глигор тренчевски

геометрија

за VII одделение

ГЛИГОР ТРЕНЧЕВСКИ

ГЕОМЕТРИЈА

ЗА VII ОДДЕЛЕНИЕ

V ДОПОЛНЕТО ИЗДАНИЕ

„ПРОСВЕТНО ДЕЛО“
СКОПЈЕ, 1980

Уредник

Кирил Милчев

Рецензенти:

Асен Радојков, професор на Педагошката академија во Штип

Анастас Пендовски, самостоен просветен советник во Заводот за школство Скопје

Душко Ачовски, наставник во Основното училиште „Лазо Трповски“—Скопје

Со решение на Републичкиот педагошки совет бр. 07-36/1 од 24. V. 1977 година се одобрува употребата на овој учебник.

ГЛАВА I

РОТАЦИЈА

§ 1. НАСОЧЕН АГОЛ

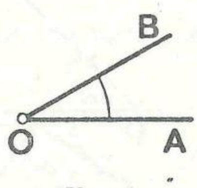
Од геометријата во V одделение позната ви е следнава:

Дефиниција 1. *Агол е геометриска фигура — дел од рамнината, издвоен од две полуправи со заеднички почеток.*

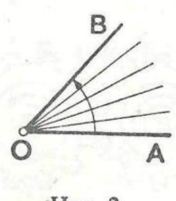
Меѓутоа, секој агол има и своја големина, која ја изразуваме во аголни степени, минути и секунди. Големината на аголот AOB (црт. 1) често ја означуваме со $\widehat{AOB}$, за разлика од означувањето со $\measuredangle AOB$ за самиот агол — како геометриска фигура.

Значи, аголот не е само геометриска фигура, туку и *величина*, која се мери и изразува со броеви.

Секој агол може да биде образуван со вртење (ротација) во рамнината на една полуправа околу својот почеток. На пример: при вртењето на полуправата OA околу точката O, од почетната положба OA до крајната положба OB, се образува агол AOB (црт. 2).



Црт. 1

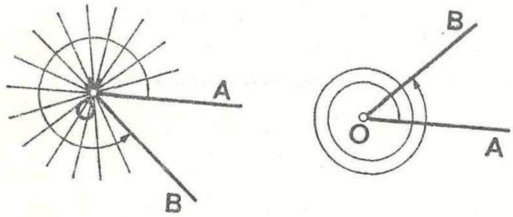


Црт. 2

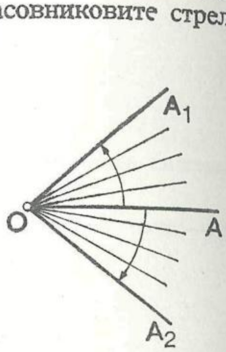
При вртењето на полуправата можат да се образуваат и агли поголеми од рамниот и полниот агол (црт. 3).

Вртењето на една полуправа во рамнината може да се одвива во две заемно спротивни насоки (црт. 4). На пример, две запчести тркала со еднаков радиус, што се сврзани едно со друго, се вртат во заемно спротивни насоки (црт. 5). Ако едното од нив се заврти за некој агол, другото ќе се заврти за ист таков агол но во спротивна насока.

Една од двете можни насоки на вртење во рамнината ќе ја сметаме *йозитивна*, а другата *негативна*. Обично за позитивна се зема насоката на вртење што е спротивна на насоката на вртење на часовниковите стрелки.



Црт. 3



Црт. 4

Аголот, образуван со вртење на полуправата околу нејзиниот почеток во позитивна насока, се смета за *йозитивен агол*; а аголот образуван со вртење на полуправата во негативна насока се смета за *негативен агол*.

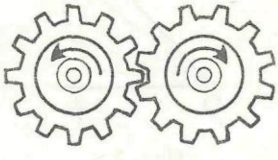
Досега не правевме разлика меѓу $\sphericalangle AOB$ и $\sphericalangle BOA$ (црт. 1), т.е. не придававме значење на редот во кој се дадени неговите краци.

Меѓутоа, од горниве разгледувања се гледа, дека постојат и агли на кои краците не им се рамноправни.

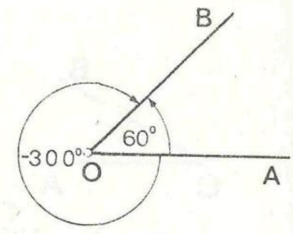
Дефиниција 2. *Агол, на кој едниот крак е йримен за йрв (йочетен), а другиот за втор (краен), се вика насочен агол.*

Ако и двата агла се позитивни или двата се негативни, велиме дека тие се *истонасочени агли*.

Големината на позитивно насочените агли се изразува со позитивни броеви, а големината на негативно насочените агли се изразува со негативни броеви (—30°, —45°, итн.).



Црт. 5



Црт. 6

Познато е, дека две полуправи OA и OB со заеднички почеток образуваат два агла. Едниот од нив е позитивен, а другиот негативен (црт. 6).

Нека полуправата OA при вртењето во рамнината околу почетокот O се совпадне со полуправата OB. Од цртежот 6 гледаме дека крајниот резултат од тоа вртење е еден ист: било таа да се врти во позитивна насока за агол од 60°, или во негативна насока за агол од —300°. Затоа кога зборуваме за *агол на завртувањето* на полуправата од положба OA во положба OB, или за аголот меѓу полуправите OA и OB, ние аголот го земаме (позитивен или негативен) чија величина по апсолутната вредност е помала од $180°$.

Според тоа, аголот на завртувањето α или аголот меѓу две полуправи OA и OB секогаш е затворен во интервалот:

$$0° \leqq |\alpha| \leqq 180° \text{ или } -180° < \alpha \leqq 180°$$

Аголот меѓу две полуправи што се совпаѓаат го земаме да биде еднаков на нула (0°).

§ 2. РОТАЦИЈА

2.1. ПОИМ ЗА РОТАЦИЈА

Во рамнината π да нацртаме некоја фигура Φ и да означиме една точка O. Потоа, фигурата Φ да ја прекопираме врз прозрачна хартија во фигура Φ_1. Ако во точката O забодеме игла и прозрачната хартија ја завртиме околу точката O за некој агол α, тогаш копието на фигурата Φ ќе заземе нова положба Φ_1 (црт. 7).

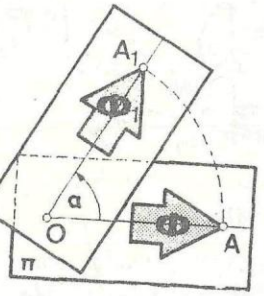
За фигурата Φ_1 велиме дека е добиена со *ротација* (вртење) на фигурата Φ околу точката O за насочениот агол α. Очигледно е, дека при тоа вртење точката O останува неподвижна, а која и да е друга точка A ќе се движи по кружницата со центар O и ќе заземе некоја точно определена нова положба A_1 (црт. 7). За точката A_1 велиме дека е добиена со *ротација на точката A околу O за агол α.*

Насетуваме дека овде имаме еден вид пресликување на фигурата Φ во фигурата Φ_1. Да го разгледаме тоа ново пресликување.

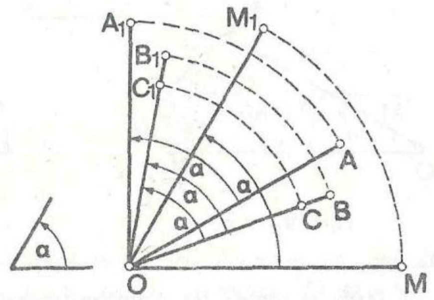
Во рамнината π нека е дадена точка O и еден насочен агол α, таков што $0° \leqq |\alpha| \leqq 180°$. Да извршиме пресликување r на точките од рамнината π согласно правилото: На секоја точка $M \not\equiv O$ од рамнината π ѝ придружуваме точка M_1 од истата рамнина, таква што:

$$OM_1 \cong OM \text{ и } M\widehat{O}M_1 = \alpha$$

На тој начин имаме: $M \xrightarrow{r} M_1$, $A \xrightarrow{r} A_1$, $B \xrightarrow{r} B_1$ итн. (црт. 8).



Црт. 7



Црт. 8

Точката M_1 (слика на точката M) се добива со завртување на точката M околу точката O за агол α. Ако точката M се совпаѓа со O, тогаш е примено и M_1 да се совпаѓа со O, т.е. O_1 се совпаѓа со O.

Очигледно е, дека при ова пресликување на секоја точка M од рамнината π може да ѝ се придружи (ѝ соодветствува) по една и само една точка M_1 од истата рамнина. Но и за секоја точка M_1 може да се одреди онаа точка M, чија слика е таа при ова пресликување. За да се врати точката M_1 во појдовната положба M, доволно е таа да се заврти околу точката O за агол $-\alpha$ (црт. 9).

Според тоа, разгледаното пресликување r е пресликување на целата рамнина π врз самата себе.

Дефиниција 3. *Пресликувањето на рамнината врз самата себе, при што секоја точка M од рамнината се завртува околу дадена точка O за еден ист агол α, се вика ротација на рамнината околу точката O за агол α.*

Точката O се вика *центар на ротацијата*, а аголот α — *агол на ротацијата*. Точките M и M_1 (слика на M) се викаат *соодветни* (*кореспондентни*) *точки на ротацијата*.

Ротацијата со центар O за агол α симболички ќе ја означуваме со $r(O, \alpha)$, а точките M и M_1 зашто се нејзини соодветни точки — со

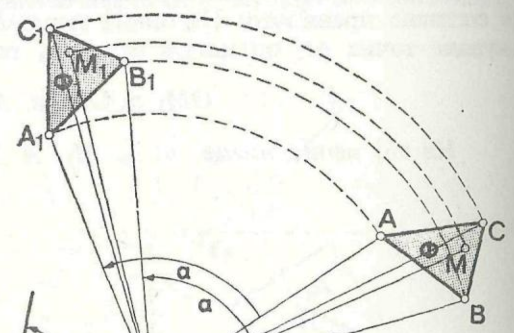
$$M \xrightarrow{r(O,\alpha)} M_1, \quad \text{или} \quad M_1 = r(O, \alpha)(M).$$

Ротацијата е зададена, ако се дадени центарот O и аголот α, или центарот O и кои било две соодветни точки M и M_1.

Од условот дека O_1 се совпаѓа со O, следува дека центарот на ротацијата е неподвижна точка при ротацијата. Други неподвижни точки ротацијата нема.

Со ротација можеме да вршиме пресликување не само на целата рамнина туку и на некој дел од неа. На пример: На рамнината нека е дадена точка O, насочен агол α и некоја фигура Φ (црт. 10). Да извршиме ротација на фигурата Φ околу точката O за аголот α значи за секоја точка A, B, C, . . . M, . . . од фигурата Φ да ја одредиме нејзината слика A_1, B_1, C_1, . . . M_1, . . . при ротацијата $r(O, \alpha)$.

Црт. 9



Црт. 10

Множеството на сите така добиени точки A_1, B_1, C_1, . . . M_1, . . . ќе ја образува фигурата Φ_1 — слика на фигурата Φ. За фигурата Φ_1 велиме дека е добиена од фигурата Φ со ротација на Φ околу точката O за аголот α. Симболички тоа го означуваме: $\Phi \xrightarrow{r(O,\,\alpha)} \Phi_1$ или $\Phi_1 = r\,(O,\,\alpha)\,(\Phi)$.

При ротацијата за 0° секоја точка на рамнината се пресликува во самата себе. А тоа е *идентично пресликување*, односно *идентична ротација*, која ќе ја означуваме со E.

Познатото пресликување од минатата година централната симетрија со центар O е специјален случај на ротација околу точката O за 180°.

Постојат ли фигури, кои при некоја ротација се пресликуваат сами на себе? Да, постојат. Една таква фигура е кружницата, која при ротација околу нејзиниот центар за произволен агол α се пресликува сама на себе. Објасни!

2.2. ОСНОВНИ СВОЈСТВА НА РОТАЦИЈАТА

Ротацијата ги има следниве поважни својства:

1°. Инверзното пресликување на една ротација е пак ротација.

Доказ: Нека ротацијата $r\,(O,\,\alpha)$ точката M ја пресликува во точката M_1, а фигурата Φ — во фигурата Φ_1, т.е. $M \xrightarrow{r(O,\,\alpha)} M_1$ (црт. 11).

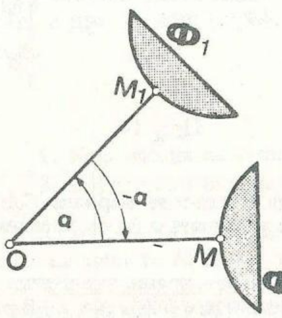
Но, ротацијата $r_1(O,\,-\alpha)$ со ист центар O и агол на ротацијата $-\alpha$, што е спротивен на дадениот агол α, точката M_1 ја враќа во почетната положба M, а сликата Φ_1 — во фигурата Φ, т.е. $M_1 \xrightarrow{r_1(O,\,-\alpha)} M$.

Според тоа, ротацијата r со центар O за агол α има свое инверзно пресликување. Тоа е ротацијата r_1 со ист центар O за агол $-\alpha$, што е спротивен на аголот α.

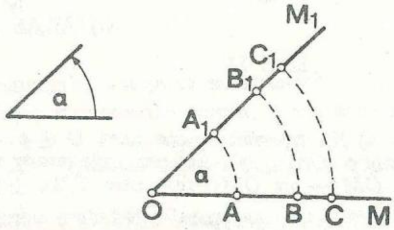
Од својството 1° следува дека ротацијата е обратно еднозначно пресликување (биекција) на рамнината врз самата себе.

2°. Секоја полуправа OM со ротација околу нејзиниот почеток O за агол α се пресликува во полуправа со ист почеток, т.е.

$$OM \xrightarrow{r(O,\,\alpha)} OM_1$$



Црт. 11



Црт. 12

Доказ: Нека е дадена полуправата OM и на неа да уочиме неколку точки $A, B, C, \ldots$ (црт. 12). Со ротација околу точката O за агол α, точките $A, B, C, \ldots$ ќе се пресликаат на точките $A_1, B_1, C_1, \ldots$ Бидејќи

$\widehat{AOA_1} = \widehat{BOB_1} = \widehat{COC_1} = \ldots = \alpha$, тоа очигледно е дека точките A_1, B_1, $C_1, \ldots$ ќе ѝ припаѓаат (лежат) на една полуправа OM_1, што е слика на дадената полуправа OM при ротацијата околу почетокот O за агол α.

Значи: $OM \xrightarrow{r(O,\alpha)} OM_1$, што требаше да докажеме.

3°. Секој агол MON со ротација околу неговото теме O за некој агол α се пресликува во агол $M_1\,ON_1$ со исто теме и складен на дадениот, т.е. $\sphericalangle MON \xrightarrow{r(O,\alpha)} \sphericalangle M_1\,ON_1 \cong \sphericalangle MON$

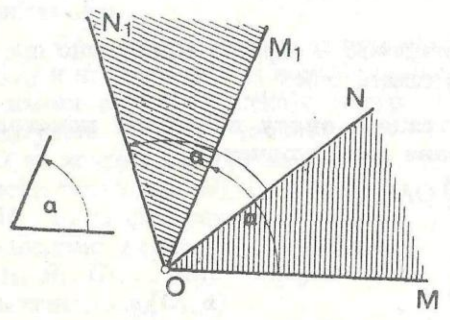
Доказ: Нека се дадени: агол MON и α — агол на ротацијата.

При ротација на $\sphericalangle MON$ околу неговото теме O за аголот α, кракот OM се пресликува на полуправата OM_1, кракот ON — на полуправата ON_1, а аголот MON — на аголот M_1ON_1 (црт. 13).

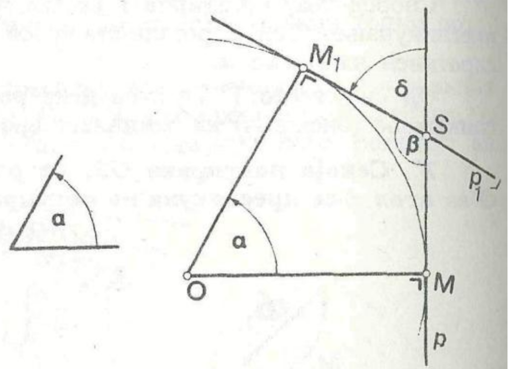
Од цртежот 13 гледаме дека: $\widehat{MON} + \widehat{NOM_1} = \alpha$ и $\widehat{NOM_1} + \widehat{M_1ON_1} = \alpha$, откаде имаме: $\widehat{MON} + \widehat{NOM_1} = \widehat{NOM_1} + \widehat{M_1ON_1}$. А оттука следува: $\widehat{MON} = \widehat{M_1ON_1}$, односно $\sphericalangle MON \cong \sphericalangle M_1ON_1$, штд.

4° Дадена права p со ротација $r(O, \alpha)$ се пресликува во права p_1, која со p зафаќа агол еднаков на аголот на ротацијата.

Доказ: Нека е: O — центар на ротацијата, α — агол на ротацијата, p — дадена права и p_1 — нејзина слика (црт. 14). Треба да докажеме дека аголот меѓу p и p_1 е еднаков на α.



Црт. 13



Црт. 14

а) Да претпоставиме дека $O \notin p$. Од точката O да повлечеме нормала OM кон правата p ($OM \perp p$). Со ротација околу точката O за агол α правата p ќе се преслика во p_1, а OM — на OM_1, при што $OM_1 \perp p_1$ (црт. 14).

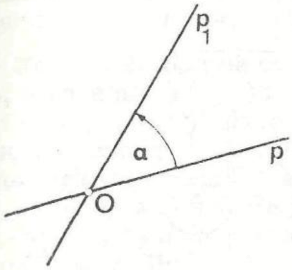
Гледаме, фигурата $OMSM_1$ е четириаголник, кој има два прави внатрешни агли (црт. 14). Бидејќи збирот на внатрешните агли во четириаголникот е $360°$, тоа $\alpha + \beta = 180°$. Но и $\delta + \beta = 180°$ (како напоредни агли). Оттука следува дека $\delta = \alpha$, штд.

б) Ако пак правата p минува низ центарот на ротацијата O, тогаш и p_1 ќе минува низ O и со p ќе образува агол α (црт. 15).

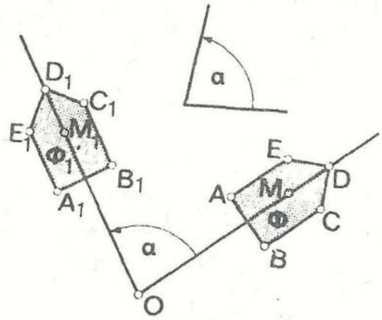
5°. Фигурата Φ_1 што е слика на фигурата Φ при ротацијата $r\,(O, \alpha)$ може да се добие со завртување на целата фигура Φ како цврсто тело околу центарот O за агол α.

Доказ: Ако фигурата Φ како цврсто тело ја завртиме во рамнината околу некоја фиксна точка O за агол α, тогаш и секоја нејзина точка $A, B, C, D, E, \ldots, M, \ldots$ ќе се заврти околу точката O за агол α и соодветно ќе ја заземе положбата на точките $A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, \ldots, M_1, \ldots$

Бидејќи точките $A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, \ldots, M_1, \ldots$ се слики на точките $A, B, C, D, E, \ldots, M, \ldots$ при ротацијата $r(O, \alpha)$, тоа множеството од сите тие точки (и само тие) ќе ја образува фигурата Φ_1 што е слика на Φ при ротацијата околу точката O за агол α (црт. 16).



Цр. 15



Црт. 16

Од својството 5° непосредно следува и својството:

6°. При ротацијата со центар O за агол α, секоја фигура Φ се пресликува во складна на неа фигура Φ_1.

Тоа значи дека при ротацијата, исто како и при транслацијата и симетријата:

а) отсечката AB се пресликува во складна на неа отсечка A_1B_1,

б) аголот ASB се пресликува во складен на него агол $A_1S_1B_1$,

в) кружницата k се пресликува во складна на неа кружница k_1,

г) секој многуаголник се пресликува во складен на него многуаголник, итн.

Од својството б) следува дека:

При ротацијата две паралелни прави се пресликуваат на две паралелни прави, а две заемно нормални прави се пресликуваат на две заемно нормални прави.

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1. Која насока на вртење се зема за позитивна, а која за негативна?

2. Кој агол го викаме насочен агол? Кој е позитивно насочен, а кој е негативно насочен?

3. Дадени се две различни точки O и M и еден насочен агол α. Конструирај ја сликата на точката M при ротацијата $r(O, \alpha)$!

4. На каква фигура се пресликува при ротација $r(O, \alpha)$ дадена: а) отсечка, б) полуправа, в) права, г) кружница?

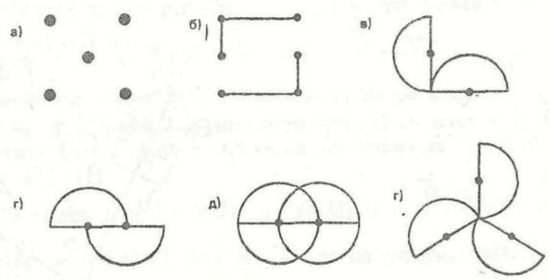
5. Нацртај агол од 60°, а потоа конструирај ја неговата слика при ротација околу неговото теме за агол од $-45°$. На цртежот покажи што претставува: а) унијата, б) пресекот на тие два агла.

6. Одреди ги можните центри на ротацијата при која дадена точка M се пресликува во друга дадена точка N.

7. Одреди при која ротација: а) рамностраниот триаголник, б) квадратот се пресликува сам на себе.

8. Постои ли ротација при која: а) дадена отсечка AB, б) правата p се пресликува сама на себе?

9. Можат ли фигурите на цртежот 17 при некоја ротација да се пресликаат сами на себе? За секоја фигура одреди го центарот и аглите на ротацијата!



Црт. 17

10. Колку неподвижни точки има ротацијата околу точката O за агол $0° < \alpha < 180°$?

11. При кои услови ротацијата велиме дека е зададена?

12. Различни ли се ротациите за агол од 180° и —180°. Како се вика таа ротација?

13. Покажи дека аголот на завртување секогаш може да се сведе да го задоволува условот $-180° < \alpha \leqq 180°$. На која ротација е еднаква ротацијата за агол: 240°, —200°, 330°?

14. Дадени се полуправите OA и OB. Постои ли ротација што полуправата OA ја пресликува на полуправата OB?

15. Дадена права p ротирај ја за агол —45° околу точката O, ако: а) $O \in p$, $O \notin p$.

16. Даден триаголник ABC ротирај го за агол $\alpha = 120°$ околу темето C.

17. Ротирај околу дадена точка S за даден агол α : а) дадена кружница $k(O, r)$, б) даден квадрат!

§ 3. ПРИМЕНА НА МЕТОДОТ НА РОТАЦИЈА ПРИ РЕШАВАЊЕТО НА КОНСТРУКТИВНИТЕ ЗАДАЧИ

Ако при докажувањето на некоја теорема или при решавањето на некоја конструктивна задача користиме ротација околу дадена точка O за некој агол, велиме дека таа теорема, односно конструктивна задача, ја решаваме со примена на методот на ротација.

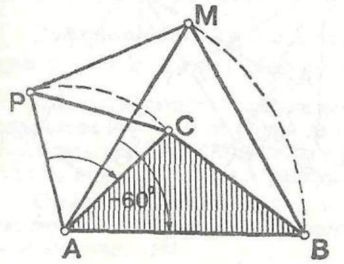
Суштината на методот на ротација се состои во тоа што: со ротација на дадената или бараната фигура околу така избраната точка O често добиваме некоја помошна фигура која лесно можеме да ја конструираме, а преку нејзината конструкција да е определена и конструкцијата на бараната фигура.

