативан, па је $x_1 \cdot x_2 < 0$, тј. решења су супротног знака. Сем тога је $x_1 + x_2 = 2\cos\alpha - 1$, а то је позитивно за $\cos x > \dfrac{1}{2}$. Према томе, позитивно решење има већу апсолутну вредност.

279. На сл. 83 видимо дати трапез $ABCD$. Користећи се особинама правоуглог троугла са углом од 60^o, налазимо редом потребне димензије: $BE = 10-6 = 4$, $BC = 2BE = 8$, $CE = BE\sqrt{3} = 4\sqrt{3} = AD$, $BF = \dfrac{1}{2}AB = 5$, $AF = BF\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$, $CG = \dfrac{1}{2}CD = 3$ и $DG = CG\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$.

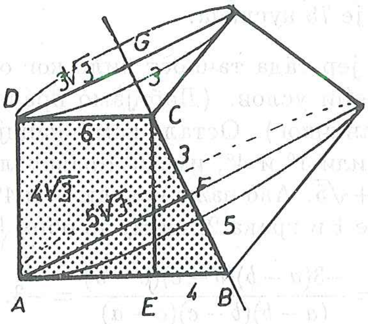
Запремина тела је $V = V_1 + V_2 - V_3$, где је V_1 запремина купе полупречника AF и висине BF, V_2 запремина зарубљене купе са полупречницима AF и DG, а V_3 запремина купе полупречника DG и висине CG:
$V = \dfrac{1}{3}(5\sqrt{3})^2\pi \cdot 5 + \dfrac{6\pi}{3}((5\sqrt{3})^2 + 5\sqrt{3}\cdot 3\sqrt{3} + (3\sqrt{3})^2) - \dfrac{1}{3}(3\sqrt{3})^2\pi \cdot 3 = 392\pi\ cm^3$.

Површина тела је збир омотача двеју купа и зарубљене купе:
$P = 5\sqrt{3}\pi \cdot 10 + 5\sqrt{3}\pi \cdot 4\sqrt{3} + 3\sqrt{3}\pi \cdot 4\sqrt{3} + 3\sqrt{3}\pi \cdot 6 = \pi(68\sqrt{3} + 96)\ cm^2$.

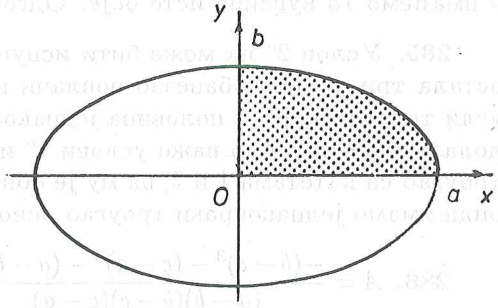
280. Из једначине елипсе је $y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, па је, према сл. 84,

$$P = 4\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}dx = 4\frac{b}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - a^2\sin t} \cdot a\cos t dt = 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = =$$

$$2ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1 + \cos 2t)dt = 2ab\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = ab\pi. \text{ (Смена } x = a\sin t.)$$



Сл. 83



Сл. 84

281. Производ два троцифрена броја може бити петоцифрен или шестоцифрен, дакле 33333 или 333333. Како је $33333 = 3 \cdot 41 \cdot 271$ (бројеви 3, 41 и 271 су прости), то тражени бројеви могу бити само 123 и 271. Нека је $x \cdot y = 333333 = 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37$ и нека је $x = 37k$. Пошто је x троцифрен број, већи од 333 (у противном би било $y > 1000$), мора бити $10 \leq k \leq 27$. С обзиром на чиниоце броја 333333, k је 11, 13 или 21. Према томе, поред раније комбинације ($x = 123$, $y = 271$), постоје још три решења: $x = 407$, $y = 819$, или $x = 481$, $y = 693$, или $x = 777$, $y = 429$.

282. За $\cos t \neq 0$ и $\cos 2t \neq 0$, тј. $t \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ и $t \neq \frac{\pi}{4} + \frac{m\pi}{2}$, k, $m \in Z$, важи: $\frac{\cos 3t}{\cos t} - \frac{\cos 6t}{\cos 2t} = \frac{\cos 2t\cos t - \sin 2t\sin t}{\cos t} - \frac{\cos 4t\cos 2t - \sin 4t\sin 2t}{\cos 2t} =$

$= \frac{\cos 2t\cos t - 2\sin^2 t\cos t}{\cos t} - \frac{\cos 4t\cos 2t - 2\sin^2 2t\cos 2t}{\cos 2t} = \cos 2t - 2\sin^2 t -$

$- \cos 4t + 2\sin^2 2t = \cos 2t - (1 - \cos 2t) - \cos 4t + 1 - \cos 4t = 2(\cos 2t - \cos 4t)$.

Дата једнакост представља условну идентичност.

Према овом резултату, једнакост $\frac{\cos 3t}{\cos t} = \frac{\cos 6t}{\cos 2t}$ је еквивалентна једначини: $\cos 2t = \cos 4t$, која даје решења: $2t = 4t + 2k\pi \Rightarrow t_1 = k\pi$ и $2t = -4t + 2m\pi \Rightarrow t_2 = \frac{1}{3}m\pi$, k, $m \in Z$. Довољно је узети само t_2, јер за $m = 3k$ је $t_1 = t_2$.

283. Неједначина има смисла за $x > \dfrac{2}{3}$. Како је: $\log_5 x = \log_{25} x^2$, биће $\log_{25} x^2 - \log_{25}(3x-2) \geq 0$, односно $\log_{25} \dfrac{x^2}{3x-2} \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{3x-2} \geq 1 \Leftrightarrow$ $\dfrac{x^2-3x+2}{3x-2} \geq 0 \Leftrightarrow x^2-3x+2 \geq 0$ (јер због $x > \dfrac{2}{3}$ је и $3x-2>0$). Дакле: $x \in (-\infty,\ 1] \cup [2,\ +\infty)$. Решење неједначине је $x \in \left(\dfrac{3}{2},\ 1\right] \cup [2,\ +\infty)$.

284. Најнеповољнија могућност је да извучемо све беле, црне и жуте куглице и по 14 црвених, плавих и зелених - то је 74 куглице. Ако извучемо још једну, 75 -у, она мора бити црвена, или плава, или зелена и имаћемо 15 куглица исте боје. Одговор је 75 куглица.

285. Услов 2^o на може бити испуњен, јер тада тачност било ког од остала три услова обавезно повлачи и трећи услов. (Добијамо правоугли троугао који је половина једнакостраничног). Остале комбинације долазе у обзир. Ако важе услови 1^o и 3^o или 1^o и 4^o, имамо правоугли троугао са катетама 1 и 2, па му је обим $3+\sqrt{5}$. Ако важе услови 3^o и 4^o, онда имамо једнакокраки троугао основице 1 и крака 2, па му је обим 5.

286. $A = \dfrac{-(b-c)^3-(c-a)^3-(a-b)^3}{(a-b)(b-c)(c-a)} = \dfrac{-3(a-b)(b-c)(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)} = -3.$ (Видети *решење задатка* 11 *в)* .)

287. $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1+1}{2^2}+\dfrac{1+1+1}{2^3}+\dots+\dfrac{1+1+\dots+1}{2^n} = \left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\dots+\dfrac{1}{2^n}\right)+$ $+\left(\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^3}+\dots+\dfrac{1}{2^n}\right)+\left(\dfrac{1}{2^3}+\dots+\dfrac{1}{2^n}\right)+\dots+\dfrac{1}{2^n} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1-\dfrac{1}{2^n}}{\dfrac{1}{2}}+$

$+\dfrac{1}{2^2}\cdot\dfrac{1-\dfrac{1}{2^{n-1}}}{\dfrac{1}{2}}+\dfrac{1}{2^3}\cdot\dfrac{1-\dfrac{1}{2^{n-2}}}{\dfrac{1}{2}}+\dots+\dfrac{1}{2^n}\cdot\dfrac{1-\dfrac{1}{2}}{\dfrac{1}{2}} = 1-\dfrac{1}{2^n}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2^n}+\dfrac{1}{2^2}-\dfrac{1}{2^n}+$

$+\dots+\dfrac{1}{2^{n-1}}-\dfrac{1}{2^n} = 1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\dots+\dfrac{1}{2^{n-1}}-\dfrac{n}{2^n} = \dfrac{1-\dfrac{1}{2^n}}{\dfrac{1}{2}}-\dfrac{n}{2^n} =$

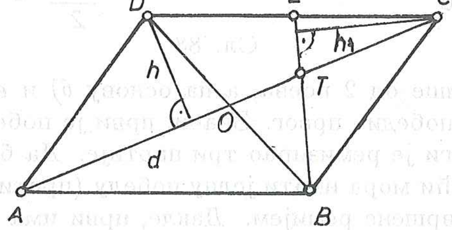
$= 2-\dfrac{2}{2^n}-\dfrac{n}{2^n} = \dfrac{-n-2}{2^n}+2$. Дакле: $A=-1$, $B=-2$, $C=2$.

288. Број је дељив са 36 ако је дељив са 4 и са 9, а дељив је са 4 ако је број $\overline{5y}$ дељив са 4. Значи $y=2$, или $y=6$. Број је дељив са 9 ако му је збир цифара дељив са 9. Дакле, за $y=2$ је $x=4$, а за $y=6$ је $x=0$, или $x=9$. Тражени бројеви су: 34452, 34056 и 34956.

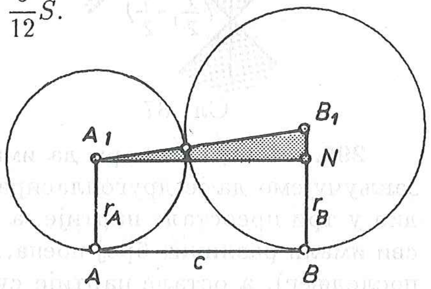
289. Како је $2\sin x\cos(a-x) = \sin(x+a-x)+\sin(x-a+x) = \sin a+$

$+\sin(2x-a)$, дата једначина постаје: $\sin x+\sin(2x-a)=0$, односно $2\sin\left(\frac{3x}{2}-\frac{a}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{a}{2}\right)=0$. Решење добијамо из: $\frac{3x}{2}-\frac{a}{2}=k\pi$ и $\frac{x}{2}-\frac{a}{2}=\frac{\pi}{2}+m\pi$, а то су: $x_1=\frac{a}{3}+\frac{2k\pi}{3}$, $x_2=a+(2m+1)\pi$, $k,\ m\in Z$.

290. Дијагонала $AC=d$ полови правоугаоник, па је $S=d\cdot h$, где је h висина троугла ABC или ACD, сл. 85. Тачка T, у којој се секу AC и BE је тежиште троугла BCD, па је $CT=\frac{1}{3}d$ и $BT:TE=2:1$. Дакле, површина троугла BCT је $P_1=\frac{1}{2}\frac{d}{3}\cdot h=\frac{1}{6}dh=\frac{1}{6}S$. Површина троугла ABT је $P_2=\frac{1}{2}AT\cdot h=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}d\cdot h=\frac{1}{3}dh=\frac{1}{3}S$. Површина троугла CTE је $P_3=\frac{1}{2}ET\cdot h_1=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}BT\cdot h_1=\frac{1}{2}P_1=\frac{1}{12}S$. Површина преосталог четвороугла $ADET$ је $P_4=\frac{1}{2}S-\frac{1}{12}S=\frac{5}{12}S$.



Сл. 85



Сл. 86

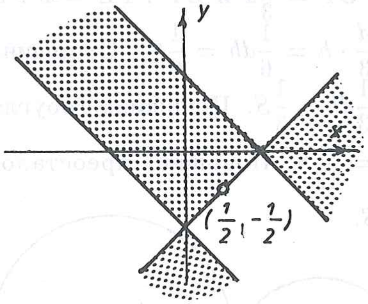
291. Једначина има смисла за $\operatorname{tg}x>0$ и $\operatorname{tg}2x>0$. Имамо: $\log_{\operatorname{tg}x}\operatorname{tg}2x=0\Leftrightarrow\operatorname{tg}x\operatorname{tg}2x=1$. Сменимо $\operatorname{tg}2x=\frac{2\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}^2x}$ и добијемо $3\operatorname{tg}^2x=1$, одакле је $\operatorname{tg}x=\frac{\sqrt{3}}{3}$, па је $x=\frac{\pi}{6}+k\pi$, $k\in Z$.

292. Нека су r_A и r_B полупречници, а A_1 и B_1 центри сфера које додирују раван ABC у A и B, сл. 86. Четвороугао AA_1B_1B је правоугли трапез, па из троугла A_1B_1N добијамо: $A_1B_1^2=A_1N^2+NB_1^2$, односно: $(r_A+r_B)^2=c^2+(r_B-r_A)^2$. Одавде је $4r_Ar_B=c^2$. Слично се доказује да је $4r_B\cdot r_C=a^2$ и $4r_A\cdot r_C=b^2$. Множењем ових једнакости добијамо: $64r_A^2r_B^2r_C^2=a^2b^2c^2$, тј. $8r_Ar_Br_C=abc$. Даље је $r_A=\frac{8r_Ar_Br_C}{8r_Br_C}=\frac{abc}{2a^2}=\frac{bc}{2a}$ и слично $r_B=\frac{ac}{2b}$, $r_C=\frac{ab}{2c}$.

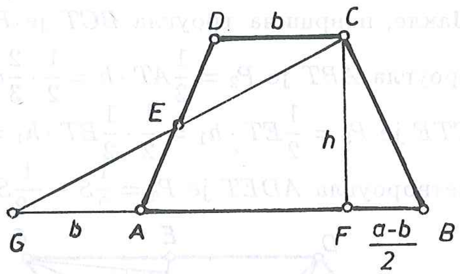
293. $\sum_{k=1}^{n}k(2k-1)=2\sum_{k=1}^{n}k^2-\sum_{k=1}^{n}k=2(1^2+2^2+\cdots+n^2)-(1+2+\cdots+n)=$
$=2\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{n(n+1)}{2}=\frac{1}{6}n(n+1)(2(2n+1)-3)=$

$= \frac{1}{6}n(n+1)(4n-1) = n(n+1)\left(\frac{2}{3}n - \frac{1}{6}\right)$. Значи $a = \frac{2}{3}$ и $b = -\frac{1}{6}$.

294. Дата неједнакост је испуњена у сваком од следећих случајева: 1^o $x+y=0 \wedge -x+y+1>0$; 2^o $-1<x+y<1 \wedge -x+y+1 \geq 0 \wedge$ $\wedge\ (x,\ y) \neq \left(\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$; 3^o $x+y<-1 \wedge -x+y+1 \leq 0$; 4^o $x+y>1 \wedge -x+y+1 \leq 0$. Случај 1^o се садржи у 2^o. На сл. 87 шрафуром је означен део равни Oxy који задовољава постављени услов.



Сл. 87



Сл. 88

295. Победник мора да има више од 2 поена, а на основу *б)* и *в)* закључујемо да је другопласирани победио првог. Значи, први је победио у три преостале партије, а други је ремизирао три партије. Да би сви имали различит број поена, трећи мора имати једну победу (против последњег), а остале партије су завршене ремијем. Дакле, први има 3 поена, други 2.5, трећи 2, четврти 1.5 и пети 1 поен.

296. Претпоставимо да је збир од n узастопних природних бројева једнак 1986. Разликоваћемо два случаја. *Прво:* нека је n непаран број, $n = 2k+1$, и нека је p средњи од тражених бројева. Тада ће бити: $(p-k)+(p-k+1)+\cdots+(p-1)+p+(p+1)+\cdots+(p+k-1)+(p+k) = 1986$, односно $n \cdot p = 1986$. Значи, n је непаран делилац броја 1986 и $n=1$, или $n=3$ или $n=331$, или $n=993$. За $n=1$ је $p=1986$, што се не може сматрати решењем, јер је збир бинарна операција и морали бисмо имати бар два сабирка. За $n=3$ је $p=662$, па су тражени бројеви $661+662+663$. За $n=331$ и $p=6$, а такође за $n=993$ и $p=3$, добили бисмо негативне бројеве, што не задовољава захтеве. Дакле, за $n=2k+1$ имамо само једно решење.

За $n=2k$, уочимо p, тако да је $(p-k)+(p-k+1)+\cdots+(p-1)+p+(p+1)+\cdots+p+k-1 = 1986$. Одавде је $np = 1986+k$, односно $2kp = 1986+k$. Пошто је лева страна паран број, мора и k бити паран број, па је n дељиво са 4. Сада из $np = 1986+k = 1986+\frac{n}{2}$, добијамо: $p = \frac{1986}{n}+\frac{1}{2}$. За $n=4$ је $p=497$, па су тражени бројеви: 495, 496, 497, 498. За $n=8$ нема решења, а за $n=12$ је $p=166$, па су тражени бројеви: 160, 161, ..., 171. За $n>12$ нема решења.

297. Нека је CF висина трапеза, сл. 88, и G пресечна тачка правих AB и CE. Троуглови AEG и DEC су подударни, па је $AG = b$, затим $BG = a + b$ и $BF = \frac{a-b}{2}$. Одавде следи да је $GF = \frac{1}{2}(a + 3b)$. Сада из правоуглих троуглова CFG и BCF добијамо: $CG^2 = h^2 + \frac{(a+3b)^2}{4}$ и $BC^2 = h^2 + \frac{(a-b)^2}{4}$. Троугао BCG је такође правоугли, па је $CG^2 + BC^2 = BG^2$, односно $h^2 + \frac{(a+3b)^2}{4} + h^2 + \frac{(a-b)^2}{4} = (a+b)^2$. Одавде $h^2 = \frac{1}{4}(a^2+2ab-3b^2)$, па је $h = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+2ab-3b^2}$ и $P = \frac{a+b}{4}\sqrt{a^2+2ab-3b^2}$. За $a = 14$, $b = 6$ је $P = 80$.

298. Нека је $y = 1 - 1986x^2$. Дата једначина постаје: $x = 1 - 1986y^2$. Да бисмо решили добијени систем, одузећемо прву једначину од друге: $x - y + 1986y^2 - 1986x^2 = 0 \Leftrightarrow (x-y) - 1986(x-y)(x+y) = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (x-y)(1 - 1986x - 1986y) = 0 \Leftrightarrow (x = y \vee 1986x + 1986y = 1)$. Решења за x и y дају следећа два система једначина:

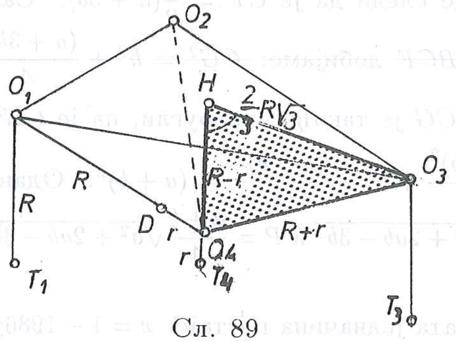
$$\begin{array}{ll} x - y = 0 & \quad 1986x + 1986y = 1 \\ \underline{1 - 1986y^2 = x} & \quad \underline{1 - 1986y^2 = x} \end{array}$$

чија решења по x су: $x_{1,\,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{7945}}{3972}$; $x_{3,\,4} = \frac{1 \pm \sqrt{7941}}{3972}$.

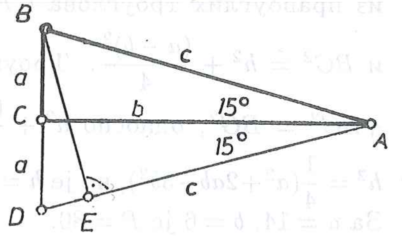
299. Према услову је $a^2 + b^2 = c^2$, $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$, $\frac{a}{c} = \sin\alpha$ и $\frac{b}{c} = \cos\alpha$. Знајући то, најпре израчунамо: $4\sin(x+\beta)\sin(x+\alpha) = 2(\cos(\beta-\alpha) - \cos(2x+\beta+\alpha)) = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right)\right) = 2(\sin 2\alpha + \sin 2x)$. Дату једначину трансформишемо: $2c^2(\sin 2\alpha + \sin 2x) = a^2 + b^2 + 4ab \Leftrightarrow 2c^2(\sin 2\alpha + \sin 2x) = c^2 + 4ab$. Поделимо са $2c^2$ и добијемо: $\frac{4ab}{2c^2} = 2\frac{a}{c}\cdot\frac{b}{c} = 2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha$. Даље је: $\sin 2\alpha + \sin 2x = \frac{1}{2} + \sin 2\alpha \Leftrightarrow \sin 2x = \frac{1}{2}$. Решења су: $x_1 = \frac{\pi}{12} + k\pi$, $x_2 = \frac{5\pi}{12} + m\pi$, $k,\ m \in Z$.

300. Ако су O_1, O_2, O_3 центри трију једнаких кугли, тада је $O_1O_2O_3$ једнакостраничан троугао странице $2R$, паралелан равни стола и удаљен од стола за R. (На сл. 89 је $O_1T_1 = R$, где је T_1 додирна тачка прве кугле са столом.) Четврта кугла мора бити мањег полупречника r, са центром O_4 испод троугла $O_1O_2O_3$. Тачке O_1, O_2, O_3, O_4 су темена тетраедра, коме су бочне ивице $O_1O_4 = O_2O_4 = O_3O_4 = R + r$ и висина $O_4H = HT_4 - O_4T_4 = O_1T_1 - O_4T_4 = R - r$. Дуж O_3H је полупречник круга описаног око троугла $O_1O_2O_3$, тј. $O_3H = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$. Из правоуглог троугла O_3O_4H налазимо да је: $O_3O_4^2 = O_3H^2 + O_4H^2$, тј.

$(R+r)^2 = \left(\frac{2}{3}R\sqrt{3}\right)^2 + (R-r)^2$, одакле је $r = \frac{R}{3}$.



Сл. 89



Сл. 90

301. Рационалисањем имениоца добијамо:

$$a_n = \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}} \cdot \frac{(n+1)\sqrt{n}-n\sqrt{n+1}}{(n+1)\sqrt{n}-n\sqrt{n+1}} =$$

$$= \frac{(n+1)\sqrt{n}-n\sqrt{n+1}}{(n+1)^2\cdot n - n^2(n+1)} = \frac{(n+1)\sqrt{n}-n\sqrt{n+1}}{n(n+1)} = \frac{\sqrt{n}}{n} - \frac{\sqrt{n+1}}{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n}} -$$

$-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$. Према томе, тражени збир је: $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{98} + a_{99} =$

$$= 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \cdots + \frac{1}{\sqrt{98}} - \frac{1}{\sqrt{99}} + \frac{1}{\sqrt{99}} - \frac{1}{\sqrt{100}} = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}.$$

302. Доказаћемо *прво* да $P(x) = A(x^3-x)$ задовољава дати услов: $(x-1)P(x+1) = (x-1)\cdot A((x+1)^3-(x+1)) = (x-1)A\cdot(x+1)(x^2+2x) = (x-1)Ax(x+1)(x+2) = (x+2)Ax(x-1)(x+1) = (x+2)A(x^3-x) = (x+2)P(x)$.
Друго, доказаћемо да из $(*)$: $(x-1)P(x+1) = (x+2)P(x)$, следи да је $P(x) = A(x^3-x)$. Из $(*)$, за $x=1$ добијамо: $0\cdot P(2) = 3P(1)$, одакле је $P(1)=0$. За $x=0$ је: $-1\cdot P(1) = 2P(0)$, па због $P(1)=0$, следи и $P(0)=0$. Коначно, за $x=-1$ биће: $-2P(0) = 1\cdot P(-1)$ и због $P(0)=0$ је и $P(-1)=0$. Дакле, $x=-1$, $x=0$ и $x=1$ су нуле полинома $P(x)$, па је $P(x) = x(x-1)(x+1)\cdot Q(x) = (x^3-x)\cdot Q(x)$. Одавде је $P(x+1) = ((x+1)^3-(x+1))Q(x+1)$, па како из $(*)$ $P(x+1) = \frac{x+2}{x-1}P(x) = \frac{x+2}{x-1}(x^3-x)Q(x)$, а $(x+1)^3-(x+1) = x(x+1)(x+2)$, добијамо: $\frac{x+2}{x-1}\cdot x(x-1)(x+1)Q(x) = x(x+1)(x+2)Q(x+1)$, а одавде излази: $Q(x) = Q(x+1)$, а то значи: $Q(1) = Q(2) = Q(3) = \ldots$, што значи да је $Q = A = const$. Према томе $P(x) = (x^3-x)\cdot A$, што се и тврдило.

