

Tragom jedne algebarske nejednakosti

Dragoljub Milošević

Republika Srbija

Sažetak: U ovom radu biće riječi o jednoj algebarskoj nejednakosti, njenim proširenjima i primjenama.

1. Umjesto uvoda

Tokom pripremanja za matematička takmičenja, Emina i Zaim su rješavali zadatak: Dokaži da, za pozitivne brojeve a, b, x, y vrijedi sljedeća nejednakost:

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y}. \quad (1)$$

Eminino rješenje: Na osnovu poznate nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine za dva pozitivna broja imamo

$$\frac{y}{x}a^2 + \frac{x}{y}b^2 \geq 2\sqrt{\frac{y}{x}a^2 \frac{x}{y}b^2} = 2ab.$$

Dodavanjem objema stranama ove nejednakosti po $a^2 + b^2$ dobijamo redom:

$$\begin{aligned} \frac{y}{x}a^2 + \frac{x}{y}b^2 + a^2 + b^2 &\geq 2ab + a^2 + b^2 \\ \Leftrightarrow \frac{x+y}{x}a^2 + \frac{y+x}{y}b^2 &\geq (a+b)^2 \\ \Leftrightarrow (x+y) \left(\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \right) &\geq (a+b)^2 \\ \Leftrightarrow \frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} &\geq \frac{(a+b)^2}{x+y}, \end{aligned}$$

to jest (1).

Zaimovo rješenje: Iz

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} - \frac{(a+b)^2}{x+y} = \frac{a^2y^2 - 2abxy + b^2x^2}{xy(x+y)} = \frac{(ay - bx)^2}{xy(x+y)} \geq 0,$$

direktno slijedi nejednakost (1).

2. Primjena nejednakosti (1)

Sada ćemo dati nekoliko primjera primjene nejednakosti (1).

Primjer 2.1. Za pozitivne brojeve a i b vrijedi

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} \geq a + b . \quad (2)$$

Rješenje: Ako u dokazanu nejednakost (1) uvrstimo $x = b$ i $y = a$ dobijamo

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} \geq \frac{(a+b)^2}{b+a} ,$$

a odavdje slijedi tražena nejednakost (2). □

Primjer 2.2. Ako su a, b dužine kateta i c dužina hipotenuze pravouglog trougla ABC , onda vrijedi

$$a + b \leq c\sqrt{2} . \quad (3)$$

Rješenje: Ako umjesto x i y stavimo broj 1 u nejednakost (1), imamo

$$\frac{a^2}{1} + \frac{b^2}{1} \geq \frac{(a+b)^2}{1+1} ,$$

ili

$$(a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2) ,$$

odakle je

$$a + b \leq \sqrt{2(a^2 + b^2)} .$$

Kako je $a^2 + b^2 = c^2$ (Pitagorina teorema !), iz posljednje nejednakosti slijedi željena nejednakost (3). □

Primjer 2.3. Za pozitivne brojeve a i b je

$$a^3 + b^3 \geq ab(a+b) . \quad (4)$$

Za ovaj primjer ćemo dati dva rješenja.

Rješenje: Ako u (1) stavimo $x = \frac{1}{a}$ i $y = \frac{1}{b}$ dobijamo

$$\frac{a^2}{\frac{1}{a}} + \frac{b^2}{\frac{1}{b}} \geq \frac{(a+b)^2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} ,$$

ili

$$a^3 + b^3 \geq \frac{(a+b)^2}{\frac{b+a}{ab}} .$$

Iz posljednje nejednakosti, nakon skraćivanja sa $a + b$, slijedi nejednakost (4). □

Rješenje: Iz

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 - ab(a+b) &= a^3 - a^2b - (ab^2 - b^3) = a^2(a-b) - b^2(a-b) \\ &= (a-b)(a^2 - b^2) = (a-b)(a-b)(a+b) \\ &= (a-b)^2(a+b) \geq 0 , \end{aligned}$$

dobijamo željenu nejednakost (4). □

<https://matematickitalent.mk> objaveno na 10.12.2022

Primjer 2.4. Ako su a i b pozitivni brojevi, onda je

$$\frac{a}{3b+a} + \frac{b}{3a+b} \geq \frac{1}{2}. \quad (5)$$

Rješenje: Neka je $\frac{a}{3b+a} + \frac{b}{3a+b} = L$. Ako prvi razlomak proširimo sa a i druga sa b , pa primijenimo nejednakost (1), dobijamo

$$L = \frac{a^2}{a(3b+a)} + \frac{b^2}{b(3a+b)} \geq \frac{(a+b)^2}{(a^2+2ab+b^2)+4ab},$$

to jest,

$$L \geq \frac{(a+b)^2}{(a+b)^2+4ab}. \quad (6)$$

S obzirom da je tačna nejednakost $0 \leq (a-b)^2$ ekvivalentna sa $4ab \leq (a+b)^2$, iz (6) slijedi

$$L \geq \frac{(a+b)^2}{(a+b)^2+(a+b)^2},$$

to jest $L \geq \frac{1}{2}$. □

3. Neka proširenja nejednakosti (1)

Nameće se pitanje validnosti nejednakosti koja je slična nejednakosti (1):

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}, \quad (7)$$

gdje su a, b, c, x, y, z pozitivni brojevi.