Методот на ротација е целисходен ако во дадената фигура Φ постојат парови соодветни точки, кои со некоја ротација се пресликуваат едни на други. Да го илустрираме тоа на неколку примери:

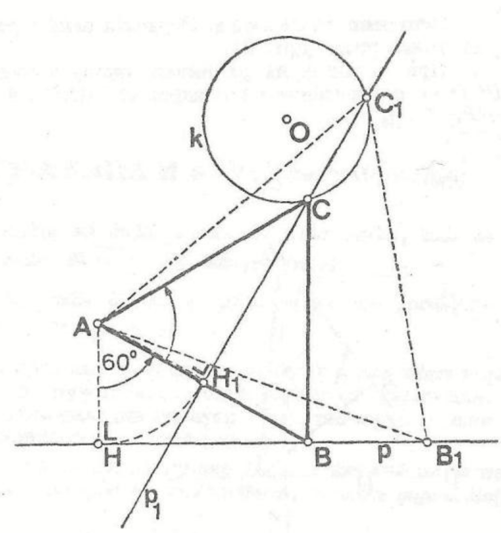
Задача 1. Над страните AB и AC на триаголникот ABC конструирани се рамнострани триаголници ABM и ACP како што е покажано на црт. 18. Да се докаже дека: $PM \cong CB$.

Доказ: Да ја разгледаме ротацијата на рамнината на цртежот околу точката A за агол од $-60°$. Бидејќи е $\widehat{PAC} = 60°$ и $AP \cong AC$, тоа $P \xrightarrow{r(A,-60°)} C$. Исто така од $\widehat{MAB} = 60°$ и $AM \cong AB$ следува дека $M \xrightarrow{r(A,-60°)} B$. Значи, горнава ротација отсечката PM ја пресликува на отсечката CB, а врз основа на својството 6° ќе биде $PM \cong CB$, штд.

Задача 2. Дадени се: права p, кружница $k(O, r)$ и точка A ($A \notin p$ и $A \not\equiv O$). Да се конструира рамностран триаголник со едно теме во точката A, а другите две темиња B и C да лежат соодветно на правата p и кружницата k (црт. 19).



Црт. 18



Црт. 19

Решение. Анализа: Нека бараниот триаголник е ABC (црт. 19). При ротација на правата p околу точката A за агол од 60° таа ќе се преслика на права p_1. При истата ротација точката B, која лежи на p, ќе се преслика во точката C, која лежи на p_1, и на дадената кружница k.

Бидејќи: $\widehat{BAC} = 60°$ и $AB \cong AC$, тоа триаголникот ABC е рамностран.

Конструкција Го ротираме подножието H на нормалата AH (што е повлечена низ A кон дадената права p) околу точката A за агол од 60° во положба H_1. Потоа низ H_1 повлекуваме права $p_1 \perp AH_1$. Пресечната точка C на p_1 и k е едно од темињата на бараниот триаголник. Со ротација на точката C околу A за агол од $-60°$ ја добиваме и точката B — трето теме на $\triangle ABC$.

Доказ: Конструираниот $\triangle ABC$ ги исполнува сите услови на задачата, па според тоа тој е решение на задачата.

Дискусија: Во зависност од тоа дали правата p_1 — слика на p, ја сече кружницата k во две точки (C и C_1), или ја допира кружницата во една точка C, или нема заеднички точки со кружницата k; задачата ќе има две реденија ($\triangle ABC$ и $\triangle AB_1C_1$ на црт. 19), едно решение или нема да има решение. Покрај горниве (две или едно) решенија дадената задача може да има и уште други (две или едно) решенија. Нив ги добиваме на ист начин кога дадената права p ја ротираме околу точката A за агол од $-60°$.

Задача 3. Дадени се две прави p и q и точка C ($C \notin p$ и $C \notin q$). Да се конструира правоаголен рамнокрак триаголник со теме на правиот агол во точката C, а другите две темиња A и B да лежат соодветно на правите p и q.

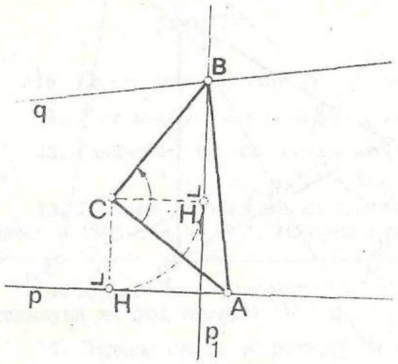
Решение: Анализа: Бараниот триаголник нека е $\triangle ABC$ на цртеж 20. При ротација на правата p околу точката C за агол $90°$, таа ќе се преслика на правата p_1. При истата ротација темето $A \in p$ ќе се преслика во точката B, која е пресек на правите p_1 и q (црт. 20). Бидејќи: $\widehat{ACB} = 90°$ и $CA \cong CB$, тоа триаголникот ABC е правоаголен рамнокрак, па според тоа тој ги исполнува условите на задачата.

Изведувањето на конструкцијата на бараниот $\triangle ABC$, нејзиниот доказ и дискусија предлагаме сами да ги извршите.

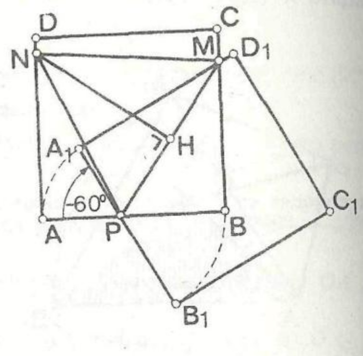
Задача 4. Во квадрат $ABCD$ да се впише рамностран триаголник чие едно теме лежи во дадена точка P од страната AB.

Решение: Анализа: Задачата нека е решена и $\triangle PMN$ — нека е бараниот рамностран триаголник (црт. 21).

При ротација на рамнината околу точката P за агол од $-60°$ дадениот квадрат $ABCD$ ќе се преслика на квадрат $A_1B_1C_1D_1$, а темето N — во темето M (црт. 21), т.е. $N \xrightarrow{r(P,-60°)} M$.



Црт. 20



Црт. 21

Бидејќи $N \in AD$, тоа $M \in A_1D_1$. Но, од друга страна пак $M \in BC$. Според тоа, точката M ќе биде пресек на отсечките A_1D_1 и BC. А третото теме N го одредуваме како пресек на страната AD и нормалата HN, што е повлечена низ средината H на страната PM (црт. 21).

Конструкцијата на бараниот триаголник PMN, нејзиниот доказ и дискусија оставаме да ги изведете сами.

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1. Дадени се две паралелни прави p и q и точка A ($A \notin p$ и $A \notin q$). Да се конструира рамностран триаголник со едно теме во точката A, а другите две темиња B и C да лежат соодветно на правите p и q.

2. Дадени се три паралелни прави p, q и r. Конструирај рамностран триаголник, чии темиња лежат соодветно на дадените прави.

3. Дадени се две соодветни точки A и A_1 на ротацијата $r(O, \alpha)$ и познато е дека центарот O лежи на дадена права p. Конструирај го центарот O и аголот α на ротацијата.

4. Дадени се агол MON и точка A од внатрешната област на аголот MON. Да се конструира рамностран триаголник ABC, на кој темињата B и C да лежат соодветно на краците на дадениот агол.

5. Конструирај квадрат $ABCD$, на кој темето A да лежи во дадена точка, а темињата B и D да лежат соодветно на две дадени паралелни права p и q.

ГЛАВА II

КРУЖНИЦА

§ 4. ОПШТИ ПОИМИ ЗА КРУЖНИЦА И КРУГ (повторување)

Дефиниција 1. *Кружница е множество на сите точки во рамнината, што се наоѓаат на дадено растојание r од една фиксна точка O од таа рамнина.*

Дефиниција 2. *Круг е множество на сите точки во рамнината, чие растојание од една фиксна точка O во таа рамнина не е поголемо од r.*

Фиксната точка O се вика *центар* на кружницата (односно кругот), а отсечката која го соединува центарот со која и да е точка од кружницата се вика *радиус* на кружницата. Кружницата има бесконечно многу различни но складни радиуси. Сите тие имаат еднаква должина, која исто се вика радиус на кружницата и се означува со r.

Отсечката, што соединува кои било две точки од кружницата се вика *тетива* на кружницата; а тетивата, што минува низ центарот на кружницата, се вика *дијаметар* на кружницата.

Должината на дијаметарот еднаква е на $2r$ (Зошто?).

Дефиниција 3. *Правата, која лежи во рамнината на кружницата и со неа има само една заедничка точка, се вика тангента на кружницата.*

Заедничката точка на тангентата и кружницата се вика *допирна точка* на тангентата, а радиусот што ѝ одговара на таа точка се вика *радиус на допирната точка.*

Правата пак, која минува низ две точки на кружницата, се вика *секанта* на кружницата.

Нека A и B се две точки од кружницата (црт. 22). Секантата AB ја разбива рамнината на две полурамнини. Деловите од кружницата, што лежат во секоја од тие полурамнини, се викаат *кружни лаци* од кружницата со крајни точки A и B. На цртеж 22 имаме два кружни лака: AMB и ANB.

Ако AB е дијаметар, тогаш кружните лаци од кружницата се викаат *полукружници.*

Ако пак тетивата AB не е дијаметар, тогаш кружниот лак ANB што лежи во полурамнината која го содржи центарот на кружницата, ќе го викаме *поголем од полукружницата*; а другиот кружен лак AMB ќе го викаме *помал од полукружницата.*

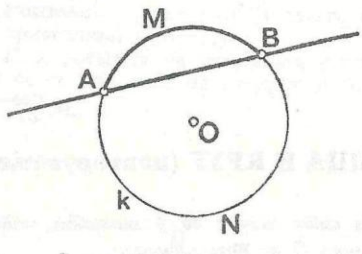
Кружниот лак — помал од полукружницата ќе го означуваме само со неговите крајни точки вака: $\widehat{AB}$ (црт. 22). Ние ќе разгледуваме само такви кружни лаци.

За тетивата AB велиме дека *е под* кружниот лак $\widehat{AB}$ или дека *му одговара* (*му соодветствува*) на кружниот лак $\widehat{AB}$; и обратно: за кружниот лак $\widehat{AB}$ велиме дека *е над* тетивата AB или дека *ѝ одговара* (*ѝ соодветствува*) на тетивата AB.

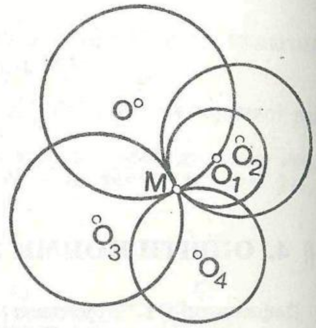
Од дефиницијата на кружницата заклучуваме дека таа е еднозначно определена со нејзиниот центар и радиус.

Правата е еднозначно определена со две точки, а рамнината со три точки кои не лежат на една права. Се поставува прашањето: со колку точки е еднозначно определена кружницата?

Низ една точка M минуваат бесконечно множество кружници (црт. 23). За нивен центар може да се избере произволна точка $O \not\equiv M$ од рамнината.



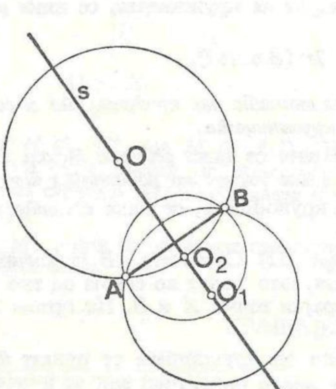
Црт. 22



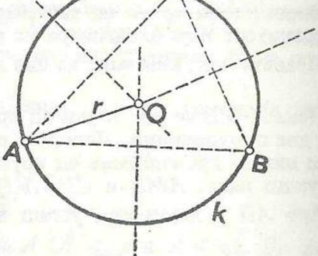
Црт. 23

Низ две точки A и B минуваат исто бесконечно множество кружници (црт. 24). Нивните центри лежат на симетралата s на отсечката AB.

Теорема: *Низ три точки, кои не лежат на една права, минува една и само една кружница.*



Црт. 24



Црт. 25

Доказ: Нека точките A, B и C не лежат на една права (црт. 25). Тие определуваат само еден триаголник ABC. Симетралите на страните на триаголникот ABC се сечат во една единствена точка O, која е еднакво оддалечена од сите три негови темиња. Тоа значи дека: три точки што не лежат на една права определуваат само една кружница.

Забелешка: Низ три точки, што лежат на една права, не минува ниту една кружница, бидејќи кружница и права можат да имаат најмногу две заеднички точки.

1. Што е кружен лак? Колку кружни лаци формираат од кружницата две различни точки од неа?

2. На кружницата дадени се: а) три, б) четири, в) пет различни точки. Колку кружни лаци од кружницата формираат тие точки?

3. Нацртај круг со центар O и радиус r. Дали од тој круг се подмножества: а) кружницата со која е тој ограничен, б) кој и да е негов радиус, в) која и да е негова тетива, г) која и да е права што минува низ неговиот центар, д) отсечката AB, чии крајни точки A и B му припаѓаат на тој круг?

4. На кружницата ѝ припаѓа ли нејзиниот центар? А на кругот му припаѓа ли неговиот центар?

5. Колку точки може да содржи пресекот на: а) права и кружница, б) права и круг, в) две кружници, г) два круга?

6. Да се конструира тангента на кружницата во дадена точка од неа.

7. Со даден радиус конструирај кружница која да се допира до дадена права во дадена точка од неа.

8. Какво множество од точки образуваат центрите на кружниците, кои се допираат до дадена права во дадена точка од неа?

9. Какво множество од точки образуваат центрите на кружниците со даден радиус r, кои се допираат до дадена права p?

10. На дадена права p одреди ги точките што се на дадено растојание r од дадена точка M.

11. Нацртај правоаголен триаголник и околу него опиши кружница.

12. Конструирај кружница која да минува низ три дадени точки A, B и C, кои не лежат на една права.

§ 5. ОСНОВНИ СВОЈСТВА НА КРУЖНИЦАТА

Две кружници (односно два круга) можат да бидат складни. Тие се складни ако и само ако имаат еднакви радиуси.

Кружните лаци од една кружница или од две складни кружници исто можат да бидат складни или едниот да е поголем (или помал) од другиот. Познати ни се следниве својства на кружницата и кругот:

Теорема 1. *Кружницата (односно кругот) е централно симетрична во однос на својот центар.*

Теорема 2. *Кружницата (односно кругот) е осно симетрична во однос на правата што е определена со кој и да е нејзин дијаметар.*

Теорема 3. *Кружницата (односно кругот) со ротација околу својот центар за произволен агол α се пресликува сама на себе.*

Од теоремата 2 следуваат следниве поважни последици — својства на дијаметарот, тетивата и кружниот лак.

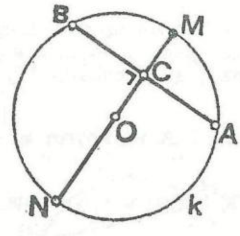
Последица 1. *Дијаметарот, што е нормален на дадена тетива во кружницата, ја располовува тетивата и кружните лаци што ѝ одговараат* (црт. 26).

Последица 2. *Дијаметарот, што минува низ средината на дадена тетива, е нормален кон таа тетива и ги преполовува кружните лаци што ѝ одговараат.*

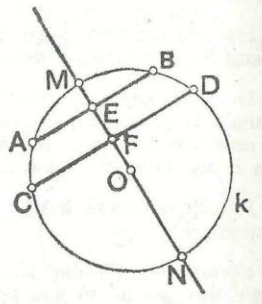
Последица 3. *Дијаметарот, што минува низ средината на даден кружен лак од кружницата, е нормален кон тетивата што му одговара и ја преполовува истата.*

Последица 4. *Кружните лаци од една кружница, што се заклучени од две паралелни тетиви, се складни* (црт. 27).

Горниве последици предлагаме сами да ги докажете.



Црт. 26



Црт. 27

Теорема 4-а. *Ако две тетиви во кружницата се складни, тогаш тие се еднакво оддалечени од центарот на кружницата.*

Доказ: Нека AB и CD се две тетиви и нека $AB \cong CD$ и $OM \perp AB$, $ON \perp CD$ (црт. 28). Ќе докажеме дека $\overline{OM} = \overline{ON}$.

При ротацијата на тетивата AB околу центарот O за агол MON, таа ќе се преслика на тетивата CD (Зошто?), а отсечката OM — на отсечката ON. Според тоа, ќе биде $OM \cong ON$, односно $\overline{OM} = \overline{ON}$, штд.

Аналогно се докажува и обратната теорема:

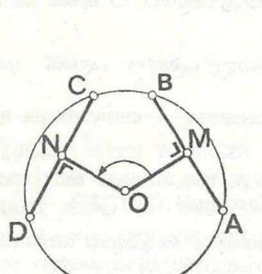
Теорема 4-б. *Ако две тетиви во кружницата се еднакво оддалечени од центарот, тогаш тие се складни.*

Ќе ја наведеме и следнава теорема без доказ:

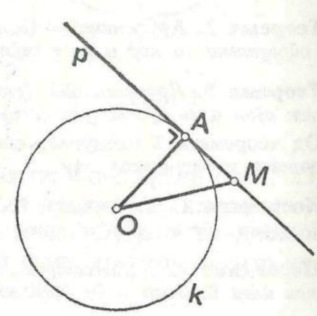
Теорема 5. *Ако две тетиви во кружницата се нескладни, тогаш поголемата тетива е поблизу до центарот*, и обратно: *Ако две тетиви во кружницата се нееднакво оддалечени од центарот, тогаш поголема е тетивата, која е поблизу до центарот на кружницата.*

Теорема 6-а. *Ако една права е нормална кон радиусот во неговата крајна точка, тогаш таа е тангента на кружницата.*

Доказ: Нека OA е радиус на кружницата $k(O, r)$ и нека правата p е нормална на OA и минува низ точката A (црт. 29).



Црт. 28



Црт. 29

Бидејќи $p \perp OA$, односно $OA \perp p$, тоа, растојанието на која и да е точка M од правата p, што е различна од A $(M \not\equiv A)$ ќе биде поголемо од радиусот OA, т.е. $\overline{OM} > \overline{OA}$ (Зошто?). Тоа значи дека сите точки од правата p, освен точката A, лежат надвор од кружницата k.

Според тоа, правата p со кружницата k има само една заедничка точка A, т.е. $p \cap k = \{A\}$; значи, таа е тангента на кружницата k, штд.

Лесно може да се покаже дека важи и обратната теорема:

Теорема 6-б. *Ако една права е тангента на кружницата, тогаш таа е нормална кон радиусот на допирната точка.*

Правата и обратната теорема 6-а и 6-б често заедно ги формулираме вака:

Теорема 6. *Дадена права е тангента на кружницата, ако и само ако таа е нормална кон радиусот на допирната точка.*

Горната теорема ја применуваме тогаш кога треба да докажеме дека една права е тангента на кружницата, а исто така и при конструкцијата на тангента во дадена точка од кружницата.

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1. При цртањето на една кружница со даден радиус не е одбележан нејзиниот центар. Како може да се одреди нејзиниот центар?

2. Докажи дека: секоја тетива не е поголема од дијаметарот на кружницата.

3. Конструирај кружница со најмал радиус, што ќе минува низ две дадени точки A и B.

4. Конструирај кружница со даден радиус, која да минува низ две дадени точки.

5. Конструирај кружница, која да минува низ точките A и B, а со радиус $r = \overline{AB}$.

6. Дадена е точка M од кругот. Конструирај тетива на тој круг, таква што точката M да е нејзина средишна точка.

7. Даден е кружен лак $\overset{\frown}{AB}$ од една кружница. Раздели го тој лак на два складни дела.

8. Која од тетивите, што минуваат низ една внатрешна точка на кружницата, е најголема, а која најмала?

9. Низ крајните точки на тетивата AB во една кружница повлечени се тетиви нормални на тетивата AB. Докажи дека тие тетиви се складни.

10. Какво множество од точки образуваат центрите на кружниците, кои се допираат: а) до краците на даден агол, б) до две паралелни прави?

11. Какво множество од точки образуваат центрите на кружниците, кои имаат складни радиуси и минуваат низ дадена точка?

12. Дадени се три точки A, B и M. Одреди ги сите точки од рамнината кои се на дадено растојание од точката M, а на еднакви растојанија од точките A и B.

13. Конструирај точка, која е на дадено растојание од дадена точка M и на дадено растојание од дадена права p.

14. Докажи дека тангентите на кружницата, што се повлечени во крајните точки на еден дијаметар, се паралелни.

15. Да се конструира тангента на дадена кружница, која е: а) паралелна, б) нормална на дадена права p.

16. Да се конструира кружница, која минува низ дадена точка M и се допира до дадена права p во точката P од неа.

17. Да се конструира кружница, која се допира до дадена права p во точката A од неа, а центарот да ѝ лежи на дадена права q.

18. Конструирај кружница со даден радиус, која се допира до дадена права p и минува низ дадена точка M.

19. На дадена кружница одреди точка, која е на дадено растојание од дадена точка M.

20. Дадена е права p и точка $M \notin p$. Конструирај кружница со центар во точката M, а да се допира до правата p.

§ 6. ЦЕНТРАЛНИ АГЛИ

Дефиниција: *Аголот, чие теме е во центарот на кружницата, се вика централен агол.*

Аголот AOB (црт. 30) е централен, бидејќи неговото теме O е во центарот на кружницата, а неговите краци минуваат по радиусите OA и OB.

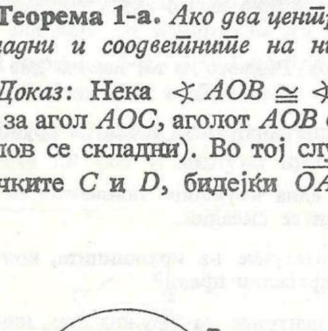
Очигледно е, дека две полуправи што излегуваат од центарот на кружницата, определуваат два централни агли и два кружни лака.

За кружниот лак $\widehat{AB}$, што лежи во областа на централниот агол AOB, велиме дека *е зафатен од* централниот агол AOB, или дека *му одговара* (*му соодветствува*) на централниот агол AOB, и обратно: за централниот агол AOB велиме дека *е над* кружниот лак $\widehat{AB}$, или дека *му одговара* (*му соодветствува*) на кружниот лак $\widehat{AB}$.

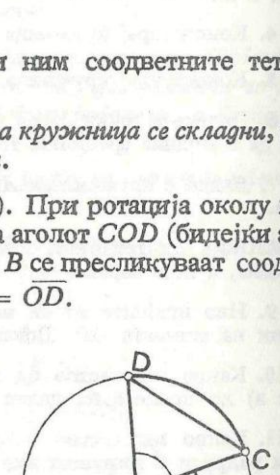
Ќе покажеме дека за централните агли и ним соодветните тетиви и кружни лаци важат следниве теореми:

Теорема 1-а. *Ако два централни агли во една кружница се складни, тогаш се складни и соодветните на нив кружни лаци.*

Доказ: Нека $\measuredangle AOB \cong \measuredangle COD$ (црт. 31). При ротација околу центарот O за агол AOC, аголот AOB се пресликува на аголот COD (бидејќи аглите по услов се складни). Во тој случај точките A и B се пресликуваат соодветно во точките C и D, бидејќи $\overline{OA} = \overline{OC}$ и $\overline{OB} = \overline{OD}$.



Црт. 30



Црт. 31

Значи: Кружниот лак $\widehat{AB}$ се пресликува на кружниот лак $\widehat{CD}$.

Според тоа: $\widehat{AB} \cong \widehat{CD}$, штд.

Ќе докажеме дека важи и обратната теорема:

Теорема 1-б. *Ако два кружни лака од една кружница се складни, тогаш се складни и соодветните централни агли над нив.*

Доказ: Во кружницата k нека е дадено $\widehat{AB} \cong \widehat{CD}$ (црт. 31).

Постои ротација околу центарот O, која кружниот лак $\widehat{AB}$ го пресликува на нему складниот кружен лак $\widehat{CD}$. При таа ротација, точките A и B се пресликуваат соодветно во точките C и D. Затоа ќе биде $AB \cong CD$. Но бидејќи $OA \cong OC$ и $OB \cong OD$, тоа $\triangle AOB \cong \triangle COD$ — според признакот CCC за складност на триаголниците.

Оттука следува дека $\sphericalangle AOB \cong \sphericalangle COD$, штд.