303. Нека је D тачка у равни ABC, таква да је $\triangle ADC$ подударан троуглу ABC. Тада је висина BE једнакокраког троугла ABD једнака половини хипотенузе: $BE = \frac{c}{2}$ (правоугли троугао ABE има угао од 30^o, сл. 90). Стога површина троугла ABD износи $P = \frac{1}{2}c \cdot \frac{c}{2} = \frac{c^2}{4}$, а такође је $P = \frac{1}{2}2a \cdot b = ab$. Према томе: $\frac{c^2}{4} = ab$, односно $\left(\frac{c}{2}\right)^2 = ab$, или $R^2 = ab$, што се и тврдило.

304. Добијени број мора бити дељив са $7 \cdot 8 \cdot 9 = 504$. Само су бројеви 523152 и 523656 дељиви са 504 и почињу са 523... Значи, треба дописати 152 или 656.

305. *а)* $y' = 3x^2 + p$, па ако је $p < 0$ први извод има две нуле, и то: $x_1 = \sqrt{\frac{-p}{3}}$ и $x_2 = -\sqrt{\frac{-p}{3}}$. Како је $y'' = 6x$, то је $y''(x_2) < 0$, а $y''(x_1) > 0$, па је максимум $M = f(x_2) = x_2^3 + px_2 + q = q - \frac{2}{3}p\sqrt{\frac{-p}{3}}$ а минимум је $m = f(x_1) = q + \frac{2}{3}p\sqrt{\frac{-p}{3}}$. Сада лако утврдимо да је $Mm = q^2 + \frac{4}{27}p^3$.

б) Из $f(-2) = 0$, добијамо услов $q - 2p - 8 = 0$, а из $M - m = 4$, добијамо: $-\frac{p}{3}\sqrt{\frac{-p}{3}} = 1$, одакле је $p^3 = -27$, па је $p = -3$ и $q = 2$.

306. 1^o Уочимо две узастопне врсте Паскаловог троугла:

$$\binom{n}{0} \quad \binom{n}{1} \quad \binom{n}{2} \quad \cdots \quad \binom{n}{n-2} \quad \binom{n}{n-1} \quad \binom{n}{n}$$

$$\binom{n+1}{0} \quad \binom{n+1}{1} \quad \binom{n+1}{2} \quad \cdots \quad \binom{n+1}{n-1} \quad \binom{n+1}{n} \quad \binom{n+1}{n+1}$$

Тражена разлика квадрата је $\binom{n+1}{n-1}^2 - \binom{n}{n-2}^2 =$

$$= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 - \left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^2 = n^3, \ n \geq 2.$$

2^o Према 1^o је: $1^3 = \binom{2}{0}^2$, $2^3 = \binom{3}{1}^2 - \binom{2}{0}^2$, $3^3 = \binom{4}{2}^2 - \binom{3}{1}^2$, ..., $n^3 = \binom{n+1}{n-1}^2 - \binom{n}{n-2}^2$, па је:

$T_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \binom{n+1}{n-1}^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$. Како је: $S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, то је $T_n = S_n^2$, односно: $f(x) = x^2$.

307. 1^o Једначина има смисла ако је $|\,x\,| \geq 1$. Убацимо x под други корен и добијемо: $\sqrt{x^2-1} + \operatorname{sgn}(x)\sqrt{x^2\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-1} + \operatorname{sgn}(x)\sqrt{x^2-1} = 0$. Ако је $x \geq 1$, тада је $sgn(x) = 1$, па добијамо: $2\sqrt{x^2-1} = 0$, што важи за $x_1 = 1$, $x_2 = -1$.

Ако је $x \leq -1$, онда је $sgn(x) = -1$, па добијамо идентичност: $0 = 0$. Дакле, решења су $x = 1$ и $x \in (-\infty, \ -1]$.

2^o Неједначина има смисла за $a \neq 0$ и $x \neq 0$. Ако је $a > 0$, решење је $x > a$ или $x < 0$. Ако је $a < 0$, решење је $x \in (a,\ 0)$.

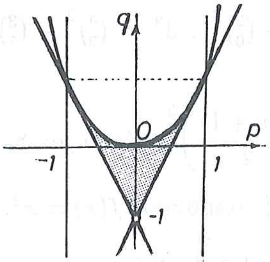
3^o $\dfrac{1}{\log_a B} + \dfrac{1}{\log_{a^2} B} + \cdots + \dfrac{1}{\log_{a^n} B} = \log_B a + \log_B a^2 + \cdots + \log_B a^n =$
$= \log_B a(1 + 2 + \cdots + n) = \dfrac{n(n+1)}{2} \log_B a.$

308. Странице троугла су $a = b - d$, b и $c = b + d$ и $r = 4d$. Знамо да је $r = \dfrac{P}{s}$, где је $s = \dfrac{3}{2}b$, а по Хероновом обрасцу: $P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$. Страницу b одредићемо из: $rs = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, односно: $6bd =$ $= \sqrt{\dfrac{3}{2}b \cdot \left(\dfrac{b}{2} + d\right) \cdot \dfrac{b}{2} \cdot \left(\dfrac{b}{2} - d\right)} \Leftrightarrow 6d = \dfrac{1}{2}\sqrt{3\left(\dfrac{b^2}{4} - d^2\right)}$. Одавде добијамо $b = 14d$, па је $a = 13d$ и $c = 15d$. Тражена размера је $a : b : c = 13 : 14 : 15$.

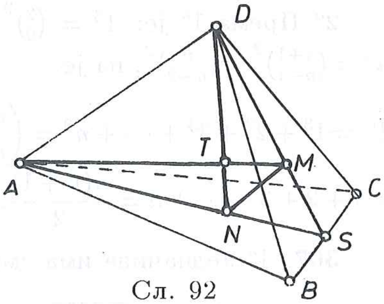
309. *а)* Дата једначина има максималан број решења ако једначина $t^2 + 2pt + q = 0$ има два решења из интервала $(-1,\ 1)$, тј. ако је $D > 0$, тј. $p^2 - q > 0$ и $-1 < -p \pm \sqrt{p^2 - q} < 1$. Други услов даје систем неједначина: $p - 1 < \pm\sqrt{p^2 - q} < p + 1 \Leftrightarrow p - 1 < -\sqrt{p^2 - q} < 0 < \sqrt{p^2 - q} < p + 1$. Даље је $p - 1 < -\sqrt{p^2 - q} \Leftrightarrow p - 1 < 0\ \wedge\ p^2 - q < (p-1)^2 \Leftrightarrow p < 1\ \wedge\ -2p + q + 1 > 0$ и $\sqrt{p^2 - q} < p + 1 \Leftrightarrow p + 1 > 0\ \wedge\ p^2 - q < (p+1)^2 \Leftrightarrow p > -1\ \wedge\ 2p + q + 1 > 0$. Додајмо и услов $q < p^2$, па ћемо добити решење шрафирано на сл. 91.

б) $D < 0$ (за $q > p^2$) и $|t| > 1$. У равни Opq то су све тачке ван косих правих и ван шрафиране области на сл. 91.

в) $\sin^2 x + \dfrac{1}{2}\sin x = 0$. Решења су: $x_1 = k\pi$, $x_2 = -\dfrac{\pi}{6} + 2m\pi$,
$x_3 = \dfrac{7\pi}{6} + 2n\pi$, $k,\ m,\ n \in Z$.



Сл. 91



Сл. 92

310. Нека су AS и DS тежишне линије, сл. 92, а N и M тежишта страна ABC и BCD. Тежишне линије AM и DN припадају равни ASD, па се секу у T и $AS : SN = 3 : 1 = DS : SM$ (особина тежишта), па је $AD \parallel MN$ (обрнута Талесова теорема) и $AD : MN = 3 : 1 = AT : TM$. Слично се доказује и за остале тежишне линије.

311. За $a=\dfrac{1-b}{1+b}$ је $\dfrac{a}{1-a^2}=\dfrac{1-b^2}{4b}$, па је $\left(\dfrac{a}{1-a^2}\right)^2+\left(\dfrac{b}{1-b^2}\right)^2=$
$=\left(\dfrac{1-b^2}{4b}\right)^2+\left(\dfrac{b}{1-b^2}\right)^2-2\dfrac{1-b^2}{4b}\cdot\dfrac{b}{1-b^2}+2\dfrac{1-b^2}{4b}\cdot\dfrac{b}{1-b^2}=$
$=\left(\dfrac{1-b^2}{4b}-\dfrac{b}{1-b^2}\right)^2+\dfrac{1}{2}\geq\dfrac{1}{2}$, јер је $A^2\geq 0$, за сваки реалан број A.

312. *а)* Сменимо $t=\pi\operatorname{tg}x$ и једначина прелази у: $\sin t=\cos t$. Решење ове једначине је $t=\dfrac{\pi}{4}+k\pi$ (видети решење *задатка* 117 *б)*). Сада из $\pi\operatorname{tg}x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi$, добијемо $\operatorname{tg}x=\dfrac{1}{4}+k$, па је коначно решење: $x=\operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{4}+k\right)+m\pi,\ k,\ m\in Z$.

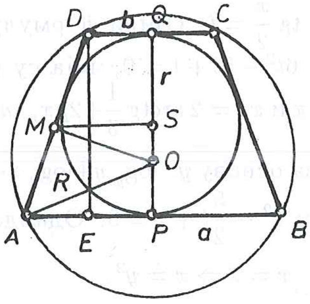
б) Сменом: $\sin x+\cos x=t$ добијемо једначину $5t^2-12t+7=0$, чија су решења $t_1=1,\ t_2=\dfrac{7}{5}$. Затим, из $\sin x+\cos x=1$, добијамо: $2\sin\dfrac{\pi}{4}\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=1$, односно $\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, па је $x-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{4}+2k\pi\Rightarrow$ $x_1=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$ или $x-\dfrac{\pi}{4}=-\dfrac{\pi}{4}+2m\pi\Rightarrow x_2=2m\pi,\quad k,\ m\in Z$. Једначину $\sin x+\cos x=\dfrac{7}{5}$ решимо увођењем смене: $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}=t$. (Види формулу (29) у ДРУГОЈ ГЛАВИ.). Добијемо једначину $6t^2-5t+1=0$, чија су решења $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}=\dfrac{1}{2}$ и $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}=\dfrac{1}{3}$, па је $x_3=2\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2}+2n\pi$ и $x_4=2\operatorname{arctg}\dfrac{1}{3}+2p\pi,\ \ n,\ p\in Z$.

313. Прву једначину логаритмујемо за основу y: $\log_y y+\log_y x\cdot\log_y x=$ $=\dfrac{5}{2}\log_y x$, односно, за $\log_y x=t$, добијемо: $t^2-\dfrac{5}{2}t+1=0$. Одавде $t_1=\dfrac{1}{2}$ и $t_2=2$, односно $\log_y x=\dfrac{1}{2}\Rightarrow y=x^2$ и $\log_y x=2\Rightarrow x=y^2$.

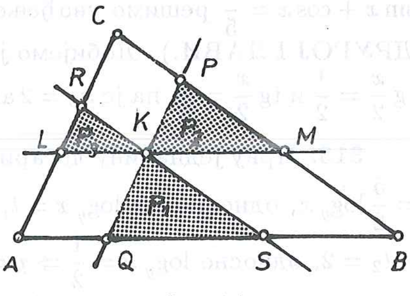
Из друге једначине је: $\dfrac{\log_y(3x-y)}{\log_y 4}=1$, тј. $\log_y(3x-y)=\log_y 4\Rightarrow$ $\Rightarrow 3x-y=4$. Решења имамо из следећих система: $(3x-y=4\ \land\ y=x^2)$ и $(3x-y=4\ \land\ x=y^2)$. Први систем нема реална решења, а други даје $x=\dfrac{16}{9},\ y=\dfrac{4}{3}$.

314. Нека су a и b полупречници база зарубљене купе, $SP=SQ=r$ и $AO=R=r\sqrt{6}$ полупречници уписаног и описаног круга. На сл. 93 је осни пресек купе једнакокраки тангенти трапез. Према *примеру 69* из ПРВЕ ГЛАВЕ, важи: $AD=BC=a+b$. Права MO је симетрала крака, па је SM средња линија трапеза $APQD$ и $SM=\dfrac{1}{2}(a+b)$. Висина трапеза је $DE=2r$. Тражи се k, $k=\dfrac{a}{b}$.

Троуглови AED и OSM су слични (одговарајуће странице су нормалне), па је $AD : DE = OM : SM$, односно: $(a+b) : 2r = OM : \frac{1}{2}(a+b)$. Одавде је $OM = \frac{(a+b)^2}{4r}$. Осим тога, из правоуглог троугла AED имамо: $AD^2 - AE^2 = DE^2$, тј. $(a+b)^2 - (a-b)^2 = (2r)^2$, одакле је $ab = r^2$. Како је $a = kb$, добијамо: $kb^2 = r^2$, односно $b^2 = \frac{r^2}{k}$. Сада из правоуглог троугла OAM добијамо: $AM^2 + OM^2 = AO^2$, одакле је: $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \frac{(a+b)^4}{16r^2} = 6r^2$. Стављајући $a = kb$, добијамо: $\frac{b^2(k+1)^2}{4} + \frac{b^4(k+1)^4}{16r^2} = 6r^2$, односно $\frac{b^2}{r^2} \cdot \frac{(k+1)^2}{4} + \frac{b^4}{r^4} \cdot \frac{(k+1)^4}{16} = 6$. Како је $\frac{b^2}{r^2} = \frac{1}{k}$, добијамо једначину по k: $\frac{(k+1)^2}{4k} + \frac{(k+1)^4}{16k^2} = 6$. Сређивањем добијамо симетричну једначину $k^4 + 8k^3 - 82k^2 + 8k + 1 = 0$, чија су позитивна решења $k_1 = 3 + 2\sqrt{2}$ и $k_2 = 3 - 2\sqrt{2}$. Како је $k_2 = \frac{1}{k_1}$, то је уствари $k = 3 + 2\sqrt{2}$ једино решење, па је $a : b = (3 + 2\sqrt{2}) : 1$. (Решење симетричне једначине налазимо као у *примеру* 17 *б)* у ДРУГОЈ ГЛАВИ.)



Сл. 93



Сл. 94

315. Види *пример* 29 *г)* ДРУГЕ ГЛАВЕ. Решења су: $x_1 = 3$, $x_2 = 3\log_6 2$.

316. За $\operatorname{tg} 2x \neq 0$, тј. $x \neq \frac{k\pi}{4}$, $k \in Z$, једначина прелази у следећи облик: $\sin x + \cos x + 2\sin x \cos x + 2\cos^2 x = 0$ (јер $1 + \cos 2x = 2\cos^2 x$), одакле је $(\sin x + \cos x)(1 + 2\cos x) = 0 \Leftrightarrow (\sin x + \cos x = 0 \ \vee \ 1 + 2\cos x = 0)$. Према *примеру* 48 *а)*, $\sin x + \cos x = 0$ даје немогуће решење $x = \frac{3\pi}{4} + m\pi$, $m \in Z$, а из $1 + 2\cos x = 0$, тј. из $\cos x = -\frac{1}{2}$, добијамо решења дате једначине $x_1 = \frac{2\pi}{3} + 2n\pi$ и $x_2 = -\frac{2\pi}{3} + 2p\pi$, $n, p \in Z$.

317. $|x^2-2x-3|=x^2-2x-3$ за $x\in(-\infty,\ -1)\cup(3,\ +\infty)$ и $|x^2-2x-3|=$ $=-(x^2-2x-3)$ за $x\in[-1,\ 3]$, итд. Решење: $x\in(2,\ 5)$.

318. $c=2R=30$ је хипотенуза. Код правоуглог троугла је $r=s-c$, односно $2r=a+b+c-2c$, па је $a+b=2r+c=42$. Сем тога је $a^2+b^2=c^2=900$. Решење овог система једначина даје: $a=18,\ b=24$.

319. Систем има смисла за $x>y$, $x+y\neq 10$, $x>0$, $y>0$ и $y\neq 7$. Прва једначина се своди на $\log\dfrac{x-y}{4}=\log\dfrac{10}{x+y}$, одакле је $x^2-y^2=40$. Друга једначина даје: $\log\dfrac{x}{3}=-\log\dfrac{y}{7}$, па је $\dfrac{x}{3}=\dfrac{7}{y}$, односно $x=\dfrac{21}{y}$. Решавањем добијеног система једначина налазимо да је $x=7,\ y=3$.

320. Решење је $x\in\left(-\dfrac{1}{2},\ 7\right)$.

321. Из $B:B_1=9^2:3^2$, биће $B_1=4\ cm^2$, па је $V_1=\dfrac{1}{3}B_1\cdot 3=4\ cm^3$.

322. Трансформацијом синуса двоструких углова добијамо: $4\sin x\cos x\cos 2x+2\sin x\cos x-\cos x=0$, а одавде: $\cos x(4\sin x\cos 2x+$ $+2\sin x-1)=0\Leftrightarrow\cos x(2\sin 3x-1)=0$ (јер је $2\sin x\cos 2x=\sin 3x-\sin x$, по формули (44) из ТРЕЋЕ ГЛАВЕ). Даље је $\cos x=0\Leftrightarrow x_1=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$, а $\sin 3x=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\left(3x=\dfrac{\pi}{6}+2m\pi\ \vee\ 3x=\dfrac{5\pi}{6}+2n\pi\right)$, што даје $x_2=\dfrac{\pi}{18}+\dfrac{2m\pi}{3}$ и $x_3=\dfrac{5\pi}{18}+\dfrac{2n\pi}{3}$, $k,\ m,\ n\in Z$.

323. $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=\sqrt[3]{(2+\sqrt{2})^3}+\sqrt[3]{(2-\sqrt{2})^3}=4$.

(*Други начин.* Нека је $x=\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$. Тада је: $x^3=$ $=20+14\sqrt{2}+3\sqrt[3]{(20+14\sqrt{2})^2}\cdot\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}\cdot\sqrt[3]{(20-14\sqrt{2})^2}+20-$ $-14\sqrt{2}\Leftrightarrow x^3=40+3\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}\cdot\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}(\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}})\Leftrightarrow$ $x^3=40+3\sqrt[3]{400-392}\cdot x\Leftrightarrow x^3-6x-40=0\Leftrightarrow x=4.$)

324. Очигледно решење је $x_1=1,\ y_1=1$. Ако је $x\neq 1,\ y\neq 1,\ x>0$ и $y>0$, тада имамо: $x^y=y^x\Rightarrow x=y^{\frac{x}{y}}\Rightarrow x^p=y^{\frac{px}{y}}$. Заменом у другу једначину добијамо: $y^{\frac{px}{y}}=y^q$, одакле је $\dfrac{px}{y}=q\Rightarrow y=\dfrac{px}{q}$. Ставимо ово у другу једначину датог система и добијемо: $x^p=\left(\dfrac{px}{q}\right)^q$, а одавде $x^{p-q}=\left(\dfrac{p}{q}\right)^q\Rightarrow x=\left(\dfrac{p}{q}\right)^{\frac{q}{p-q}}$. Коначно и $y=\dfrac{p}{q}\cdot\left(\dfrac{p}{q}\right)^{\frac{q}{p-q}}=\left(\dfrac{p}{q}\right)^{\frac{p}{p-q}}$.

325. $\sin x\cos x(\sin^2 x-\cos^2 x)=\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow-\sin x\cos x\cdot\cos 2x=\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\sin 2x\cos 2x = -\dfrac{1}{4} \Leftrightarrow \sin 4x = -1 \Leftrightarrow 4x = \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow x = \dfrac{3\pi}{8} + \dfrac{k\pi}{2},\ \ k \in Z.$

326. $\dfrac{ax+b}{ax-b} > 1 \Leftrightarrow x > \dfrac{b}{a}$ и $\dfrac{ax+b}{ax-b} < 2 \Leftrightarrow \left(x > \dfrac{3b}{a}\ \vee\ x < \dfrac{b}{a}\right)$. Како су a и b позитивни бројеви, решење система је $x > \dfrac{3b}{a}$.

327. Означимо темена добијених троуглова као на сл. 94. Сваки од ових троуглова је сличан датом троуглу ABC. Из особина сличних троуглова (видети *одељак* 1.18) следи: $\dfrac{P_1}{P} = \dfrac{QS^2}{AB^2} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{P_1}}{\sqrt{P}} = \dfrac{QS}{AB}$. Слично добијамо: $\dfrac{\sqrt{P_2}}{\sqrt{P}} = \dfrac{KM}{AB}$ и $\dfrac{\sqrt{P_3}}{\sqrt{P}} = \dfrac{KL}{AB}$. Међутим, четвороуглови $BMKS$ и $AQKL$ су паралелограми, па је $KM = BS$ и $KL = AQ$. Дакле: $\dfrac{\sqrt{P_1}}{\sqrt{P}} + \dfrac{\sqrt{P_2}}{\sqrt{P}} + \dfrac{\sqrt{P_3}}{\sqrt{P}} = \dfrac{QS}{AB} + \dfrac{BS}{AB} + \dfrac{AQ}{AB}$, односно $\dfrac{\sqrt{P_1}+\sqrt{P_2}+\sqrt{P_3}}{\sqrt{P}} = \dfrac{QS+BS+AQ}{AB} = \dfrac{AB}{AB} = 1$, па је: $\sqrt{P} = \sqrt{P_1} + \sqrt{P_2} + \sqrt{P_3}$, односно: $P = (\sqrt{P_1} + \sqrt{P_2} + \sqrt{P_3})^2$.

328. $\dfrac{a^{\frac{3}{2}} + b^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[3]{(a-b)^2}} \cdot \dfrac{a^{\frac{3}{2}} - b^{\frac{3}{2}}}{a^{-\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[3]{a-b}} = \dfrac{a^3 - b^3}{a^0(a-b)} = a^2 + ab + b^2$. За $a = 1$, $b = \dfrac{3}{5}$, дати израз има вредност $\dfrac{49}{25}$.

329. Видети *задатак* 88. Решење добијамо из:
$m < 0\ \wedge\ m^2 - 3m - 4 < 0 \Leftrightarrow m \in (-1,\ 0)$.

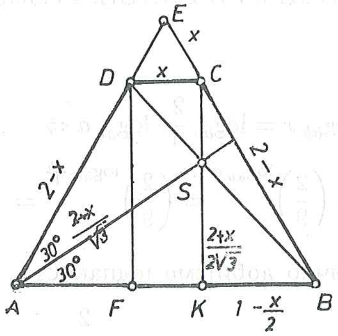
330. Задатак има смисла за $k \le \dfrac{n}{2}$. Да бисмо пребројали све распореде, поступимо на следећи начин. Првих k квадрата искључимо, а од осталих $(n-k)$ начинимо све могуће k-торке. Њих има $\binom{n-k}{k}$. Тачно толико има и тражених распореда, јер, свако поље добијене k-торке редом прикључујемо по једном од искључених квадрата и тако формирамо све распореде домина.