Rješenje: Dodamo li lijevoj i desnoj strani nejednakosti (1) po $\frac{c^2}{z}$, imamo

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y} + \frac{c^2}{z}. \quad (8)$$

Primjenom nejednakosti (1) na desnu stranu nejednakosti (8), dobijamo

$$\frac{(a+b)^2}{x+y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{((a+b)+c)^2}{(x+y)+z}. \quad (9)$$

Iz nejednakosti (8) i (9) slijedi nejednakost (7). □

Napomena 3.1. Jednakost u (7) vrijedi za sve realne brojeve a, b, c (dakle, i za nepozitivne brojeve a, b, c).

Posljedica 3.2. Za $x = y = z = 1$ imamo

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3}(a+b+c)^2.$$

Ova nejednakost je za $a, b, c > 0$ ekvivalentna sa

$$\frac{a+b+c}{3} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}},$$

što predstavlja nejednakost između aritmetičke i kvadratne sredine tri pozitivna broja a, b, c .

Posljedica 3.3. Za $a = b = c = 1$ dobijamo

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{9}{x+y+z},$$

što je ekvivalentno sa

$$\frac{3}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}} \leq \frac{x+y+z}{3}.$$

Ovo je nejednakost između harmonijske i aritmetičke sredine tri pozitivna broja x, y i z .

Idemo korak dalje, ispitajmo tačnost nejednakosti koja, u odnosu na nejednakost (1), umjesto kvadrata brojeva a, b i $a+b$, ima kubove istih elemenata, to jest

$$\frac{a^3}{x} + \frac{b^3}{y} \geq \frac{(a+b)^3}{x+y}.$$

Naprimjer, ako u ovu nejednakost stavimo $a = b = 1$ i $x = y = 2$ imamo

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \geq \frac{2^3}{2+2},$$

to jest $1 \geq 2$, što nije tačno.

Sada, da vidimo šta se dešava ako desnu stranu te nejednakosti smanjimo dva puta, to jest ispitajmo da li je validna sljedeća nejednakost

$$\frac{a^3}{x} + \frac{b^3}{y} \geq \frac{(a+b)^3}{2(x+y)}. \quad (10)$$

Za $a = b = 1$ i $x = y = 2$ dobijamo $1 \geq 1$, što je tačno. Pokušajmo dokazati nejednakost (10).

Rješenje: Nejednakost (10) je ekvivalentna sa

$$2(x+y)(a^3y + b^3x) \geq xy(a+b)^3,$$

to jest sa

$$a^3xy + b^3xy + 2(a^3y^2 + b^3x^2) \geq 3a^2bxy + 3ab^2xy. \quad (11)$$

Primjenom aritmetičko-geometrijske nejednakosti za tri pozitivna broja, imamo

$$a^3xy + a^3y^2 + b^3x^2 \geq 3\sqrt[3]{a^3xy a^3y^2 b^3x^2} = 3a^2bxy$$

i

$$a^3y^2 + b^3x^2 + b^3xy \geq 3ab^2xy.$$

Ako saberemo posljednje dvije nejednakosti dobijamo nejednakost (11). Ovim je potvrđena validnost nejednakosti (11), a samim tim i validnost nejednakosti (10). \square

Napomena 3.4. Za pozitivne brojeve a, b, c, x, y, z vrijedi

$$\frac{a^3}{x} + \frac{b^3}{y} + \frac{c^3}{z} \geq \frac{(a+b+c)^3}{3(x+y+z)}. \quad (12)$$

Ova nejednakost se može dokazati pomoću metode primijenjene za dokaz nejednakosti (10).

4. Primjena nejednakosti (7)

Ukazat ćemo na nekoliko primjera primjene nejednakosti (7).

Primjer 4.1. *Dokažimo da je za pozitivne brojeve x, y, z tačna nejednakost*

$$\frac{x}{x+2y+3z} + \frac{y}{y+2z+3x} + \frac{z}{z+2x+3y} \geq \frac{1}{2}. \quad (13)$$

Rješenje: Neka je

$$\frac{x}{x+2y+3z} + \frac{y}{y+2z+3x} + \frac{z}{z+2x+3y} = L.$$

Tada je

$$L = \frac{x^2}{x(x+2y+3z)} + \frac{y^2}{y(y+2z+3x)} + \frac{z^2}{z(z+2x+3y)},$$

pa je, na osnovu dokazane nejednakosti (7):

$$L \geq \frac{(x+y+z)^2}{(x^2+y^2+z^2)+5(xy+yz+zx)}. \quad (14)$$

Poznato je da vrijedi

$$(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx) \quad (15)$$

i

$$(x+y+z)^2 \geq 3(xy+yz+zx). \quad (16)$$

($\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx \Leftrightarrow (x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2 \geq 0$ (tačno)). Sabiranjem nejednakosti (15) i (16) dobijamo

$$2(x+y+z)^2 \geq x^2+y^2+z^2+5(xy+yz+zx). \quad (17)$$

Iz nejednakosti (17) i (14) slijedi $L \geq \frac{1}{2}$, što je trebalo i dokazati. \square