Теоремите 1-а и 1-б често ги формулираме во една теорема вака:

Теорема 1. *Два кружни лака од една кружница се складни, ако и само ако соодветните централни агли им ќе складни.*

Аналогно се докажуваат и следниве три теореми:

Теорема 2. *Два кружни лака од една кружница се складни, ако и само ако соодветните тетиви им се складни.*

Теорема 3. *Два централни агли од една кружница се складни, ако и само ако соодветните тетиви им се складни.*

Теорема 4. *Ако два кружни лака од кружницата се нескладни, тогаш на поголемиот (помалиот) кружен лак му одговара и поголем (помал) централен агол, и обратно.*

Аналогни теореми важат и за два кружни лака (односно за два централни агли и две тетиви) од две складни кружници.

При докажувањето на горниве теореми се ограничуваме само на кружни лаци што се помали од полукружницата.

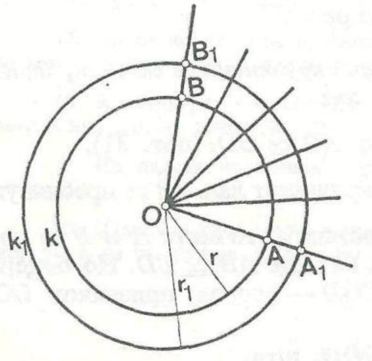
Теоремите 1 и 4 покажуваат дека кружните лаци можеме да ги споредуваме и да ги мериме преку споредување и мерење на соодветните на нив централни агли.

Знаеме дека $\dfrac{1}{90}$ од правиот агол се вика *аголен степен* (1°), $\dfrac{1}{60}$ од аголниот степен се вика *аголна минута* (1′), а $\dfrac{1}{60}$ од аголната минута — *аголна секунда* (1″).

Кружен лак од кружницата што му одговара на централен агол од еден аголен степен, односно една аголна минута или една аголна секунда, се вика *лачен степен* (1°), односно *лачна минута* (1′) или *лачна секунда* (1″).

На цртеж 32 $\sphericalangle AOB$ е централен агол во кружниците $k(O, r)$ и $k_1(O_1, r_1)$. Тој содржи 5 централни агли, секој од нив нека е еднаков на по еден аголен степен. Велиме дека мерниот број на $\sphericalangle AOB$ во аголни степени е бројот 5.

Од цртежот гледаме дека kраците на аглите, чиј збир е еднаков на $\measuredangle AOB$, ги разделуваат кружните лаци $\widehat{AB}$ и $\widehat{A_1B_1}$ од кружниците k и k_1 секој на по 5 лачни степени. Кружните лаци $\widehat{AB}$ и $\widehat{A_1B_1}$ се нескладни, бидејќи лежат на две кружници со различни радиуси; но тие имаат еднаква аголна големина (5 лачни степени).



Црт. 32

Забележуваме дека: колку што аголни степени има даден централен агол, исто толку лачни степени има и соодветниот му кружен лак. Според тоа ќе важи следнава:

Теорема 5. *Големината на централниот агол е еднаква на аголната големина на соодветниот му кружен лак, и обратно.*

Забелешка: Кружните лаци се карактеризираат со две величини: со својата *аголна големина*, која ја изразуваме во аголни единици; и со својата *должинска големина*, која ја изразуваме во должински единици. На пример: кружните лаци $\widehat{AB}$ и $\widehat{A_1B_1}$ на црт. 32 имаат еднаква аголна големина, но различни должински големини.

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1. Околу рамнокраквот триаголник ABC со основа AB е опишана кружница. Какви се кружните лаци $\widehat{AC}$ и $\widehat{BC}$?

2. Околу рамностраниот триаголник ABC е опишана кружница. Одреди ја аголната големина на кружните лаци од кружницата над страните на $\triangle ABC$.

3. Во една кружница повлечени се два заемно нормални дијаметри и нивните крајни точки се соединети последователно со отсечки. Докажете дека добиениот четириаголник е квадрат.

4. Еден кружен лак претставува: а) $\frac{1}{6}$, б) $\frac{1}{8}$, в) $\frac{1}{12}$, г) $\frac{1}{18}$ од кружницата. Одреди ја аголната големина на тој кружен лак!

5. Колкава е аголната големина на кружен лак што е над тетива, која е складна на радиусот на кружницата.

6. На кружницата се дадени два складни кружни лака $\widehat{AB}$ и $\widehat{BC}$. Докажи дека кружниот лак, чии крајни точки се средините на дадените лаци, е складен со секој од нив.

7. Без употреба на аголомер конструирај кружен лак со аголна големина: а) 45°, б) 30°, в) 60°, г) 135°.

8. Растојанието на тетивата AB од центарот на кружницата е еднакво на половина од радиусот на кружницата. Одреди ја аголната големина на кружниот лак над таа тетива!

9. Тетивата AB ја разделува кружницата на два кружни лака, чии аголни големини се однесуваат како 2:7. Под каков агол се гледа тетивата AB од центарот на кружницата?

10. Над дијаметарот AB на кружницата како страна конструиран е рамностран триаголник ABC. Одреди ги аголните големини на кружните лаци, на кои страните на триаголникот ја разбиваат полукружницата.

§ 7. ПЕРИФЕРНИ АГЛИ

Дефиниција: *Агол, чие теме лежи на кружницата, а неговите краци ја сечат кружницата, се вика нејзин периферен агол.*

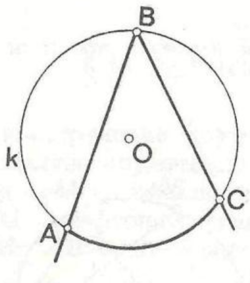
На пример, аголот ABC е периферен во кружницата k (црт. 33).

За кружниот лак $\widehat{AC}$, што лежи во областа на периферниот агол ABC, велиме дека *е зафатен* од периферниот агол ABC, или дека *му одговара* (*му соодветствува*) на периферниот агол ABC (црт. 33), и обратно: за периферниот агол ABC велиме дека *е над* кружниот лак $\widehat{AC}$, или дека *се потпира* на кружниот лак $\widehat{AC}$. Ќе покажеме дека важи:

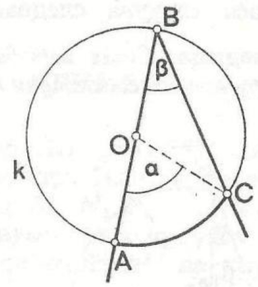
Теорема: *Големината на периферниот агол е еднаква на половината од аголната големина на зафатениот од него кружен лак.*

Доказ: Ќе разликуваме три случаја:

1°. Центарот на кружницата лежи на еден од краците на периферниот агол (црт. 34).



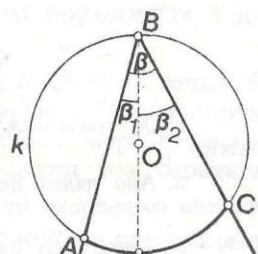
Црт. 33



Црт. 34

Ако го повлечеме радиусот OC, гледаме дека аголот $\widehat{AOC} = \alpha$ е централен агол над кружниот лак $\widehat{AC}$, над кој се наоѓа и дадениот периферен агол $\widehat{ABC} = \beta$. Бидејќи аголот α е надворешен на рамнокракиот триаголник BOC, тоа ќе биде: $\alpha = 2\beta$ или $\beta = \dfrac{\alpha}{2}$.

Оттука, а врз основа на теоремата 5 во § 6 ($\alpha = \widehat{AC}$) следува дека големината на периферниот агол β е еднаква на половината од аголната големина на зафатениот од него кружен лак $\widehat{AC}$, т.е. $\beta = \dfrac{\widehat{AC}}{2}$.



Црт. 35

2°. Центарот на кружницата лежи во областа на периферниот агол.

Дијаметарот BD повлечен низ темето на дадениот периферен агол β, го разбива истиот на два дела β_1 и β_2, при што $\beta = \beta_1 + \beta_2$ (црт. 35).

За аглите β_1 и β_2, врз основа на претходниот случај, имаме: $\beta_1 = \frac{\overset{\frown}{AD}}{2}$ и $\beta_2 = \frac{\overset{\frown}{DC}}{2}$. Според тоа, $\beta = \beta_1 + \beta_2 = \frac{\overset{\frown}{AD}}{2} + \frac{\overset{\frown}{DC}}{2} = \frac{\overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{DC}}{2} = \frac{\overset{\frown}{AC}}{2}$, т.е. $\beta = \frac{\overset{\frown}{AC}}{2}$, штд.

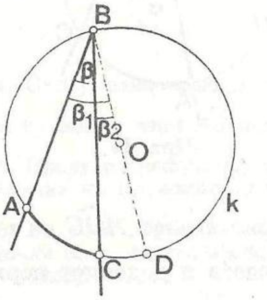
3°. Центарот на кружницата нека лежи надвор од периферниот агол (црт. 36).

Во тој случај ако го повлечеме дијаметарот BD, дадениот агол β можеме да го разгледуваме како разлика од периферните агли β_1 и β_2, т.е. $\beta = \beta_1 - \beta_2$. Според тоа: $\beta = \beta_1 - \beta_2 = \frac{\overset{\frown}{AD}}{2} - \frac{\overset{\frown}{DC}}{2} = \frac{\overset{\frown}{AD} - \overset{\frown}{DC}}{2} = \frac{\overset{\frown}{AC}}{2}$ т.е. $\beta = \frac{\overset{\frown}{AC}}{2}$.

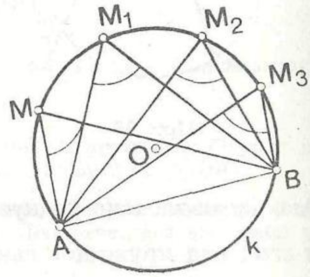
Со тоа теоремата е целосно докажана.

Од неа следува следнава важна:

Последица: *Сите периферни агли над ист кружен лак* (*или тетива*) *во иста кружница се складни* (црт. 37).



Црт. 36



Црт. 37

Навистина, големината на секој од нив е еднаква на половината од аголната големина на еден ист кружен лак.

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1. Во кои граници се менува аголната големина на периферниот агол во кружницата?

2. Ако даден централен агол во кружницата го зголемиме 3 пати, како ќе се промени соодветниот му периферен агол?

3. Каков дел од кружницата претставува кружниот лак од неа над кој лежи периферен агол од: а) 45°, б) 36°, в) 30°?

4. Докажи дека: на тетива што е складна на радиусот на кружницата, ѝ одговара кружен лак 60°, и обратно.

5. Колкав е периферниот агол над кружен лак, кој претставува: а) $\frac{1}{4}$, б) $\frac{2}{9}$, в) $\frac{5}{6}$, г) $\frac{2}{5}$ од кружницата?

6. Збирот на еден периферен агол и соодветниот му централен агол е еднаков на $180°$. Одреди ја големината на аглите.

7. На какво растојание од центарот на кружницата со радиус 5 cm се наоѓа тетива, што му одговара на кружен лак од $120°$?

8. Двете страни на еден триаголник отсекуваат од опишаната околу него кружница кружни лаци соодветно еднакви на $120°$ и $90°$. Одреди ги аглите на тој триаголник!

9. Одреда ја големината на периферен агол, ако кружницата од неговите краци издвојува отсечки складни на радиусот.

10. Одреди ја големината на периферен агол, ако кружницата од неговите краци отсекува отсечки долги соодветно на радиусот и дијаметарот на кружницата.

11. Во кружница k повлечени се радиус OM и тетива $AB \parallel OM$. Докажи дека $M\widehat{B}A - M\widehat{A}B = 90°$.

12. Околу косоаголен триаголник ABC е опишана кружница k и повлечени се тетивите $AM \parallel BC$ и $CP \parallel AB$ $(M \in k,\ P \in k)$. Докажи: $\widehat{MB} \cong \widehat{PB}$.

§ 8. ТАЛЕСОВА ТЕОРЕМА. ПРИМЕНА

Да конструираме кружница со дијаметар AB (црт. 38). Дијаметарот AB ја разделува кружницата на две полукружници. На една од полукружниците да земеме неколку произволни точки $M, N, P, \ldots$ различни од A и B. За периферните агли, чии краци минуваат низ крајните точки на дијаметарот AB често велиме дека се „над дијаметарот" на кружницата.

Талесова теорема: *Секој периферен агол во полукружницата (над дијаметарот) е прав.*

Ова теорема е директна последица на докажаната теорема во § 7. Периферните агли $\measuredangle M, \measuredangle N, \measuredangle P, \ldots$ (црт. 38) се прави, бидејќи големината на секој од нив е еднаква на половината од аголната големина на полукружницата, т.е. од $180°$.

Последица: *Сите точки од кружницата со дијаметар AB (освен точките A и B) се темиња на правоаголни триаголници со хипотенуза AB.*

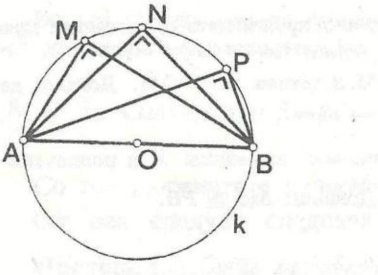
Талесовата теорема има широка примена. На неа се заснова и решавањето на следнава важна конструктивна задача:

Задача: Од дадена точка P, што лежи надвор од кружницата k да се конструира тангента на неа.

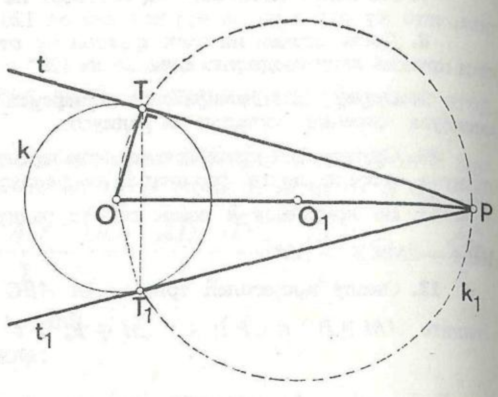
Решение. Анализа: Нека е дадена кружница $k(O, r)$ и точка P надвор од неа (црт. 39). Бараната тангента нека е правата PT со допирна точка T. Во тој случај аголот OTP е прав. Затоа точката T мора да лежи и на кружницата k_1 чиј дијаметар е отсечката OP. Според тоа, бараната точка T е елемент од пресекот $k \cap k_1$.

Конструкција: Точката P ја сврзуваме со центарот на кружницата k и ја одредуваме средината на отсечката OP. Ја конструираме кружницата $k_1(O_1, \overline{OO_1})$ над дијаметарот OP. Го одредуваме пресекот $Q = k \cap k_1$, а потоа низ секоја точка од пресекот Q и точката P повлекуваме права.

Доказ: Бидејќи точките O и P од кружницата k_1 се една внатрешна и една надворешна за кружницата k, тоа k_1 и k ќе имаат две заеднички точки T и T_1, т.е. $Q=k \cap k_1=\{T, T_1\}$. Аглите OTP и OT_1P врз основа на Талесовата теорема се прави. Тоа значи дека правите PT и PT_1 се нормални на радиусите OT и OT_1 на дадената кружница, па според тоа тие се бараните тангенти.



Црт. 38



Црт. 39

Дискусија: Бидејќи две кружници се сечат само во две точки, тоа од точка што лежи надвор од дадена кружница можат да се повлечат само две тангенти на неа.

Дефиниција: *Отсечката на тангентата на кружницата, меѓу која и да е нејзина точка и допирната точка, се вика тангентна отсечка.*

Теорема. *Тангентните отсечки од тангентите, што се конструирани од една точка од кружницата, се складни.*

Доказ: Нека точката P е надворешна за кружницата $k\ (O, r)$ и низ неа да се повлчени две тангенти t и t_1 со допирни точки T и T_1.

Да ги разгледаме триаголниците OTP и OT_1P (црт. 39). Тие се правоаголни, имаат заедничка хипотенуза OP и складни катети OT и OT_1. Според тоа: $\triangle OTP \cong \triangle OT_1P$. Оттука следува дека $PT \cong PT_1$, штд.

Од складноста на триаголниците OTP и OT_1P заклучуваме уште и дека: правата OP е бисектриса на аголот TPT_1 што го образуваат тангентите повлечени од точката P. Правата OP е бисектриса и на аголот TOT_1 што го образуваат допирните радиуси; а исто така таа е и симетрала на тетивата TT_1, чии крајни точки се допирните точки на тангентите на кружницата, што се повлечени од точката P.

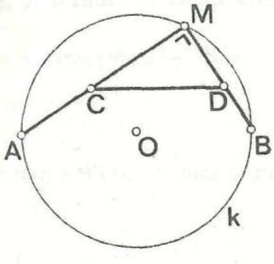
ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1. Дадена е права p и две точки $A \notin p$ и $B \notin p$. На правата p да се одреди точка M, таква што аголот AMB да е прав.

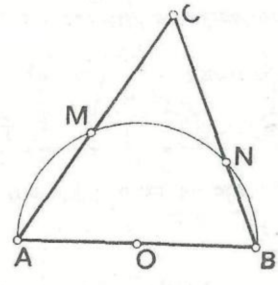
2. Од точката M на кружницата $k\ (O, r)$ се повлечени две заемно нормални тетиви MA и MB (црт. 40). Растојанието меѓу средините на тие тетиви еднакво е на $\overline{CD}=2{,}5$ cm. Одреди го дијаметарот на кружницата k!

3. *Докажи дека: ако една медијана на триаголникот е двапати помала од должината на страната кон која е повлечена, тогаш триаголникот е правоаголен*

4. *Даден е триаголник ABC. Полукружницата, што е конструирана над неговата страна AB ги сече другите две страни во точките M и N (црт. 41). Со помош само на линир конструирај го ортоцентарот на триаголникот ABC.*



Црт. 40



Црт. 41

5. Точката C лежи на кругот со дијаметар AB (црт. 42). Со помош само на линир низ точката C конструирај нормала кон дијаметарот AB.

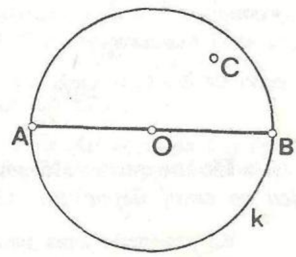
6. Докажи дека: кружницата, чиј дијаметар е една од страните на триаголникот ABC, минува низ подножијата на висините кон другите две страни на $\triangle ABC$

7. Растојанието меѓу две точки A и B е 7 cm. Низ точката A повлечи права p, која да е на растојание 3 cm од точката B!

8. Докажи дека бисектрисите на сите периферни агли над ист кружен лак AB се сечат во средината на тој лак.

9. Од точка M надвор од кружницата k повлечени се тангенти t и t_1 на кружницата, чии допирни точки се T и T_1. Аголот меѓу тангентите t и t_1 изнесува 45°. Одреди ја аголната големина на кружниот лак $\widehat{TT_1}$.

10. Над страната AB на рамностраниот триаголник ABC конструирана е полукружница, која ги сече другите две страни на $\triangle ABC$ во точките M и N. Одреди ја аголната големина на лаците $\widehat{AM}$, $\widehat{MN}$ и $\widehat{NB}$.



Црт. 42

11. Конструирај правоаголен триаголник, ако се дадени: а) хипотенузата и висината кон неа, б) отсечките, на кои е разделена хипотенузата од висината што е спуштена кон неа.

12. Да се докаже: Ако една тетива и дијаметарот на кружницата зафаќаат агол 30°; тогаш отсечката, што ги соединува нивните незаеднички крајни точки, е складна на радиусот на кружницата.

§ 9. АГОЛ МЕЃУ ТАНГЕНТА И ТЕТИВА

На цртеж 43 во точката T од кружницата k повлечена е тангента MN и тетива TP на кружницата k. Полуправата TP, што ја содржи тетивата TP, со тангентата MN образува два агла $\widehat{MTP} = \alpha$ и $\widehat{NTP} = \beta$, со теме во допирната точка T на тангентата и кружницата. Секој од тие два агла се вика *агол меѓу тангента и тетива* на кружницата.

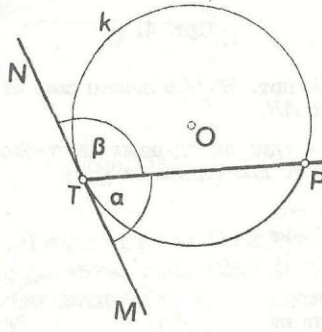
За кружниот лак $\widehat{TP}$, што лежи во областа на аголот MTP, велиме дека *му одговара* (*му соодветствува*) на тој агол.

Теорема 1. *Големината на аголот меѓу тангента и тетива еднаква е на половината од аголната големина на кружниот лак што му одговара.*

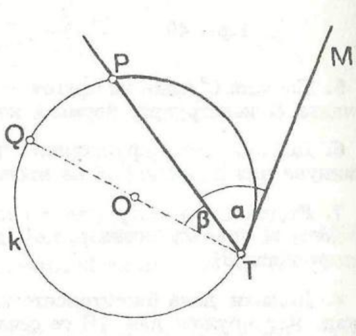
Доказ: Теоремата ќе ја докажеме само за остриот агол меѓу тангента и тетива.

Го повлекуваме дијаметарот $TQ \perp TM$ на допирната точка T. Притоа го добиваме периферниот агол $\beta = \frac{\widehat{QP}}{2}$ (црт. 44). Во тој случај имаме: $\alpha = 90° - \beta$, односно $\alpha = \frac{\widehat{TPQ}}{2} - \frac{\widehat{QP}}{2} = \frac{\widehat{TPQ} - \widehat{QP}}{2} = \frac{\widehat{TP}}{2}$, т.е. $\alpha = \frac{\widehat{TP}}{2}$, штд.

Докажите ја сами теоремата и за случаите кога аголот $\sphericalangle MTP$ е тап и кога е прав.



Црт. 43



Црт. 44

Последица: *Аголот α меѓу тангента и тетива на кружницата е складен со секој периферен агол над истиот кружен лак, што му одговара на α.*

Ќе наведеме една важна примена на теоремата 1.

Нека AB е некоја отсечка, што лежи на правата p, а M — произволна точка што не ѝ припаѓа на p ($M \notin p$) (црт. 45). Аголот α, при врвот M на триаголникот ABM, се вика *агол под кој отсечката AB се гледа од точката M.*

Задача: Дадени се отсечка AB и агол $\widehat{BAC} = \alpha$ (црт. 46). Да се одреди (конструира) множеството точки Φ од кои отсечката AB се гледа под дадениот агол α.

Решение: Ја конструираме симетралата s на отсечката AB, а низ точката A повлекуваме нормала AD кон кракот AC на аголот α. Симетралата s и нормалата AD нека се сечат во точката O (црт. 46).

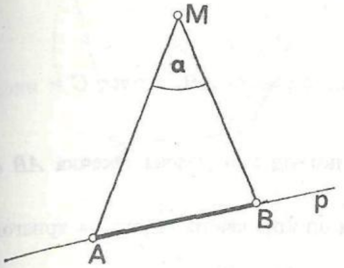
Ја конструираме кружницата $k(O, \overline{OA})$. Таа ќе минува низ крајните точки на отсечката AB, а правата AC е нејзина тангента во точката A (Зошто?).

Да го разгледаме кружниот лак $\widehat{AmB}$. Ако M е произволна точка од лакот $\widehat{AmB}$ ($M \neq A$, $M \neq B$), тогаш од неа отсечката AB ќе се гледа под агол AMB. Гледаме: аголот AMB во кружницата k е периферен агол над кружниот лак $\widehat{AnB}$, а дадениот агол α е агол меѓу тангента и тетива во кружницата k на кој му одговара истиот кружен лак $\widehat{AnB}$. Затоа врз основа последицата на теорема 1, ќе биеде: $\widehat{AMB} = \alpha$.

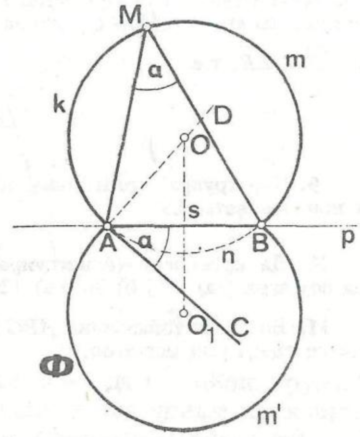
Според тоа, од секоја точка M од кружниот лак $\widehat{AmB}$ (без крајните точки A и B). отсечката AB се гледа под агол, што е еднаков на дадениот агол α.

Освен тоа, под истиот агол α отсечката AB ќе се гледа и од точките на кружниот лак $\widehat{Am'B}$, што е симетричен на $\widehat{AmB}$ во однос на правата p (црт. 46).