331. *а)* Тангента паралелна датој правој је: $y = \dfrac{1}{2}x + n$, јер је коефицијент правца дате праве $k = -\dfrac{A}{B} = \dfrac{1}{2}$. Из услова додира (формула (69) из ТРЕЋЕ ГЛАВЕ) $p = 2kn$, тј. $3 = 2 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot n$, добијемо $n = 3$, па је паралелна тангента $y = \dfrac{1}{2}x + 3$, или $x - 2y + 6 = 0$.

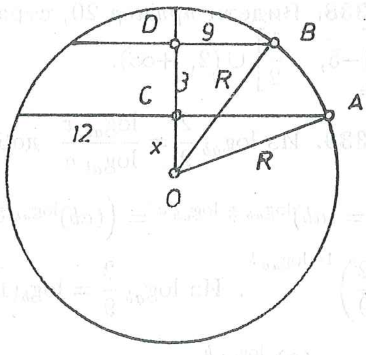
б) Координате додирне тачке представљају решење система једначина: $y = \dfrac{1}{2}x + 3\ \wedge\ y^2 = 6x,\ y \ge 0$. То је тачка $T(6,\ 6)$, која представља центар траженог круга. Полупречник је одстојање тачке T од дате праве $r=\dfrac{6-12+10}{\sqrt{1+4}}=\dfrac{4}{\sqrt{5}}$. Једначина круга је: $(x-6)^2+(y-6)^2=\dfrac{16}{5}$.

333. $\sin x+\sqrt{3}\cos x-2=0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\sin x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x=1 \Leftrightarrow \cos\dfrac{\pi}{3}\sin x+$ $+\sin\dfrac{\pi}{3}\cos x=1 \Leftrightarrow \sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)=1 \Rightarrow x+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi \Rightarrow x=\dfrac{\pi}{6}+2k\pi,\quad k\in Z.$ (Видети *пример* 46, ДРУГА ГЛАВА.)

334. Трапез $ABCD$ је добијен одсецањем троугла CDE од једнакостраничног троугла ABE, сл. 95. Нека је $CD=CE=DE=x$. Тада је $BC=AD=2-x$. Користећи се особинама правоуглих троуглова са угловима од 30^o и 60^o, налазимо и следеће дужине: $BK=AF=1-\dfrac{x}{2}$, $AS=\dfrac{2+x}{\sqrt{3}}$ и $KS=\dfrac{1}{2}AS=\dfrac{2+x}{2\sqrt{3}}$.



Сл. 95



Сл. 96

Применимо на троугао ADS косинусну теорему: $DS^2=AD^2+AS^2-$ $2AD\cdot AS\cdot\cos 30^o=(2-x)^2+\left(\dfrac{2+x}{\sqrt{3}}\right)^2-2(2-x)\left(\dfrac{2+x}{\sqrt{3}}\right)\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{7x^2-8x+4}{3}$.

Одавде је $DS=\dfrac{\sqrt{7x^2-8x+4}}{\sqrt{3}}$. Из правоуглог троугла BKS добијамо: $BS=\sqrt{BK^2+KS^2}=\sqrt{\left(\dfrac{2-x}{2}\right)^2+\left(\dfrac{2+x}{\sqrt{3}}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{7x^2+4x+28}}{2\sqrt{3}}$. Троуглови SKB и SCD су слични па је $CD:KB=DS:BS$, односно $x:\dfrac{2-x}{2}=\dfrac{\sqrt{7x^2-8x+4}}{\sqrt{3}}:\dfrac{\sqrt{7x^2+4x+28}}{2\sqrt{3}}$. Ову пропорцију квадрирамо и средимо: $x^2:(2-x)^2=(7x^2-8x+4):(7x^2+4x+28) \Leftrightarrow 10x^3-9x^2+12x-4=0$. Применимо Безуов став (стр. 25) на полином $P(x)=10x^3-9x^2+12x-4$. Како је $P\left(\dfrac{2}{5}\right)=0$, закључујемо да је $P(x)=(5x-2)(2x^2-x+2)$. Једино реално решење једначине $P(x)=0$ је $x=\dfrac{2}{5}=CD$.

335. Половина доње базе са најближим теменом горње базе одређује правилан тетраедар, па је висина тела $H=\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$ (видети *задатак* 139, страна 177). Запремина тела је $V=2\cdot\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot\dfrac{a\sqrt{6}}{3}=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$.

336. Видети *пример* 37, ГЛАВА ТРЕЋА, страна 232.

337. Бројеви b_1, b_1q+12 и b_1q^2 чине аритметичку, а b_1, b_1q+12 и b_1q^2+96 геометријску прогресију. Применимо особине (85) и (88) из ТРЕЋЕ ГЛАВЕ и добијемо: $2b_1q+24=b_1+b_1q^2$ и $(b_1q+12)^2=b_1(b_1q^2+96)$, односно: $b_1(q^2-2q+1)=24$ и $b_1(q-4)=-6$. Поделимо ове две једначине и добијемо квадратну једначину: $q^2+2q-15=0$, чија су решења $q_1=3$ и $q_2=-5$. Дати бројеви су: 6, 18, 54 или $\dfrac{2}{3}$, $-\dfrac{10}{3}$, $\dfrac{50}{3}$.

338. Видети *пример* 20, страна 102, из ДРУГЕ ГЛАВЕ. Решење је $x\in\left[-5,\ -\dfrac{1}{2}\right]\cup(2,\ +\infty)$.

339. Из $\log_{ab}\dfrac{2}{9}=\dfrac{\log_{ab}x}{\log_{ab}a}$, добијамо: $\log_{ab}x=\log_{ab}\dfrac{2}{9}\cdot\log_{ab}a\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=(ab)^{\log_{ab}\frac{2}{9}\cdot\log_{ab}a}=\left((ab)^{\log_{ab}\frac{2}{9}}\right)^{\log_{ab}a}=\left(\dfrac{2}{9}\right)^{\log_{ab}a}=\left(\dfrac{2}{9}\right)^{\log_{ab}\frac{ab}{b}}=$

$=\left(\dfrac{2}{9}\right)^{1-\log_{ab}b}$. Из $\log_{ab}\dfrac{2}{9}=\log_b(1-x)$, слично добијемо једнакост

$1-x=\left(\dfrac{2}{9}\right)^{\log_{ab}b}$. Сад, из претходне једнакости је: $x=\dfrac{\frac{2}{9}}{\left(\frac{2}{9}\right)^{\log_{ab}b}}$, па је

$x=\dfrac{2}{9(1-x)}$. Одавде је $9x^2-9x+2=0$, што даје $x_1=\dfrac{1}{3}$, $x_2=\dfrac{2}{3}$.

340. Ако су a, b, c цифре датог броја, тада имамо услове: $2b=a+c$, $26(a+b+c)=100a+10b+c$ и $100a+10b+c+198=100c+10b+a$. Трећа једначина се своди на $c-a=2$, итд. Решење је број 234.

341. Нека је $A(x_1,\ y_1)$ и $B(x_2,\ y_2)$. Тада је, према формули (42) из ТРЕЋЕ ГЛАВЕ, $\dfrac{x_1+2x_2}{3}=2$ и $\dfrac{y_1+2y_2}{3}=1$, односно $x_1+2x_2=6$ и $y_1+2y_2=3$. Тачке A и B су на кругу, па је $x_1^2+y_1^2=25$ и $x_2^2+y_2^2=25$. Помножимо задњу једнакост са -4 и додамо претходној. Добијамо: $x_1^2-4x_2^2+y_1^2-4y_2^2=-75$, односно: $(x_1-2x_2)(x_1+2x_2)+(y_1-2y_2)(y_1+2y_2)=-75$. Сменимо: $x_1+2x_2=6$ и $y_1+2y_2=3$ и биће: $6(x_1-2x_2)+3(y_1-2y_2)=-75$, односно: $2(x_1-2x_2)+y_1-2y_2=-25$. Поново сменимо $-2x_2=x_1-6$

и $-2y_2 = y_1 - 3$ и добијемо линеарну једначину: $2x_1 + y_1 = -5$, која са квадратном $x_1^2 + y_1^2 = 25$ даје решење $x_1 = 0$ или $x_1 = -4$. Тада је $y_1 = -5$, односно $y_1 = 3$. Тражена тачка је $A(0,\ -5)$ или $A_1(-4,\ 3)$. Примењујући формулу (42) на тачке A, M, B, добијамо $B(3,4)$, односно $B_1(5,\ 0)$.

342. $\cos 2x + \sin 2x = -1 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) + \sin 2x = -1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = -1 \Leftrightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, одакле је $x_1 = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $x_2 = -\frac{\pi}{4} + m\pi$, $k,\ m \in Z$.

343. Троугао AMN је једнакокрак: $AM = AN = 6\sqrt{5}$ и $MN = 6\sqrt{2}$, па му је полуобим $s = 6\sqrt{5} + 3\sqrt{2}$. Површину троугла добијамо одузимањем од квадрата површина правоуглих троуглова ABM, MCN и ADN: $P = 54$. Дакле $r = \frac{P}{s} = \frac{54}{6\sqrt{5} + 3\sqrt{2}} = \frac{18}{2\sqrt{5} + \sqrt{2}} = 2\sqrt{5} - \sqrt{2}$.

344. Треба доказати да је израз $3^{4n+1} + 10 \cdot 3^{2n} - 13$ дељив са 64. За $n = 1$ је $3^5 + 10 \cdot 3^2 - 13 = 320 = 5 \cdot 64$, израз је дељив са 64. Претпоставимо да је тачна формула $f(n)$, тј. да је $3^{4n+1} + 10 \cdot 3^{2n} - 13 = 64k$. Докажимо да $f(n) \Rightarrow f(n+1)$: $3^{4(n+1)+1} + 10 \cdot 3^{2(n+1)} - 13 = 3^4 \cdot 3^{4n+1} + 10 \cdot 3^2 \cdot 3^{2n} - 13 = 81 \cdot 3^{4n+1} + 90 \cdot 3^{2n} - 13 = 3^{4n+1} + 10 \cdot 3^{2n} - 13 + 80 \cdot 3^{4n+1} + 80 \cdot 3^{2n} = 64k + 16 \cdot 5 \cdot 3^{2n}(3^{2n+1} + 1) = 64k + 16 \cdot 5 \cdot 3^{2n+1}(3+1)(3^{2n} - 3^{2n-1} + \cdots - 1) = 64(k + 5 \cdot 3^{2n}(3^{2n} - 3^{2n-1} + \cdots - 1)) = 64p$. (Израз $3^{2n+1} + 1$ смо раставили на чиниоце према последњој од формула (19) из ПРВЕ ГЛАВЕ.).

345. Може се доказати математичком индукцијом, као претходни задатак. Ми ћемо овде користити идеју из *примера* 25 ПРВЕ ГЛАВЕ. Напишимо дати полином у облику $P(n) = 6(2n^3 + 8n^2 + n) + 2n^3 + 3n^2 + n = 6(2n^3 + 8n^2 + n) + n(2n^2 + 3n + 1) = 6(2n^3 + 8n^2 + n) + n(n+1)(2n+1)$. Довољно је доказати да је $n(n+1)(2n+1)$ дељиво са 6. Како је $n(n+1)$, као производ два узастопна броја, дељиво са 2, треба још доказати дељивост са 3. За $n = 3k$, дељивост са 3 је очигледна. Ако је $n = 3k + 1$, тада је $2n + 1 = 6k + 3 = 3(2k + 1)$, тј. $2n + 1$ је дељиво са 3, а за $n = 3k + 2$ је $n + 1 = 3k + 3 = 3(k + 1)$. Према томе $P(n)$ је дељиво са 6 за сваки природан број n.

346. $(x^2 - 4x)^2 - 1 \leq 0 \Leftrightarrow (x^2 - 4x - 1)(x^2 - 4x + 1) \leq 0$ (слично *примеру* 20 *г)*, ДРУГА ГЛАВА). Решење: $x \in [2 - \sqrt{5},\ 2 - \sqrt{3}] \cup [2 + \sqrt{3},\ 2 + \sqrt{5}]$.

347. Слично *задатку* 79. Решење је $p_1 = 2$, $p_2 = -2$.

348. Нека је $x = \log_2 a$, $y = \log_2 b$. Тада добијамо систем једначина: $(x + y = 2 \wedge x^2 + y^2 = 10)$, чија су решења $x_1 = -1$, $y_1 = 3$ и $x_2 = 3$, $y_2 = -1$. Решења по a и b су $a_1 = \frac{1}{2}$, $b_1 = 8$ и $a_2 = 8$, $b_2 = \frac{1}{2}$.

349. Према разматрању у *одељку* 2.16, решења једначине добијамо из услова: $3x+\frac{\pi}{6}=3x-\frac{\pi}{4}+2k\pi$ (не даје решење) и $3x+\frac{\pi}{6}=\pi-\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)+$ $+2k\pi$, што даје $x=\frac{13\pi}{72}+\frac{k\pi}{3}$, $k\in Z$.

350. Слично *задатку* 331. Једна тангента је $4x+6y+9=0$, а друга $9x-6y+4=0$.

351. Ако збир чланова на непарним местима помножимо са q, добићемо збир чланова на парним местима. Дакле: $85q=170$, па је $q=2$.

352. Како је $M=\frac{3ah}{2}$ и $B=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, то је $\frac{M}{B}=2\sqrt{3}\cdot\frac{h}{a}$. Према услову је $2\sqrt{3}\cdot\frac{h}{a}=\frac{\sqrt{3}}{1}$, па је $\frac{h}{a}=\frac{1}{2}$. Нормална пројекција висине h на базу је полупречник уписаног круга базе, $r=\frac{a\sqrt{3}}{6}$, па је

$\cos\varphi=\frac{r}{h}=\frac{a\sqrt{3}}{6h}=\frac{a}{h}\cdot\frac{\sqrt{3}}{6}=\frac{2}{1}\cdot\frac{\sqrt{3}}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

353. Нека је x брзина првог аутомобила, а $(x-2)$ брзина другог. Рачунајући време путовања, добијамо: $\frac{36}{x}=\frac{36}{x-2}-\frac{1}{4}$ ($15\ min=\frac{1}{4}$ *часа*). Одавде је $x=18\ km/h$, а брзина другог аутомобила је $16\ km/h$.

354. Према сл. 96, најпре ћемо израчунати дуж $OC=x$. Из правоуглих троуглова OAC и OBD је $R^2=12^2+x^2$ и $R^2=9^2+(x+3)^2$, тј. $12^2+x^2=9^2+(x+3)^2$. Одавде $x=9$, па је $R=15$. Површина сфере је $P=900\pi\ cm^2$.

355. За $x\in(-\infty,\ -2)\cup(1,\ +\infty)$ неједначина $\log_2\frac{x-1}{x+2}<1$ је еквивалентна са $0<\frac{x-1}{x+2}<2$. Решење задатка је $x\in(-\infty,\ -5)\cup(1,\ +\infty)$.

356. Како је $\sin^2 3x=\frac{1-\cos 6x}{2}$, биће $2\cdot 2^{2\cos 6x}+16^{\frac{1}{2}(1-\cos 6x)}=9\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 2t+\frac{4}{t}=9$, где је $t=2^{2\cos 6x}$. Добијамо $t_1=4$, $t_2=\frac{1}{2}$, па из $2^{2\cos 6x}=4$ и $2^{2\cos 6x}=\frac{1}{2}$, следи $2\cos 6x=2$ или $2\cos 6x=-1$. Даље, из $\cos 6x=1$ или $\cos 6x=-\frac{1}{2}$, добијамо решења: $x_1=\frac{k\pi}{3}$ и $x_2=\frac{\pi}{9}+\frac{m\pi}{3}$, $x_3=-\frac{\pi}{9}+\frac{n\pi}{3}$, $k,\ m,\ n\in Z$.

357. Координате ортоцентра одредимо слично *задатку* 198: $H(1,\ 3)$. То је и центар траженог круга. Полупречник је $r=AH=\sqrt{16+4}=\sqrt{20}$, па је једначина круга: $(x-1)^2+(y-3)^2=20$.

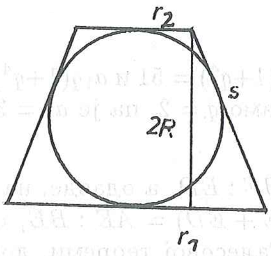
358. Слично *примеру* 25 *в)* ДРУГА ГЛАВА, страна 109. Решење:

$x \in \left[-3,\ \dfrac{7+\sqrt{5049}}{50}\right)$.

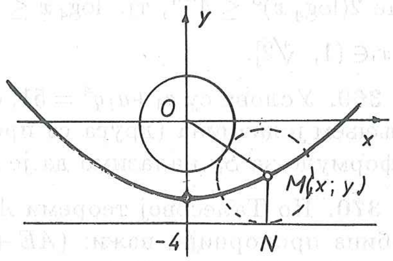
359. Видети *задатак* 223, страна 242.

360. Страница ромба је $\dfrac{p}{2}$. Дијагонале деле ромб на четири правоугла троугла, па је $\left(\dfrac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{d_2}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{p}{2}\right)^2$. Одавде је $d_1^2 + d_2^2 = p^2$. Квадрирањем једнакости $d_1 + d_2 = m$, добијамо: $d_1^2 + 2d_1d_2 + d_2^2 = m^2$. Одузимањем добијамо: $2d_1d_2 = m^2 - p^2$, па је $P = \dfrac{1}{2}d_1d_2 = \dfrac{1}{4}(m^2 - p^2)$.

361. Осни пресек лопте и описане зарубљене купе је круг и око њега описан једнакокраки трапез. Изводница s купе је крак трапеза, а трапез је тангентни четвороугао, па је $s = r_1 + r_2$, види сл. 97. Пречник лопте је висина трапеза, па је $2R < s$. Површина лопте је $4\pi R^2$, а омотач зарубљене купе је $M = r_1\pi s + r_2\pi s = \pi s(r_1 + r_2) = \pi s^2$. Из $2R < s$, следи $4R^2 < s^2$, па је $4\pi R^2 < \pi s^2$.



Сл. 97



Сл. 98

362. $f(x) = \left(\dfrac{\sin x}{\cos x} + \dfrac{\cos x}{\sin x}\right)^2 = \left(\dfrac{1}{\sin x \cos x}\right)^2 = \dfrac{4}{\sin^2 2x} \geq 4$. Минимална вредност функције је 4, јер је $0 \leq \sin^2 2x \leq 1$.

363. Из датих једначина имамо: $\sin x + \cos y = 0$ и $2\sin^2 x + 2\cos^2 y = 1$. Решења су: $x_1 = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi,\ \ y_1 = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2m\pi,\ \ k,\ m \in Z$; $x_2 = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ \ y_2 = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2m\pi,\ \ k,\ m \in Z$; $x_3 = \dfrac{7\pi}{6} + 2k\pi,\ \ y_3 = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2m\pi,\ \ k,\ m \in Z$; $x_4 = \dfrac{11\pi}{6} + 2k\pi,\ \ y_4 = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2m\pi,\ \ k,\ m \in Z$.

364. Према сл. 98 је $MN = |\ y + 4\ | = \sqrt{x^2 + y^2} - 2$. Сређивањем добијамо једначину: $y = \dfrac{1}{12}x^2 - 3$, а то је парабола.

365. $L = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\log_3 3 + \log_3 3^2 + \log_3 3^3 + \cdots + \log_3 3^n}{n^2} =$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1}{2}.$$

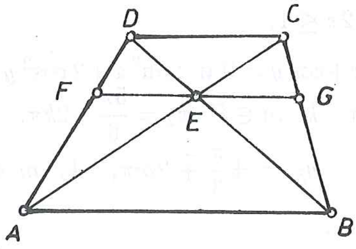
366. Брзина теретног возила је $\dfrac{s}{x}$, а путничног $\dfrac{s}{x-1}$, где је $s = AB$, а x време које је теретно возило провело на путу. Ако би возила ишла једно другом у сусрет, онда би збир пређених деоница до сусрета био једнак s, тј. $\dfrac{s}{x}\cdot\dfrac{6}{5}+\dfrac{s}{x-1}\cdot\dfrac{6}{5}=s$. Одавде добијамо једначину $\dfrac{6}{5x}+\dfrac{6}{5(x-1)}=1$, чија су решења $x_1 = 3$ и $x_2 = \dfrac{2}{5}$. Како је $\dfrac{2}{5} < \dfrac{6}{5}$, то x_2 не може бити решење. Дакле, $x = 3$.

367. Ако је $f(x) = x^2 - (3m+8)x + (m+2)^2$, тада, због $a = 1 > 0$ и $x_1 < 2 < x_2$, биће $f(2) < 0$, тј. $4 - (3m+8)\cdot 2 + (m+2)^2 < 0$. Решење ове неједначине је $m \in (-2,\ 4)$.

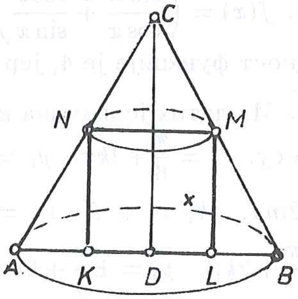
368. Неједначина има смисла за $x > 1$. Користимо особину (26) ДРУГЕ ГЛАВЕ: $\log_4(\log_4 x)^2 + \log_4(\log_2 x) \le -4$, па је $\log_4((\log_4 x)^2 \cdot \log_2 x) \le$ ≤ -4, а одавде: $(\log_4 x)^2 \cdot \log_2 x \le 4^{-4}$. Како је $\log_2 x = \log_4 x^2 = 2\log_4 x$, биће $2(\log_4 x)^3 \le 4^{-4}$, тј. $\log_4 x \le \dfrac{1}{8}$ и $x \le 4^{\frac{1}{8}} = \sqrt[4]{2}$. Решење неједначине је: $x \in (1,\ \sqrt[4]{2}]$.

369. Услови су $a_1 + a_1q^4 = 51$, односно $a_1(1+q^4) = 51$ и $a_1q(1+q^4) = 102$. Дељењем једначина (друга са првом) добијамо $q = 2$, па је $a_1 = 3$. Сада из формуле за S_n налазимо да је $n = 10$.

370. По Талесовој теореми $AE : EC = BE : ED$, а одавде, на основу особина пропорција, важи: $(AE + EC) : (BE + ED) = AE : BE$, односно $AC : AE = BD : BE$. Међутим, поново по Талесовој теореми, добијамо: $CD : FE = AC : AE$ и $CD : EG = BD : BE$. Узимајући у обзир да важи $AC : AE = BD : BE$, биће $CD : EF = CD : EG$, па је $EF = EG$, сл. 99.