Primjer 4.2. *Dokažimo da za pozitivne brojeve vrijedi*

$$\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} \geq a^2 + b^2 + c^2. \quad (18)$$

Rješenje: Primjenom nejednakosti (7) dobijamo

$$\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} = \frac{a^4}{ab} + \frac{b^4}{bc} + \frac{c^4}{ca} \geq \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{ab+bc+ca},$$

a odavdje, zbog $ab+bc+ca \leq a^2+b^2+c^2$, slijedi nejednakost (18). \square

Rješenje: Korištenjem nejednakosti (12) imamo

$$\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} = \frac{a^6}{a^3b} + \frac{b^6}{b^3c} + \frac{c^6}{c^3a} \geq \frac{(a^2+b^2+c^2)^3}{3(a^3b+b^3c+c^3a)}. \quad (19)$$

Preostaje nam da dokažemo tačnost sljedeće nejednakosti

$$(a^2+b^2+c^2)^2 \geq 3(a^3b+b^3c+c^3a). \quad (20)$$

<https://matemackitalent.mk> objaveno na 10.12.2022

Naime, ako u nejednakost (16) stavimo

$$x = a^2 + bc - ab, \quad y = b^2 + ca - bc, \quad z = c^2 + ab - ca,$$

dobijamo željenu nejednakost (20). Konačno, iz nejednakosti (20) i (19) slijedi nejednakost (18). \square

Rješenje: Primjenom aritmetičko-geometrijske nejednakosti za dva pozitivna broja dobijamo

$$\frac{a^3}{b} + ab \geq 2\sqrt{\frac{a^3}{b}ab} = 2a^2, \quad \frac{b^3}{c} + bc \geq 2b^2, \quad \frac{c^3}{a} + ca \geq 2c^2,$$

pa je

$$\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} + ab + bc + ca \geq 2a^2 + 2b^2 + 2c^2. \quad (21)$$

Iz nejednakosti (21) i $ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2$ slijedi nejednakost (18). \square

5. Zadaci za vježbanje

Prva tri zadatka mogu rješavati osnovci, a preostalih pet-srednjoškolci.

Zadatak 5.1. Ako su x i y pozitivni brojevi, dokaži tačnost nejednakosti:

$$a) \frac{x}{2y+x} + \frac{y}{2x+y} \geq \frac{2}{3}$$

$$b) \frac{x}{y^2} + \frac{y}{x^2} \geq \frac{1}{x} + \frac{1}{y}.$$

Zadatak 5.2. Dokaži da za pozitivne brojeve a, b, c vrijedi

$$a) \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq a + b + c,$$

$$b) \frac{a}{2a+b} + \frac{b}{2b+c} + \frac{c}{2c+a} \leq 1.$$

Zadatak 5.3. Dokaži da za dužine kateta a, b i dužinu hipotenuze c pravouglog trougla vrijedi nejednakost

$$a^4 + b^4 \geq \frac{1}{2}c^4.$$

Zadatak 5.4. Nejednakost (7) dokaži na način različit od prikazanog.

Zadatak 5.5. Neka su x, y, z, k pozitivni realni brojevi i $M = \frac{x}{kx+y+z} + \frac{y}{x+ky+z} + \frac{z}{x+y+kz}$. Dokaži da je

$$a) M \geq \frac{3}{k+2} \text{ za } 0 < k \leq 1,$$

$$b) M \leq \frac{3}{k+2} \text{ za } k \geq 1.$$

Zadatak 5.6. Ako su a, b, c pozitivni brojevi i $a + b + c = 1$, dokaži da je

$$\frac{a}{1+bc} + \frac{b}{1+ca} + \frac{c}{1+ab} \geq \frac{9}{10}.$$

<https://matemackitalent.mk> objaveno na 10.12.2022

Zadatak 5.7. Ako je $k > 1$, onda za dužine stranica a, b, c trougla $\triangle ABC$ vrijedi nejednakost

$$\frac{a}{k(b+c)-a} + \frac{b}{k(c+a)-b} + \frac{c}{k(a+b)-c} \geq \frac{3}{2k-1}.$$

Kada vrijedi jednakost?

Zadatak 5.8. Ako su a, b, c dužine stranica i t_a, t_b, t_c dužine težišnica trougla $\triangle ABC$, onda vrijedi nejednakost

$$\frac{a^2}{t_a^2} + \frac{b^2}{t_b^2} + \frac{c^2}{t_c^2} \geq 4.$$

Literatura

- [1] Z. Cvetovski: *Inequalities (Theorems, Tehniqueus and Selected Problems)*, Berlin/Heidelberg, Springer, 2012.
- [2] D. Milošević: *Jedna nejednakost i njene primene*, Tangenta, Beograd 55/3, 8-10, 2008/09.
- [3] M. Milošević: *Neke primene jedne algebarske nejednakosti*, Matematički list, Beograd XLIX, 4, 1-3, 2014/15.