Може да се докаже дека: од секоја друга точка во рамнината, што не лежи на еден од кружените лаци $\widehat{AmB}$ и $\widehat{Am'B}$, отсечката AB не може да се види под истиот агол α.



Црт. 45



Црт. 46

Теорема 2. *Множеството точки Ф од кои дадена отсечка AB се гледа под даден агол* α, *се состои од два кружни лака* ($\widehat{AmB} \cup \widehat{Am'B}$) *од кружници што се симетрично расположени во однос на правата на која лежи отсечката AB* (без крајните точки на отсечката).

Јасно е дека: ако дадениот агол α е прав, тогаш центарот O на кружницата k ќе се, совпадне со средината на отсечката AB, а притоа кружните лаци $\widehat{AmB}$ и $\widehat{Am'B}$ ќе образуваат една кружница со дијаметар AB. Според тоа, ќе важи следнава:

Последица: *Множеството точки Ф, од кои дадена отсечка AB се гледа под прав агол, е кружница, чиј дијаметар е дадената отсечка AB (без крајните точки на отсечката).*

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1. Тангентите на кружницата k во точките $A \in k$ и $B \in k$ се сечат во точката M и образуваат прав агол. Одреди ги аглите MAB и MBA.

2. Дадени се права p и отсечка AB ($A \notin p$ и $B \notin p$). Одреди точка $M \in p$ од која отсечката AB се гледа под агол: а) 60°, б) 90°, в) 30°.

3. Точките A, B и C лежат на кружница k со центар O, така што AB е дијаметар. Тангентата на кружницата во точката C ги сече тангентите на кружницата во точките A и B соодветно во точките P и Q. Докажи дека: а) $\overline{PQ} = \overline{AP} + \overline{BQ}$ б) $\widehat{POQ} = 90°$.

4. Тетивата AB ја расечува кружницата на два кружни лака, чии аголни големини се однесуваат како: а) 5:4, б) 2:7. Под каков агол се гледа тетивата AB од точките на секој од тие два лака?

5. Околу равнокрак триаголник ABC опишана е кружница и низ врвот C на триаголникот повлечена е тангента t на кружницата. Докажи дека: $t \parallel AB$.

6. Од произволна точка M, што лежи на даден кружен лак $\widehat{AB}$ ($M \not\equiv A$, $M \not\equiv B$), тетивата AB се гледа под агол 75°. Одреди ја аголната големина на дадениот кружен лак $\widehat{AB}$.

7. Тетивите AP и BM на кружницата k се сечат во точката S (црт. 47). Докажи дека големината на аголот ASB е еднаква на полузбирот од аголните големини на кружните лаци $\widehat{AB}$ и $\widehat{PM}$, т.е. $\widehat{ASB} = \dfrac{\widehat{AB} + \widehat{PM}}{2}$.

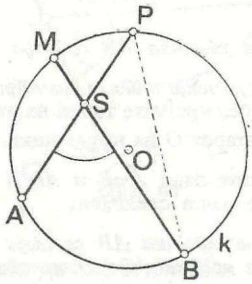
8. Од точката M што лежи надвор од кружницата k повлечени се две секанти кои ја сечат кружницата соодветно во точките A, P и B, E, (црт. 48). Докажи дека: големината на аголот AMB е еднаква на полуразликата од аголните големини на кружните лаци $\widehat{AB}$ и $\widehat{EP}$, т.е.

$$\widehat{AMB} = \frac{\widehat{AB} - \widehat{EP}}{2}$$

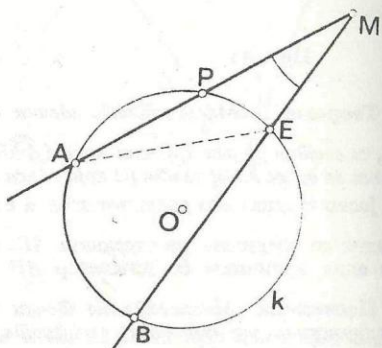
9. Конструирај триаголник ABC, ако се дадени: страната AB, аголот C и висината кон основата AB.

10. Да се одреди (конструира) множеството точки од кои дадена отсечка AB се гледа под агол:, а) 60°, б) 90°, в) 120°.

11. Во даден триаголник ABC да се одреди точка од која секоја страна на триаголникот се гледа под ист агол.



Црт. 47



Црт. 48

12. Докажи дека: големината на аголот, што го образуваат две тангенти повлечени кон кружницата од една точка, е еднаков на полуразликата од аголните големини на зафатените од нив кружни лаци.

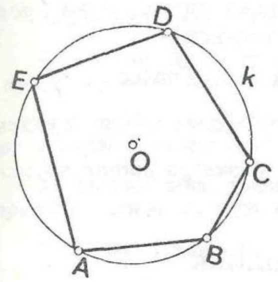
§ 10. ТЕТИВЕН И ТАНГЕНТЕН ЧЕТИРИАГОЛНИК

Дефиниција 1. *Многуаголник, на кој сите темиња лежат на една кружница, односно сите негови страни се тетиви на кружницата, се вика тетивен многуаголник* (црт. 49).

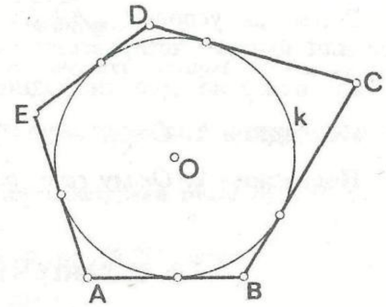
За многуаголникот $ABCDE$ на цртежот 49 велиме уште дека *е вписан* во кружницата k, а за кружницата k дека *е опишана* околу многуаголникот $ABCDE$.

Дефиниција 2. *Многуаголник, на кој сите страни се допираат до една кружница, се вика тангентен многуаголник* (црт. 50).

За многуаголникот $ABCDE$ на цртежот 50 велиме уште дека *е ойишан* околу кружницата k, а за кружницата k дека *е вйишана* во многуаголникот $ABCDE$.



Црт. 49



Црт. 50

Знаете дека: 1°. Околу секој триаголник може да се опише кружница и тоа само една; и 2°. Во секој триаголник може да се впише кружница и тоа само една. Според тоа, секој триаголник е и тетивен и тангентен.

Меѓутоа, не секој четириаголник е тетивен, и не секој четириаголник е тангентен.

Во овој параграф ќе се запознаеме со својствата на тетивниот и тангентниот четириаголник, како и со доволните услови (признаците) за да е еден четириаголник тетивен, односно тангентен.

10. 1. ТЕТИВЕН ЧЕТИРИАГОЛНИК

Теорема 1-а. *Во секој шешивен чешириаіолник сйрошивнише аіли се суйлеменшни.*

Доказ: Нека четириаголникот $ABCD$ е впишан во кружницата k т.е. нека $A \in k$, $B \in k$, $C \in k$ и $D \in k$ (црт. 51).

Ќе докажеме дека: $\alpha+\gamma=180°$ и $\beta+\delta=180°$.

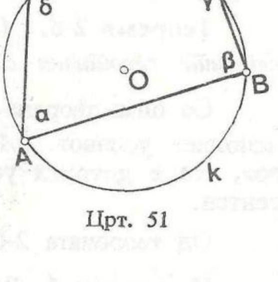
Гледаме: внатрешните агли α, β, γ и δ на четириаголникот $ABCD$ се периферни агли во кружницата k.

Тогаш за аглите α и γ ќе важи: $\alpha = \dfrac{\widehat{BCD}}{2}$, $\gamma = \dfrac{\widehat{DAB}}{2}$

односно:

$$\alpha + \gamma = \frac{\widehat{BCD}}{2} + \frac{\widehat{DAB}}{2} = \frac{\widehat{BCD} + \widehat{DAB}}{2} = \frac{\widehat{BCDAB}}{2} =$$

$$= \frac{360°}{2} = 180°, \text{ т.е. } \alpha + \gamma = 180°.$$



Црт. 51

На ист начин може да се докаже дека е и $\beta+\delta=180°$.

Со тоа теоремата е докажана.

Може да се докаже дека важи и обратната теорема:

Теорема 1-б. *Ако во чешириаіолникош два сйрошивни аіли се суйлеменшни, шоіаш шој чешириаіолник е шешивен.*

Од теоремата 1-б заклучуваме дека: ако за четириаголникот $ABCD$ е исполнет условот „$\widehat{A}+\widehat{C}=180°$" (тогаш ќе биде и $\widehat{B}+\widehat{D}=180°$, зошто?), тогаш тој е тетивен четириаголник.

Затоа, за условот „$\widehat{A}+\widehat{C}=180°$" велиме дека претставува *доволен услов* или *признак* четириаголникот $ABCD$ да е тетивен.

Ќе наведеме две последици на теоремата 1-б. Тоа се:

Последица 1. *Околу секој правоаголник може да се опише кружница.*

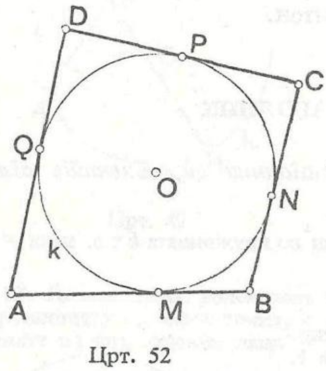
Последица 2. *Околу секој рамнокрак трапез може да опише кружница.*

10. 2. ТАНГЕНТЕН ЧЕТИРИАГОЛНИК

Теорема 2. *Во секој тангентен четириаголник збирот од должините на две спротивни страни е еднаков на збирот од должините на другите две страни.*

Доказ: Нека четириаголникот $ABCD$ е опишан околу кружницата k и нека неговите страни ја допираат кружницата во точките M, N, P и Q (црт. 52). Ќе докажеме дека: $\overline{AB}+\overline{CD}=\overline{AD}+\overline{BC}$.

Врз основа теоремата во **§ 8** за тангентните отсечки: AM и AQ, CP и CN, BM и BN, DP и DQ, важи:



Црт. 52

$$\overline{AM}=\overline{AQ},$$
$$\overline{BM}=\overline{BN},$$
$$\overline{CP}=\overline{CN},$$
$$\overline{DP}=\overline{DQ}.$$

Ако ги собереме соодветните страни на горниве равенства, добиваме: $(\overline{AM}+\overline{BM})+(\overline{CP}+\overline{DP})=(\overline{AQ}+\overline{DQ})+(\overline{BN}+\overline{CN})$, односно:

$$\overline{AB}+\overline{CD}=\overline{AD}+\overline{BC}$$

Со тоа теоремата е докажана.

Може да се докаже дека важи и обратната теорема:

Теорема 2-б. *Ако во четириаголникот збировите од должините на неговите спротивни страни се еднакви, тогаш тој е тангентен.*

Со оваа теорема се утврдува дека: ако за четириаголникот $ABCD$ е исполнет условот „$\overline{AB}+\overline{CD}=\overline{AD}+\overline{BC}$", тогаш тој е тангентен. Според тоа, тоа е доволен услов или признак четириаголникот $ABCD$ да е тангентен.

Од теоремата 2-б следуваат следниве последици:

Последица 1. *Во секој ромб може да се впише кружница.*

Последица 2. *Во секој делтоид може да се впише кружница.*

Значи, ромбот и делтоидот се тангентни четириаголници.

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1. Околу кој паралелограм може да се опише кружница?

2. Во кој паралелограм може да се впише кружница?

3. Докажи дека секој тетивен трапез е равнокрак!

4. Докажи дека: равнокракиот трапез е тангентен четириаголник, ако и само ако кракот му е складен со неговата средина линија.

5. Докажи дека: бисектрисите на внатрешните агли на секој четириаголник образуваат тетивен четириаголник!

6. Докажи дека: точките A и B и нивните симетрични точки A_1 и B_1 во однос на правата s лежат на една кружница.

7. Докажи дека: во тетивниот четириаголник $ABCD$ важи:

$$\sphericalangle ABD \cong \sphericalangle ACD$$

8. Докажи дека: должината на средната линија на тангентниот трапез е еднаква на $\frac{1}{4}$ од неговиот периметар.

9. Околу кој ромб може да се опише кружница?

10. Во кој правоаголник може да се впише кружница?

11. Во тетивниот четириаголник познати се аглите: $\widehat{A}=127°$ и $\widehat{B}=72°$. Одреди ја големината на другите два агла!

12. На тангентниот четириаголник познати се должините на три негови страни: $\overline{AB}=7$ cm, $\overline{BC}=12$ cm и $\overline{AD}=5$ cm. Одреди ја должината на четвртата страна CD!

ПРАВИЛНИ МНОГУАГОЛНИЦИ

§ 11. ОПШТО ЗА МНОГУАГОЛНИКОТ (повторување)

Од геометријата за V одделение знаете што се тоа: искршена линија и многуаголна или полигонална линија. За многуаголникот тогаш ја усвоивме следнава:

Дефиниција 1. *Многуаголнаша (полигонална) линија и со неа ограничениот дел од рамнинаша, на која шаа ѝ припаѓа, се вика многуаголник или полигон.*

Многуаголната линија за многуаголникот се вика негова *граница* или *коншура*, а со неа ограничениот дел од рамнината се вика *внашрешна облас* на многуаголникот.

Отсечките од кои се состои многуаголната линија, се викаат *сшрани* на многуаголникот, а заедничките краеви на страните — *шемиња* на многуаголникот.

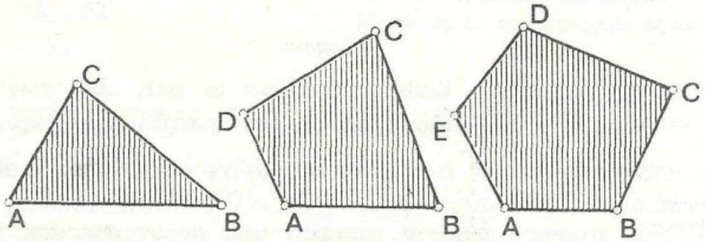
Две темиња кои ѝ припаѓаат на иста страна се викаат *соседни шемиња*, а две страни со заеднички крај (теме), се викаат *соседни сшрани* на многуаголникот.

Отсечката, што сврзува кои било две несоседни темиња на многуаголникот, се вика *дијагонала* на многуаголникот.

Многуаголникот симболички го означуваме со именување на сите негови темиња: *ABC*, *ABCD*, *ABCDE*, итн. (црт. 53).

Во секој многуаголник бројот на темињата е еднаков на бројот на страните.

Многуаголниците ги делиме на видови според бројот на страните. Многуаголник со три страни се вика *шриаголник*, многуаголник со четири страни — *чешириаголник*, многуаголник со пет страни — *пешаголник*, итн. (црт. 53), или воопшто:



Црт. 53

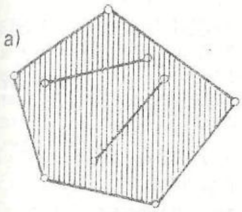
Многуаголник со *n* страни се вика уште и *n-аголник*.

Многуаголникот може да биде *конвексен* или *конкавен*.

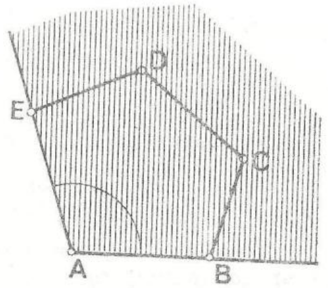
Даден многуаголник е конвексен, ако на неговата внатрешна област ѝ припаѓа секоја отсечка, чии крајни точки се од таа област (црт. 54). Но, секој многуаголник кој не го задоволува тој услов се вика неконвексен или конкавен.

Ние ќе ги разгледуваме само конвексните многуаголници и под зборот многуаголник ќе подразбираме конвексен многуаголник.

Аголот, чии краци се насочени по две соседни страни на многуаголникот и на кој му припаѓа целиот (конвексен) многуаголник, се вика *внатрешен агол* на многуаголникот (црт. 55), или кратко само *агол* на многуаголникот.



Црт. 54



Црт. 55

Секој n-аголник има n страни и n (внатрешни) агли. Тоа се негови *основни елементи*.

Заради краткост: „страни" на многуаголникот ќе ги викаме и нивните должини. Од иста причина: „агли" на многуаголникот ќе ги викаме и големините на тие агли.

Секој агол на конвексниот многуаголник е конвексен, а барем еден агол на конкавниот многуаголник е неконвексен.

Аглите, што се напоредни на внатрешните агли на многуаголникот, се викаат негови *надворешни агли*.

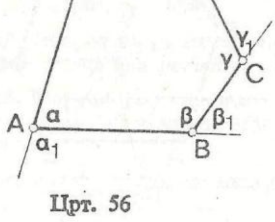
На цртежот 56 внатрешните агли на петаголникот $ABCDE$ се означени со α, β, γ, δ и θ, а надворешните агли со α_1, β_1, γ_1 δ_1, и θ_1.

Два агла, чии темиња се во крајните точки на иста страна, се викаат *прилегнати агли* на таа страна. На пример, прилегнати агли на страната AB се α и β, а на страната BC се β и γ, итн. (црт. 56).

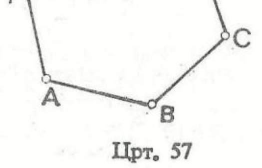
Ако многуаголникот има непарен број страни, тогаш на секоја негова страна ѝ одговара по едно теме, кое ги дели преостанатите страни на еднаков број. За тоа теме и внатрешниот агол при него велиме дека лежат *спроти* односната страна, и обратно. На пример, во петаголникот на цртежот 56 спроти страната BC лежи темето E и аголот θ, и обратно. Според тоа:

Во многуаголникот со непарен број страни: спроти секоја страна лежи теме, а спроти секое теме — страна.

Ако многуаголникот има парен број страни, тогаш на секоја страна ѝ одговара по една страна, така што меѓу тие две страни се наоѓаат по еднаков број од преостанатите страни; а исто и на секое теме му одговара по едно теме, така што тие две темиња ги разделуваат страните на многуаголникот на по еднаков број. За така определената двојка страни, односно двојка темиња на многуаголникот велиме дека лежат една *спроти* друга. На пример, во шестаголникот на цртежот 57 спроти страната BC лежи страната EF, а спроти темето B лежи темето E. Според тоа:



Црт. 56



Црт. 57

Во многуаголникот со парен број страни: спроти секоја страна лежи пак страна, а спроти секое теме — пак теме.

Дефиниција 2. *Многуаголникот, на кој сите страни се складни и сите агли се складни, се вика правилен многуаголник.*

На пример, од триаголниците е правилен само равностраниот триаголник, а од четириаголниците е правилен само квадратот.

§ 12. ДИЈАГОНАЛИ И АГЛИ НА МНОГУАГОЛНИКОТ

За бројот на дијагоналите и збирот на аглите на многуаголникот важат следниве теореми:

Теорема 1. *Бројот на сите дијагонали во n-аголникот е* $\frac{(n-3)\,n}{2}$.

Доказ: Многуаголникот нека има n темиња. Од секое теме на многуаголникот, на пример од темето B, можат да се повлечат дијагонали кон секое теме, освен кон самото себе (B) и кон двете негови соседни темиња (A и C) (црт. 58). Според тоа:

Од секое теме на n-аголникот можат да се повлечат n-3 дијагонали.

На прв поглед изгледа дека од сите n темиња ќе можат да се повлечат n пати по n-3 дијагонали, т.е. вкупно $(n$-$3)n$ дијагонали. Но, бидејќи, на пример дијагоналата BE се совпаѓа со дијагоналата EB, тоа во производот $(n$-$3)n$ секоја дијагонала двапати е броена. Затоа виситинскиот број на сите дијагонали во n-аголникот ќе биде: $\frac{(n-3)\cdot n}{2}$, штд.

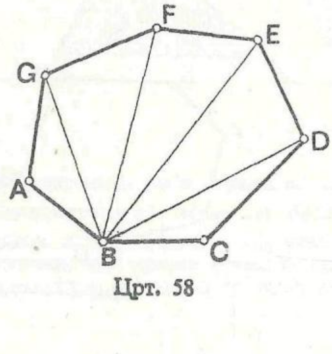
Пример: Седумаголникот има $\frac{(7-3)\cdot 7}{2} = 14$ дијагонали, десетаголникот има $\frac{(10-3)\cdot 10}{2} = 35$ дијагонали, итн.

Теорема 2. *Збирот на внатрешните агли на n-аголникот еднаков е на* $(n-2)\cdot 180°$.

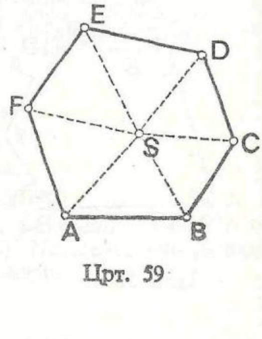
Доказ: Ако ги повлечеме сите дијагонали од едно теме на n-аголникот, тој се разбива на n-2 триаголника (Зошто?) (црт. 58).

Познато е, дека збирот на внатрешните агли на кој и да е триаголник изнесува 180°. Бидејќи внатрешните агли на добиените триаголници, со повлекување на дијагоналите од едно теме точно ги поклопуваат внатрешните агли на n-аголникот, затоа збирот на сите внатрешни агли на тие триаголници ќе биде еднаков на збирот на внатрешните агли на n-аголникот. Според тоа, збирот на внатрешните агли на n-аголникот ќе изнесува $(n$-$2)\cdot 180°$, штд.

Разгледајте го цртежот 59. Со негова помош како на друг начин може да се докаже теоремата 2.



Црт. 58



Црт. 59

Пример: Збирот на внатрешните агли на петаголникот еднаков е на $(5-2) \cdot 180° = 3 \cdot 180° = 540°$, а на шестаголникот тој ќе биде $(6-2) \cdot 180° = 4 \cdot 180° = 720°$

Последица: *Секој внатрешен агол на правилниот n-аголник има*

$$\frac{(n-2) \cdot 180°}{n}.$$

Теорема 3. *Збирот на надворешните агли на секој многуаголник изнесува* 360°.

Доказ: Бидејќи секој надворешен агол на многуаголникот е напореден со соодветниот внатрешен агол при истото теме, а напоредните агли се суплементни, т.е. нивниот збир е еднаков на 180°; тоа збирот на сите внатрешни и сите надворешни агли на n-аголникот ќе биде еднаков на $180° \cdot n$. Но, бидејќи збирот на внатрешните агли (согласно теорема 2) е еднаков на $(n-2) \cdot 180°$; тоа збирот само на надворешните агли на n-аголникот ќе биде еднаков на разликата: $180° \cdot n - (n-2) \cdot 180° = 180° \cdot n - 180° \cdot n + 360° = 360°$.

Со тоа теоремата е докажана.

Забележуваме дека: збирот на надворешните агли на многуаголникот не зависи од бројот на страните.

Последица: *Секој надворешен агол на правилниот n-аголник има* $\frac{360°}{n}$.

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1. Кои многуаголници ги викаме конвексни, а кои конкавни? Нацртај еден конвексен и еден конкавен шестаголник!

2. Може ли триаголникот да биде конкавен? Зошто?

3. Колкав најмал број на страни може да има многуаголникот?

4. Колку дијагонали можат да се повлечат од едно теме кај: а) четириаголникот, б) петаголникот, в) педесетаголникот?

5. Колку вкупно дијагонали можат да се повлечат кај многуаголникот, што има: а) 5, б) 7, в) 12, г) 20, д) 50 страни?

6. Познато е, дека од едно теме во еден многуаголник можат да се повлечат: а) 4, б) 7, в) 15, г) 25 дијагонали. Кој е тој многуаголник и одреди колку вкупно дијагонали има!

7. Кај кој многуаголник бројот на страните е 2 пати: а) поголем, б) помал од бројот на неговите дијагонали?

8. На колку триаголници се разделува многуаголникот, што има: а) 4, б) 5, в) 7, г) 15 страни, ако се повлечат сите дијагонали од едно негово теме?

9. Каков е многуаголникот, ако тој се разделува од дијагоналите, што се повлечени од едно теме, на: а) 3, б) 5, в) 17, г) 40 триаголници?

10. Одреди го збирот на внатрешните агли кај: а) петаголникот, б) шестаголникот, в) осумаголникот, г) дваесетаголникот!