Сл. 99

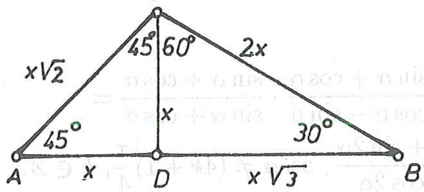


Сл. 100

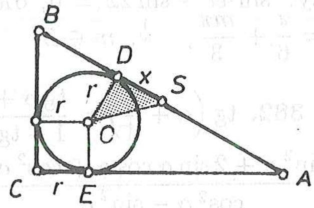
371. Страницу x квадрата израчунаћемо из сличних троуглова BCD и BML, сл. 100. Имамо пропорцију $BD : CD = BL : ML$, тј. $\dfrac{a}{2} : \dfrac{a\sqrt{3}}{2} =$ $= \dfrac{a-x}{2} : x$. Одавде је $x = a\sqrt{3}(2-\sqrt{3})$, а то је висина и пречник ваљка, који настаје ротацијом квадрата. Тражена размера је

$$V_1 : V_2 = \frac{x^3\pi}{4} : \frac{a^3\pi\sqrt{3}}{24} = 3a^3\sqrt{3}(2-\sqrt{3})^3\pi : \frac{a^3\pi\sqrt{3}}{6} = 18(2-\sqrt{3})^3 \approx 0.35.$$

372. Нека је CD висина датог троугла, сл. 101. Њену дужину означимо са x. Троугао ACD је једнакокраки правоугли, па је $AD = x$ и $AC = x\sqrt{2}$. У правоуглом троуглу BCD је $BC = 2x$ и $BD = x\sqrt{3}$. Обим троугла ABC је тада $3x + x\sqrt{2} + x\sqrt{3} = 6(3+\sqrt{2}+\sqrt{3}) \Rightarrow x = 6$. Странице троугла су $AB = 6 + 6\sqrt{3}$, $BC = 12$ и $AC = 6\sqrt{2}$, а површина је $P = \dfrac{1}{2}AB \cdot CD = 18(1+\sqrt{3})$.



Сл. 101



Сл. 102

373. $\operatorname{tg} 3\alpha = \dfrac{\sin 3\alpha}{\cos 3\alpha}$, итд.

374. Користећи формулу (37) из ДРУГЕ ГЛАВЕ, стр. 132, трансформишемо: $\cos 2x + \cos 4x - \cos 6x - \cos 8x = 0$. Даље користимо формулу (41), затим (40), такође из ДРУГЕ ГЛАВЕ: $2\sin 5x \sin 3x + 2\sin 5x \sin x = 0$, а одавде је $2\sin 5x(\sin 3x + \sin x) = 0 \Leftrightarrow 4\sin 5x \sin 2x \cos x = 0$. Решења су: $x_1 = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $x_2 = \dfrac{m\pi}{2}$, $x_3 = \dfrac{n\pi}{5}$ $k,\ m,\ n \in Z$. (Видети *задатак* 117 *д).*)

375. Једначина заједничке тангенте, према (70) из ТРЕЋЕ ГЛАВЕ, је $6y = 6(x+3)$, тј. $y = x+3$. Центар круга је $C(p, 0)$, па из услова додира (формула (65) ТРЕЋЕ ГЛАВЕ), добијамо: $r^2(1+1) = (p+3)^2$. Из једначине круга заменимо координате тачке M: $(3-p)^2 + 36 = r^2$. Решавањем система једначина по p и r, добићемо: $p = 9$, $r^2 = 72$. Једначина круга је: $(x-9)^2 + y^2 = 72$.

376. Уз услов $a > 0$, мора бити $D = 16 + 4\log_2 a \geq 0$, а то је испуњено за $a \geq \dfrac{1}{16}$.

377. У датом правоуглом троуглу је $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$, $R = \dfrac{1}{2}c = 2.5$ и $r = s - c = 1$. У правоуглом троуглу DOS, сл. 102, је $x = DS = AD - \dfrac{c}{2} = AE - \dfrac{c}{2} = b - r - \dfrac{c}{2} = \dfrac{1}{2}$, па је $OS = \sqrt{OD^2 + DS^2} = \sqrt{1 + \dfrac{1}{4}} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

378. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \dfrac{1}{2}\cos x = \dfrac{1}{2}$, итд, добија се: $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{1}{2}$. Решења су $x_1 = 2k\pi$, $x_2 = \dfrac{2\pi}{3} + 2m\pi$, $k,\ m \in Z$.

379. Координате тражене тачке представљају решење система једначина: $(2x - 3y + 21 = 0 \ \wedge \ y^2 = (x-1)^2 + (y-2)^2)$. Постоје две такве тачке: $M(-3,\ 5)$ и $M_1\left(\frac{23}{3},\ \frac{109}{9}\right)$.

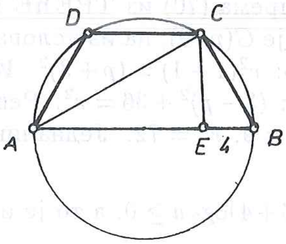
380. $\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

381. Применимо формулу (44) из ДРУГЕ ГЛАВЕ и добијемо једначину: $\sin 4x - \sin 2x = 0$, односно $2\sin x\cos 3x = 0$. Решења су: $x_1 = k\pi$, $x_2 = \frac{\pi}{6} + \frac{m\pi}{3}$, $\quad k,\ m \in Z$.

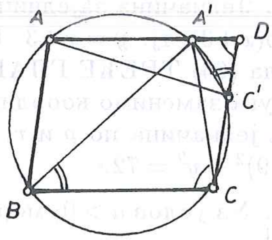
382. $\operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + 1}{1 - \operatorname{tg}\alpha} = \frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha}\cdot\frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha} =$
$= \frac{\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} = \frac{1 + \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}$, за $\alpha \neq (4k+1)\frac{\pi}{4}$, $k \in Z$.

383. $\log_2(x + 14) = \log_2\frac{2^6}{x+2} \Leftrightarrow x + 14 = \frac{64}{x+2}$, итд. Уз услов $x > -2$, добијамо решење $x = 2$.

384. Угао BCA је прав (над пречником). Дуж CE је хипотенузина висина, сл. 103, а $BE = \frac{1}{2}(20 - 12) = 4$. Сада је $BC^2 = AB \cdot BE = 80$, па је $BC = 4\sqrt{5}$ и $AC^2 = AB \cdot AE = 320$, па је $AC = 8\sqrt{5}$. (Видети доказ Питагорине теореме - *пример* 86 из ПРВЕ ГЛАВЕ.)



Сл. 103



Сл. 104

385. Слично *задатку* 197. Решење је (h_c): $2x - 3y + 1 = 0$.

386. Из $\sin 36^o = \cos 54^o$, добијамо $2\sin 18^o\cos 18^o = \cos 3\cdot 18^o$, односно $2\sin 18^o\cos 18^o = \cos 18^o(1 - 4\sin^2 18^o)$.

Решење једначине $2\sin 18^o = 1 - 4\sin^2 18^o$ је $\sin 18^o = \frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1)$.

387. Једначина има смисла за $x > 0$ и $x \neq 10\sqrt{10}$. Уводећи смену $\log x = t$, добијамо једначину: $t^2 + 4t - 45 = 0$, чија су решења $t_1 = 5$, $t_2 = -9$, па је $x_1 = 10^5$, $x_2 = 10^{-9}$.

388. Неједначина има смисла за $x \neq 0$. Уводећи смену $\left(\frac{2}{3}\right)^x = t > 0$, добијамо неједначину $\frac{8}{9(1-t)} > 1+t$, која се своди на $\frac{9t^2-1}{9(1-t)} > 0 \wedge t > 0$. Решење је $\frac{1}{3} < t < 1$, односно $\frac{1}{3} < \left(\frac{2}{3}\right)^x < 1$. Како је $\frac{1}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\log_{\frac{2}{3}} \frac{1}{3}}$, имамо $\left(\frac{2}{3}\right)^{\log_{\frac{2}{3}} \frac{1}{3}} < \left(\frac{2}{3}\right)^x < \left(\frac{2}{3}\right)^0 \Leftrightarrow 0 < x < -\log_{\frac{2}{3}} 3$, односно $0 < x < -\frac{1}{\log_3 \frac{2}{3}}$. Решење је: $0 < x < \frac{1}{1-\log_3 2}$.

389. Средиште тетиве M_1M_2 је тачка $C(4,\ 2)$. Права OC је симетрала тетиве и одговарајућег лука (O је координатни почетак). Једначина праве OC је $y = \frac{x}{2}$. Пресек ове праве са кругом је тражена тачка. Постоје две такве тачке (средишта двају лукова $\widehat{M_1M_2}$). То су $S(2\sqrt{5},\ \sqrt{5})$ и $S_1(-2\sqrt{5},\ -\sqrt{5})$.

390. Ако је a основица, површина троугла је $P = \frac{1}{2}ah = 4a$. Из $r = \frac{P}{s}$ и $r = 3$, добијамо: $3 = \frac{4a}{\frac{a}{2}+b}$. Одавде је $b = \frac{5}{6}a$. Осим тога, за једнакокраки троугао важи: $b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = h^2$, а у нашем случају: $\left(\frac{5}{6}a\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right) = 64$. Одавде је $a = 12$, па је $b = 10$.

391. $x^3 - 1 + kx(x-1) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+(k+1)x+1) = 0$. Одавде је $x - 1 = 0$, тј. $x_1 = 1$ за свако k. Сем тога, $x^2 + (k+1)x + 1 = 0$ даје реална решења ако је $D = (k+1)^2 - 4 \geq 0$, тј. ако је $k^2 + 2k - 3 \geq 0$. Разликујемо следеће случајеве:

а) За $k \in (-\infty,\ -3) \cup (1,\ +\infty)$, решења једначине су реална и $x_1 = 1$, $x_{2,\,3} = \frac{1}{2}(-k-1 \pm \sqrt{k^2+2k-3})$.

б) За $k = -3$ је $x = 1$ једино (троструко) решење .

в) За $k = 1$ је $x_1 = 1$, $x_{2,\,3} = -1$.

г) За $k \in (-3,\ 1)$ је $x_1 = 1$, $x_{2,\,3}$ су коњуговано комплексни бројеви .

392. Систем има смисла за $x+y > 0$ и $x-y > 0$. Трансформишемо га у $(\log 10(x^2+y^2) = \log 13 \wedge \log(x+y) = \log 8(x-y))$, односно, без логаритама $(10(x^2+y^2) = 13 \ \wedge \ x+y = 8(x-y))$. Овај систем има решења $x_1 = \frac{9}{10}$,

$y_1 = \dfrac{7}{10}$ и $x_2 = -\dfrac{9}{10}$, $y_2 = -\dfrac{7}{10}$. Међутим, други пар не задовољава услов $x + y > 0$, па је једино решење $x = \dfrac{9}{10}$, $y = \dfrac{7}{10}$.

393. Према *задатку* 139, страна 177, је $V = a^3 \dfrac{\sqrt{2}}{12}$. Одавде налазимо да је $a = \sqrt[3]{6V\sqrt{2}}$, па је $P = a^2\sqrt{3} = 6\sqrt[6]{3V^4}$.

394. Према услову (круг додирује обе осе и тачка A у првом квадранту) је $p = q = r$, па је једначина круга $(x-r)^2 + (y-r)^2 = r^2$. Заменимо координате тачке M и добијамо $r_1 = 1$ и $r_2 = 5$. Добијамо решења: $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ и $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 25$.

395. Применимо формулу (37), па формулу (41) из ДРУГЕ ГЛАВЕ:

$$\cos^2\alpha + \frac{1+\cos\left(\dfrac{4\pi}{3}+2\alpha\right)}{2} + \frac{1+\cos\left(\dfrac{4\pi}{3}-2\alpha\right)}{2} = \cos^2\alpha + 1 + \cos\frac{4\pi}{3}\cdot\cos 2\alpha =$$
$$= \cos^2\alpha + 1 - \cos\frac{\pi}{3}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = \cos^2\alpha + 1 - \frac{1}{2}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) =$$
$$= 1 + \frac{1}{2}(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = \frac{3}{2}.$$ (Видети *пример* 39. *г)*, страна 132.)

396. Слично *задатку* 85, *г)*, страна 103. Решење је $x \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right)$.

397. *а)* Слично *задатку* 104 *в)*, страна 118. Решење је $x = 0$.

б) $(\log_2 e)^{-1} = \dfrac{1}{\log_2 e} = \ln 2$, итд. Неједначина се своди на $\ln 6 < 2$, што је тачно, јер је $\ln e^2 = 2$, а $e^2 > 6$.

398. Доказаћемо да су троуглови $A'BC$ и $A'C'D$ слични. Тетивни трапез мора бити једнакокрак. (Нпр. код трапеза $BCA'A$ је $\sphericalangle A'BC = \sphericalangle BA'A$, (наизменични), па су одговарајуће тетиве једнаке: $A'C = AB$, сл. 104.) Због тога је $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BCA'$, као углови на основици трапеза. Како је $\sphericalangle ABC = \sphericalangle A'DC'$ (наспрамни углови паралелограма), следи да је $\sphericalangle BCA' = \sphericalangle A'DC'$.

У трапезу $ABCC'$ је $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BAC'$, а $\sphericalangle BAC' = \sphericalangle AC'D$ (наизменични), па је $\sphericalangle ABC = \sphericalangle AC'D$. Осим тога је $\sphericalangle ABA' = \sphericalangle AC'A'$ (сви су над тетивом AA'), па је $\sphericalangle A'BC = \sphericalangle ABC - \sphericalangle ABA' = \sphericalangle AC'D - \sphericalangle AC'A' = \sphericalangle A'C'D$. Дакле: $\sphericalangle A'BC = \sphericalangle A'C'D$ и троуглови $A'BC$ и $A'C'D$ су слични, па је:
$A'B : A'C = A'C' : A'D \Leftrightarrow A'B \cdot A'D = A'C \cdot A'C'$.

399. Две дате бочне стране су правоугли троуглови са заједничком катетом H. У једном од њих је угао наспрам H од 45^o, а у другом од 60^o. Друга катета сваког од ових троуглова је основна ивица, па су основне ивице $a = H = 3\sqrt{3}$ и $b = \dfrac{H}{\sqrt{3}} = 3$. Запремина пирамиде је $V = \dfrac{1}{3}a \cdot b \cdot H = 27\ cm^3$.

400. $\sin(\alpha - \beta) = \sin^2\alpha - \sin^2\beta = (\sin\alpha - \sin\beta)(\sin\alpha + \sin\beta) = = 2\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2} \cdot 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2} = \sin(\alpha-\beta)\cdot\sin(\alpha+\beta)$, па дати услов прелази у $\sin(\alpha-\beta)(1-\sin(\alpha+\beta)) = 0$, односно $\sin(\alpha-\beta) = 0$ или $\sin(\alpha+\beta) = 1$. Ако је $\sin(\alpha-\beta) = 0$, онда је $\alpha = \beta$ и троугао је једнакокрак, а ако је $\sin(\alpha+\beta) = 1$, онда је $\alpha + \beta = \dfrac{\pi}{2}$, па је троугао правоугли.

401. Права сече круг у тачкама $A(1,\ 3)$ и $B(2,\ 0)$, па је $AB = \sqrt{10}$. Угао између правих AC и BC, где је $C(3,\ 2)$ центар круга, је $\varphi = 90^o$.

402. *а)* За $m = 0$ једначина је линеарна и има решење $x = 2$. Међутим, ако је $m \neq 0$ и $x \neq m$ и $x \neq -3m$, једначина је еквивалентна са $x^2 + (2m-2)x - 3m^2 - 2m = 0$. То је квадратна једначина са дискриминантом $D = 16m^2 + 4 > 0$, па ова једначина увек има два реална решења. Непосредним проверавањем можемо се уверити да ни једно од решења није из скупа $\{m,\ -3m\}$.

б) Слично *задатку* 79. Резултат је: $m = \dfrac{2}{5}$. (Решавањем добијамо и $m = 0$, али из резултата под *а)* видимо да то не одговара услову.)

403. *а)* $x \in (-\infty,\ -1) \cup (0,\ +\infty)$.

б) За $\dfrac{3x}{x-2} > 0$, тј. за $x \in (-\infty,\ 0) \cup (2,\ +\infty)$ дата неједначина је еквивалентна са $\log\dfrac{3x}{x-2} < 0$, односно са $\dfrac{3x}{x-2} < 1$. Према решењу из случаја *а)*, ово важи за $x \in (-1,\ 0)$, што представља решење задатка.

404. Сређивањем добијемо: $\sin 6x = -\dfrac{1}{2}$, па су решења

$x_1 = -\dfrac{\pi}{36} + \dfrac{k\pi}{3}$, $x_2 = \dfrac{7\pi}{36} + \dfrac{m\pi}{3}$, $\quad k,\ m \in Z$.

405. Због $d_1 \perp d_2$ је $P = \dfrac{1}{2}d_1 \cdot d_2 = \dfrac{1}{2}d^2$. Троуглови ABP и CDP су једнакокраки правоугли, па према сл. 109, стр. 454: $a = x\sqrt{2}$ и $b = y\sqrt{2}$, односно $x : y = 3 : 1$. Из троугла BCP је $x^2 + y^2 = c^2 = 20$. Решење добијеног система једначина је $x = 3\sqrt{2}$, $y = \sqrt{2}$. Површина трапеза је $P = \dfrac{d^2}{2} = \dfrac{(x+y)^2}{2} = 16\ cm^2$.

406. Допунимо зарубљену пирамиду одсеченим делом, па даље слично *примеру* 6, страна 175. Запремина је $V = \dfrac{1}{12}(a^3 - b^3)$.

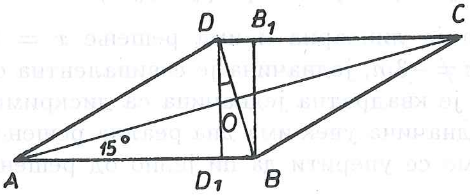
407. *а)* Жижа параболе је $F(1,\ 0)$, па је тражена права $y = 2(x-1)$.

б) Пресечне тачке су $A\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2},\ 1+\sqrt{5}\right)$ и $B\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2},\ 1-\sqrt{5}\right)$.

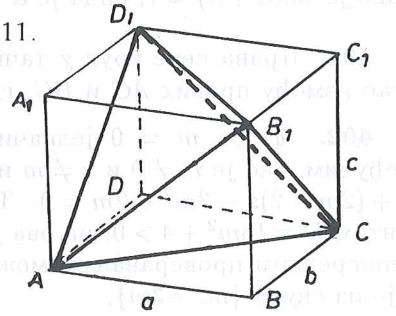
408. Именилац првог разломка је $2a^2+1>0$ за свако a и може се скратити без ограничења. Други разломак се скраћује са a^2+a-1, па мора бити $a \neq \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{5})$. Слично, због скраћивања трећег разломка, мора бити и $a \neq \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$. Изузев за $a = \frac{1}{2}(\pm 1 \pm \sqrt{5})$, биће $A = 1$.

409. Слично *примеру* 20 *д)*, страна 102. Решење $x \in (-3,\ -1) \cup (0,\ 1)$.

410. Видети *задатак* 94 *а)*, страна 111.



Сл. 105



Сл. 106

411. Према сл. 105, из троугла ABO је $BD = d_2 = d_1 \cdot \operatorname{tg} 15^o$, а из троугла BDD_1 је $DD_1 = d_2 \cos 15^o$ и $BD_1 = d_2 \sin 15^o$. Површина правоугаоника је $P = DD_1 \cdot BD_1 = d_2^2 \sin 15^o \cos 15^o = \frac{1}{2} d_2^2 \sin 30^o = \frac{1}{4} d_2^2$.
Сменимо d_2 и $P = \frac{1}{4} d_1^2 \operatorname{tg}^2 15^o = \frac{1}{4} d_1^2 (2-\sqrt{3})^2$. ($\operatorname{tg} 15^o = 2-\sqrt{3}$, - *пример* 42 *а)*, страна 135.)

412. За $x \neq \pi + 2k\pi$ једначина се своди на $\sin x(1-\cos\frac{x}{2}) = 0$. Решење је $x = 2k\pi,\ \ k \in Z$.

413. Видети *пример* 35 *г)*, страна 123. За $0 < x < 1$ добијамо $|\ x-1\ | \geq x$, а за $x > 1$ је $|\ x-1\ | \leq x$. Решења ових неједначина су $x \in \left(0,\ \frac{1}{2}\right] \cup (1,\ +\infty)$.

414. Једна од пресечних тачака круга и елипсе је $P(3,\ 4)$. Тангента круга у овој тачки је права $3x + 4y = 25$. Правоугли троугао, којег тангента одређује са полуосама Ox и Oy, је четвртина четвороугла. Дужине катета троугла су $\frac{25}{3}$ и $\frac{25}{4}$, па је површина четвороугла: $P = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{25}{3} \cdot \frac{25}{4} = \frac{625}{6}$.

415. Тетраедар AB_1CD_1 добијамо кад од квадра одсечемо четири једнака тетраедра, сл. 106. Запремина сваког одсеченог тетраедра је $V_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}abc = \frac{1}{6}abc$. Према томе, запремина тетраедра AB_1CD_1 је трећина запремине квадра.

416. Једначина се своди на $\operatorname{tg} x(\cos^2 x - 1 - \sin x \cos x) = 0$, односно, за $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ имамо $-\sin^2 x(\sin x + \cos x) = 0$, итд. Решења су $x_1 = k\pi$, $x_2 = -\frac{\pi}{4} + m\pi$, $k,\ m \in Z$.

417. Видети *задатак* 45, страна 63.

418. Као *пример* 35 *г)*, ГЛАВА ДРУГА, страна 123. Решење је: $x \in \left(-\frac{3}{2},\ -1\right) \cup (-1,\ 3)$.

419. Видети *пример* 10, ГЛАВА ТРЕЋА, страна 189.

420. Слично *примеру* 24, ГЛАВА ДРУГА, страна 107. За $x \geq 1$, квадрирамо, итд. Решење је $x \geq 1$.

421. Видети *задатак* 198 и *пример* 27, ГЛАВА ТРЕЋА. Једначине страница су AB: $x + 7y - 19 = 0$, BC: $3x + y + 3 = 0$, AC: $2x - y - 8 = 0$. Центар описаног круга је тачка $S(1,\ -1)$. Тежиште троугла је тачка $T\left(\frac{4}{3},\ -\frac{1}{3}\right)$ (видети *одељак* 3.5). Ортоцентар је тачка $V(2,\ 1)$. Једначина праве SV је $2x - y - 3 = 0$. Њу задовољавају координате тачке T.

422. *а)* Ако поделимо квадрат на јединичне квадрате, имаћемо 100 таквих. Ма како распоредили 201 тачку, постојаће бар један квадрат у којем су најмање 3 тачке (Дирихлеов принцип). Троугао којем су ове три тачке темена имаће површину мању од површине јединичног квадрата, тј. мању од 1.

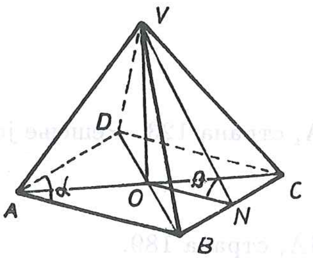
б) Ако је једна страница троугла из *а)* паралелна страници квадрата, тада је ова основица мања или једнака 1, а такође и висина, па је површина троугла мања или једнака 0.5. Ако није тај случај, тада се троугао може, правом паралелном страници квадрата, поделити на два троугла, заједничке основице мање од 1 и одговарајућих висина чији је збир мањи од 1. Због тога је збир површина ова два дела мањи од 0.5. (Не могу све тачке бити темена јединичних квадрата.)

425. Видети *пример* 48 *а)*, ГЛАВА ДРУГА, страна 144.

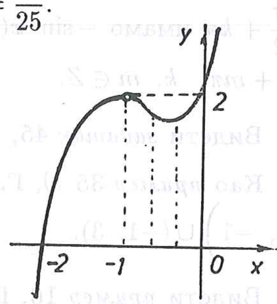
426. Дата једнакост важи за позитивне x и y, $x \neq 1$, $y \neq 1$, Одавде је: $(\log_x y)^2 = 1$, па је $\log_x y = \pm 1$ Ово важи ако је $x = y$ или $x = y^{-1}$, итд.

427. Једначину круга можемо написати у облику $(x-2)^2+(y-4)^2 = 25$, па је центар тачка $S(2,\ 4)$, а висина троугла је 4. Круг сече осу Ox у $A(-1,\ 0)$ и $B(5,\ 0)$. Дакле, површина троугла је $P = \frac{1}{2}6 \cdot 4 = 12$. Страница

AS има једначину $4x - 3y + 4 = 0$, па за угао α (угао SAB) је: $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{4}{3}$. Онда је $\cos\alpha = \dfrac{3}{5}$. Такође је $\cos\beta = \dfrac{3}{5}$, јер је $AS = BS$. Користећи се косинусном теоремом налазимо да је $\cos\gamma = \dfrac{7}{25}$.



Сл. 107



Сл. 108

428. Омотач пирамиде чине четири троугла међусобно једнаких површина. (Имају једнаке основице - странице ромба и једнаке висине. Према сл. 107 је $h = VN = \dfrac{ON}{\cos\beta}$, где је ON полупречник круга уписаног у ромб.) Површина омотача је $M = 4\cdot\dfrac{1}{2}BC\cdot VN = 4\cdot\dfrac{1}{2}\cdot BC\cdot ON\cdot\dfrac{1}{\cos\beta} = 4P_{OBC}\cdot\dfrac{1}{\cos\beta} = \dfrac{B}{\cos\beta}$, где је B површина основе пирамиде. Површина пирамиде је $P = B + M = B\left(1 + \dfrac{1}{\cos\beta}\right)$. Даље је $B = \dfrac{1}{2}d\cdot d_1 = \dfrac{1}{2}d^2\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$ (из троугла ABO је $\dfrac{d_1}{2} = \dfrac{d}{2}\cdot\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$). Дакле, тражена површина је $P = \dfrac{1}{2}d^2\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}\left(1 + \dfrac{1}{\cos\beta}\right)$.

429. Слично *задатку* 153. Решење је $V = 234\sqrt{3}\ cm^3$.

430. Једначинама има смисла ако је $\sin x \neq 0$ и $\cos\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) \neq 0$, тј. ако је $x \neq k\pi$ и $x \neq \dfrac{\pi}{6} + m\pi$, $k,\ m \in Z$, а своди се на $\cos\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right) = 0$. Решење је $x = \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{n\pi}{2}$, $n \in Z$.

431. *а)* $f(x) > 0$ за $x \notin [1,\ 2]$ и $f(x) < 0$ за $x \in (1,\ 2)$.

б) $f(x) \neq 0$, па график не сече осу Ox. Осу Oy сече у $\dfrac{3}{2}$.

432. Пресечне тачке су $P(2,\ -2)$ и $Q(18,\ 6)$, а одговарајуће тангенте t_1: $x + 2y + 2 = 0$ и t_2: $x - 6y + 18 = 0$. Угао између њих је $\operatorname{arctg}\dfrac{8}{11}$.

433. Решења дате квадратне једначине су $x_{1,\,2} = \dfrac{5-i+\sqrt{-2i}}{2(2+i)}$. Како је $\sqrt{-2i} = \sqrt{2\left(\cos\dfrac{3\pi}{2} + i\sin\dfrac{3\pi}{2}\right)} = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{2} + i\sin\dfrac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{2}\right)$, $k \in \{0,\ 1\}$, односно $\sqrt{-2i} = 1-i$ или $\sqrt{-2i} = -1+i$, то су решења дате једначине: $x_1 = \dfrac{5-i+(1-i)}{2(2+i)} = (1-i)$, $x_2 = \dfrac{5-i+(-1+i)}{2(2+i)} = \dfrac{2}{5}(2-i)$.

434. Заменом $y = x+n$ у првој једначини, добијамо квадратну једначину по x, од чијих решења зависи природа решења система једначина. Решења: *а)* $n \in (-6,\ 2)$, *б)* $n = -6$ или $n = 2$, *в)* $n \in (-\infty. -6) \cup (2,\ +\infty)$.

435. Слично *примеру* 48 *е)*, ГЛАВА ДРУГА, страна 144. Решење је $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi,\quad k \in Z$.

437. *а)* Слично *задатку* 252, страна 272: $f'(x) = 3x^2 + 2ax + 1 = 0$ за $x = -1$ даје $a = 2$.

б) Функција $f(x) = x^3 + 2x^2 + x + 2$ има нулу $x = -2$, максимум и минимум су: $y_{max} = f(-1)$ $y_{min} = f\left(-\dfrac{1}{3}\right)$. Превојна тачка је $x = -\dfrac{2}{3}$. График је дат на сл. 108.

438. Рационалишемо у загради па саберемо. Резултат је $\dfrac{1}{2}$.

439. Слично *примеру* 8 *а)*, ГЛАВА ДРУГА. Резултат је $x = 2$, $y = 4$.

440. $x^2 + (21-x)^2 = 261$. Решење је 6 и 15.

441. Слично *примеру* 29 *д)*, страна 116. Решење је $x = 0$.

442. Своди се на неједначину $\dfrac{x+1}{x} > 2$, која има решење $x \in (0,\ 1)$.

443. Како је $\cos 4x = 2\cos^2 2x - 1$ и $2\cos^2 x = 1 + \cos 2x$, дата једначина се своди на $\cos 2x(2\cos 2x + 1) = 0$. Решења су: $x_1 = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}$, $x_2 = \dfrac{\pi}{6} + m\pi$, $x_3 = -\dfrac{\pi}{6} + n\pi$, $k,\ m,\ n \in Z$.

444. $\operatorname{tg}(x+y) = \dfrac{\operatorname{tg}x + \operatorname{tg}y}{1 - \operatorname{tg}x\operatorname{tg}y} = 1$, па је $x + y = \dfrac{\pi}{4}$. Видети пример 40, страна 134.

445. Центар круга је $C(-3,\ -1)$, итд. Решење је $(x+3)^2 + (y+1)^2 = 25$.

446. Димензије купе су $r = \sqrt{5}$ и $H = 5\sqrt{3}$, па је $V = \dfrac{25}{3}\pi\sqrt{3}$.

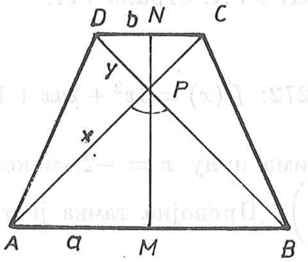
447. Слично *примеру* 40, ГЛАВА ТРЕЋА, страна 239. Тражени бројеви су: $x_1 = 5$, $x_2 = 7$, $x_3 = 9$, $x_4 = 11$.

448. Дата једначина има смисла за $|z| \neq \frac{1}{2}$, а решавањем добијамо $z = \frac{a^2-1}{2}$. (Због услова $|z| \neq \frac{1}{2}$, следи да је $a \neq 0$ и $a \neq \pm\sqrt{2}$.)

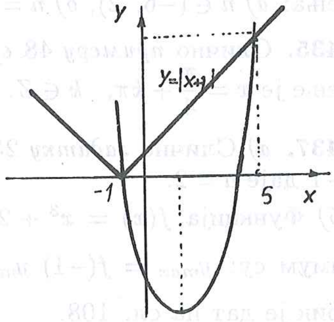
449. Слично *примеру* 20 *г)*, ГЛАВА ДРУГА: $x \in (-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$.

450. Видети решење *задатка* 220, страна 403.

451. Према сл. 109 је $MP = \frac{1}{2}AB$ и $NP = \frac{1}{2}CD$ (једнакокраки троуглови ABP и CDP). Висина трапеза је $MN = \frac{1}{2}(AB + CD) = m$. Површина је $P = m \cdot h = m^2$.



Сл. 109



Сл. 110

452. Означимо са V и V_1 запремине дате и одсечене купе. Тада је $V : V_1 = 2 : 1$, па је $r : r_1 = \sqrt[3]{2} : 1$ и $r_1 = \frac{r}{\sqrt[3]{2}}$. Тражено растојање је $h_1 = \frac{r_1\sqrt{3}}{2} = \frac{r\sqrt{3}}{2\sqrt[3]{2}}$.

453. Дата једначина се трансформише у $2\sin\left(x - \frac{3\pi}{4}\right)\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, односно: $\sin\left(x - \frac{3\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$, а $x = \frac{11\pi}{12}$ је решење те једначине.

454. Ако са d означимо растојање центра $S(3,\ 4)$ круга од праве, уверићемо се да је $d > r = 5$, па права и круг немају заједничких тачака.

455. Решавањем система једначина (праве и параболе) добијемо једначину: $x^2 - (k+2)x + 1 = 0$, чија је дискриминанта $D = k^2 + 4k$. Права додирује параболу ако је $D = 0$, тј. ако је $k = 0$ или $k = -4$.

456. n^2 и $3n$ су оба парна или оба непарна броја, па је $n^2 + 3n$, а самим тим и $n^2 + 3n - 4$, увек паран број.

457. Видети извођење формуле у *одељку* 3.3, страна 183.

458. Непознату количину алкохола означимо са x литара. Тада из једначине $75x = 51(x+12)$, добијамо $x = 25.5$ литара.

459. Видети *задатак* 79, страна 99. Решења су $m_1 = -7$, $m_2 = 1$.

460. Видети *пример* 20 *д)*, ГЛАВА ДРУГА: $x \notin \left[\frac{1}{2},\ 1\right]$.

461. Слично *примеру* 33 *ђ)*, ГЛАВА ДРУГА. Решење је $x = 1$.

462. Из $P = ah_a = bh_b$ следи да је $a : b = h_b : h_a = 3 : 2$, а из датог обима је $a + b = 20\ cm$. Одавде добијамо $a = 12\ cm$ и $b = 8\ cm$. Ако је N подножје висине из темена D на страницу AB, где је $\alpha = 30^o$, онда у троуглу ADN је $AD = 2DN$, тј. $b = 2h_a$. Према томе је $h_a = 4\ cm$, па је површина паралелограма $P = ah_a = 12 \cdot 4 = 48\ cm^2$.

463. Ако су O и O_1 центри основа, AB и A_1B_1 пресечне тетиве, тада су троуглови OAB и $O_1A_1B_1$ једнакостранични, и $AB = A_1B_1 = r$. Централно растојање тетиве је висина једнакостраничног троугла и $\dfrac{r\sqrt{3}}{2} = 4$, па је $r = \dfrac{8}{\sqrt{3}}$. Пресек је правоугаоник ABB_1A_1 чија је површина

$$P = AB \cdot BB_1 = r \cdot H = \frac{8}{\sqrt{3}} \cdot 20 = \frac{160\sqrt{3}}{3}\ cm^2.$$

464. Према услову, одсечак дате праве између координатних оса је пречник круга који садржи теме правог угла. Тачке $A(2,\ 0)$ и $B(0,\ 3)$ су пресеци праве и оса Ox и Oy, а круг пречника AB има једначину $(x-1)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{13}{4}$. Симетрала дужи AB, права $4x - 6y + 5 = 0$, сече круг у тачкама $C\left(\frac{5}{2},\ \frac{5}{2}\right)$ и $C_1\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$.

465. По *формули* (40) из ДРУГЕ ГЛАВЕ је $\sin x + \sin 3x = 2\sin 2x \cos x$, а по *формули* (37) из исте главе је $1 + \cos 2x = 2\cos^2 x$, итд.

466. Видети *одељак* 4.3. Резултат: $y' = \dfrac{\ln x + x + 1}{(1+x)^2}$.

467. $$\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C.$$

Друго решење: $\displaystyle\int \frac{4}{4\sin^2 x \cos^2 x} dx = 2\int \frac{2dx}{\sin^2 2x} = -2\operatorname{ctg} 2x + C$.

468. Како је $a + x = a + \dfrac{2ab}{b^2+1} = \dfrac{a(b+1)^2}{b^2+1}$ и $a - x = \dfrac{a(b-1)^2}{b^2+1}$, то се дати израз A своди на $A = \dfrac{|\,b+1\,| - |\,b-1\,|}{|\,b+1\,| + |\,b-1\,|} = \begin{cases} \dfrac{1}{b}, & \text{за } |\,b\,| \geq 1 \\ b, & \text{за } |\,b\,| < 1 \end{cases}$.

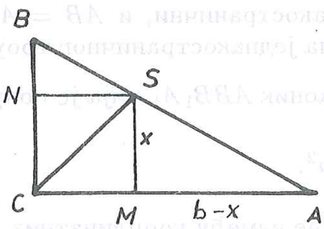
469. Решење: $x \in (0, 1)$.

470. Решења су $x_1 = -1$ и $x_2 = 5$, сл. 110, одређена пресеком графика функција $y = x^2 - 3x - 4$ и $y = |\, x + 1\,|$.

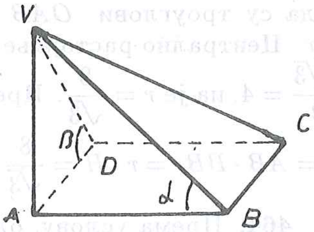
471. Применимо *формулу* (44) из ДРУГЕ ГЛАВЕ и добијемо: $\sin 12x + \sin 4x = 0$, па применимо *формулу* (40) из исте главе. Добијемо: $\sin 8x \cos 4x = 0$. Решења су: $x_1 = \dfrac{k\pi}{8}$, $x_2 = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{m\pi}{4}$, $k,\ m \in Z$.

472. Четвороугао $CMSN$ је квадрат, сл. 111. Његову страницу x добијамо на основу сличности троуглова ABC и ASM. Из пропорције $AC : BC = AM : SM$, односно $b : a = (b - x) : x$ добијамо $x = \dfrac{ab}{a+b}$, па је

$CS = x\sqrt{2} = \dfrac{ab\sqrt{2}}{a+b}$.



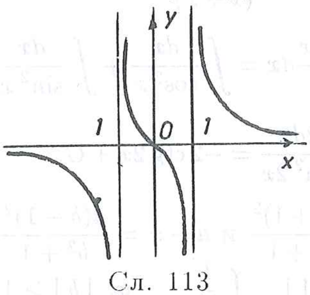
Сл. 111



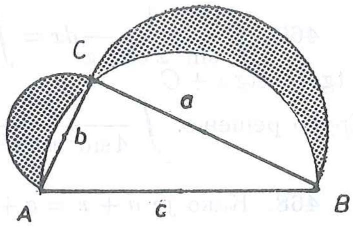
Сл. 112

473. Троуглови ABV и ADV нормални на основу $ABCD$, па је VA висина, и $VA \perp AB$ и $VA \perp AD$, сл. 112. Због $VA \perp AB$ и $AB \perp BC$, по теореми о три нормале је $VB \perp BC$, па је $\measuredangle VBA$ нагиб равни VBC, тј. $\measuredangle VBA = \alpha$. Слично је $\measuredangle VDA = \beta$. Из троуглова ABV и ADV налазимо да је $AB = AV \operatorname{ctg}\alpha$ и $AD = AV \operatorname{ctg}\beta$, па је $S = AB \cdot AD = AV^2 \operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\beta$. Одатле је $AV = \sqrt{S \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}$. Запремина пирамиде је
$V = \dfrac{1}{3} S \cdot AV = \dfrac{1}{3} S^{\frac{3}{2}} \sqrt{\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}$.

474. Слично *примеру* 28 *б)* из ГЛАВЕ ЧЕТВРТЕ. Види сл. 113.



Сл. 113



Сл. 114

475. Из услова додира праве и круга добијемо $a_1 = 1$ и $a_2 = -3$.

476. $\dfrac{x_1}{x_2}+\dfrac{x_2}{x_1}=\dfrac{x_1^2+x_2^2}{x_1x_2}=\dfrac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{x_1x_2}$. Применом Виетових веза (формула (9), ГЛАВА ДРУГА), добијамо $\dfrac{(k+3)^2}{k+21}<3$. Решење је $k\in(-\infty,\ -21)\cup(-9,\ 6)$.

477. Тражена површина, на сл. 114 осенчене површи, добија се кад се од збира површина троугла и двају мањих полукругова одузме површина највећег полукруга: $P=\dfrac{ab}{2}+\dfrac{1}{2}a^2\pi+\dfrac{1}{2}b^2\pi-\dfrac{1}{2}c^2\pi=\dfrac{ab}{2}+\dfrac{\pi}{2}(a^2+ +b^2-c^2)=\dfrac{ab}{2}+\dfrac{\pi}{2}(c^2-c^2)=\dfrac{ab}{2}$, а то је површина датог троугла.

478. Видети *пример* 45 *в)*, ГЛАВА ДРУГА, страна 139.

479. Видети *пример* 27, ГЛАВА ТРЕЋА, страна 220. Резултат: $\left(x+\dfrac{11}{2}\right)^2+(y-7)^2=\left(\dfrac{25}{2}\right)^2$.

480. Такав паралелепипед не постоји.

481. Видети *пример* 31 *в)*, ГЛАВА ДРУГА, страна 120.

482. Видети *пример* 13, ГЛАВА ТРЕЋА, страна 191.

483. $(1-\cos 2x)+\sin x-2\sin x\cos x+(\cos 3x-\cos x)=0\Leftrightarrow$ $2\sin^2 x+\sin x-2\sin x\cos x-2\sin 2x\sin x=0\Leftrightarrow\sin x(1-2\cos x)(2\sin x+1)=0$. Одавде имамо решења: $x_1=k\pi,\ x_2=\dfrac{\pi}{3}+m\pi,\ x_3=-\dfrac{\pi}{3}+n\pi,\ x_4=\dfrac{7\pi}{6}+p\pi,$ $x_5=-\dfrac{\pi}{6}+q\pi,\ k,\ m,\ n,\ p,\ q\in Z$.

484. Као у *примеру* 27, ГЛАВА ТРЕЋА, одредимо једначину симетрале тетиве AB : $x-2y+2=0$. Ако је центар траженог круга тачка $C(p,\ q)$, тада је $p-2q+2=0$. Из другог услова имамо везу: $(p+2)^2+(q-5)^2=\dfrac{(3p+4q-19)^2}{25}$. Решења система једначина по p и q су $p_1=-2,\ q_1=0$ и $p_2=-22,\ q_2=-10$. Одговарајуће вредности за r су $r_1=5$ или $r_2=25$. Тражени круг је $(x+2)^2+y^2=25$ или $(x+22)^2+(y+10)^2=625$. Додирне тачке су $T_1(1,\ 4)$ и $T_2(-7,\ 10)$.

485. Ивице паралелепипеда су a, aq и aq^2. Решење система једначина $a^2+a^2q^2+a^2q^4=36\wedge 2a^2q+2a^2q^2+2a^2q^3=72$ је $q=1$, $a=2\sqrt{3}$. (Поделимо једначине и добијемо $(q-1)^2(q^2+q+1)=0$, итд.) Тражени паралелепипед је коцка ивице $a=2\sqrt{3}$.

486. *а)* Мора бити $\log_3 x<0$, тј. $0<x<3$ (због знака десне стране једнакости) $x\neq 1$. Квадрирањем добијамо $\left(\dfrac{1}{2}\log_x 3+\dfrac{1}{2}\right)\log_3^2 x=1$. Уведемо смену: $\log_3 x=y<0$, итд. Решење је $x=\dfrac{1}{9}$.

б) Неједнакости су задовољене за свако реално x.

487. Слично *примеру* 20 *ж)*, страна 102. Резултат: $k > \frac{1}{3}$.

488. База је половина једнакостраничног троугла, итд. Резултат: $V = 6\sqrt{6}\ cm^3$.

489. Права AC је нормална на праву BH. Једначина праве BH је $2x - y - 8 = 0$, па једначина праве AC је $y = -\frac{x}{2} - 3$. Слично, једначина праве BC је $x = 6$. Пресечна тачка правих AC и BC је $C(6,\ -6)$.

490. Ставимо $\cos x = t$, итд. Решења су: $x_1 = 2k\pi$, $x_2 = \frac{\pi}{3} + 2m\pi$, $x_3 = -\frac{\pi}{3} + 2n\pi$, $k,\ m,\ n \in Z$.

491. *а)* Уводимо смену $2^x = t$, итд. Решења су $x_1 = -1$, $x_2 = 2$.

б) Неједначина је еквивалентна са $2^{\log_2 \frac{x-3}{2x}} < 1$, а одавде $0 < \frac{x-3}{2x} < 1$. Решење је $x \in (-\infty,\ -3) \cup (3,\ +\infty)$.

492. Слично *задатку* 88, страна 104, $f(x) < 0$ за $\forall x$, ако је $m < -\frac{1}{3}$. За $m = -2$ парабола пролази кроз тачку $(-1,\ -7)$. Њена формула је $y = -3x^2 + 2x - 2$ и има теме $T\left(\frac{1}{3},\ -\frac{5}{3}\right)$.

493. Дати трапез је половина правилног шестоугла уписаног у круг. Најдужа страница је основица дужине 4, а остале странице су дужине 2. Ротацијом трапеза добијамо ваљак и две једнаке купе. Запремина овог тела је 8π. Запремина лопте је $\frac{32}{3}\pi$. Резултат је $8\pi : \frac{32}{3}\pi = 0.75 = 75\%$.

494. Коефицијент правца тангенте је 1 или -1. Из услова додира (формула (65), ГЛАВА ТРЕЋА) налазимо n, $n = \pm 2$. Тражене тангенте (облика $y = kx + n$) су: $y = x + 2$, $y = x - 2$, $y = -x + 2$, $y = -x - 2$. Њихове додирне тачке су редом: $(-1,\ 1)$, $(1,\ -1)$, $(1,\ 1)$, $(-1,\ -1)$.

495. Једначина се своди на $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, па је $x_1 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $x_2 = \frac{2\pi}{3} + 2m\pi$, $k,\ m \in Z$.

496. *а)* Видети *одељак* 1.5. *б)* Видети *одељак* 2.4. *в)* Видети *пример* 44, ГЛАВА ДРУГА, страна 137.

497. $\log_5 216 = \frac{\log 216}{\log 5}$ и $216 = 2^3 \cdot 3^3$, а $5 = \frac{10}{2}$, итд. Резултат: $\frac{3(a+b)}{1-a}$.

498. Слично задатку 90, страна 104. Резултат: $m \in [1,\ 2) \cup (2,\ 4]$.

499. Слично *примеру* 24 *б)*, страна 107. Решење: $x = 3$.

500. Применимо формуле (45), (47) и (49) из ГЛАВА ДРУГЕ, страна 150. Резултати: $\alpha = 75^o$, $\beta = 45^o$, $\gamma = 60^o$ и $O = 3 + \sqrt{3} + \sqrt{6}$.

501. Слично *примеру* 47, ГЛАВА ДРУГА, страна 144. Једначина се своди на облик $(\operatorname{tg} x + \sqrt{3})^2 = 0$. Решење је $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, \quad k \in Z$.

502. Нема решења, јер су дате тачке A, B, S колинеарне.

503. Резултат: 1.

504. Видети *пример* 15 *в)*, ГЛАВА ДРУГА. Резултат $k = 2$.

505. Из друге једначине заменимо у прву $y = \frac{1}{x^2}$ и добијемо: $x^{x+\frac{1}{x^2}} = x^{-2x+\frac{2}{x^2}}$. Очигледно су решења $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, па је $y_1 = 1$, $y_2 = 1$. Даље, за $x \neq 0$ добијамо услов $x + \frac{1}{x^2} = -2x + \frac{2}{x^2}$. Одавде је $x_3 = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$, па је $y_3 = \sqrt[3]{9}$.

506. Одавде је $\sin x = 1$ или $\sin x = \frac{1}{2}$, па је $x_1 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $x_2 = \frac{\pi}{6} + 2m\pi$, $x_3 = \frac{5\pi}{6} + 2n\pi$, $k, m, n \in Z$.

507. $f(x)\cdot f(y) = (2^x+2^{-x})\cdot(2^y+2^{-y}) = (2^{x+y}+2^{-(x+y)})+(2^{x-y}+2^{-(x-y)}) = f(x+y) + f(x-y)$, па је тражени резултат 0.