11. Кој многуаголник има збир на внатрешните агли еднаков на: а) 540°, б) 720°, в) 900°, г) 1440°, д) 1800°?

12. Збирот на шесте внатрешни агли во еден седумаголник изнесува 784°. Колкав е седмиот негов внатрешен агол?

13. Одреди ја големината на еден внатрешен агол на правилниот: а) петаголник, б) шестаголник, в) осумаголник, г) деветаголник, д) десетаголник, ѓ) дванаесетаголник, е) 18-аголник.

14. Кај кој правилен многуаголник внатрешниот агол има: а) 135°, б) 150°, в) 156°, г) 162°?

15. Одреди ја големината на еден надворешен агол на правилниот: а) петаголник, б) шестаголник, в) деветаголник, г) 10-аголник.

16. Кај кој правилен многуаголник внатрешниот и надворешниот негов агол имаат еднаква големина?

§ 13. ПРАВИЛНИ МНОГУАГОЛНИЦИ

За правилните многуаголници важат следниве теореми:

Теорема 1. *Ако кружницата ја разделиме на n ($n > 2$) складни делови и разделните точки последователно ги соединиме со тетиви ќе добиеме правилен многуаголник вписан во кружницата.*

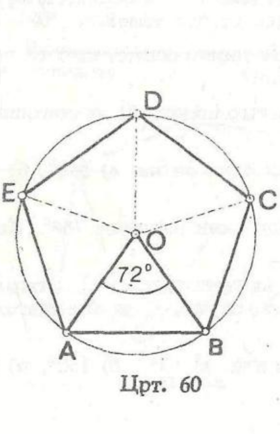
Доказ: Кружницата со точките A, B, C, D и E нека е разделена на 5 складни делови (лаци). Тоа може да се постигне со последователно цртање на 5 централни агли со големина $\frac{360°}{5} = 72°$ (црт. 60). Ако разделните точки последователно ги соединиме со тетиви, ќе го добиеме впишаниот петаголник $ABCDE$. Тој е правилен, бидејќи: а) страните му се складни како тетиви што им одговараат на складни лаци во иста кружница, и б) сите агли му се складни, како периферни агли над складни лаци во иста кружница. Навистина, со ротација околу центарот O за агол $\alpha = \frac{360°}{5} = 72°$ петаголникот $ABCDE$ се пресликува самиот на себе.

До истиот заклучок ќе дојдеме и ако кружницата ја разделиме на кој и да е број n ($n > 2$) складни делови. Со тоа теоремата е докажана.

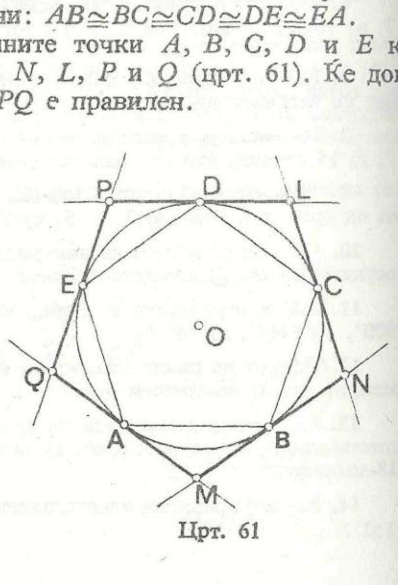
Теорема 2. *Ако кружницата ја разделиме на n ($n > 2$) складни делови и во разделните точки конструираме тангенти на кружницата, ќе добиеме правилен многуаголник опишан околу кружницата.*

Доказ: Со точките A, B, C, D и E кружницата нека е разделена на 5 складни делови, т.е. нека $\overset{\frown}{AB} \cong \overset{\frown}{BC} \cong \overset{\frown}{CD} \cong \overset{\frown}{DE} \cong \overset{\frown}{EA}$. Оттука следува дека и соодветните тетиви се складни: $AB \cong BC \cong CD \cong DE \cong EA$.

Конструираните тангенти во разделните точки A, B, C, D и E кон кружницата нека се сечат во точките M, N, L, P и Q (црт. 61). Ќе докажеме дека опишаниот петаголник $MNLPQ$ е правилен.



Црт. 60



Црт. 61

Триаголниците ABM, BCN, CDL, DEP и EAQ се рамнокраки, бидејќи имаат по две складни страни врз основа својството на тангентните отсечки. Сите тие триаголници се и складни, бидејќи имаат складни основи ($AB \cong BC \cong \ldots \cong EA$) и складни агли при основите (агли меѓу тангента и тетива што зафаќаат складни кружни лаци).

Оттука следува дека опишаниот петаголник $MNLPQ$ е правилен, бидејќи сите страни му се складни и сите агли му се складни.

До истиот заклучок ќе дојдеме и ако кружницата ја разделиме на кој и да е број n ($n > 2$) складни делови и низ разделните точки конструираме тангенти кон кружницата.

Теоремата 2 многу поедноставно може да се докаже и со ротација околу центарот на кружницата за агол $\alpha = \frac{360°}{n}$. Пробајте тоа сами да го сторите.

Ќе покажеме дека важат и обратните теореми на теоремите 1 и 2.

Теорема 1-б. *Околу секој правилен многуаголник може да се опише кружница.*

Доказ: Нека $ABC \ldots M$ е правилен многуаголник (црт. 62). Да ги конструираме бисектрисите на два соседни агла (на пример $\sphericalangle A$ и $\sphericalangle B$). Тие ќе се сечат во некоја точка O, бидејќи $\sphericalangle A$ и $\sphericalangle B$ се помали од 180°. Точката O да ја соединиме со преостанатите темиња на многуаголникот.

Триаголникот AOB е рамнокрак, бидејќи $\sphericalangle 2 \cong \sphericalangle 3$ (како половинки од складни агли). Според тоа: $OA \cong OB$.

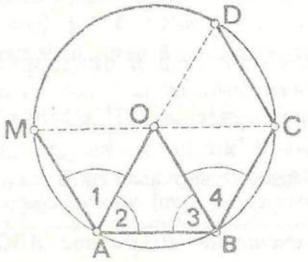
Да ги разгледаме триаголниците AOB и BOC. Забележуваме дека: а) $AB \cong BC$ (по услов), б) OB е заедничка страна, в) $\sphericalangle 3 \cong \sphericalangle 4$ (како половинки од аголот B). Следствено: $\triangle AOB \cong \triangle BOC$, оттука $OB \cong OC$.

Ако продолжиме на истиот начин, наоѓаме: $OA \cong OB \cong \ldots \cong OM$

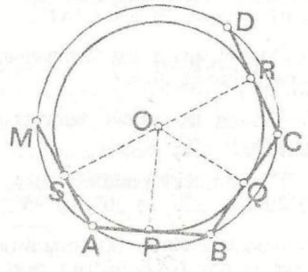
Според тоа, сите темиња на правилниот многуаголник $ABC \ldots M$ се еднакво оддалечени од точката O, која е центар на опишаната кружница.

Теорема 2-б. *Во секој правилен многуаголник може да се впише кружница.*

Доказ: Околу правилниот многуаголник $ABC \ldots M$ нека е опишана кружница со центар O (црт. 63). Бидејќи страните $AB, BC, \ldots, MA$ се складни тетиви на опишаната кружница, тоа тие се еднакво оддалечени од центарот O на кружницата. Според тоа, средините $P, Q, \ldots, S$ на тие тетиви се точки од друга кружница со центар во точката O и радиус со должина еднаква на растојанието од точката O до една страна на многуаголникот.



Црт. 62



Црт. 63

Таа кружница се допира до страните на многуаголникот во средината на секоја од нив, па според тоа, таа е впишана во правилниот многуаголник.

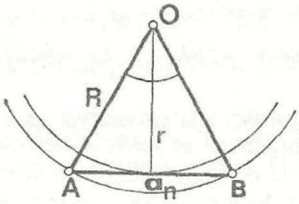
Со тоа теоремата е докажана.

Од доказот на последната теорема следува:

Последица: *Опишаната кружница околу правилниот многуаголник и впишаната кружница во истиот многуаголник имаат заеднички центар, кој се вика центар на правилниот многуаголник.*

Тој претставува и центар на ротацијата $\left(\text{за агол } \dfrac{360^\circ}{n}\right)$, која правилниот многуаголник го пресликува сам на себе.

Ако центарот O на правилниот многуаголник го соединиме со неговите темиња, како што видовме, добиваме n складни рамнокраки триаголници. Еден од тие триаголници се вика *карактеристичен триаголник* на правилниот многуаголник ($\triangle AOB$ на црт. 64).



Црт. 64

Основата на карактеристичниот триаголник е страна на правилниот многуаголник, краците му се радиуси (R) на опишаната кружница околу многуаголникот; а висината што ѝ одговара на неговата основа е радиус (r) на впишаната кружница. Таа висина се вика и *апотема* на правилниот многуаголник.

Аголот при врвот на карактеристичниот триаголник изнесува $\dfrac{360^\circ}{n}$ и се вика *централен агол* на правилниот многуаголник.

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1. Покажи дека централниот агол на кој и да е правилен многуаголник е еднаков на неговиот надворешен агол.

2. Покажи дека збирот на внатрешниот и централниот агол кај секој правилен многуаголник е еднаков на 180°.

3. Одреди ја големината на централниот агол на правилниот: а) триаголник, б) четириаголник, в) петаголник, г) шестаголник.

4. Одреди ги внатрешниот, надворешниот и централниот агол на правилен: а) седумаголник, б) осумаголник, в) деветаголник.

5. Одреди кој правилем многуаголник има: а) централен агол 45°, б) надворешен агол 30°, в) внатрешен агол 144°.

6. Во кој правилен многуаголник внатрешниот агол е: а) 8 пати, б) 9 пати поголем од централниот агол?

7. Во кој правилен многуаголник внатрешниот агол е за 108° поголем од централниот агол?

8. Постои ли правилен многуаголник во кој централниот агол да е еднаков на: а) 17°, б) 20°, в) 25°, г) 50°, д) 45°, ѓ) 100°? Ако постои, кој е тој многуаголник?

9. Покажи дека дијагоналите AC и AD на правилниот петаголник $ABCDE$ го разделуваат аголот BAE на три складни дела!

10. Нацртај кружница и повлечи еден нејзин радиус, потоа низ неговата средина повлечи тетива што е нормална на радиусот. Покажи дека таа тетива претставува страна на впишан рамностран триаголник во нацртаната кружница.

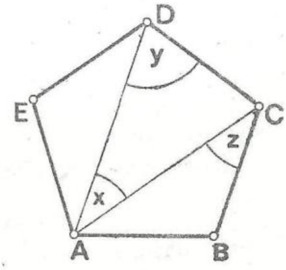
11. Докажи дека: дијагоналите на правилниот петаголник: а) се складни, б) образуваат исто така правилен петаголник!

12. Одреди го множеството од сите точки во рамнината, кои се подеднакво оддалечени од: а) темињата, б) средините на страните на правилниот многуаголник.

13. На цртежот 65 петаголникот $ABCDE$ е правилен. Одреди ја големината на означените агли x, y и z без мерење.

14. Ако страните на рамностраниот триаголник ги разделиме на по три складни делови, тогаш разделните точки се темиња на еден правилен шестаголник. Докажи!

15. Покажи дека: секој тетивен многуаголник, на кој сите страни му се складни е правилен многуаголник.



Црт. 65

§ 14. КОНСТРУКЦИЈА НА ПРАВИЛНИТЕ МНОГУАГОЛНИЦИ

Знаете дека: триаголникот е еднозначно определен ако се познати три негови независни елементи. Се поставува прашањето со колку независни елементи е еднозначно определен многуаголникот.

Ако во n-аголникот од едно теме ги повлечеме сите негови дијагонали, тие ќе го разделат на n-2 триаголника (црт. 58). Првиот од тие триаголници е еднозначно определен со 3 независни елементи, а секој од другите триаголници — со по 2 елемента, бидејќи секој од нив има по една заедничка страна со претходниот.

Според тоа, n-аголникот ќе биде еднозначно определен со $3+(n-3)\cdot 2=2n-3$ независни елементи. На пример, петаголникот е еднозначно определен со $2\cdot 5-3=7$ независни елементи.

Да видиме сега како стои прашањето со правилниот многуаголник.

Бидејќи правилниот многуаголник се разделува на n складни карактеристични триаголници, тоа тој е еднозначно определен кога е познат неговиот карактеристичен триаголник. А карактеристичниот триаголник на секој правилен многуаголник е еднозначно определен со страната на многуаголникот, бидејќи со бројот на страните на многуаголникот наполно е определен аголот при врвот $\left(\frac{360°}{n}\right)$ и аглите при основата $\left(\frac{(n-2)\cdot 180°}{2n}\right)$.

Според тоа:

Правилниот многуаголник е еднозначно определен со еден елемент, кој не е агол.

Очигледно е дека проблемот на конструкција на правилниот многуаголник се сведува на конструкција на неговиот карактеристичен триаголник AOB (црт. 64). За конструкција на триаголникот AOB треба да се знае или страната (a_n) на правилниот многуаголник, или радиусот (R) на опишаната кружница, или радиусот (r) на вписаната кружница, бидејќи аголот при врвот е $\frac{360°}{n}$, а аглите при основата $\frac{(n-2)\cdot 180°}{2n}$.

Меѓутоа, агол од $\frac{360°}{n}$ не може секогаш да се конструира (само со помош на шестар и линир), но секогаш може да се нацрта со доволна точност со помош на агломер.

Конструкцијата (односно цртањето) на правилен многуаголник кога е даден радиусот на опишаната кружница се изведува согласно теоремата

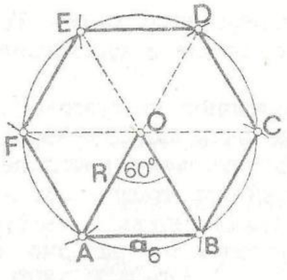
1 во § 13, а кога е даден радиусот на впишаната кружница таа се изведува согласно теоремата 2 во § 13. И во двата случаја со помош на централниот агол $\alpha = \frac{360°}{n}$ кружницата ја разделуваме на n складни делови, а потоа или разделните точки последователно ги соединуваме со тетиви (прв случај), или во разделните точки конструираме тангенти кон кружницата (втор случај).

Подолу ќе покажеме како вршиме конструкција на некои правилни многуаголници.

14. 1. КОНСТРУКЦИЈА НА ПРАВИЛЕН ШЕСТАГОЛНИК

Централниот агол на правилниот шестаголник изнесува $\alpha = \frac{360°}{n} = \frac{360°}{6} = 60°$. Според тоа, карактеристичниот триаголник е рамностран триаголник. Оттука следува:

Страната на правилниот шестаголник е складна на радиусот на опишаната кружница околу него.



Црт. 66

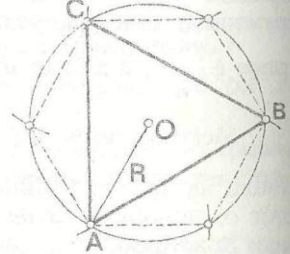
Овој резултат ни дава можност на наједноставен начин да ја разделиме дадената кружница на 6 складни делови, односно да конструираме правилен шестаголник кога е даден радиусот на опишаната кружница или неговата страна.

Од произволна точка на кружницата A со отвор на шестарот еднаков на радиусот ги конструираме точките B, C, D, E и F, а потоа последователно ги соединуваме со отсечки и го добиваме правилниот шестаголник $ABCDEF$ (црт. 66).

14. 2. КОНСТРУКЦИЈА НА ПРАВИЛЕН ТРИАГОЛНИК

Знаете како се конструира правилен (рамностран) триаголник кога е дадена неговата страна. Сега ќе покажеме како се конструира рамностран триаголник кога е даден радиусот на опишаната кружница.

Конструираме кружница со дадениот радиус R и истата ја разделуваме на 6 складни делови. Потоа секоја втора разделна точка ја соединуваме една со друга со отсечки и притоа го добиваме бараниот правилен (рамностран) триаголник ABC, што е вписан во кружницата со даден радиус R (црт. 67).



Црт. 67

На сличен начин конструираме и рамностран триаголник, што е опишан околу дадена кружница. Во овој случај во трите разделни точки (што ја разделуваат дадената кружница на три складни делови) конструираме тангенти кон кружницата.

Точноста на горниве конструкции се засновува на теоремите 1 и 2.

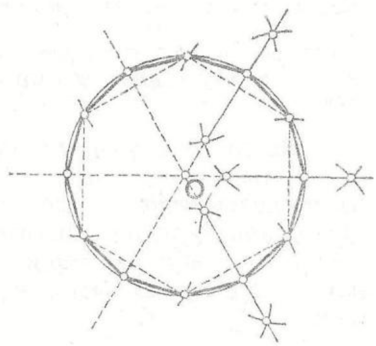
14. 3. КОНСТРУКЦИЈА НА ПРАВИЛЕН ДВАНАЕСЕТАГОЛНИК

За да конструираме правилен дванаесетаголник впишан во (или опишан околу) дадена кружница, таа треба да се раздели на 12 складни делови (кружни лаци). Тоа го правиме така што прво кружницата ја разделуваме на 6 складни делови (тоа ви е познато), а потоа со конструкција на симетралите на добиените 6 кружни лаци (или соодветните им централни агли) кружницата се разделува на 12 складни делови (црт. 68).

Ако така добиените 12 разделни точки ги соединеме како што следуваат една со друга го добиваме бараниот правилен дванаесетаголник, што е впишан во дадената кружница (црт. 68).

Ако пак во секоја од 12-те разделни точки повлечеме тангенти кон кружницата, тогаш тие тангенти ќе образуваат правилен 12-аголник, што е опишан околу дадената кружница.

Од правилниот 12-аголник на сличен начин може да се конструира и правилен 24-аголник, итн.



Црт. 68

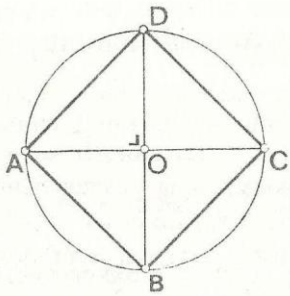
14. 4. КОНСТРУКЦИЈА НА ПРАВИЛЕН ЧЕТИРИАГОЛНИК (квадрат)

Познато ви е како се конструира квадрат кога е дадена неговата страна. Тука ќе покажеме како се констрира квадрат што е впишан во (или опишан околу) дадена кружница. За таа цел дадената кружница треба да ја разделиме на 4 складни делови. Тоа го постигнуваме ако повлечеме два заемно нормални дијаметри на кружницата. Потоа со последователно соединување на четирите разделни точки го добиваме бараниот квадрат $ABCD$, што е впишан во дадената кружница (црт. 69).

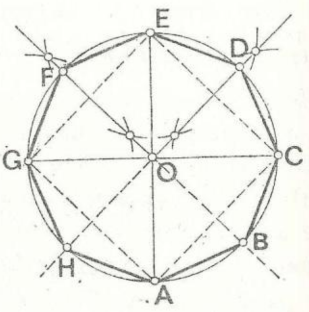
Ако пак низ секоја од 4-те разделни точки повлечеме тангенти на кружницата, тогаш тие тангенти ќе образуваат квадрат, што е опишан околу дадената кружница.

Бидејќи кружницата конструктивно можеме да ја разделиме на 4 складни делови, тоа кружницата можеме да ја разделиме и на 8, 16, 32, . . . складни делови, со последователно преполовување на секој од добиените кружни лаци.

На цртежот 70 е покажано како се конструира правилен осумаголник што е впишан во дадена кружница.



Црт. 69



Црт. 70

14. 5. ЦРТАЊЕ НА ПРАВИЛЕН ПЕТАГОЛНИК

За да конструираме правилен петаголник впишан во (или опишан околу) дадена кружница, таа треба да се раздели на 5 складни делови, па последователните разделни точки да ги соединиме со тетиви (или во нив да конструираме тангенти кон кружницата). Но, со досегашните знаења, само со помош на шестар и линир, не знаеме кружницата да ја разделиме на пет складни длови. Затоа го земаме во помош и агломерот. Тоа го правиме вака:

Во дадената кружница со центар O со помош на агломерот нацртуваме централен агол, чија големина е еднаква на централниот агол на правилен петаголник: $\alpha=\frac{360^\circ}{5}=72^\circ$.

Соодветната тетива на нацртаниот централен агол 72° ќе ни ја даде страната на бараниот правилен петаголник. Ако добиената тетива AB, почнувајќи од точката A или B ја пренесеме со помош на шестар по кружницата, ќе добиеме уште три точки C, D и E. Соединувајќи ги така добиените разделни точки A, B, C, D и E едноподруго една со друга го добиваме бараниот правилен петаголник $ABCDE$, впишан во дадената кружница (црт. 71).

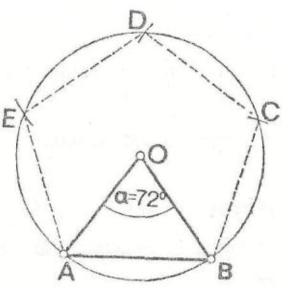
Од правилниот петаголник може да добиеме правилен десетаголник, правилен 20-аголник итн.

Врз принципот на цртањето на правилен петаголник со помош на агломер може да се нацрта и кој и да е друг правилен многуаголник.

Ќе покажеме како се конструира (без употреба на агломер) правилен патаголник и правилен десетаголник, но без доказ за точноста на тие конструкции. Тоа го правиме вака:

Во дадената кружница повлекуваме два заемно нормални дијаметри, на пример MN и DQ (црт. 72). Потоа ја конструираме симетралата на радиусот MO, и нека таа го сече радиусот MO во точката S. Точката S ја соединуваме со D и од точката S како центар опишуваме кружен лак со радиус SD. Тој кружен лак ќе го пресече дијаметарот MN во некоја точка T (црт. 72).

Така го добиваме правоаголниот триаголник OTD, во кој хипотенувата DT ни ја дава страната a_5 на впишаниот правилен петаголник во дадената кружница (црт. 72), а катетата OT — страната a_{10} на впишаниот правилен десетаголник во таа кружница (црт. 73).

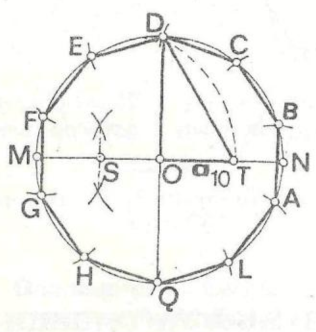


Црт. 71

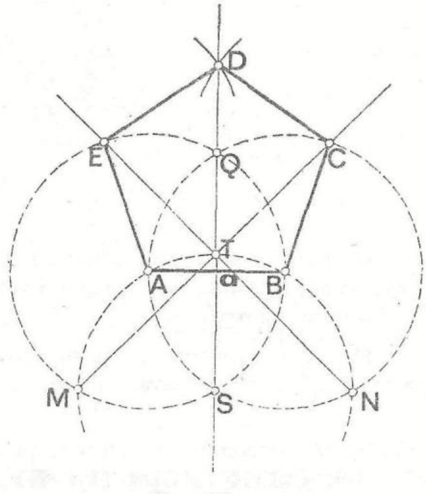
Црт. 72

На крајот да покажеме уште и како се конструира правилен петаголник со дадена страна a. Тоа се прави вака:

Од крајните точки A и B на дадената страна $a = \overline{AB}$ како центри опишуваме кружници со радиус $r = a$, а потоа од пресечната точка S на тие две кружници опишуваме трета кружница со радиус $r = a$, која ќе ја пресече правата SQ во некоја точка T, а првите две кружници — во точките M и N (црт. 74).



Црт. 73



Црт. 74

Ги повлекуваме правите MT и NT. Тие ќе ги пресечат првите две кружници соодветно во точките C и E. Така добиените точки C и E се трето и петто теме на бараниот правилен петаголник, а четвртото теме D го добиваме како пресек на конструираните кружни лаци од точките C и E со радиус $r = a$. (црт. 74).

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1. Во кружница со радиус $r = 4$ cm впиши правилен: а) шестаголник, б) триаголник, в) 12-аголник!

2. Констрирај правилен шестаголник со страна $a = 2{,}5$ cm.

3. Конструрај правилен шестаголник, кога е даден радиусот r на впишаната во него кружница?