508. Из $(x+y)^2 = u^2$, добијамо: $x^2 + y^2 = u^2 - 2v$. Затим је $x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2) = u(u^2 - 3v)$. Коначно: $x^5 + y^5 = (x^2 + y^2)(x^3 + y^3) - x^2y^2(x+y) = (u^2 - 2v) \cdot u(u^2 - 3v) - uv^2 = u^5 - 5u^3v + 5uv^2$.

509. Слично *задатку* 89, страна 104. Резултат: $a = -1$.

510. Из друге једначине је $y - x = 4$, за $y > x$, односно $y = x + 4$. Заменом у прву једначину добијемо $16 \cdot 6^x = 576$, одакле је $x = 2$, па је $y = 6$.

511. Сређивањем добијемо: $\dfrac{1 + \cos 2x}{\operatorname{ctg}\frac{x}{2} - \operatorname{tg}\frac{x}{2}} = \sin x \cos x$. Сада из $(\sin x + \cos x)^2 = m^2$, добијамо: $\sin x \cos x = \frac{1}{2}(m^2 - 1)$.

512. *а)* Ставимо: $\frac{x+2}{2x+1} = t$, па је одавде $x = \frac{t-2}{1-2t}$. Сада је $f(t) = \frac{5(t-2)}{1-2t} + 3 = \frac{t+7}{2t-1}$. Због тога је $f(x) = \frac{x+7}{2x-1}$.

б) $g(0) = 5$ даје услов: $5 = a + b$, $g(1) = 14$ даје: $14 = a + bc$ и $g(2) = 50$ даје услов: $50 = a + bc^2$. Решење овог система је $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$.

513. Из $(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$, следи: $xy+yz+zx = -1$. Према *примеру* 20 *ђ)*, страна 24, важи: $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz =$

$= (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$, па је $xyz=-2$.

514. Ако уведемо смене $x+y=a$ и $\sqrt{xy}=b$, дати систем прелази у : $(a+b=14 \ \wedge \ a^2-b^2=84)$, чије решење је $a=10$, $b=4$. Сада из $(x+y=10 \ \wedge \ xy=16)$, добијамо $x=2$, $y=8$, или $x=8$, $y=2$.

515. Неједначина се своди на $\left(\dfrac{5}{3}\right)^x > \left(\dfrac{5}{3}\right)^3$. Решење је $x>3$.

516. Једначина је еквивалентне са $(\sin x+\cos x)(2\cos x+1)=0$. Решења су: $x_1=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi$, $x_2=\dfrac{2\pi}{3}+2m\pi$, $x_3=-\dfrac{2\pi}{3}+2n\pi$, $k,\ m,\ n\in Z$.

517. За $x=2$ је $\dfrac{1}{2}f(2)+2f\left(\dfrac{1}{2}\right)=2$, а за $x=\dfrac{1}{2}$ је $\dfrac{1}{2}f\left(\dfrac{1}{2}\right)+2f(2)=\dfrac{1}{2}$. Елиминишемо $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ и добијемо $f(2)=0$.

518. За $x\in[0,\ 1)\cup(1,\ +\infty)$ је $x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}$, итд. Резултат је $\dfrac{2}{1-x}$.

519. Уводимо смену: $\log_2 x=t$, итд. Решења су: $x_1=\dfrac{1}{2}$, $x_2=128$.

520. Слично *примеру* 47, ГЛАВА ДРУГА, страна 144. Решења су: $x_1=\dfrac{\pi}{4}+k\pi$, $x_2=\operatorname{arctg}(-2)+m\pi$, $k,\ m\in Z$.

521. У правоуглом троуглу ADM је $a=\dfrac{2x\sqrt{5}}{5}$, где је a дужина странице квадрата. Отуда је $d=a\sqrt{2}=\dfrac{2x\sqrt{10}}{5}$.

522. Решење је $x\in\left(-\dfrac{1}{4},\ \dfrac{1}{4}\right)\cup\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$.

523. Резултат је 1.

524. Неједначина се своди на $0<x^2-x+3<9$. Решење: $x\in(-2,\ 3)$.

525. Једначина је еквивалентна са $\sin^2 x(4\cos^2 x-1)=0$. Решења су: $x_1=k\pi$, $x_2=\dfrac{\pi}{3}+m\pi$, $x_3=-\dfrac{\pi}{3}+n\pi$, $k,\ m,\ n\in Z$.

526. Полупречник лопте је $r=2\ cm$. Резултат: $V_K : V_L=\dfrac{6}{\pi}\approx 1.9$.

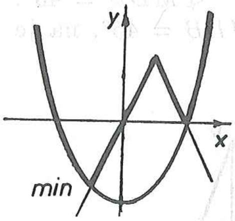
527. Решење налазимо као на сл. 12, ГЛАВА ДРУГА, страна 40. Резултат је: $x<\dfrac{3}{2}$.

528. - 542. Треба заокружити редом следећа слова:

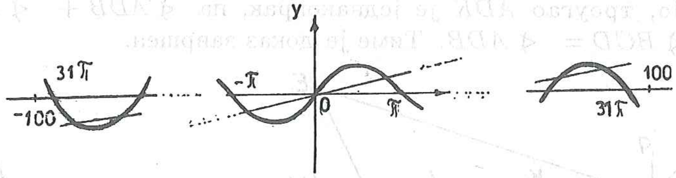
г), в), б), д), д), д), а), б), д), д), а), д), г), д), б).

543. Како је $x^2-1=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}+2\right)-1=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}-2\right)=$ $=\dfrac{1}{4}\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}}-\sqrt{\dfrac{b}{a}}\right)^2$, то је $\sqrt{x^2-1}=\dfrac{1}{2}\left|\sqrt{\dfrac{a}{b}}-\sqrt{\dfrac{b}{a}}\right|$. Дакле, за $a\geq b$ је $\sqrt{x^2-1}=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}}-\sqrt{\dfrac{b}{a}}\right)$, и за $a<b$ је $\sqrt{x^2-1}=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{\dfrac{b}{a}}-\sqrt{\dfrac{a}{b}}\right)$. Заменом у дати израз, уверавамо се у исправност дате једнакости.

544. На сл. 115 дебљом линијом је истакнут график дате функције (од функција $y=x^2-1$ и $y=1-\mid 2x-1\mid$ узимамо онај део графика, који је изнад другог.) Минимум је $f(1-\sqrt{2})$ (јер је $x^2-1=2x$, $x\leq\dfrac{1}{2}$), а то је $2(1-\sqrt{2})$.



Сл. 115



Сл. 116

545. Слично *задатку* 95 *д)* на страни 111. Неједначина има смисла за $x\in[-1,\ 0)\cup(0,\ 1]$. Решење је $x\in\left[-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ 0\right)\cup\left(0,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right]$.

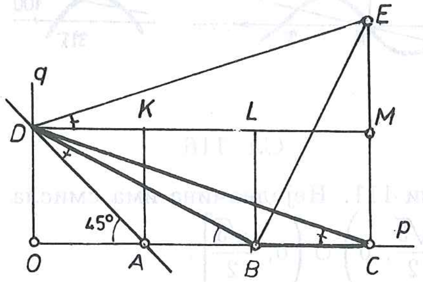
546. На сл. 116 видимо да су пресеци синусоиде, $y=\sin x$, и праве $y=\dfrac{x}{100}$, распоређени симетрично у односу на координатни почетак, на интервалу $[-31\pi,\ 31\pi]$. Укупан број решења је 63.

547. Видети *задатак* 110 *а)*, страна 124.

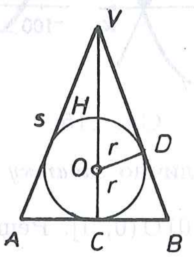
548. $k=\underbrace{44\ldots44}_{n}\underbrace{88\ldots88}_{n-1}9=4\cdot\underbrace{11\ldots11}_{n}\cdot10^n+8\cdot\underbrace{11\ldots11}_{n}+1$. Како је $\underbrace{11\ldots11}_{n}=\dfrac{10^n-1}{9}$, то је $k=\dfrac{4}{9}(10^n-1)\cdot10^n+\dfrac{8}{9}(10^n-1)+1=$ $=\dfrac{4\cdot10^{2n}+4\cdot10^n+1}{9}=\left(\dfrac{2\cdot10^n+1}{3}\right)^2$.

549. Нека A, B, C, D, свако за себе, може да уради цео посао редом за a, b, c, d часова. Рачунајући колики део посла сваки засебно и по групама могу да ураде за 1 сат, добијамо једначине: $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{6}\ \wedge\ \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{d}=\dfrac{2}{15}\ \wedge\ \dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{d}=\dfrac{1}{10}$. Сабирањем свих ових једнакости добијамо: $\frac{2}{a}+\frac{2}{b}+\frac{2}{c}+\frac{2}{d}=\frac{12}{30}$, односно $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=\frac{1}{5}$. Сви заједно би завршили посао за 5 дана, јер би за 1 час урадили петину посла.

550. Доказаћемо да је $\sphericalangle ADB = \sphericalangle BCD$, сл. 117. У описаном кругу троугла BCD је $\sphericalangle BCD$ периферијски над тетивом BD, а $\sphericalangle ADB$ би у овом случају морао бити угао између тангенте и тетиве (што би према *примеру* 66, ГЛАВА ПРВА, било довољно за доказ тврђења). Нека су K, L, M темена квадрата $OAKD$, $ABLK$ и $BCML$ и E тачка праве CM, таква да је M средиште дужи CE. Тада су подударни правоугли троуглови OBD, CEB и LDB, па је $\sphericalangle OBD = \sphericalangle BEC = \sphericalangle BDL$. Како је $\sphericalangle BEC + \sphericalangle CBE = 90^o$, то је и $\sphericalangle OBD + \sphericalangle CBE = 90^o$, па је $\sphericalangle DBE = 90^o$. Сем тога је и $BD = BE$, па је $\sphericalangle BDE = 45^o$. Троугао CDO је подударан троуглу DEM, па је $\sphericalangle OCD = \sphericalangle EDM$. Како је $\sphericalangle EDM + \sphericalangle MDB = 45^o$ то је и $\sphericalangle OCD + \sphericalangle MDB = 45^o$. Но, троугао ADK је једнакокрак, па $\sphericalangle ADB + \sphericalangle MDB = 45^o$, па је $\sphericalangle BCD = \sphericalangle ADB$. Тиме је доказ завршен.



Сл. 117



Сл. 118

551. Из сличности троуглова VBC и VOD (видети сл. 118) је $VB : BC = VO : OD$, тј. $s : R = (H-r) : r$, па је $s = \frac{R(H-r)}{r}$. Из датог услова за површине је $R^2\pi + R\pi s = 8r^2\pi$, тј. $R^2 + Rs = 8r^2$. Заменимо s из претходне једнакости и добијемо: $R^2H = 8r^3$. Сада је запремина купе $V_1 = \frac{1}{3}R^2\pi H = \frac{8}{3}r^3\pi$, а запремина лопте је $V_2 = \frac{4}{3}r^3\pi$. Дакле, $V_1 = 2V_2$.

552. Слично *задатку* 6. Са E, F и R означимо скупове ученика који уче редом енглески, француски и руски језик, итд. Решење: 60 ученика.

553. Лако се уверавамо да за $p=\frac{1}{2}$ или $q=\frac{1}{2}$ дата једнакост прелази у идентичност: $\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$. Обрнуто, ако важи дата једнакост, она је еквивалентна са $p+q-2pq-\frac{1}{2}=0$, а одавде је $\left(p-\frac{1}{2}\right)(1-2q)=0$, што је испуњено само ако је $p=\frac{1}{2}$ или $q=\frac{1}{2}$.

554. На основу првих неколико формула, датих на почетку *одељка* 3.0, имамо везе: $h_a = \dfrac{2P}{a}$, $h_b = \dfrac{2P}{b}$, $h_c = \dfrac{2P}{c}$ и $r = \dfrac{P}{s}$, па је $\dfrac{1}{h_a} + \dfrac{1}{h_b} + \dfrac{1}{h_c} =$ $= \dfrac{a}{2P} + \dfrac{b}{2P} + \dfrac{c}{2P} = \dfrac{a+b+c}{2P} = \dfrac{s}{P} = \dfrac{1}{r}$.

555. Како је $\log(2^{\sqrt{\log_2 1985}}) = \sqrt{\log_2 1985} \cdot \log 2 = \sqrt{\dfrac{\log 1985}{\log 2}} \cdot \log 2 =$ $= \sqrt{\log 2 \cdot \log 1985}$ и слично $\log(1985^{\sqrt{\log_{1985} 2}}) = \sqrt{\log 2 \cdot \log 1985}$, то су дати бројеви једнаки.

556. С обзиром да је $max\{|\,x\,|,\ \ |\,y\,|\} = 1 \Leftrightarrow (|\,x\,| = 1$ и $|\,y\,| \leq 1)$ или $(|\,x\,| \leq 1$ и $|\,y\,| = 1)$, то решења дају два система једначина: $(|\,x\,| + |\,y\,| = 1 \wedge |\,x\,| = 1)$ или $(|\,x\,| + |\,y\,| = 1 \wedge |\,y\,| = 1)$. Решења су $(1,\ 0)$, $(-1,\ 0)$, $(0,\ 1)$ и $(0,\ -1)$.

557. Видети *пример* 41, страна 42.

558. Слично *примеру* 8, ГЛАВА ДРУГА. За $z = x + iy$, дати услов даје једнакост $2x(x + iy) = 0$, а то је испуњено за $x = 0$ и y је произвољан реалан број.

559. Слично *задатку* 85 *б), в), г)*, ГЛАВА ДРУГА, страна 103. Услов $-1 < x^2 - 5x + 5 < 1$ испуњен је за $x \in (1,\ 2) \cup (3,\ 4)$.

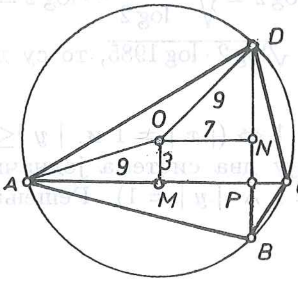
560. Користимо математичку индукцију (*одељак* 3.8). Нека је $a_n = \left(1 - \dfrac{1}{2}\right) + \left(\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\dfrac{1}{2n-1} - \dfrac{1}{2n}\right)$ и $b_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{2n}$. Тада је за $n = 1$ испуњено: $a_1 = \dfrac{1}{2} = b_1$. Претпоставимо да је $a_n = b_n$, тј. $a_n - b_n = 0$. Како је $b_{n+1} - b_n = \dfrac{1}{2n+1} + \dfrac{1}{2n+2} - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{1}{2n+1} - \dfrac{1}{2n+2}$, и $a_{n+1} - a_n = \dfrac{1}{2n+1} - \dfrac{1}{2n+2}$, то је $b_{n+1} - b_n = a_{n+1} - a_n$, тј. $a_n - b_n =$ $= a_{n+1} - b_{n+1} = 0$. Одавде је $a_{n+1} = b_{n+1}$, а тиме је доказ завршен.

561. Према сл. 119, треба најпре израчунати дужине дужи AP, BP, CP, DP. Користећи се Питагорином теоремом, најпре израчунамо $AM = \sqrt{72} = 6\sqrt{2} = CM$, и $DN = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$. Тако добијемо $AP = 6\sqrt{2} + 7$, $BP = 4\sqrt{2} - 3$, $CP = 6\sqrt{2} - 7$ и $DP = 4\sqrt{2} + 3$. Користећи поново Питагорину теорему, добијамо $AB^2 = AP^2 + BP^2 =$ $= 162 + 60\sqrt{2} = 6(27 + 10\sqrt{2}) = 6(5 + \sqrt{2})^2$, па је $AB = \sqrt{6}(5 + \sqrt{2})$. Слично је $BC = 3\sqrt{6}(\sqrt{2} - 1)$, $CD = \sqrt{6}(5 - \sqrt{2})$ и $AD = 3\sqrt{6}(\sqrt{2} + 1)$.

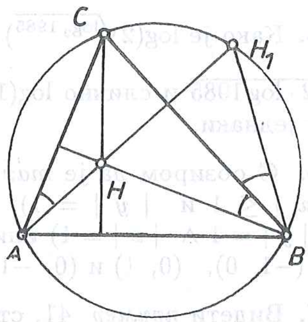
562. Слично *примеру* 33, ГЛАВА ПРВА. Решења су: $x_1 = 0$, $x_2 = 2$.

563. Неједначина је еквивалентна са $x-1 \leq 3x^2 - 7x + 3$, уз ограничења $x - 1 > 0$ и $3x^2 - 7x + 3 > 0$, што даје $x > \dfrac{7 + \sqrt{13}}{6}$. Решење: $x \geq 2$.

564. Знамо да је $\cos 101 - \cos 100 = -2\sin 0.5\ \sin 100.5$. Како је $0 < \dfrac{1}{2} < \dfrac{\pi}{2}$, то је $\sin\dfrac{1}{2} > 0$, а $\sin 100.5 = \sin(100.5 - 30\pi)$, јер је $\dfrac{3\pi}{2} < 100.5 - 30\pi < 2\pi$, тј. $\sin 100.5 < 0$, то је $\cos 101 - \cos 100 > 0$, односно $\cos 101 > \cos 100$.



Сл. 119



Сл. 120

565. Смена $\cos x = t$, итд. Решења су: $x_1 = \pi + 2k\pi$, $x_2 = \dfrac{\pi}{3} + 2m\pi$, $x_3 = -\dfrac{\pi}{3} + 2n\pi$, $k,\ m,\ n \in Z$.

566. Користимо математичку индукцију. За $n = 1$ је $1 \le 1$, што је тачно. Из претпоставке да је неједнакост тачна за n, добијамо за $n+1$: $\dfrac{1}{\sqrt{1}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} \le 2\sqrt{n} - 1 + \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} = \dfrac{2\sqrt{n(n+1)}+1}{\sqrt{n+1}} - 1$, а ово је, на основу неједнакости између аритметичке и геометријске средине мање или једнако са $\dfrac{2\cdot\frac{1}{2}(n + (n+1)) + 1}{\sqrt{n+1}} - 1 = \dfrac{2(n+1)}{\sqrt{n+1}} - 1 = 2\sqrt{n+1} - 1$.

567. Нека је H ортоцентар троугла ABC и H_1 тачка симетрична у односу на праву BC, сл. 120. Због симетрије је $\sphericalangle CBH_1 = \sphericalangle CBN$. Међутим, $\sphericalangle CBN = \sphericalangle CAH_1$ (углови са нормалним крацима), па је и $\sphericalangle CBH_1 = \sphericalangle CAH_1$. Отуда следи да је четвороугао ABH_1C тетиван (видети *напомену* иза сл. 46, ГЛАВА ПРВА, страна 62). Отуда следи да је тачка H_1 на кругу описаном око троугла ABC. Слично се доказује и за остале тачке.

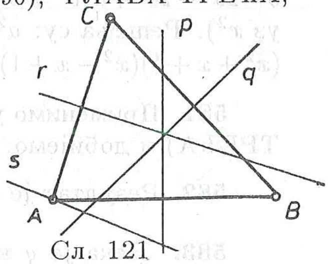
568. Како је $\dfrac{1}{2} < \dfrac{2}{3}$, $\dfrac{3}{4} < \dfrac{4}{5}$, $\ldots$, $\dfrac{2n-1}{2n} < \dfrac{2n}{2n+1}$, то је $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\dfrac{2n-1}{2n} < \dfrac{2\cdot 4\ldots 2n}{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n+1)}$. Ако уведемо ознаку: $x = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\dfrac{2n-1}{2n}$, добијена неједнакост постаје $x < \dfrac{1}{x(2n+1)}$, а одавде добијамо тражени закључак.

569. Једначина има решења само на интервалу $[-1,\ 1]$ и то $x_1 = 1$, $x_2 = -1$.

570. Слично *задатку* 104 *в)*, страна 118. Решење је $x = \dfrac{3}{2}$.

571. Видети *пример* 46, ГЛАВА ДРУГА, страна 146. Решења су $x_1 = 2k\pi$ и $x_2 = \dfrac{\pi}{2} + 2m\pi,\ \ k,\ m \in Z$.

572. Неједначина има смисла за $|\,x\,| < 1$. Тада је лева страна опадајућа геометријска прогресија, и по *формули* (90), ГЛАВА ТРЕЋА, имамо $\dfrac{x}{1-x} < 1$ и $-1 < x < 1$. Решење је: $x \in \left(-1,\ \dfrac{1}{2}\right)$.



Сл. 121

573. Слично *задатку* 14, страна 3. Резултат је: $a = b = -4$.

574. Видети *задатак* 310.

575. *Анализа.* Задатак нема решења ако праве $p,\ \ q,\ \ r$ немају тачно једну заједничку тачку, јер пресек симетрала страница је центар описаног круга троугла (на сл. 121 тачка O). Пресликавањем тачке A трима осним симетријама уверавамо се да је $\Im_r \circ \Im_q \circ \Im_p(A) = A$. Обзиром да $A \in s$, то ћемо одредити праву s', тако да је $s' = \Im_r \circ \Im_q \circ \Im_p(s)$. Даље је $s' \cap s = \{A\}$, итд.

576. Према сл. 92, уз решење *задатка* 310, ако је φ тражени угао, тада је $\cos\varphi = \dfrac{NS}{DS} = \dfrac{1}{3}$, па је $\varphi = \arccos\dfrac{1}{3}$.

577. Слично *примеру* 29, ГЛАВА ТРЕЋА. Тражена тачка је $A(1,\ 1)$.

578. Применимо биномну формулу (формулу (10), ГЛАВА ЧЕТВРТА. Стављајући $a = b = 1$ добијемо: $(1+1)^n = 1 + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n}$, одакле следи тражени закључак. (Видети пример 8 *a)*, страна 250.)

579. Траже се природни бројеви $p,\ \ c,\ \ z,$ који задовољавају услове: $p + c + z = 100$ и $5p + 3c + \dfrac{z}{3} = 100$. Елиминацијом z добијамо диофантску једначину*) $7p + 4c = 100$, која даје $c = 25 - 2p + \dfrac{p}{4}$. Очигледно је $p = 4k$, где је $k = 0$ или $k \in N$. Тада је $p = 4k$, $c = 25 - 7k$ и $z = 75 + 3k$. Бројеви $p,\ \ c$ и z су природни за $k \in \{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$. Одговарајућа решења су $p = 0,\ \ c = 25,\ \ z = 75$ или $p = 4,\ \ c = 18,\ \ z = 78$, или $p = 8,\ \ c = 11,\ \ z = 81$, или $p = 12,\ \ c = 4,\ \ z = 84$.

---

*) Једначина са целобројним решењима.

580. Сви квадратни триноми су облика $x^2 + ax \pm 1$. Међутим, како полином $t^2 + t + 1$, где је $t = x^4$, нема реалних нула, то дискриминанте тражених тринома на могу бити позитивне. Стога су сви слободни чланови $+1$. Сада имамо идентичност:
$x^8 + x^4 + 1 = (x^2 + ax + 1)(x^2 + bx + 1)(x^2 + cx + 1)(x^2 + dx + 1)$.
Али, због парности леве стране једнакости, мора бити $b = -a$ и $d = -c$. Сада применом формуле (17), ГЛАВА ПРВА, на једнакост:
$x^8 + x^4 + 1 = (x^2 + 1 + ax)(x^2 + 1 - ax)(x^2 + 1 + cx)(x^2 + 1 - cx)$, односно
$x^8 + x^4 + 1 = (x^4 + 2x^2 + 1 - a^2x^2)(x^4 + 2x^2 + 1 - c^2x^2)$, добијамо:
$6 - 2a^2 - 2c^2 + a^2c^2 = 1$ (коефицијенти уз x^4) и $4 - a^2 - c^2 = 0$ (коефицијенти уз x^2). Решења су: $a^2 = 1$, $c^2 = 3$ или $a^2 = 3$, $c^2 = 1$. Дакле: $x^8 + x^4 + 1 = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)(x^2 + x\sqrt{3} + 1)(x^2 - x\sqrt{3} + 1)$.

581. Применимо услов додира праве и круга (формула (65), ГЛАВА ТРЕЋА) и добијемо: $8(a^2 + 1) = 16$, одакле је $a = 1$ или $a = -1$.

582. Резултат је 48.

583. Нека је q количник дате прогресије. Тада је $S_1 = a_1 \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$, а $S_2 = \dfrac{1}{a_1} \cdot \dfrac{1 - \frac{1}{q^n}}{1 - \frac{1}{q}} = \dfrac{1}{a_1} \dfrac{q^n - 1}{q - 1} \cdot \dfrac{1}{q^{n-1}}$. Отуда је $\dfrac{S_1}{S_2} = a_1^2 q^{n-1}$. Сада је
$a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = a_1^n q^{1+2+\cdots+(n-1)} = a_1^n q^{(n-1)\cdot\frac{n}{2}} = a_1^n \cdot \left(\dfrac{S_1}{S_2} \cdot \dfrac{1}{a_1^2}\right)^{\frac{n}{2}} = \left(\dfrac{S_1}{S_2}\right)^{\frac{n}{2}}$.

584. Видети *задатак* 31.

585. У првом случају добијамо ваљак висине b, увећан за две купе укупне висине $(a - b)$, а у другом случају имамо ваљак висине a, умањен за те две купе. Добијамо $V_1 = \dfrac{\pi h^2}{3}(a + 2b)$ и $V_2 = \dfrac{\pi h^2}{3}(2a + b)$, где је h висина трапеза, а код добијених тела полупречник основе. Како је $V_1 : V_2 = 3 : 4$, то заменом добијамо $a : b = 5 : 2$.

586. Полазни услов трансформишемо:

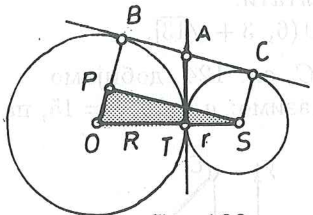
$$\frac{\sin^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\gamma}{\cos^2\alpha\cos^2\beta\cos^2\gamma} + \frac{\sin^2\alpha\sin^2\beta}{\cos^2\alpha\cos^2\beta} + \frac{\sin^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\gamma}{\cos^2\alpha\cos^2\beta\cos^2\gamma} + \frac{\sin^2\alpha\sin^2\gamma}{\cos^2\alpha\cos^2\gamma} +$$
$$+ \frac{\sin^2\beta\sin^2\gamma}{\cos^2\beta\cos^2\gamma} = 1 \Leftrightarrow \frac{\sin^2\alpha\sin^2\beta}{\cos^2\alpha\cos^2\beta}\left(\frac{\sin^2\gamma}{\cos^2\gamma} + 1\right) + \frac{\sin^2\alpha\sin^2\gamma}{\cos^2\alpha\cos^2\gamma}\left(\frac{\sin^2\beta}{\cos^2\beta} + 1\right) +$$
$$+ \frac{\sin^2\beta\sin^2\gamma}{\cos^2\beta\cos^2\gamma} = 1 \Leftrightarrow \frac{\sin^2\alpha\sin^2\beta}{\cos^2\alpha\cos^2\beta\cos^2\gamma} + \frac{\sin^2\alpha\sin^2\gamma}{\cos^2\alpha\cos^2\beta\cos^2\gamma} + \frac{\sin^2\beta\sin^2\gamma}{\cos^2\beta\cos^2\gamma} = 1$$

Сада помножимо једнакост са $\cos^2\alpha\cos^2\beta\cos^2\gamma$ и на десној страни заменимо $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, $x \in \{\alpha, \beta, \gamma\}$. Даље је $\sin^2\alpha\sin^2\beta + \sin^2\alpha\sin^2\gamma + \cos^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\gamma = (1 - \sin^2\alpha)(1 - \sin^2\beta)(1 - \sin^2\gamma)$. После множења на десној страни и поништавања супротних сабирака добијамо: $\cos^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\gamma = 1-\sin^2\alpha-\sin^2\beta-\sin^2\gamma+\sin^2\beta\sin^2\gamma-\sin^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\gamma$. Два последња сабирка дају: $\sin^2\beta\sin^2\gamma(1-\sin^2\alpha)=\cos^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\gamma$, па после поништавања овог члана остаје: $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=1$.

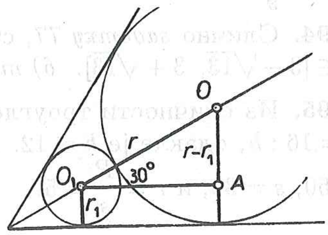
587. Тачка C, подножје нормале из C на дату праву и крајња тачка тетиве одређују правоугли троугао чија је хипотенуза полупречник круга. Одстојање тачке C од праве је $d=\sqrt{29}$. Даље је $r^2=d^2+3^2=38$, па је једначина круга $(x-3)^2+(y+1)^2=38$.

588. Под условима $4^x>6$ и $2^x>2$, једначина је еквивалентна са $\dfrac{4^x-6}{2^x-2}=5$. Даље, сменимо $2^x=t$ и добијамо $t_1=1$, $t_2=4$, тј. $x=2$. (Случај $x=0$ не задовољава услове.)

589. Дужи AT, AB и AC су једнаке (особина тангентних дужи), сл. 122. Нека је $SP\parallel BC$. Тада је троугао OSP правоугли и $SP=2AT$, $OS=R+r$, $OP=R-r$, па тражену једнакост добијамо из $SP^2=OS^2-OP^2$, тј. из $4AT^2=(R+r)^2-(R-r)^2$.



Сл. 122



Сл. 123

590. Видети *пример* 49 *д)*, ГЛАВА ДРУГА. Једначина се своди на $\sin 2x(\sin 2x-2)=0$, одакле је $\sin 2x=0$ и решење је $x=\dfrac{k\pi}{2}$, $k\in Z$.

591. Ако је s вертикална права, заправо s је оса Oy, тада су пресечне тачке са правим a и b тачке $A(0,\ 4)$ и $B(0,\ -4)$, па је средиште дужи AB тачка $O(0,\ 0)$. Ако права s није вертикална, њена једначина је $y=kx$. Координате пресечних тачака су $A\left(\dfrac{4}{1+k},\ \dfrac{4k}{1+k}\right)$, $k\neq -1$, и $B\left(\dfrac{4}{1-k},\ \dfrac{4k}{1-k}\right)$, $k\neq 1$. Средиште дужи AB је тачка $S\left(\dfrac{4}{1-k^2},\ \dfrac{4k}{1-k^2}\right)$. (Применили смо формулу (43) из ГЛАВЕ ТРЕЋЕ.) Нека је $S(x,\ y)$. Елиминишимо k из $x=\dfrac{4}{1-k^2}$ и $y=\dfrac{4k}{1-k^2}$. Из прве једнакости је $k=\pm\sqrt{1-\dfrac{4}{x}}$, $x\neq 0$, а заменом у другу једнакост добијемо: $y=\pm x\sqrt{1-\dfrac{4}{x}}$, $y\neq 0$, односно $y=\pm\sqrt{x^2-4x}$. Ова веза даје једначину хипеболе: $(x-2)^2 - y^2 = 4, \quad x \neq 0$.

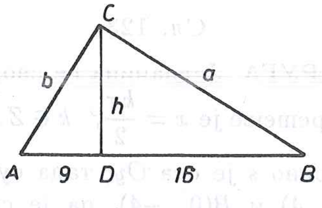
592. *а)* Било које две вертикалне и две хоризонталне линије одређују један правоугаоник. Укупно има $\binom{n+1}{2} \cdot \binom{n+1}{2}$, односно $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$ правоугаоника.

б) Квадрата 1×1 има n^2, квадрата 2×2 има $(n-1)^2$, итд. Укупан број квадрата је $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. (Видети *пример* 35, ГЛАВА ТРЕЋА, страна 231.)

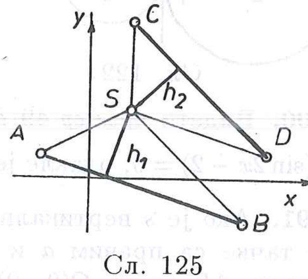
593. На сл. 123, из правоуглог троугла OO_1A, видимо да је $r + r_1 = 2(r - r_1)$, одакле $r_1 = \frac{1}{3}r$. Слично је $r_2 = \frac{1}{3}r_1 = \frac{1}{9}r$, итд. Тражени збир је $S = P + P_1 + P_2 + \cdots = r^2\pi + \frac{r^2}{9}\pi + \frac{r^2}{81}\pi + \cdots = r^2\pi\left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{81} + \ldots\right) = r^2\pi\frac{1}{1-\frac{1}{9}} = \frac{9}{8}r^2\pi$. (У загради је збир опадајућег геометријског низа.)

594. Слично *задатку* 77, страна 99. Резултати:
а) $m \in [3-\sqrt{13},\ 3+\sqrt{13}]$. *б)* $m \in [3-\sqrt{13},\ 0) \cup (6,\ 3+\sqrt{13}]$.

595. Из сличности троуглова ACD и BDC, сл. 124, добијамо $h : 9 = 16 : h$, одакле је $h = 12$. Даље лако налазимо: $a = 20$, $b = 15$, па је $P = 150$, $s = 30$, и $r = \frac{P}{s} = 5$.



Сл. 124



Сл. 125

596. Како је $8(\cos^6 x - \sin^6 x) = 8(\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^4 x + \sin^2 x\cos^2 x + \sin^4 x) = 8\cos 2x((\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - \sin^2 x\cos^2 x) = \cos 2x(8 - 2\sin^2 2x)$ и $\sin 4x = 2\sin 2x\cos 2x$, то се дата једначина трансформише у $-2\cos 2x(\sin^2 x + 3\sin 2x - 4) = 0$, односно $\cos 2x(\sin 2x - 1)(\sin 2x + 4) = 0$. Из $\cos 2x = 0$ добијамо сва решења: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, \quad k \in Z$.

597. Ако је $r \leq SA$ и $r \leq SB$ и $r > h_1$, круг сече AB у две тачке, сл. 125. Слично важи и за дуж CD. Како је $SC = 4 < SA < SD < SB$ и $h_1 = 2\sqrt{2} < h_2$, то је $2\sqrt{2} < r \leq 4$ тражени услов.

598. Стављајући $\log_2 x = a$, $x > 0$ и $\log_3 y = b$, $y > 0$, добијамо систем $(5 \mid a \mid -2b = 0 \ \wedge\ 2a + b = 9)$. Решења су $a_1 = 2$, $b_1 = 5$ и $a_2 = -18$, $b_2 = 45$, па је $x_1 = 4$, $y_1 = 3^5$ и $x_2 = 2^{-18}$, $y_2 = 3^{45}$.

599. Скуп S садржи $(4n-4)$ тачака, од којих можемо начинити $\binom{4n-4}{3}$ тројки. Међу њима има $4\cdot\binom{n}{3}$ колинеарних тројки, па је укупан број троуглова $\binom{4n-4}{3}-4\cdot\binom{n}{3}$.

600. Систем једначина $(x=2y+1 \wedge x=3(y-4))$, где је x број ученика, y број клупа, има решење $x=27$, $y=13$.

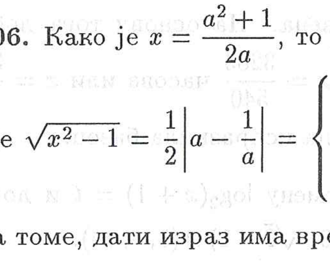
601. Слично *задатку* 77. Резултат је: $x\in[4,\ +\infty)$.

602. Услови одређују систем једначина: $b_1+b_1q+b_1q^2=14 \wedge$ $\wedge \log_2 b_1+\log_2 b_1q+\log_2 b_1q^2=6$. Другу једначину сводимо на $\log_2 b_1^3q^3=6$, одакле је $b_1q=4$. Дељењем једначина добијамо $\dfrac{b_1(1+q+q^2)}{b_1q}=\dfrac{14}{4}$, тј. $\dfrac{1+q+q^2}{q}=\dfrac{7}{2}$. Одавде је $q=2$ или $q=\dfrac{1}{2}$. Тржени бројеви су $2,\ \ 4,\ \ 8$.

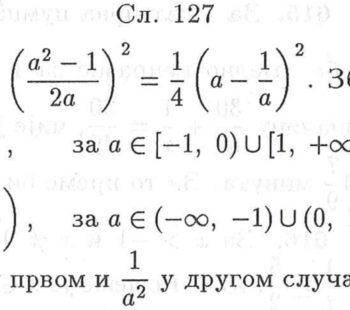
603.Видети задатак 117 *з)*, страна 158.

604. Тражене тачке су пресечне тачке круга k_1 над пречником AB и k_2 чији је пречник дуж AC. Једначине ових кругова су редом
$x^2+y^2-6x-3y+10=0$ и $x^2+y^2-3y-2=0$.
Они се секу у A и у траженој тачки $T(2,\ 2)$.

605. Користимо особине средње линије троугла (*пример* 47, ГЛАВА ПРВА). У троуглу ABD је PN средња линија, па је $PN=\dfrac{a}{2}$, сл. 126. У троуглу ACD је PM средња линија, па је $PM=\dfrac{b}{2}$. Због тога је $MN=PN-PM=\dfrac{1}{2}(a-b)$.



Сл. 126



Сл. 127

606. Како је $x=\dfrac{a^2+1}{2a}$, то је $x^2-1=\left(\dfrac{a^2-1}{2a}\right)^2=\dfrac{1}{4}\left(a-\dfrac{1}{a}\right)^2$. Због тога је $\sqrt{x^2-1}=\dfrac{1}{2}\left|a-\dfrac{1}{a}\right|=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\left(a-\dfrac{1}{a}\right), & \text{за } a\in[-1,\ 0)\cup[1,\ +\infty)\\ -\dfrac{1}{2}\left(a-\dfrac{1}{a}\right), & \text{за } a\in(-\infty,\ -1)\cup(0,\ 1)\end{cases}$.

Према томе, дати израз има вредност a^2 у првом и $\dfrac{1}{a^2}$ у другом случају.

607. Треба да буде $2(n-3)(n+1)+1=(n-2)(2n-1)$, одакле је $n=7$, а тражени бројеви су 64 и 65, или је $2(n-3)(n+1)=(n-2)(2n-1)+1$, одакле је $n=9$, па су тражени бројеви 119 и 120.

608. Из $x+(x+20^o)+(x+30^o)+(x+50^o)=360^o$ је $x=65^o$. Углови четвороугла су 65^o, 85^o, 95^o и 115^o. Како је $85^o+95^o=180^o$, збир углова на једној страници, онда су друге две странице паралелне, па је реч о трапезу.

609. Према датој слици је угао ACB прав, као угао над пречником, а углови $\sphericalangle BCO$,и x су једнаки јер је $OB=OC=r$. Према томе је $x=90^o-\alpha$.

610. Према формули (24) из ГЛАВЕ ДРУГЕ, је нпр. $\log_b a=\dfrac{\log a}{\log b}$. Тако добијамо: $\log_b a\cdot\log_c b\cdot\log_a c=\dfrac{\log a}{\log b}\cdot\dfrac{\log b}{\log c}\cdot\dfrac{\log c}{\log a}=1$.

611. *а)* $D=4(m+1)^2-4(3m+1)=4(m^2-m)$. За $m=0$ или $m=1$ је $x_1=x_2\in\Re$. За $m\in(0,\ 1)$ решења су комплексни бројеви, а за $m\in(-\infty,\ 0)\cup(1,\ +\infty)$ решења два различита реална броја.

б) Дати услов се може свести на $(x_1+x_2)^2-3x_1x_2=4$, итд, слично *примеру* 16 *в)*, ГЛАВА ДРУГА. Резултат: $m=1$ или $m=-\dfrac{3}{4}$.

612. Ако су a, b, c узастопни чланови аритметичке и геометријске прогресије, онда према (85) и (88), ГЛАВА ТРЕЋА, важи: $a+c=2b$ и $ac=b^2$. Одавде је $(a+c)^2=4ac$, што даје $(a-c)^2=0$ или $a=c$. Дакле, a и c нису различити, што је супротно претпоставци.

613. $\dfrac{\sin 8\alpha}{8\sin\alpha}=\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 4\alpha$, па је $x=1$.

614. Као у *примеру* 25, ГЛАВА ТРЕЋА, одредимо подножје S нормале из A на дату праву: $S(0,\ 1)$. Тачка S је средиште дужи AB, па из $\dfrac{1+x}{2}=0$ и $\dfrac{3+y}{2}=1$, добијамо: $x=-1$, $y=-1$. Тражена тачка је $B(-1,\ -1)$.

615. За 1 сат прва пумпа испразни $\dfrac{30}{67}$ део базена, друга $\dfrac{1}{x}$-ти део, а обе заједно испразне за 1 сат $\dfrac{30}{49}$ базена. На основу тога добијамо једначину $\dfrac{30}{67}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{30}{49}$, чије је решење $x=\dfrac{3283}{540}$ часова или $x=\dfrac{3283}{9}=364\dfrac{7}{9}$ минута. За то време би друга пумпа испразнила базен.

616. За $x>-1$ и $x\neq 0$ уводимо смену $\log_2(x+1)=t$ и добијемо $t+\dfrac{1}{t}\geq\dfrac{5}{2}$, итд. Решење је $x\in(-1,\ 0)\cup(0,\ \sqrt{2}-1)\cup(3,\ +\infty)$.

617. За $x \neq \frac{k\pi}{3}$, трансформацијом добијамо једначину:
$\dfrac{2\sin\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\sin\frac{3x}{2}\cos\frac{3x}{2}} = -1$, односно $\cos\frac{x}{2} = -\cos\frac{3x}{2}$. Како је $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$, једначина прелази у $4\cos^3\frac{x}{2} - 2\cos\frac{x}{2} = 0$, односно $\cos\frac{x}{2}\left(2\cos^2\frac{x}{2} - 1\right) = 0$. Решења су: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$. ($\cos\frac{x}{2} = 0$ за $x = \pi + 2k\pi$, али ово није решење због услова $x \neq \frac{k\pi}{3}$.)

618. Искористити решење *задатка* 543. Дата вредност за x је решење дате једначине, под условом да су a и b истог знака и $a \geq b$.

619. Једначина по z је $m^2z^2 + (m^2 + 2m - 1)z + m^2 = 0$, а вредности m за које је $z = \frac{1}{4}$ су $m_1 = \frac{2}{7}$ и $m_2 = -\frac{2}{3}$. За $m = \frac{2}{7}$ је $x_1 = \frac{4}{7}$ и $x_2 = \frac{1}{7}$, а за $m = -\frac{2}{3}$ је $x_1 = \frac{4}{3}$ и $x_2 = \frac{1}{3}$.

620. Изводница је x, а полупречник основе $\frac{x}{2}$, па је осни пресек једнакостраничан троугао и тражени угао је 60^o, па је висина купе $H = \frac{x\sqrt{3}}{2}$. Дакле: $P = \frac{3}{4}x^2\pi$ и $V = \frac{\sqrt{3}}{24}x^3\pi$.

621. Ако је теме A пресечна тачка датих правих, онда је $A(8,\ 8)$. Како је O средиште дијагонале AC, то је $C(0,\ 0)$. Права CD је паралелна са $y = 3x - 16$, а права BC са $x - 3y + 16 = 0$, итд. Друга два темена су $B(6,\ 2)$ и $D(2,\ 6)$. Странице овог паралелограма су једнаке дужине, па је то ромб. Једначина праве BC је $x = 3y$, а праве CD је $y = 3x$.

622.-641. Треба заокружити редом слова: E, D, E, A, B, B, A, D, C, C, A, E, E, C, A, C, D, B, D, B. Дајемо решења неких задатака.

627. Стављајући $\cos x = t$, добијамо $t_1 = -1$, $t_2 = 2$. Може бити само $\cos x = -1$, а једино решење на интервалу $(0,\ 2\pi)$ је $x = \pi$.

628. $f_1(x) = x$ за $\forall x$, $f_2(x) = x$ за $x \neq 0$, $f_3(x) = |\,x\,|$, $f_4(x) = x$ за $x \geq 0$.

629. За $x \geq 0$ имамо $x^2 - 2x - 3 = 0$, решење је $x = 3$, а за $x < 0$ је $x^2 + 2x - 3 = 0$,па је решење $x = -3$.

634. Видети формулу (72), ГЛАВА ТРЕЋА, страна 224.

635. Слично *примеру* 24. *б)*, ГЛАВА ДРУГА, страна 107.

636. Видети *задатак* 327.

637. Слично *примеру* 16, ГЛАВА ДРУГА.

638. За $x > 0$ и $x > -m$, једначина је еквивалентна са $x^2-4x-4m = 0$. Треба да буде $D = 16 + 16m > 0$ и $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4+4m} > 0$.

639. Укупан број одиграних утакмица је: $m\binom{2k}{2} + \binom{2m}{2} - m = m(k(2k-1) + 2m - 2)$. Да би овај број био непаран, мора бити непарно m и k, а да би број утакмица био мањи од 115, мора бити $m = 3$ и $k = 3$.

640. Видети *пример* 20, ГЛАВА ДРУГА, и *задатак* 85. *б)*.

641. $\cos\frac{2\pi}{5} = -\cos\frac{3\pi}{5}$ и $\cos\frac{4\pi}{5} = -\cos\frac{\pi}{5}$. Даље, као *задатак* 113. *г)*.

642.-661. Треба заокружити редом слова: A, C, B, C, B, B, A, A, D, E, C, B, C, D, E, D, D, E, A, E. Наводимо решења неких од ових задатака.

642. $\left(\frac{1}{1+\sqrt{7}} + \frac{1}{1-\sqrt{7}}\right)^{-2} = \left(\frac{2}{-6}\right)^{-2} = 9$, а $\left(\frac{1}{1+\sqrt{7}}\right)^{-2} +$ $+\left(\frac{1}{1-\sqrt{7}}\right)^{-2} = 1 + 2\sqrt{7} + 7 + 1 - 2\sqrt{7} + 7 = 16$, итд.

643. У случају $x = -3$ број $\frac{1}{x+2}$ је уствари већи од $(x-1)$.

645. $10^{2\log 3} = 10^{\log 9} = 9$, итд.

646. Из $(r-1)^2 + (r-2)^2 = r^2$ и $r > 2$, добијамо $r = 5$, итд.

647. $f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right) = \log_6 x + 3\log_3 9x + \log_6\frac{1}{x} + 3\log_3\frac{9}{x} = \log_6 1 + 3\log_3 81 =$ $= 3\cdot 4 = 12$.

648. Слично *задатку* 512.

649. Применити формуле (25), ГЛАВА ПРВА.

650. Ови бројеви чине аритметичку прогресију: 110, 121, ..., 990 и има их 81.

652. $f_2(x) = 1$, за $\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{1}{2}\sin x \neq 0$, тј. за $x \neq k\pi$, $k \in Z$, и $f_3(x) = \frac{|\sin x|}{|\sin x|} = 1$, за $\sin x \neq 0$, тј. за $x \neq k\pi$, $k \in Z$. Међутим, $f_4(x) = \frac{\sqrt{2}\,|\cos x|}{|\sqrt{2}\cos x|} = 1$, за $\cos x \neq 0$, тј. за $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in Z$.