4. Конструирај правилен четириаголник (квадрат), кога е познат радиусот на: а) опишаната околу него, б) впишаната во него кружница.

5. Во кружница со радиус r впиши правилен: а) осумаголник, б) шестнаесетаголник.

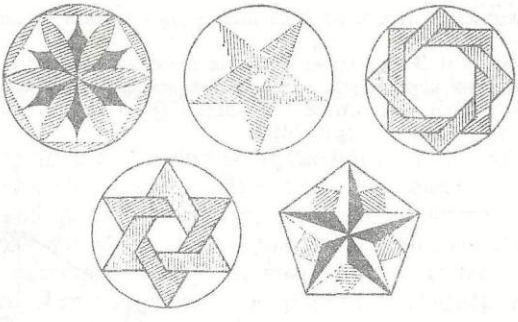
6. Нацртај правилен осумаголник со страна долга $a=2$ cm.

7. Нацртај правилен петаголник, кога е даден радиусот на: а) опишаната околу него, б) впишаната во него кружница.

8. Нацртај правилен: а) петаголник, б) деветаголник кога е дадена неговата страна a.

9. Нацртај правилен ѕвездест петаголник (петокрака ѕвезда).

10. На цртежот 75 нацртани се неколку фигури. Пробај сам да ги нацрташ.



Црт. 75

11. Еден плоштад има форма на правилен осумаголник со страна 25 m. Нацртај го планот на тој плоштад во размер 1:1 000! Од планот одреди колку е долга најголемата дијагонала на плоштадот.

12. Еден базен има форма на правилен шестаголник со страна 7,5 m. Нацртај го планот на тој базен во размер 1:250.

§ 15. СИМЕТРИЈА НА ПРАВИЛНИТЕ МНОГУАГОЛНИЦИ

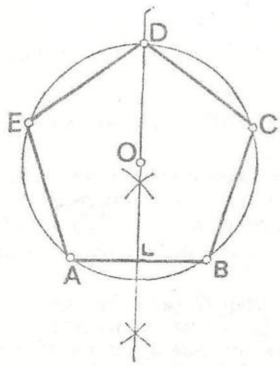
За симетричноста на правилните многуаголници важат следниве теореми:

Теорема 1. *Симетралите на страните и бисектрисите на внатрешните агли кај секој правилен многуаголник се негови оски на симетријата.*

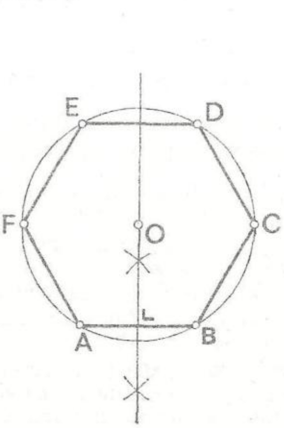
Доказ: Симетралата на секоја страна на правилниот многуаголник минува низ центарот на опишаната кружница околу него (Зошто?). Затоа таа симетрала претставува оска на симетријата на опишаната кружница околу правилниот многуаголник. Но бидејќи кај правилниот многуаголник сите агли се складни и сите страни се складни, тоа таа симетрала ќе биде и оска на симетријата и на правилниот многуаголник (црт. 76 и 77)

Бисектрисата пак на секој внатрешен агол на правилниот многуаголник минува низ центарот на впишаната во него кружница (Зошто?). Затоа таа е оска на симетријата на впишаната кружница во правилниот многуаголник. Но, бидејќи кај правилниот многуаголник сите страни се складни и сите агли се складни, тоа таа бисекриса ќе биде оска на симетријата и на правилниот многуаголник (црт. 78 и 79).

Со тоа теоремата е докажана.

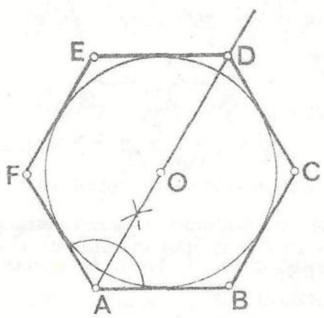


црт. 76

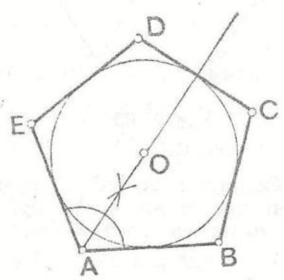


Црт. 77

Ако земеме предвид дека: Секоја оска на симетријата на правилниот многуаголник (и на секоја фигура) ја разделува неговата контура на два складни дела, тогаш не е тешко да заклучиме дека од теоремата 1 следуваат следниве последици:



Црт. 78



Црт. 79

Последица 1. *Секоја оска на симетријата на правилен многуаголник со непарен број страни е истовремено и симетрала на една страна и бисектриса на аголот при спротивното теме* (црт. 76 и 79).

Последица 2. *Секоја оска на симетријата на правилниот многуаголник со парен број страни е или заедничка симетрала на две спротивни страни, или заедничка бисектриса на два спротивни агли* (црт. 77 и 78).

Последица 3. *Правилниот многуаголник со n страни има n оски на симетријата.*

Последица 4. *Сите оски на симетријата на правилниот многуаголник се сечат во неговиот центар.*

Видовме дека спротивните страни кај правилните многуаголници со парен број страни имаат заедничка симетрала, а тоа може да биде ако и само ако тие се паралелни. Според тоа, ќе важи следнава:

Теорема 2. *Кај правилните многуаголници со парен број страни спротивните страни се паралелни.*

Теорема 3. *Правилниот многуаголник со парен број страни е централно симетричен во однос на својот центар.*

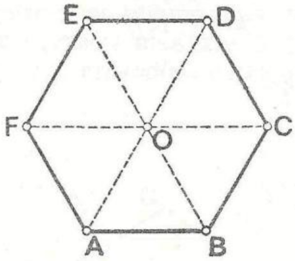
Но правилниот многуаголник се непарен број страни не е централно симетричен спрема својот центар.

Доказ: Нека е даден правилниот шестаголник $ABCDEF$, а O нека е негов центар (црт. 80)

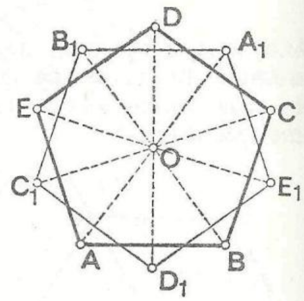
Очигледно е, дека спротивните темиња на правилниот шестаголник се централно симетрични точки во однос на неговиот центар, т.е. при централна симетрија φ_o точките A, B, C, D, E и F се пресликуваат соодветно во точките D, E, F, A, B и C.

Според тоа, при централна симетрија φ_o правилниот шесаголник $ABCDEF$ се пресликува сам на себе.

Меѓутоа, правилниот петаголник $ABCDE$ со центар O (црт. 81) при централна симетрија φ_o се пресликува на петаголникот $A_1B_1C_1D_1E_1$ кој не се совпаѓа со дадениот петаголник, т.е. тој не се пресликува сам на себе. Тоа значи дека правилниот петаголник не е централно симетричен во однос на својот центар.



Црт. 80



Црт. 81

Добиените заклучоци за правилниот шестаголник и правилниот петаголник можат да се уопштат за кој и да е правилен многуаголник со парен број страни, па и за кој и да е правилен многуаголник со непарен број страни.

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1. Колку оски на симетријата има секој правилен многуаголник?

2. Кои правилни многуаголници се централно симетрични фигури?

3. Кај правилните многуаголници со непарен број страни постојат ли барем две оски на симетријата, што се заемно нормални? А кај правилните многуаголници со парен број страни?

4. Можат ли некои неправилни многуаголници да бидат осно симетрични фигури? Нацртај такви!

5. Нацртај неправилен шестаголник, кој има само: а) една оска на симетријата, б) две оски на симетријата.

6. Над страните на правилен шестаголник конструирај однадвор квадрати. Така добиената фигура колку оски на симетријата има и дали таа е централно симетрична?

7. Ако секоја страна на квадратот ја разделиме на три складни дела, тогаш разделните точки ќе бидат темиња на еден осумаголник. Дали тој е правилен осумаголник? Одреди колку оски на симетријата има тој!

ПЕРИМЕТАР И ПЛОШТИНА НА МНОГУАГОЛНИЦИТЕ

§ 16. ПЕРИМЕТАР НА МНОГУАГОЛНИЦИТЕ

Дефиниција 1. *Збирот од должините на сите страни на многуаголникот се вика периметар на многуаголникот, и се означува со* L.

Ако должините на страните на многуаголникот $ABC\ldots T$ ги означиме со буквите $a, b, c, \ldots, t$, т.е. ако $\overline{AB}=a$, $\overline{BC}=b, \ldots, \overline{TA}=t$, тогаш формулата за периметар на многуаголникот во општ случај ќе гласи:

$$L=a+b+c+\ldots+t$$

Заради краткост на искажувањето, должините на страните на многуаголникот $a, b, c, \ldots, t$ често ќе ги викаме и само *страни* на тој многуаголник.

Во одделни случаи: за разностраниот триаголник, формулата за периметар ќе гласи: $L=a+b+c$,
за разностраниот четириаголник: $L=a+b+c+d$,
за разностраниот петаголник: $L=a+b+c+d+e$, итн.

Ако многуаголникот е правилен, тогаш сите негови страни имаат иста должина a, па формулата за неговиот периметар го добива видот:

$$L=\underbrace{a+a+a+\ldots+a}_{n \text{ пати}} \text{ или } L=na$$

А во одделни случаи: за правилниот (рамностран) триаголник: $L=3a$,
за правилниот четириаголник (квадратот): $L=4a$
за правилниот петаголник: $L=5a$,
за правилниот шестаголник: $L=6a$, итн.

Меѓутоа, многуаголникот може и да не е правилен, но сите (или само некои) негови страни да имаат еднаква должина. На пример, кај паралелограмите спротивните страни имаат еднаква должина, а кај ромбот пак сите страни имаат еднаква должина — но не е правилен четириаголник.

Од сите такви неправилни многуаголници ќе се задржиме на овие:

1°. Рамнокракиот триаголник со основа a и крак b има периметар: $L = a + 2b$.

2°. Правоаголникот (што не е квадрат), ромбоидот и делтоидот со страни a и b, имаат периметар: $L=2\ (a+b)$.

3°. Ромбот (како и квадратот) има периметар: $L=4a$.

4°. Рамнокракиот трапез со основи a и b и крак c, има периметар:

$$L=a+b+2c$$

Задача 1. Да се одреди периметарот на рамнокрак трапез, чии основи се долги $a=1{,}2\ dm$, $b=5{,}2\ cm$, а кракот $c=84\ mm$.

Решение: Должините на страните на трапезот бидејќи се разноимени броеви, истите прво треба да ги претвориме во едноимени броеви, на пример во сантиметри: $a=1{,}2\ \text{dm}=$ $=12\ \text{cm}$; $b=5{,}2\ \text{cm}$; $c=84\ \text{mm}=8{,}4\ \text{cm}$.

Ако сега мерните броеви на должините на страните на рамнокракиот трапез ги замениме во формулата за неговиот периметар, ќе добиеме: $L=a+b+2c=12+5{,}2+2\cdot 8{,}4=$ $=34\ (\text{cm})$.

Задача 2. Позната е должината на една страна на делтоидот $a=7{,}5\ cm$ и неговиот периметар $L=22\ cm$. Да се одреди должината на другата негова страна.

Решение: Од формулата за периметар на делтоидот $L=2\ (a+b)$, наоѓаме: $a+b=\frac{L}{2}$, односно: $b=\frac{L}{2}-a=\frac{22}{2}-7{,}5=11-7{,}5=3{,}5\ (\text{cm})$.

Значи, другата страна на делтоидот е долга 3,5 cm.

Задача 3. Да се одреди должината на страната на правилен петаголник, ако неговиот периметар изнесува $L=32{,}5\ cm$

Решение: Од $L=5a$ имаме $a=\frac{L}{5}$, т.е. $a=\frac{32{,}5}{5}=6{,}5\ (\text{cm})$

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1. Колку најмногу складни страни може да има рамнокракиот трапез. Нацртај таков трапез, измери што е потребно и одреди го периметарот на тој трапез.

2. Колку најмногу складни страни може да има правоаголен трапез? Нацртај таков трапез и одреди го неговиот периметар.

3. Нацртај делтоид, на кој едната страна му е $a=6{,}5$ cm, а периметарот му е 21 cm. Колкава е другата страна на делтоидот?

4. Одреди ја страната на ромбоидот, ако страната $b=4{,}6$ cm, а периметарот му е $L=27{,}4$ cm!

5. Одреди го кракот на рамнокрак трапез, ако основите му се долги: $a=12$ cm и $b=4$ cm, а периметарот му изнесува 31 cm.

6. Одреди ја долната основа на рамнокрак трапез, ако се познати: периметарот $L=29$ cm, другата основа $b=3{,}8\ cm$ и кракот $c=6{,}5$ cm.

7. Одреди ја четвртата страна на еден трапезоид ако се познати другите три негови страни: $a=6{,}2$ cm, $b=8$ cm, $c=4$ cm и неговиот периметар $L=25$ cm.

8. Една градина, која има форма на рамнокрак трапез со основи: $a=268$ m, $b=73$ m и крак $c=144$ m, треба да се огради со три реда бодликава жица. Колку метри жица се потребни за оградување на градината?

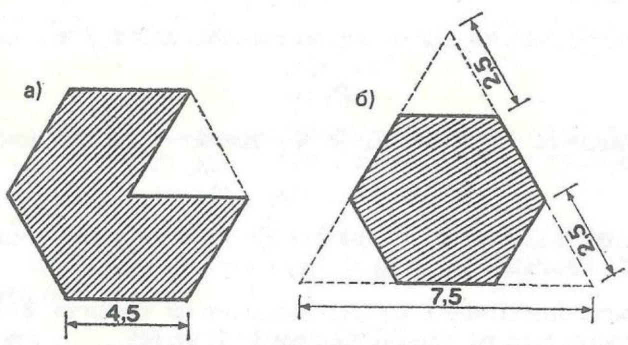
9. Периметарот на четириаголникот $ABCD$ е еднаков на 74 cm. Одреди ги должините на страните на тој четириаголник, ако е познато дека: $\overline{AB}=\overline{BC}$, $\overline{CD}=\frac{5}{9}\cdot\overline{DA}$, а $\overline{DA}=27$ cm.

10. Одреди го периметарот на правилен петаголник, чија страна е: а) 2,3 cm, б) 1,5 dm, в) 0,25 m!

11. Одреди го периметарот на правилен: а) шестаголник, б) седумаголник в) деветаголник, ако страната му е долга 3,2 cm.

12. Периметарот на правилен осумаголник изнесува 28 cm. Колкава е должината на неговата страна?

13. Во кружница со радиус $r=4,3$ cm впишан е правилен шестаголник. Одреди го периметарот на тој шестаголник!



Црт. 82

14. Пресметај го периметарот на шрафираните фигури на цртеж 82. Димензиите на цртежот се дадени во сантиметри.

§ 17. ПОИМ ЗА ПЛОШТИНА

Линиите (прави и криви) од една страна и површините (рамни и криви) од друга страна се геометриски фигури од различен вид.

Знаете дека ограничениот дел од една права се вика *отсечка*, а ограничениот дел од рамнината се вика *геометриска слика*. Геометриски слики се, на пример, триаголникот, четириаголникот, кој и да е многуаголник, кругот и др. Геометриските слики се состојат освен од точките што лежат на нивната контура (граница) уште и од точките од нивната „внатрешна област". Според тоа, отсечката, искршената линија, кружницата и кружниот лак не ги сметаме геометриски слики, бидејќи тие немаат внатрешна област.

Знаете исто така дека отсечките можат да се споредуваат и да се мерат, односно секоја отсечка има своја точно определена *должина*.

Поимот должина е воведен како геометриска величина, која ја карактеризира големината на отсечките (ограничени делови од правата). На сличен начин се воведува и поимот *плоштина на геометриските слики*.

Плоштина е геометриска величина од посебен вид, која ја карактеризира големината на делот од рамнината, што е ограничен со контурата на геометриската слика.

Плоштината на геометриската слика, како и секоја друга величина може да се мери.

Да се измери (определи) плоштината на една геометриска слика, значи кон неа да се придружи (според некое правило) број, кој покажува колку пати во неа се содржи другата геометриска слика, чија плоштина е примена за единица.

За единица мерка за мерење на плоштините на геометриските слики се зема *квадратниот метар* (m^2), односно плоштината на квадрат со страна долга 1 m.

Плоштината на геометриските слики ја означуваме со буквата P.

Определувањето на плоштините на фигурите при утврдена единица мерка го вршиме врз основа на следниве правила (својства), што ги примаме без доказ:

1°. Плоштината на секоја геометриска слика Φ е позитивен број, т.е.

$$P_{\Phi} > 0$$

2°. Складните фигури Φ_1 и Φ_2 имаат еднакви плоштини, т.е.

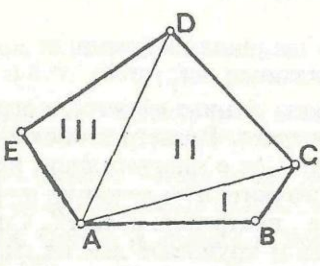
$$\Phi_1 \cong \Phi_2 \Rightarrow P_{\Phi_1} = P_{\Phi_2}$$

3°. Дадена фигура Φ ако со некоја линија е разбиена на две фигури Φ_1 и Φ_2, тогаш $P_{\Phi} = P_{\Phi_1} + P_{\Phi_2}$

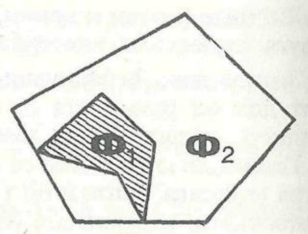
На пример, плоштината на петаголникот на цртежот 83 е еднаква на збирот од плоштините на триаголниците I, II и III.

4°. Ако една фигура Φ_1 се содржи во друга фигура Φ_2, тогаш таа има помала плоштина отколку другата фигура (црт. 84), т.е.

$$\Phi_1 \subset \Phi_2 \Rightarrow P_{\Phi_1} < P_{\Phi_2}$$



Црт. 83



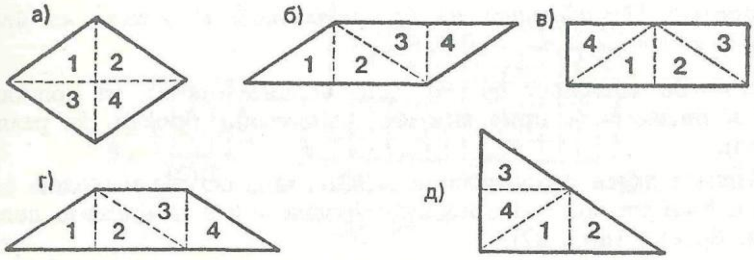
Црт. 84

Дефиниција: *Геометриски фигури (слики), кои имаат еднакви плоштини, се викаат еквивалентни или еднаквоголеми.*

Од својството 2° следува дека: Складните фигури се еквивалентни, меѓутоа еквивалентните фигури може и да не се складни. На пример, фигурите на цртежот 85 не се складни, но се еквивалентни, бидејќи деловите од кои се составени се складни, па според тоа и еквивалентни.

Постојат две правила за утврдување еквивалентноста на две фигури.

1. *Правило на разбивање на фигурите.* **Ако две фигури можат да се разбијат на еднаков број соодветно складни делови, тогаш тие се еквивалентни.**

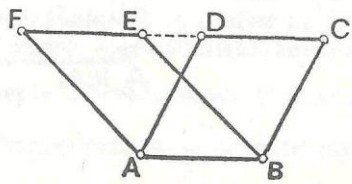


Црт. 85

На пример, ромбот, правоаголникот и трапезот на цртежот 85 се еквивалентни, бидејќи можат да се разбијат на складни правоаголни триаголници (1), (2), (3) и (4).

2. *Правило на дополнување на фигурите.* **Ако две фигури можат да се дополнат со соодветно складни делови до иста фигура, тогаш тие се еквивалентни.**

На пример, паралелограмите $ABCD$ и $ABEF$ на цртежот 86 се еквивалентни, бидејќи ако кон нив ги додадеме складните триаголници ADF и BCE, добиваме еден ист трапез $ABCF$.



Црт. 86

Ако е дадена некоја фигура и ако нацртаме друга фигура, која има еднаква плоштина со дадената фигура, но да се разликува од неа само по формата, тогаш велиме дека дадената фигура сме ја претвориле во друга еквивалентна на неа фигура. Според тоа:

Да се претвори една фигура во друга, значи да се промени само нејзината форма, но не и нејзината плоштина.

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1. Кои основни својства ги имаат плоштините на геометриските слики?

2. Што значи да се измери плоштината на дадена геометриска слика?

3. За кои геометриски слики велиме дека се еквивалентни?

4. Даден квадрат е разрежан по неговите дијагонали. Кои геометриски слики можат да се состават од добиените триаголници? Какви се така добиените фигури?

5. Нацртај произволен правоаголник и повлечи ја едната дијагонала. Изрежи ги двата добиени правоаголни триаголници! Какви различни фигури можеш да составиш од тие триаголници?

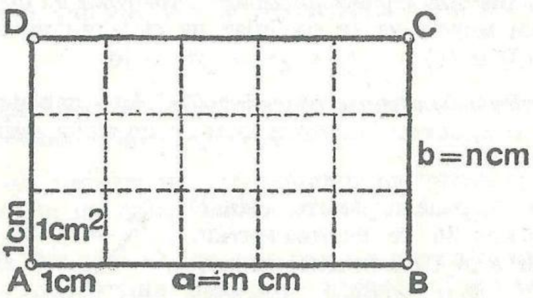
§ 18. ПЛОШТИНА НА ПРАВОАГОЛНИК

Една од страните на правоаголникот ќе ја викаме *основа*, а другата соседна страна — *висина* на правоаголникот. Должините на основата и висината на правоаголникот се викаат негови *димензии* и се означуваат обично со a и b.

Теорема: *Плоштината на правоаголникот е еднаква на производот од неговите димензии*, т.е. $P=ab$

Доказ: Во зависност до тоа дали мерните броеви на должините на основата и висината се природни или рационални броеви, ќе разликуваме два случаја.

а) Нека е даден правоаголник $ABCD$, чија основа и висина се долги: $a=m$ cm и $b=n$ cm, каде што мерните броеви m и n на нивните должини се природни броеви (црт. 87).



Црт. 87

Ако основата AB ја разделиме на m, а висината BC на n складни делови, јасно е дека секој таков дел ќе има единица должина од 1 cm. Потоа низ разделните точки да повлечеме прави паралелни со страните на правоаголникот. На тој начин правоаголникот се разделува на $(m \cdot n)$ мали квадратчиња. Сите тие квадратчиња се складни и имаат еднаква плоштина од 1 cm^2. Според тоа бараната плоштина на дадениот правоаголник ќе биде $P=(mn)$ cm^2

Добиената формула пократко ја запишуваме вака $P = ab$

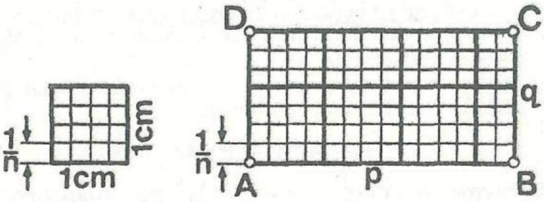
На цртежот 87 правоаголникот $ABCD$ е со основа $a=5$ cm и висина $b=3$ cm и е разделен на $5 \cdot 3=15$ складни квадратчиња од по 1 cm^2. Неговата плоштина ќе биде: $P=ab=(5 \cdot 3)$ $cm^2=15$ cm^2, каде што неименуваниот број 15 се вика **мерен број на плоштината** на правоаголникот $ABCD$ при мерна единица 1 cm^2.

б) Должините на основата и висината на правоаголникот $ABCD$ a и b нека се рационални броеви (дропки). Ги сведуваме тие броеви на заеднички именител и нека е $a=\frac{p}{n}$ cm и $b=\frac{q}{n}$ cm, каде што p и q се природни броеви.