653. Користимо два пута формулу (72), ГЛАВА ТРЕЋА.

654. Слично *задатку* 89.

655. Видети *пример* 26, ГЛАВА ЧЕТВРТА. Нека је висина ваљка $H = x$. Тада је $r^2 = R^2 - \frac{x^2}{4}$, а запремина је $V = \pi x\left(R^2 - \frac{x^2}{4}\right)$. Одавде налазимо први извод: $V' = \pi R^2 - \dfrac{3\pi x^2}{4}$, па утврдимо да V има максималну вредност за $x = \dfrac{2R}{\sqrt{3}}$.

656. Једначина има смисла за $x > 1$ или $x < -1$, итд. Видети *пример* 24. *д)*, ГЛАВА ДРУГА, страна 107.

657. На правој AC одредимо тачку D, тако да је $AD = AB = c$, сл. 127. Тада је $\alpha = 2\beta = 2\sphericalangle ADB$, па је $\sphericalangle ADB = \sphericalangle ABD = \beta$. Због тога су слични троуглови ABC и BDC и $BC : CA = CD : BC$. Дакле $BC^2 = CA \cdot CD = CA(CA + AB) = 10$, па је $BC = \sqrt{10}$.

658. После првог брисања су остале цифре чија су места означена парним бројевима (дељивим са 2), после другог брисања су остале цифре на местима чији су редни бројеви дељиви са 4, тј. са 2^2, итд. После десетог брисања остаће цифре на редном броју дељивом са 2^{10}, тј. са 1024, а то је заправо последња цифра. Та цифра је 4.

659. Видети *пример* 45 *е)*, ГЛАВА ДРУГА, страна 139.

660. Користити сл. 118 и решење *задатка* 550.

661. Слично *примеру* 35. *в)*, ГЛАВА ДРУГА.

662.-681. Треба заокружити редом слова: E, A, A, D, B, D, D, B, B, C, E, A, C, E, B, A, B, E, B, D. Дајемо и решења за неке од ових задатака.

666. $\dfrac{n(n-3)}{2} = 44$ или $n(n-3) = 88$, а $11 \cdot 8 = 88$.

667. Прво рационалишемо имениоце у првој загради.

668. Слично *задатку* 512.

671. Слично *задатку* 106, страна 124.

673. $\dfrac{(\cos x + \sin x)(\cos^2 x - \sin x \cos x + \sin^2 x)}{2 - \sin 2x} =$

$$= \frac{\left(\cos x + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)\left(1 - \frac{1}{2}\sin 2x\right)}{2\left(1 - \frac{1}{2}\sin 2x\right)} = \cos\frac{\pi}{4}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$

674. Видети задатак 337, страна 310.

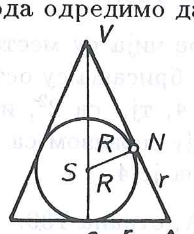
675. Слично *задатку* 79, страна 99.

676. Два бека и један центар, обавезни део тима, можемо одабрати на $\binom{5}{2}\binom{4}{1} = 40$ начина. За још два места конкуришу по 3 бека, центра и крила. Можемо узети 2 играча истог типа (на $\binom{3}{2} + \binom{3}{2} + \binom{3}{2} = 9$ начина) или два играча различитих типова (на $3\cdot 3+3\cdot 3+3\cdot 3=27$ начина). Укупно има $40\cdot(9+27)=1440$ начина.

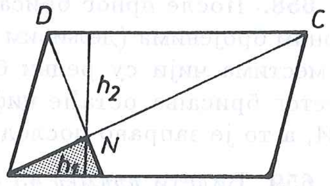
677. Слично *примеру* 27. *д)*, ГЛАВА ДРУГА.

678. $3-2\cdot 3^{x+1}=3^{2+2x}$, смена $3^{x+1}=t<\frac{3}{2}$, итд.

679. Према сл. 128, из сличних троуглова OAV и NSV добијамо пропорцију $r:s=R:(H-R)$, односно $r^2:(r^2+H^2)=R^2:(H-R)^2$. Одавде је $r^2=\dfrac{R^2H}{H-2R}$, а запремина купе је $V(H)=\dfrac{\pi R^2H^2}{3(H-2R)}$. Помоћу првог извода одредимо да је запремина минимална ако је $H=4R$.



Сл. 128



Сл. 129

680. Једначина има смисла за $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ и тада је еквивалентна са $\sin x\cos x+\cos^2 x+\cos x=1$, односно са $(1+\cos x)(\sin x+\cos x-1)=0$. Из $1+\cos x=0$ следи $x=\pi+2k\pi$, а из $\sin x+\cos x=1$ је $x=2k\pi$ или $x=\frac{\pi}{2}+2m\pi$. Последњи случај отпада, па из $x=\pi+2k\pi$ и $x=2k\pi$, добијамо $x=k\pi,\quad k\in Z$.

681. Троуглови AMN и CDN су слични са коефицијентом сличности $\frac{1}{3}$ (јер је $AM:CD=AM:AB=1:3$). Стога је $h_1:h_2=1:3$, па је $h_1=\frac{1}{4}h$, где је h висина паралелограма, сл. 129. Ако са a означимо дужину странице паралелограма, онда је површина троугла
$P=\frac{1}{2}AM\cdot h_1=\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{3}\cdot\frac{h}{4}=\frac{a\cdot h}{24}=\frac{1}{24}$.

682.-701. Треба редом заокружити следећа слова: B, A, B, E, B, A, B, B, C, E, A, E, D, C, D, D, D, D, C, C. Решићемо неке од ових задатака.

682. У 22 килограма свежих печурки има $0.1\cdot 22=2.2\ kg$ чврсте масе (која не испарава). Кад су печурке суве, ових $2.2\ kg$ представља 88% од укупне масе. Сувих печурки има $2.2:0.88=2.5\ kg$.

683. $f(x+3)-3f(x+2)+3f(x+1)=a(x+3)^2+b(x+3)+c-$
$-3(a(x+2)^2+b(x+2)+c)+3(a(x+1)^2+b(x+1)+c)=ax^2+bx+c=f(x)$.

687. Слично *примеру* 19. *б)*, ГЛАВА ДРУГА.

689. Слично *задатку* 614.

690. Углови код B и C су једнаки (због $AB = AC$). Означимо их са β. Слично, означимо углове ADE и AED са φ, сл. 130. Користећи се особином спољашњег угла троугла (видети *последицу* теореме из *примера* 48, ГЛАВА ПРВА), добијамо једнакости: $\varphi = \beta + x$ и $\varphi + x = 30^o + \beta$. Заменом из прве једнакости у другу добијамо $\beta + x + x = 30^o + \beta$, одакле је $x = 15^o$.

691. $2\sin x \cos x - \cos x = 0$, итд.

692. Мора бити $D = b^2 - 4ac = 4m^2 - 4(m-2)(2m+2) \geq 0$ и $\dfrac{c}{a} = \dfrac{2m+2}{m-2} < 0$, итд.

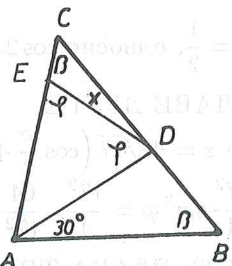
693. Слично *задатку* 610.

694. Слично *задатку* 653.

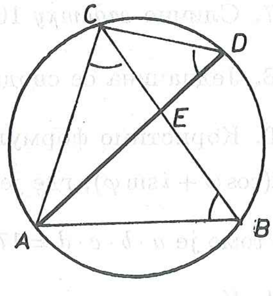
695. $R = \dfrac{abc}{4P}$, итд.

696. Видети *пример* 26, ГЛАВА ЧЕТВРТА.

697. $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - \dfrac{1}{2}\sin^2 2x$, итд.



Сл. 130



Сл. 131

698. Укупно је одиграно партија $2^{n-1} + 2^{n-2} + \cdots + 1$ (од првог кола до финала), а то је, према (89) из ГЛАВЕ ТРЕЋЕ, једнако $2^n - 1$. У свакој партији се игра најмање 3, а највише 5 сетова, па је $3(2^n - 1) \leq \leq 2^{n+1} + 4n^2 + 184 \leq 5(2^n - 1)$, одакле следи $2^n - 1 \leq 4n^2 + 184 \leq 3 \cdot 2^n - 5$. Очигледно n мора бити веће од 6 (јер је $3 \cdot 2^6 - 5 = 187$). Провером утврдимо да је $n = 8$.

699. Због $AB = AC$ је $\measuredangle ABC = \measuredangle ACB$, сл. 131. Сем тога је $\measuredangle ABC = \measuredangle ADC$ (над истим луком), па је $\measuredangle ACE = \measuredangle ADC$. Због тога су троуглови ACD и AEC слични и $AC : AD = AE : AC$, односно $12 : AD = 8 : 12$, па је $AD = 18$.

700. Примењући дату формулу, добијамо низ функција: $f_1(x) = \dfrac{x}{x-1}$, $f_2(x) = \dfrac{1}{1-x}$, $f_3(x) = 1 - x$, $f_4(x) = \dfrac{x}{x-1}$, $f_5(x) = \dfrac{x-1}{x}$, $f_6(x) = \dfrac{1}{x}$, $f_7(x) = f_1(x)$, $f_8(x) = f_2(x)$, итд. Сада се периодично понавља низ

f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6. Како је 1992 дељиво са 6, то је $f_{1992}(x) = f_6(x) = \dfrac{1}{x}$, па је $f_{1992}(1992) = \dfrac{1}{1992}$.

701. Ставимо $2^{1+\sqrt{xy}} = u$ и $3^{x+y-1} = v$ и добијамо систем: $(u+v=a \ \wedge \ u^3+v^3 = a^3-3a^2+3a)$. Како је $u^3+v^3 = (u+v)(u^2-uv+v^2)$ биће $u^2-uv+v^2 = a^2-3a+3$. Систем $(u+v=a \wedge u^2-uv+v^2 = a^2-3a+3)$ даје решење: $u = a-1$, $v=1$. (Отпада $u=1$, због $u = 2^{1+\sqrt{xy}} \geq 2$). Из $v=1$ је $x+y-1=0$, тј. $y = 1-x$, па је $u = 2^{1+\sqrt{xy}} = 2^{1+\sqrt{x(1-x)}}$. Како је $x(1-x)$ највеће за $x = \dfrac{1}{2}$, то је $2 \leq u \leq 2^{\frac{3}{2}}$, тј. $2 \leq a-1 \leq 2\sqrt{2}$.

702.-721. Треба заокружити редом следећа слова: B, C, C, B, C, E, E, A, D, A, E, B, C, A, E, D, C, C, B, C. Ево и неких решења.

702. Тачка A је подножје нормале из B на дату праву. (Видети *пример* 25, ГЛАВА ТРЕЋА.)

706. $2(2a_1+3d) = 92$ и $\dfrac{9}{2}(2a_1+8d) = 342$. Одавде нађемо a_1 и d, итд.

707. Слично *задатку* 107. *а)*.

708. Једначина се своди на $\cos^2 x - \sin^2 x = \dfrac{1}{2}$, односно $\cos 2x = \dfrac{1}{2}$.

710. Користимо формуле (50) и (52) из ГЛАВЕ ДРУГЕ.
$z^2 = 17(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где је $\sin\varphi = -\dfrac{8}{17}$, па је $z = \pm\sqrt{17}\left(\cos\dfrac{\varphi}{2} + i\sin\dfrac{\varphi}{2}\right)$.
Према томе је $a\cdot b\cdot c\cdot d = 17^2\cos^2\dfrac{\varphi}{2}\sin^2\dfrac{\varphi}{2} = \dfrac{17^2}{4}\sin^2\varphi = \dfrac{17^2}{4}\cdot\dfrac{64}{17^2} = 16$.

711. Користимо услов додира (формула (76), ГЛАВА ТРЕЋА).

712. $((x-1)(x-4))\cdot((x-2)(x-3))+1 = 16$, а одавде је $(x^2-5x+4)(x^2-5x+6)+1 = 16$. Ставимо: $x^2-5x+4 = t$ и добијамо $t(t+2)+1 = 16$, односно $(t+1)^2 = 16$, па је $t_1 = 3$, $t_2 = -5$, итд.

713. Из $\dfrac{1}{2}ab\sin\gamma = P$, добијемо $\sin\gamma = \dfrac{12}{13}$. Затим, косинусна теорема даје: $c^2 = a^2+b^2-2ab\cos\gamma$, одакле је $c = \dfrac{3\sqrt{5}}{\sqrt{13}}$. Сада, користећи се синусном теоремом, добијамо: $\sin\alpha = \dfrac{4}{\sqrt{65}}$ и $\sin\beta = \dfrac{8}{\sqrt{65}}$, итд.

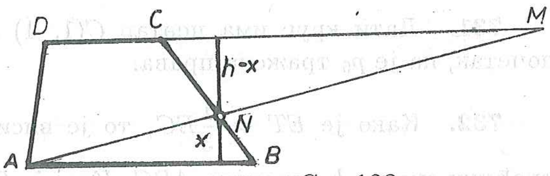
714. Слично *примеру* 16, ГЛАВА ДРУГА.

715. Нека је $H = x$, тада је $r^2 = s^2 - x^2$, итд, слично *задатку* 679.

717. Ставимо $ax^3 = by^3 = cz^3 = k$, а одавде је $a = \dfrac{k}{x^3}$, $b = \dfrac{k}{y^3}$, $c = \dfrac{k}{z^3}$, па је $\dfrac{\sqrt[3]{ax^2+by^2+cz^2}}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}}=$

$$=\frac{\sqrt[3]{\dfrac{k}{x}+\dfrac{k}{y}+\dfrac{k}{z}}}{\dfrac{\sqrt[3]{k}}{x}+\dfrac{\sqrt[3]{k}}{y}+\dfrac{\sqrt[3]{k}}{z}}=$$

$$=\frac{\sqrt[3]{k\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)}}{\sqrt[3]{k}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)}=1.$$



Сл. 132

718. Троуглови ABN и MCN су слични, сл. 132. Коефицијент сличности ћемо одредити из $x:(h-x)$. Из услова за површину троугла је $\frac{1}{2}8\cdot x=\frac{1}{4}\cdot\frac{12}{2}\cdot h$, а одавде је $x=\frac{3}{8}h$. Дакле $h-x=\frac{5}{8}h$, па је коефицијент сличности $x:(h-x)=3:5$. Коначно је $AB:CM=3:5$, односно $8:CM=3:5$, па је $CM=\frac{40}{3}$.

719. Слично *задатку* 295.

720. Слично *примеру* 35 *г)*, ГЛАВА ДРУГА, страна 123. Разликујемо два случаја: $x\in(0,\ 1)$ и $\dfrac{62x^2-35x+6}{35-6x}\le x^3$ или $x>1$ и $\dfrac{62x^2-35x+6}{35-6x}\ge x^3$. (*Напомена*: приликом решавања знака бројиоца згодно је увести смену $x+\dfrac{1}{x}=t$.)

721. Видети *пример* 39. *в)*, ГЛАВА ДРУГА.

722.-741. Треба редом заокружити слова: C, D, B, A, E, E, A, C, B, E, A, B, C, D, B, E, D, E, A, C. Дајемо решења ових задатака.

722. Решења дате неједначине су $x\in[-1,\ 4]$.

723. Најпре израчунамо $OS=\sqrt{(3-0)^2+(4-0)^2}=5$. Нека је AB тражена тетива. Како је $r=13$, то је $AB=2AS=2\sqrt{13^2-5^2}=24$.

725. $64\cdot 1.20\cdot 0.80=61.44$.

726. Ставимо: $t=\dfrac{2x+1}{x-2}$. Тада је $f(f(x))=f(t)=x$.

727. Применимо формулу (35), ГЛАВА ДРУГА.

728. Троуглови ABC и ADD' су слични и $DD'=CD'$. Из

$BC : AC = DD' : AD'$, тј. из $a : b = DD' : (b - DD')$, добијамо: $DD' = \dfrac{ab}{a+b}$. (Видети *задатак* 472.)

729. Из $P(0) = 2$ добијамо $c = 2$, итд. Даље је $a = 2$ и $b = -3$.

730. $30 \cdot 30 \cdot 10^4 = 9 \cdot 10^6$.

731. Дати круг има центар $C(1,\ 1)$ и пролази кроз координатни почетак, па је p_5 тражена права.

732. Како је $ET = \dfrac{1}{3}EC$, то је висина h_T троугла EFT једнака трећини висине h_C троугла ABC. Како је $FE = \dfrac{1}{4}AB$, то је $P_1 : P = 1 : 12$.

733. Како је $z + \dfrac{1}{z} = \sqrt{3}$, то је $\left(z + \dfrac{1}{z}\right)^3 = z^3 + 3z + \dfrac{3}{z} + \dfrac{1}{z^3} =$ $= \left(z^3 + \dfrac{1}{z^3}\right) + 3\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$, тј. $(\sqrt{3})^3 = \left(z^3 + \dfrac{1}{z^3}\right) + 3\sqrt{3}$, па је $z^3 + \dfrac{1}{z^3} = 0$.

734. Из $m = a_n = a_1 + (n-1)d$ и $n = a_m = a_1 + (m-1)d$, добијамо: $m - n = d(n - m)$, одакле је $d = -1$, па је $a_1 = m + n - 1$. Сада лако израчунавамо: $a_{n-m} = 2m$.

735. Стављајући $3^x = t > 0$, добијамо једначину: $9t + 9t^2 = 810$, односно $t^2 + t - 90 = 0$. Решење је $t = 3^x = 9$, па је $x = 2$.

736. Слично *примеру* 35. *г)* из ДРУГЕ ГЛАВЕ.

737. Видети *пример* 46 из ДРУГЕ ГЛАВЕ.

738. Користићемо се синусном теоремом. Из везе $\dfrac{a}{\sin\alpha} = 2R$, добијамо: $\sin\alpha = \dfrac{12}{13}$, а из $\dfrac{b}{\sin\beta} = 2R$ налазимо $\sin\beta = \dfrac{4}{5}$. Даље је $\sin\gamma =$ $= \sin(\pi - (\alpha+\beta)) = \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha = \dfrac{12}{13}\cdot\dfrac{3}{5} + \dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{5}{13} = \dfrac{56}{65}$. Сада из $\dfrac{c}{\sin\gamma} = 2R$, добијамо $c = 14$.

739. Темена троугла су: $A(-6,\ 2)$, $B(-3,\ 4)$, $C_{1,2} = (x,\ \pm\dfrac{2}{3}\sqrt{18 - x^2})$. Према формули (44) из ТРЕЋЕ ГЛАВЕ, за површину P овог троугла добијамо: $2P = |-8 \pm 2\sqrt{18 - x^2} - 2x|$. Применом првог извода налазимо да је P највеће за $x = 3$ и $C(3,\ -2)$.

740. $f'(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x-1)^2 > 0$, за $x \neq 1$. Дакле, $f(x)$ је монотоно неопадајућа функција, па је минимална вредност $f(-1) = -5$, а максимална $f(2) = 4$.

741. Осни пресек добијене фигуре, који садржи дијагоналу "горњег" квадрата уписане коцке, је једнакокраки троугао основице $2r$, пресечен правом паралелном основици, тако да је пресечна дуж $a\sqrt{2}$, где је a дужина ивице коцке. Користећи се сличношћу троуглова (слично *задатку* 274) добијамо пропорцију: $H : 2r = (H - a) : a\sqrt{2}$. Одавде је $a = \dfrac{r}{\sqrt{2}}$. Сада лако израчунавамо да је тражена размера $4\pi : 3$.

742.-761. Треба редом заокружити слова: D, C, E, A, B, D, A, B, E, C, E, C, A, D, A, E, B, B, C, D. Наводимо решења неких задатака.

742. Пресечна тачка датих правих је $P(3,\ 4)$, итд.

743. Треба да је $x + 1995 = 1994$, па је $x = -1$.

744. Ако је O пресечна тачка симетрала, тада из троугла ABO налазимо да је $\dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{\beta}{2} = 180^o - 137^o = 43^o$, па је $\alpha + \beta = 86^o$ и $\gamma = 94^o$.

745. $0.9 \cdot 0.8 = 0.72$, што одговара појефтињењу од 28%.

748. $x_1 - x_2 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2} = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} = \sqrt{36 - 4m} > 4$. Мора бити $36 - 4m \geq 0$, тј. $m < 9$ и $36 - 4m > 16$, тј. $m < 5$. Отуда је $m \in (-\infty,\ -5)$.

749. Видети дефинисаност функције из *примера* 28. *ђ)* из ЧЕТВРТЕ ГЛАВЕ.

750. Видети **задатак** 112. *д)* из ДРУГЕ ГЛАВЕ.

751. (Видети сл. 97). Користимо особине тангентног четвороугла. Ако су a и b основице и $c = 17\ cm$ крак, имамо везу: $a + b = 2c = 34\ cm$. Осим тога је $\left(\dfrac{a-b}{2}\right)^2 = c^2 - (2R)^2 = 289 - 225 = 64$, па је $a - b = 16$. Мања основица је $b = 9\ cm$.

752. Замењујући $x = 1$, па $x = 2$ у дату једначину добићемо $b = 6$. На основу формуле (19) из ДРУГЕ ГЛАВЕ добијамо: $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -6$.

753. Дато је и $c = 2R = 10\ cm$. Додирне тачке уписаног круга деле катете на одсечке: $a = x + r$, $b = y + r$ и хипотенузу: $c = x + y$. Сада из $x + y = 10$ и $a^2 + b^2 = c^2$, тј. $(x+2)^2 + (y+2)^2 = 100$, налазимо да је $x = 6$, $y = 4$ (или обрнуто). Катете су $8\ cm$ и $6\ cm$.

754. Видети *пример* 25 из ДРУГЕ ГЛАВЕ.

755. Према условима је $a_1 + a_1q + a_1q^2 = 126$ и $a_1q = 24$. Одавде је $\dfrac{1 + q + q^2}{q} = \dfrac{21}{4}$, па је $q = 4$ и $a_1 = 6$.

756. Ако девојке распоредимо на места означена бројевима 1, 3, 5, тада имамо $3! \cdot 3! = 36$ различитих распореда. Ако су девојке на местима означеним бројевима 2, 4, 6, тада имамо још 36 нових могућности.

757. Дату једначину напишемо у облику: $\sin^2 x - 2\sin x \cos x + \cos^2 x = \cos x - \sin x$, односно: $(\sin x - \cos x)^2 + \sin x - \cos x = 0$, одакле добијамо $(\sin x - \cos x)(\sin x - \cos x + 1) = 0$. Решења налазимо из $\sin x - \cos x = 0 \vee \vee \sin x - \cos x + 1 = 0$ (видети решења *примера* 48. *а)* и *б)* из ДРУГЕ ГЛАВЕ). Једначина има 5 решења на интервалу $[0, 2\pi]$.

758. Омотач пирамиде састоји се од два правоугла једнакокрака троугла катете a и два правоугла троугла са катетама a и $a\sqrt{2}$. Према услову је $2a^2 + a^2\sqrt{2} = 1$, одакле је $a^2 = \dfrac{1}{2+\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2}(2-\sqrt{2})$. Површина коцке је $6a^2 = 6 - 3\sqrt{2}$.

759. Само $f_2(x)$ и $f_3(x)$ имају једнаке области дефинисаности, али, за $x < 0$ је $f_2(x) = x$, а $f_3(x) = -x$.

760. Слично *примеру* 26, ГЛАВА ЧЕТВРТА.

761. Видети **пример** 10, ГЛАВА ТРЕЋА.