Да ги разделиме страните на единичниот квадрат на n складни делови и низ разделните точки да повлечеме паралелни прави со страните на квадратот. При тоа единичниот квадрат (со страна 1 cm) ќе се разбие на n^2

мали квадратчиња. На цртежот 88 страната на квадратот е разделена на 4 дела, а бројот на малите квадратчиња е еднаков на $4 \cdot 4 = 16$.

Да ја одредиме плоштината на едно такво мало квадратче. Според својството (3°) на плоштината, плоштината на големиот квадрат ќе биде еднаква на збирот од плоштините на малите квадратчиња.



Црт. 88

Бидејќи плоштината на големиот квадрат е еднаква на 1 cm^2, а бројот на малите квадратчиња е n^2, тоа плоштината на едно мало квадратче ќе биде $\frac{1}{n^2}$ cm^2.

Ако на страните AB и AD на дадениот правоаголник $ABCD$, почнувајќи од точката A, ги нанесеме отсечките со должина $\frac{1}{n}$ cm (црт. 88), ќе забележиме дека на страната AB ќе се нанесат p такви отсечки, а на страната BC — q такви отсечки. Потоа низ разделните точки да повлечеме прави паралелни со AD и AB. При тоа дадениот правоаголник ќе се разбие на (pq) мали квадратчиња. Сите тие се складни и секое од нив има плоштина еднаква на $\frac{1}{n^2}$ cm^2. Според тоа, плоштината на дадениот правоаголник (согласно својството 3°) ќе биде еднаква на збирот од плоштините на сите мали квадратчиња, т.е.

$$P_{ABCD} = \left(pq \cdot \frac{1}{n^2}\right) cm^2 = \left(\frac{p}{n} \cdot \frac{q}{n}\right) cm^2 = ab$$

На цртежот 88 правоаголникот $ABCD$ има димензии $a = 3\frac{1}{2}$ cm и $b = 1\frac{3}{4}$ cm.

Кога ги сведеме дропките на заеднички именител, добиваме: $a = \frac{14}{4}$ cm и $b = \frac{7}{4}$ cm.

Ако делот $\frac{1}{4}$ од сантиметарот го земеме за нова должинска единица, тогаш таа ќе се содржи 14 пати во основата и 7 пати во висината. Според докажаното во првиот случај плоштината на правоаголникот ќе биде еднаква на $14 \cdot 7$ нови квадратни единици, што одговара на новата должинска единица од $\frac{1}{4}$ cm. Но, бидејќи квадратниот сантиметар содржи $4 \cdot 4 = 16$ нови квадратни единици, тоа за да одредиме колку квадратни сантиметри се содржат во дадениот правоаголник, бројот на новите квадратни единици $(14 \cdot 7)$ треба да се подели со 4^2. Така добиваме:

$$P = \frac{14 \cdot 7}{4^2} cm^2 = \left(\frac{14}{4} \cdot \frac{7}{4}\right) cm^2 = \left(3\frac{1}{2} \cdot 1\frac{3}{4}\right) cm^2, \text{ т.е. } P = ab.$$

Според тоа, формулата за плоштина на правоаголникот $P = ab$ важи и кога мерните броеви на должините на основата и висината се рационални броеви. Со тоа теоремата е докажана.

Во средното училиште се докажува дека формулата $P=ab$ важи и кога должините на страните на правоаголникот се ирационални броеви.

Пример: Да се одреди плоштината на правоаголник, чии димензии се: $a=1,4$ dm и $b=8$ cm.

Решение: Пред да ги замениме мерните броеви на димензиите во формулата за плоштина на правоаголникот, нив претходно треба да ги изразиме во иста мерна единица за должина. Во тој случај, плоштината на правоаголникот ќе се изрази во соодветната квадратна мерна единица за плоштина.

Димензиите на дадениот правоаголник ако ги изразиме во сантиметри: $a=1,4$ dm $=14$ cm, $b=8$ cm, неговата плоштина, ќе биде:

$$P=ab=(14 \cdot 8)\ \text{cm}^2=122\ \text{cm}^2$$

Бидејќи квадратот е специјален случај на правоаголник (правоаголник во кој соседните страни се складни), тоа неговите димензии се еднакви $b=a$.

Затоа неговата плоштина ќе биде: $P=a \cdot a$ или $P=a^2$

На пример: Квадрат со страна долга $a=7$ cm има плоштина

$$P=a^2=7^2\ (\text{cm}^2)=49\ \text{cm}^2$$

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1. Пресметај ја плоштината на правоаголник, чии страни се долги: а) $a=3,4$ dm, $b=12$ cm; б) $a=1,8$ m, $b=6$ dm.

2. Како ќе се промени плоштината на даден правоаголник, ако:

а) основата ја зголемиме 2 пати, а висината остане непроменета,

б) основата ја зголемиме 3 пати, а висината ја зголемиме 2 пати,

в) основата ја зголемиме 2 пати, а висината ја намалиме 2 пати,

г) основата и висината ги зголемиме 3 пати,

д) основата ја намалиме 6 пати, а висината ја зголемиме 3 пати?

3. Колку различни правоаголници можеш да нацрташ при услов: страните да се изразени во цел број сантиметри, а периметарот на секој од нив да е еднаков на 16 cm. Кој од тие правоаголници ќе има најголема плоштина?

4. Дадена е плоштината на правоаголникот и една негова страна. Пресметај ја другата страна на правоаголникот, ако: а) $P=1400$ m^2 и $a=35$ m. б) $P=53,3$ dm^2 и $b=6,5$ dm.

5. Плоштината на една нива изнесува 4,5 *ha*. Изрази ја плоштината на таа нива во: а) m^2, б) *a*, в) km^2.

6. Нацртај четири правоаголници, од кои секој да е со плоштина од 24 cm^2, а основата да е еднаква на: а) 5 cm, б) 6 cm, в) 8 cm, г) 10 cm.

7. Пресметај ја плоштината на квадрат со страна долга; а) $a=3,5$ cm, б) $a=0,8$ m, в) $a=2,7$ dm.

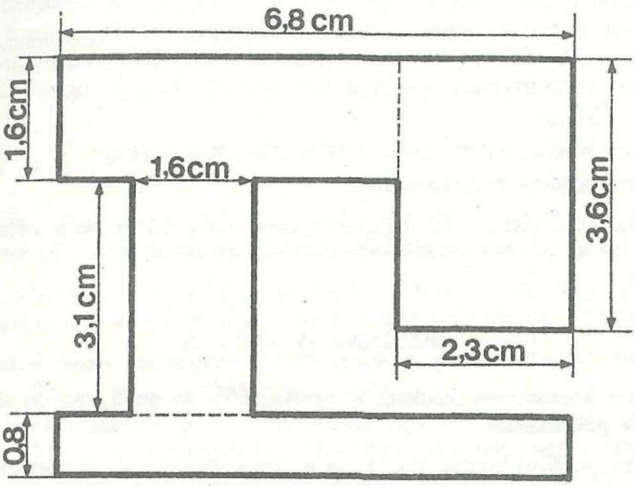
8. Една нива, што има форма на правоаголник со страни 240 m и 180 m, треба да се насади со лозје. Колку лози ќе се насадат на таа нива, ако растојанието на лозите во редот е 1 m, а растојанието меѓу редовите е 1,2 m?

9. Во еден ходник со димензии: должина 24,8 m и ширина 5,2 m треба да се стават плочки кои имаат форма на квадрат со страни 20 см. Колку плочки се потребни за тој ходник?

10. Пресметај ја плоштината на фигурата на цртежот 89.

11. Квадрат со страна $a=12$ cm и правоаголник со висина 8 cm имаат еднакви плоштини. Која од тие две фигури има поголем периметар?

12. Квадрат со страна 7,5 *cm* и правоаголник со една страна 5 cm имаат еднакви периметри. Која од тие две фигури има поголема плоштина?



Црт. 89

§ 19. ПЛОШТИНА НА ПАРАЛЕЛОГРАМ

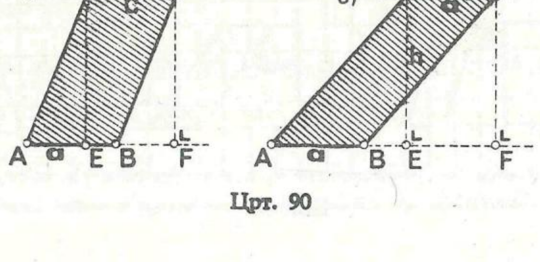
Теорема: *Плоштината на паралелограмот е еднаква на производот од должините на неговата основа и висина.*

Доказ: Нека е даден паралелограм $ABCD$, што не е правоаголник. Должината на неговата основа и соодветната висина да ги означиме a и h. Треба да докажеме дека за паралелограмот $ABCD$ важи формулата

$$P = a \cdot h$$

Низ темињата C и D да повлечеме нормали на правата AB. Притоа ќе го добиеме правоаголникот $EFCD$, чија основа и висина се соодветно складни на основата и висината на дадениот паралелограм.

Од цртежот 90 гледаме дека се можни два случаја: страната EF делумно ја покрива страната AB на паралелограмот (црт. 90-а), или таа лежи вон неа (црт. 90-б). Меѓутоа и во двата случаја можеме да сметаме дека трапезот $AFCD$ е составен или од паралелограмот $ABCD$ и правоаголниот



Црт. 90

триаголник BFC, или пак од правоаголникот $EFCD$ и правоаголниот триаголник AED, т.е. дека

$$P_{AFCD} = P_{ABCD} + P_{BCF} \text{ или } P_{AFCD} = P_{EFCD} + P_{AED}$$

Но, правоаголните триаголници BCF и AED се складни (Докажи!), значи тие се и еквивалентни. Оттука следува дека паралелограмот $ABCD$ и правоаголникот $EFCD$ се еквивалентни, бидејќи со складните триаголници BCF и AED се дополнуваат до еден ист трапез $AFCD$ (црт. 90). Тоа значи дека $P_{ABCD} = P_{EFCD}$

Но, $P_{EFCD} = ah$, а тоа значи дека и $P_{ABCD} = ah$

Со тоа теоремата е докажана.

Забелешка: За основа на паралелограмот може да се земе која и да е негова страна. Во тој случај се зема соодветната висина кон таа страна.

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1. Нацртај произволен ромбоид и претвори го во ромб, кој да има иста основа и висина како и ромбоидот!

2. Нацртај ромб со страна $a=7{,}5$ cm и остар агол $\alpha=70°$ и претвори го во правоаголник со иста основа!

3. Даден правоаголник $ABCD$ со страни 6 *cm* и 4 cm птретвори го во ромб со иста основа и висина!

4. Даден квадрат претвори го во ромбоид со остар агол 75° и основа еднаква на страната на квадратот!

5. Пресметај ја плоштината на ромбоид, чија основа (a) и висина (h) се: а) $a=10{,}4$ cm, $h=6$ cm, б) $a=2{,}5$ cm, $h=1$ *d*m.

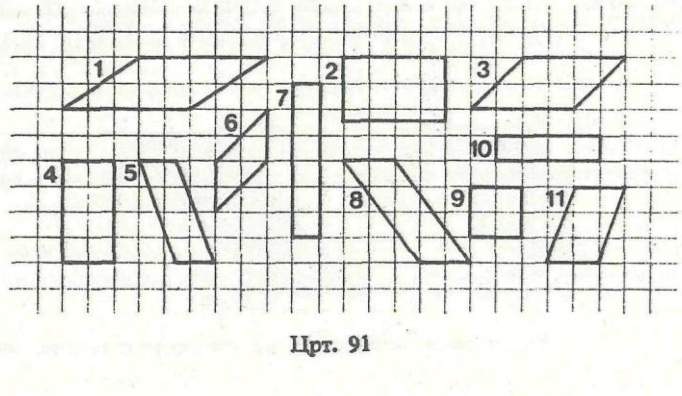
6. Ромбоид, чија основа е 18 cm, има плоштина 198 cm². Колкава е соодветната висина на ромбоидот?

7. Едната страна на ромбоидот е долга 15 cm, а соодветната висина ѝ е 8 cm. Ако другата страна на ромбоидот изнесува 12 cm, колкава е висината што ѝ одговара?

8. Покажи кои паралелограми на цртежот 91 се еквивалентни!

9. Одреди ја висината на ромб, чија страна е $a=8{,}2$ cm, а плоштината е 41 cm².

10. Плоштината на еден ромб изнесува 43,2 cm². Одреди ја висината на ромбот, ако неговата страна е долга 8 cm!



Црт. 91

11. Познати се должините на страните на пралелограмот $a=4$ cm и $b=5$ cm и поголемата негова висина $h=3$ cm. Пресметај ја плошниата на паралелограмот!

12. Одреди ја плоштината на ромб со страна долга $a=7{,}2$ cm и остар агол $\alpha=30°$.

13. Плоштината на паралелограмот е еднаква на 36 cm^2, а висините се долги 4 cm и 6 cm. Пресметај го периметарот на тој паралелограм!

14. Паралелограм со основа долга $a=8$ cm има плоштина $P=32$ cm^2. Одреди ја должината на висината h_a на паралелограмот!

§ 20 ПЛОШТИНА НА ТРИАГОЛНИК

Теорема: *Плоштината на триаголникот е еднаква на полупроизводот од должините на неговата основа и висина.*

Доказ: Нека е даден триаголникот ABC (црт. 92). Должините на неговата основа AB и соодветната ѝ висина CD да ги означиме со a и h.

Познато е дека дијагоналата го дели паралелограмот на два складни триаголници. Да го искористиме тој факт.

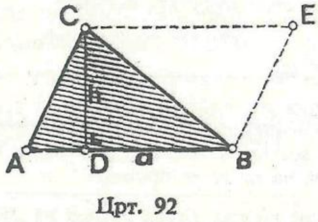
Ако низ темињата B и C повлечеме прави паралелни со соодветните страни AC и AB на триаголникот, ќе го добиеме паралелограмот $ABEC$; кој има иста основа и иста висина како и триаголникот ABC. Бидејќи паралелограмот $ABEC$ се состои од два складни триаголници ABC и BEC, тоа плоштината на секој од нив е еднаква на половината од плоштината на паралелограмот $ABEC$. Но, $P_{ABEC}=ah$, па според тоа плоштината на дадениот триаголник ABC, ќе биде: $P=\frac{ah}{2}$.

Со тоа теоремата е докажана.

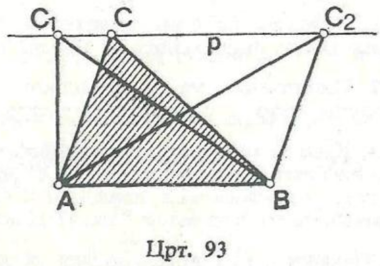
Ќе наведеме некои последици на горнава теорема:

Последица 1. *Плоштината на правоаголниот триаголник е еднаква на полупроизводот од должините на неговите катети.*

Последица 2. *Триаголници, кои имаат една иста основа, а врвовите им лежат на права паралелна на основата, се еквивалентни* (црт. 93).



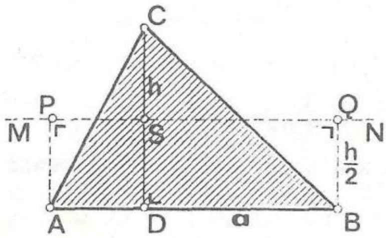
Црт. 92



Црт. 93

Формулата за плоштина на триаголникот може да се запише и вака: $P=a\cdot\frac{h}{2}$, а тоа покажува дека важи и следнава:

Последица 3. *Триаголникот е еквивалентен на правоаголник со истата основа и со висина, што е еднаква на половина од висината на триаголникот.*



Црт. 94

Тоа се гледа од цртежот 94, во кој е $MN \| AB$, $\overline{SC} = \overline{SD}$, а AP и BQ се нормални на AB. Покажете дека триаголникот ABC и правоаголникот $ABQP$ се составени од соодветно складни делови, па според тоа тие се еквивалентни.

Формулата за плоштина на триаголникот може уште да се запише и вака $P = \frac{a}{2} \cdot h$. Што покажува тој запис?

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1. Пресметај ја плоштината на разностран триаголник, ако е дадена една негова страна $a=6{,}2$ cm и соодветната ѝ висина $h=8$ cm.

2. Пресметај ја плоштината на еден правоаголен триаголник чии катети се долги $a=7{,}4$ cm и $b=4{,}5$ cm.

3. Пресметај ја плоштината на еден равнокрак правоаголен триаголник со катета $a=7{,}5$ cm.

4. Плоштината на еден правоаголен триаголник изнесува 40,32 cm², а едната негова катета е 5,6 cm. Пресметај ја другата катета!

5. Покривот на една куќа се состои од четири складни равнокраки триаголници. Основите на тие триаголници се долги по 10,5 m; а висините на триаголниците се долги по 9 m. Пресметај ја плоштината на покривната површина на таа куќа!

6. Нацртај триаголник со страни: $a=8$ cm, $b=6{,}5$ cm и $c=9$ cm. Претвори го тој триаголник во правоаголник со основа еднаква на страната a на триаголникот!

7. Даден тапоаголен триаголник претвори го во правоаголен триаголник!

8. Нацртај еден разностран триаголник, а потоа претвори го во равнокрак триаголник!

9. Нацртај произволен триаголник, а потоа претвори го во ромб!

10. Пресметај ја плоштината на триаголникот, ако основата (a) и соодветната ѝ висина (h) изнесуваат: а) $a=18$ cm, $h=12$ cm, б) $a=2{,}4$ дm, $h=3$ dm, в) $a=8{,}6$ m $h=5$ m.

11. Основата на еден триаголник е 9 cm, а висината 6 cm. Тој е претворен во друг триаголник, чија основа е 12 cm. Колкава ќе биде неговата висина?

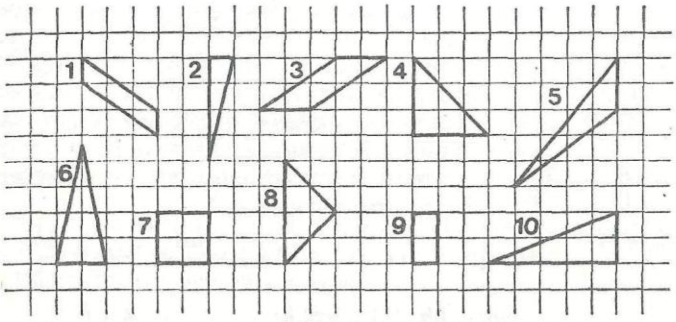
12. Плоштината на триаголникот е еднаква на 56 cm². Одреди ја висината на триаголникот, што е спуштена кон страната $b=14$ cm.

13. Како ќе се промени плоштината на триаголникот, ако: а) основата ја зголемиме 3 пати, а висината остане непроменета, б) висината ја зголемиме 2 пати, а основата остане непроменета, в) основата ја намалиме 6 пати, а висината ја зголемиме 2 пати, г) основата и висината ги зголемиме 3 пати? Покажи го тоа на по еден пример!

14. Покажи дека секоја медијана на триаголникот го разделува истиот на два еквивалентни триаголници!

15. Во паралелограмот $ABCD$, повлечи ја дијагоналата AC, а темето A сврзи го со средините на спротивните страни BC и CD. Покажи дека при тоа паралелограмот $ABCD$ се разделува на четири еквивалентни триаголници.

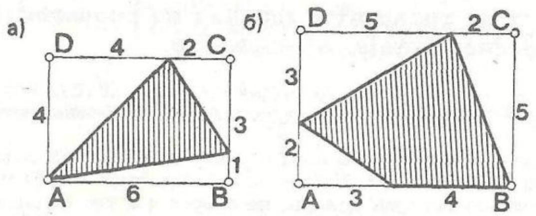
16. Сврзи ги последователно средините на страните на паралелограмот $ABCD$, па ќе го добиеш четириаголникот $KLMN$. Одреди ја плоштината на четириаголникот $KLMN$, ако плоштината на паралелограмот $ABCD$ е еднаква на 52 dm².



Црт. 95

17. Покажи кои геометриски фигури на цртежот 95 се еквивалентни.

18. Пресметај ја плоштината на шрафираните геометриски фигури на цртежот 96, ако четириаголникот $ABCD$ е правоаголник.



Црт. 96

19. Две страни на триаголникот се долги 5 cm и 8 cm. Може ли неговата плоштина да биде еднаква на: а) 12 cm^2, б) 20 cm^2, в) 25 cm^2? Зошто?

20. Даден е триаголник ABC. Раздели го на два дела, такви што од нив да можеш да составиш паралелограм со иста основа како и триаголникот!

21. Докажи дека: плоштината на триаголникот е еднаква на производот од една негова средна линија и соодветната висина.

22. Дадени се две страни на триаголникот $a=9$ cm, $b=12$ cm и висината $h_a=10{,}5$ cm. Да се одреди висината $h_b=$?

23. Од каков вид треба да биде триаголникот со две страни $a=7$ cm и $b=9$ cm за да има најголема плоштина?

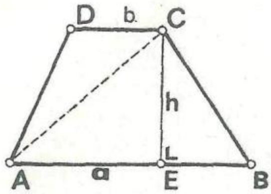
24. Како се однесуваат плоштините на два триаголника, кои имаат еднакви основи?

25. Одреди го односот на плоштините на деловите од триаголникот, што се добиени со повлекувањето на една негова средна линија.

§ 21. ПЛОШТИНА НА ТРАПЕЗ

Теорема: *Плоштината на трапезот е еднаква на производот од полузбирот на неговите две основи и висината.*

Доказ: Нека $ABCD$ е трапез, $\overline{AB}=a$ и $\overline{CD}=b$ — негови основи, а $\overline{CE}=h$ — висина (црт. 97).



Црт. 97

Дијагоналата AC го дели трапезот на два триаголника ABC и CDA. Според тоа, плоштината на трапезот е еднаква на збирот од плоштините на тие два триаголника. Ако за основа на $\triangle ABC$ ја земеме страната AB, а за основа на $\triangle CDA$ ја земеме страната CD, тогаш нивните висини ќе бидат еднакви на висината h на трапезот, па добиваме:

$$P_{ABC}=\frac{ah}{2};\ P_{CDA}=\frac{bh}{2}$$

А оттука $P_{ABCD}=\frac{ah}{2}+\frac{bh}{2}=\frac{(a+b)h}{2}$, т.е. $P=\frac{a+b}{2}\cdot h$

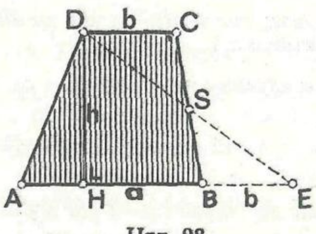
Со тоа теоремата е докажана.

Ако земеме предвид дека: полузбирот од должините на основите на трапезот е еднаков на должината на неговата средна линија m, тогаш горната формула го добива видот $P=m\cdot h$, т.е.

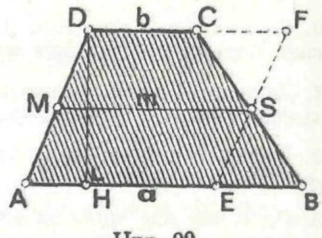
Плоштината на трапезот е еднаква на производот од должините на неговата средна линија и висината.

Забелешка: Формулата $P=\frac{(a+b)\cdot h}{2}$ покажува дека трапезот е еквивалентен на триаголник со иста висина h и со основа еднаква на збирот од основите $(a+b)$ на трапезот. Тоа се гледа и од цртежот 98. Покажете дека трапезот $ABCD$ и триаголникот AED се составени од соодветно складни делови, па според тоа тие се еквивалентни.

Формулата пак $P=mh$ покажува дека трапезот е еквивалентен на паралелограм со иста висина h и со основа еднаква на средната линија на трапезот (црт. 99).



Црт. 98



Црт. 99

Покажи дека трапезот $ABCD$ и паралелограмот $AEFD$ се составени од соодветно складни делови, па според тоа тие се еквивалентни.

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1. Пресметај ја плоштината на трапез, ако основите a и b и висината h изнесуваат: а) $a=14$ cm, $b=8$ cm и $h=9$ cm, б) $a=2,5$ dm, $b=9$ cm и $h=1,5$ dm, в) $a=3,5$ m, $b=1,5$ m и $h=2$ m.

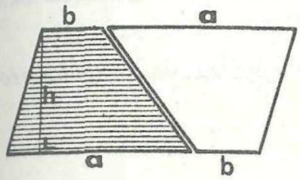
2. Основите на еден трапез изнесуваат 8,5 cm и 5,8 cm, а плоштината изнесува 42,9 cm². Одреди ја висината на трапезот!

3. Долната основа на трапезот е еднаква на 13 cm, висината на 5 cm, а плоштината 50 cm². Одреди ја горната основа на трапезот!

4. Висината на трапезот е еднаква на 14 cm, а плоштината изнесува 280 cm². Пресметај ја средната линија на трапезот!

5. Една нива, која имала форма на трапез со основи 142 m и 86 m и висина 42 m била посеана со памук. Од 1 декар просечно е набрано по 95 кг. Колку памук е набран од целата нива?

6. Покривот на една куќа се состои од два складни триаголници (секој со основа 9 m и висина 7 m) и два складни трапези, секој со основи 18 m и 9 m и висина 7 m. Пресметај ја плоштината на покривната површина на таа куќа.



Црт. 100

7. Плоштината на еден правоаголен трапез изнесува 87 cm². Пресметај ја должината на нормалниот крак, ако основите на трапезот изнесуваат 18 cm и 12 cm.

8. Пресметај ја плоштината на правоаголен трапез со основи долги $a=5$ cm и и $b=2$ cm и остар агол $\alpha = 45°$.

9. Нацртај два складни трапеза со еднакви основи a и b и висина h. Изрежи ги и придружи ги еден до друг како на цртежот 100. Каква фигура се образува? Како се пресметува плоштината на двата здружени трапези, а како само на едниот?

10. Даден трапез $ABCD$ претвори го: а) во паралелограм со иста висина, б) во правоаголник со иста висина, в) во триаголник со иста висина како и дадениот трапез.

§ 22. ПЛОШТИНА НА ЧЕТИРИАГОЛНИК СО НОРМАЛНИ ДИЈАГОНАЛИ

Теорема: *Плоштината на четириаголник со нормални дијагонали е еднаква на полупроизводот од должините на неговите дијагонали.*

Доказ: Нека $ABCD$ е четириаголник во кој $AC \perp BD$, а S — пресек на дијагоналите AC и BD. Ако низ секое теме на четириаголникот $ABCD$ повлечеме прави паралелни со дијагоналите AC и BD, тие прави ќе го образуваат правоаголникот $KLMN$. Дијагоналите AC и BD го разделуваат правоаголникот $KLMN$ на четири помали правоаголници, а страните на четириаголникот $ABCD$ ги делат тие помали правоаголници и тоа: секој од нив на по два складни правоаголни триаголници.

Од цртежот 101 гледаме дека правоаголните триаголници означени со арапските цифри 1, 2, 3 и 4 го сочинуваат четириаголникот $ABCD$, додека правоаголните триаголници означени со римските цифри I, II, III и IV лежат надвор од него.

Црт. 101

Бидејќи е: $\triangle_1 \cong \triangle_{I}$, $\triangle_2 \cong \triangle_{II}$, $\triangle_3 \cong \triangle_{III}$ и $\triangle_4 \cong \triangle_{IV}$, тоа јасно е дека четириаголникот $ABCD$ има двапати помала плоштина од плоштината на правоаголникот $KLMN$.

Ако должините на дијагоналите на четириаголникот $ABCD$, ги означиме со d_1

и d_2, т.е. $\overline{AC}=d_1$ и $\overline{BD}=d_2$, кои истовремено се еднакви и на должините на страните на правоаголникот $KLMN$, т.е. $\overline{KL}=d_1$ и $\overline{LM}=d_2$, плоштината на правоаголникот ќе биде: $P=d_1 \cdot d_2$, а плоштината на четириаголникот $ABCD$:

$$P=\frac{d_1 \cdot d_2}{2}$$

Со тоа теоремата е докажана.

Последица 1. *Плоштината на ромбот е еднаква на полупроизводот од должините на неговите дијагонали.*

Последица 2. *Плоштината на квадратот е еднаква на половината од квадратот на неговата дијагонала.*

Последица 3. *Плоштината на делтоидот е еднаква на полупроизводот од должините на неговите дијагонали.*

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1. Одреди ја плоштината на делтоид, ако се познати неговите дијагонали: $d_1=6{,}3$ cm и $d_2=4{,}8$ cm.

2. Плоштината на делтоидот изнесува 90 cm^2. Ако едната дијагонала е 7,5 cm, колкава е другата дијагонала?

3. Колкава плоштина има квадрат, чија дијагонала е долга 7,9 cm?

4. Пресметај ја плоштината на равнокрак трапез со нормални дијагонали, ако дијагоналата е долга 7,6 cm.

5. Одреди ја плоштината на равнокрак правоаголен триаголник, ако хипотенузата е долга 8,6 cm.

6. Еден ромб има 680 cm^2 плоштина, а едната дијагонала е долга 34 cm. Одреди ја другата дијагонала на ромбот!

7. Пресметај ја должината на страната на ромбот, ако се познати должините на неговите дијагонали $d_1=9$ cm, $d_2=4$ cm и висината $h=3$ cm.

8. Нацртај произволен делтоид $ABCD$. Исечи го и расечи го по неговите две дијагонали. Од добиените триаголници состави правоаголник! Што претставуваат страните на добиениот правоаголник? Какви други фигури можеш да составиш од добиените триаголници?

§ 23. ПЛОШТИНА НА ПРОИЗВОЛЕН МНОГУАГОЛНИК

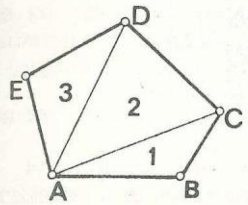
Се запознавме со пресметувањето на плоштината само на некои многуаголници: триаголник, правоаголник, паралелограм, трапез и делтоид.

За да ја одредиме плоштината на произволен многуаголник, истиот треба да се раздели на такви праволиниски геометриски фигури, чија плоштина знаеме да ја одредиме. Потоа збирот од плоштините на сите тие прости фигури ќе ни ја даде плоштината на дадениот многуаголник.

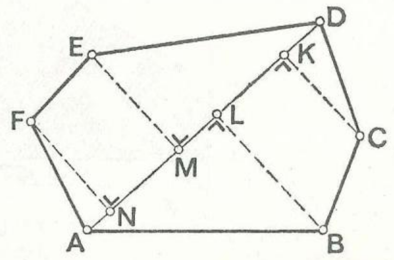
Разделувањето на многуаголникот на прости фигури може да се изврши на различни начини.

Пример 1. Петаголникот $ABCDE$ на цртежот 102 со дијагоналите од темето A е разделен на три триаголници. Ако ги пресметаме поодделно плоштините P_1, P_2, P_3 на секој од триаголниците и ги собереме ќе ја добиеме плоштината на петаголникот $ABCDE$:

$$P=P_1+P_2+P_3$$



Црт. 102



Црт. 103

Пример 2. Шестаголникот $ABCDEF$ на цртежот 103 со најголемата дијагонала AD и со повлечените нормали низ другите темиња B, C, E и F кон неа, е разделен на два трапеза $BCKL$ и $EFNM$ и четири правоаголни триаголници: ABL, CDK, MDE и ANF.

Знаејќи ги формулите за пресметување плоштината на триаголник и трапез, плоштината на дадениот шестаголник $ABCDEF$ ќе биде:

$$P=\frac{1}{2}\cdot\overline{AL}\cdot\overline{BL}+\frac{1}{2}\cdot(\overline{BL}+\overline{CK})\cdot\overline{KL}+\frac{1}{2}\cdot\overline{CK}\cdot\overline{DK}+\frac{1}{2}\overline{DM}\cdot\overline{EM}+$$

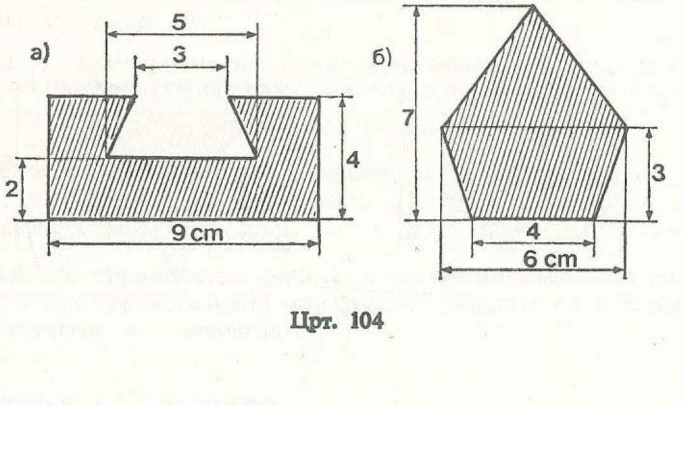
$$+\frac{1}{2}\cdot(\overline{EM}+\overline{FN})\cdot\overline{MN}+\frac{1}{2}\cdot\overline{AN}\cdot\overline{FN}.$$

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1. Како се пресметува плоштината на произволен многуаголник? Нацртај еден шестаголник и пресметај ја неговата плоштина.

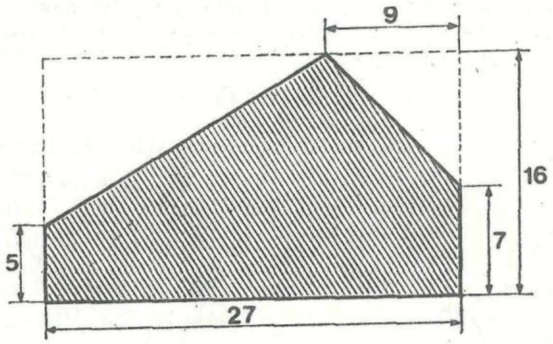
2. Едно градилиште има форма на трапезоид, чијашто една дијагонала е долга 280 m, додека другите две темиња се оддалечени од неа на 124 и 86 m. Пресметај ја плоштината на тоа градилиште!

3. Пресметај ја плоштината на фигурите на цртежот 104.



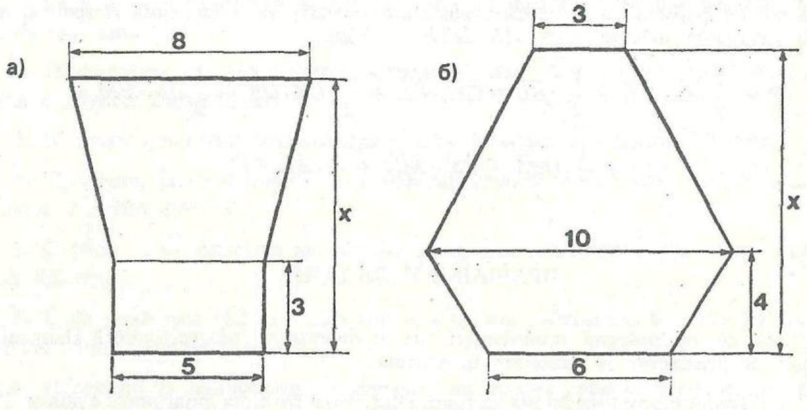
Црт. 104

4. Од правоаголно парче ламарина изрежан е детал со форма и димензии на цртежот 105. Пресметај ја плоштината на деталот. Димензиите на цртежот се изразени во сантиметри.



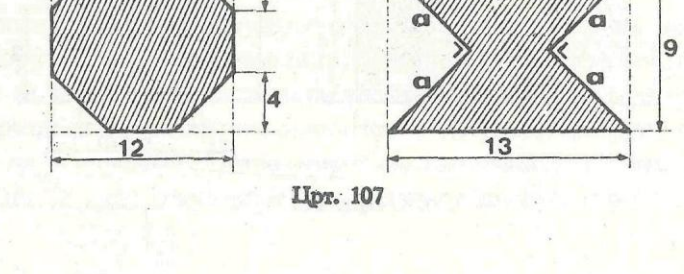
Црт. 105

5. Поштините на многуаголниците, што се нацртани на цртежот 106 изнесуваат: а) 54 cm², б) 71 cm². Одреди ги должините што се означени со x! Другите должини изразени се во сантиметри.



Црт. 106

6. Пресметај ја плоштината на шрафираните делови од фигурите на цртежот 107. Димензиите на цртежот изразени се во сантиметри.



Црт. 107

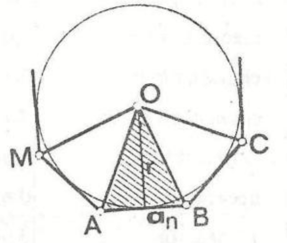
§ 24. ПЛОШТИНА НА ПРАВИЛЕН МНОГУАГОЛНИК

Теорема: *Плошшинаша на џравилен многуаголник е еднаква на џолуџроизводош од неговиош џеримешар и радиус на вџишанаша кружница.*

Доказ: Нека е даден правилниот n-аголник $ABC \ldots M$ (црт. 108), со страна долга $\overline{AB}=\overline{BC}= \ldots =\overline{MA}=a$ и радиус на впишаната кружница во него r.

Ако центарот на правилниот n-аголник го сврземе со секое негово теме, тој ќе се разбие на n складни триаголници. Плоштината на еден од тие триаголници, на пример $\triangle AOB$, ќе биде еднаква на $\frac{1}{2}\, a_n r$, каде што r е радиус на впишаната кружница или апотема на правилниот многуаголник, а плоштината на целиот многуаголник ќе биде n пати поголема, т.е.

$$P=\frac{n\, a_n r}{2}.$$



Црт. 108

Но бидејќи производот na_n претставува периметар L на правилниот многуаголник, затоа горнава формула за плоштина на правилниот многуаголник може да се запише и вака:

$$P=\frac{L \cdot r}{2}.$$

Со тоа теоремата е докажана.

Изведената формула покажува дека важи следнава:

Последица: *Секој џравилен многуаголник е еквиваленшен со шриаголникош, чија основа е долга колку џеримешарош на многуаголникош, а висинаша е еднаква на радиусош на вџишанаша кружница во шој многуаголник.*

Од конструкцијата на правилните многуаголници видовме дека, секој правилен многуаголник е еднозначно определен само со својата страна a, или само со радиусот на опишаната кружница R или пак само со радиусот на впишаната кружница r. Оттука заклучуваме дека и плоштината на правилните многуаголници може да биде наполно определена само со еден од тие елементи.

За пресметување на приближната вредност на плоштината на правилните многуаголници со помош само на еден елемент, ја ползуваме таблицата што е дадена на страна 66.

На пример, плоштината на правилниот осумаголник, кога е дадена должината на страната $a=3$ cm, со помош на таблицата ја пресметуваме на следниов начин:

$$P \approx 4{,}83 \cdot a^2=4{,}83 \cdot 9=43{,}47 \ (\mathrm{cm}^2)$$

Таа таблица можеме да ја ползуваме и за пресметување должината на страната, на радиусот на впишаната и радиусот на опишаната кружница на правилните многуаголници, кога е даден еден од тие елементи.

Пример: Во кружница со радиус $R=6$ cm впишан е правилен седумаголник. Да се одреди должината на страната, радиусот на впишаната кружница и плоштината на седумаголникот.

правилен многуаголник	по дадено R			по дадено a			По дадено r		
	$a\approx$	$r\approx$	$P\approx$	$R\approx$	$r\approx$	$P\approx$	$R\approx$	$a\approx$	$P\approx$
триаголник	$1{,}73\,R$	$0{,}50\,R$	$1{,}30\,R^2$	$0{,}58\,a$	$0{,}29\,a$	$0{,}43\,a^2$	$2{,}00\,r$	$3{,}47\,r$	$5{,}20\,r^2$
четириаголник	$1{,}41\,R$	$0{,}71\,R$	$2{,}00\,R^2$	$0{,}71\,a$	$0{,}50\,a$	$1{,}00\,a^2$	$1{,}41\,r$	$2{,}00\,r$	$4{,}00\,r^2$
петаголник	$1{,}18\,R$	$0{,}81\,R$	$2{,}38\,R^2$	$0{,}85\,a$	$0{,}69\,a$	$1{,}72\,a^2$	$1{,}24\,r$	$1{,}45\,r$	$3{,}63\,r^2$
шестаголник	$1{,}00\,R$	$0{,}87\,R$	$2{,}60\,R^2$	$1{,}00\,a$	$0{,}87\,a$	$2{,}60\,a^2$	$1{,}15\,r$	$1{,}15\,r$	$3{,}46\,r^2$
седумаголник	$0{,}87\,R$	$0{,}90\,R$	$2{,}74\,R^2$	$1{,}15\,a$	$1{,}04\,a$	$3{,}64\,a^2$	$1{,}11\,r$	$0{,}96\,r$	$3{,}37\,r^2$
осумаголник	$0{,}77\,R$	$0{,}92\,R$	$2{,}83\,R^2$	$1{,}31\,a$	$1{,}21\,a$	$4{,}83\,a^2$	$1{,}08\,r$	$0{,}83\,r$	$3{,}33\,r^2$
деветаголник	$0{,}68\,R$	$0{,}94\,R$	$2{,}89\,R^2$	$1{,}46\,a$	$1{,}37\,a$	$6{,}18\,a^2$	$1{,}06\,r$	$0{,}73\,r$	$3{,}28\,r^2$
десетаголник	$0{,}62\,R$	$0{,}95\,R$	$2{,}94\,R^2$	$1{,}62\,a$	$1{,}54\,a$	$7{,}69\,a^2$	$1{,}05\,r$	$0{,}65\,r$	$3{,}25\,r^2$
11-аголник	$0{,}56\,R$	$0{,}96\,R$	$2{,}97\,R^2$	$1{,}77\,a$	$1{,}70\,a$	$9{,}37\,a^2$	$1{,}04\,r$	$0{,}59\,r$	$3{,}23\,r^2$
12-аголник	$0{,}52\,R$	$0{,}97\,R$	$3{,}00\,R^2$	$1{,}93\,a$	$1{,}87\,a$	$11{,}20\,a^2$	$1{,}04\,r$	$0{,}54\,r$	$3{,}22\,r^2$

Решение: Во таблицата за правилниот седумаголник, кога е даден радиусот на опишаната кружница околу него, наоѓаме:

$a \approx 0{,}87\ R,\ \ r \approx 0{,}90\ R$ и $P \approx 2{,}74\ R^2$

Заменувајќи $R=6$ cm, добиваме:

$a \approx 0{,}87 \cdot 6 = 5{,}22$ (cm), $r \approx 0{,}90 \cdot 6 = 5{,}40$ (cm)

$P \approx 2{,}74 \cdot 36 = 98{,}64$ (cm²)

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1. Во кружница со радиус 4,5 cm впишан е правилен: а) петаголник, б) шестаголник, в) осумаголник, г) деветаголник. Пресметај ги нивниот периметар и плоштина со помош на таблицата.

2. Во кружница со радиус 3,5 cm впишан е: а) рамностран триаголник, б) квадрат, в) правилен 12-аголник. Одреди ја нивната плоштина и периметар.

3. Радиусот на впишаната кружница во правилен петаголник е 3,2 cm. Пресметај го неговиот периметар и плоштина.

4. Пресметај ја плоштината на правилен десетаголник, ако е дадена неговата страна $a=1{,}5$ cm.

5. Одреди ја плоштината на правилен петаголник, ако е познат неговиот периметар $L=32$ cm.

6. Одреди го радиусот на опишаната кружница, радиусот на впишаната кружница и плоштината на правилен осумаголник, кога е дадена неговата страна $a=2$ cm.

7. Пресметај го периметарот и плоштината на правилен 11-аголник, ако е даден радиусот на опишаната кружница околу него $R=4$ cm.

8. Во иста кружница впишани се правилен шестаголник и рамностран триаголник. Покажи дека плоштината на шестаголникот е 2 пати поголема од плоштината на триаголникот!

9. Ходникот на едно училиште, што има форма на правоаголник со страни $a=12$ m и $b=3{,}25$ m е поплочен со плочки што имаат форма на правилен шестаголник, чија страна е 8 cm. Колку плочки се употребени за поплочувањето на тој ходник?

10. Во средината на училишниот двор била направена една цветна леа, која имала форма на правилен осумаголник со страна 2 m. Пресметај ја плоштината на леата!

ГЛАВА V

ДОЛЖИНА НА КРУЖНИЦА И ПЛОШТИНА НА КРУГ

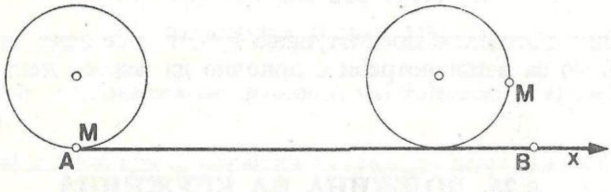
§ 25. ОДНОС МЕЃУ ДОЛЖИНАТА НА КРУЖНИЦА И НЕЈЗИНИОТ ДИЈАМЕТАР

Знаеме што е должина на отсечка и како таа се одредува. За да се одреди должината на дадена отсечка за мерна единица земаме друга отсечка и последователно ја нанесуваме по дадената. Меѓутоа, кружницата е крива линија, а со поимот должина на крива линија првпат се среќаваме. Точниот поим (дефиниција) за должината на крива линија не сме во состојба да го дадеме. Тоа ќе го сториме во средното училиште.

Но, за да добиеме нагледна претстава за поимот должина на кружница ќе земеме еден обрач или модел на кружница од жица и истиот да го тркаламе (без лизгање) долж една полуправа Ax (црт. 109).

Тркалањето на обрачот да го сопреме во моментот кога точката M од обрачот, која се совпаѓала, со почетокот A на полуправата Ax; првпат дојде (ќе лежи) пак на полуправата во некоја точка B. На таков начин на полуправата Ax ќе добиеме една отсечка AB, која е складна со отсечката што би се добила кога моделот на кружницата го пресечеме во една точка, а потоа го исправиме во права линија.

Должината на така добиената отсечка AB се вика *должина на кружницата*, чиј модел сме го тркалале по полуправата Ax (црт. 109).



Цвт. 109

Должината на кружницата ќе ја означуваме со буквата L.

Како што гледаме, непосредното мерење на должината на кружницата е многу отежнато и непрактично. Затоа должината на кружницата ќе ја определиме на друг начин.

Пред сè, да видиме од што зависи должината на кружницата, т.е. должината на отсечката AB, што ја добивме малку погоре? Очигледно е дека, ако имаме две кружници со различни дијаметри (или радиуси) и ги одредиме нивните должини (на начин што е погоре опишан), тогаш поголема должина ќе има онаа кружница чиј дијаметар е поголем. Според тоа, должината на кружницата зависи од нејзиниот дијаметар (или радиус). Да ја пронајдеме таа зависност.

Да земеме две кружници k_1 и k_2 со различни дијаметри d_1 и d_2.

Ако ги одредиме должините L_1 и L_2 на тие две кружници, а потоа ги пресметаме односите $\frac{L_1}{d_1}$ и $\frac{L_2}{d_2}$, ќе забележиме дека тие се еднакви, па според тоа ќе важи пропорцијата $\frac{L_1}{d_1} = \frac{L_2}{d_2}$.

Да го повториме тоа и со други две кружници. Ќе дојдеме до истиот заклучок, имено дека:

Должините на кружниците се пропорционални на нивните дијаметри, или:

Односот меѓу должината на кружницата и нејзиниот дијаметар е постојан број за секоја кружница.

Тој постојан број, т.е. односот на должината на кружницата и нејзиниот дијаметар е примено да се означува со грчката буква π (читај пи) (прва буква од гчкиот збор периферија), т.е. $\frac{L}{d} = \pi$.

Бројот π покажува колку пати должината на која и да е кружница е поголема од должината на нејзиниот дијаметар.

Големиот грчки математичар и физичар Архимед (287—212 г. пред н.е.) прв ја пресметал приближната вредност на бројот π и установил дека тој се наоѓа меѓу броевите $3\frac{1}{7} = \frac{22}{7}$ и $3\frac{10}{71}$. Подоцна бројот π го испитувале и пресметувале многу други математичари, кои установиле дека *бројот π е ирационален број*, т.е. непериодична децимална дропка со бесконечно многу децимали. Математичарот Ludolf van Ceulen околу 1 600 год. бројот π го пресметал на 35 децимали, по чиешто име, бројот π често се вика *Лудолфов број*. Меѓутоа, денес со модерни електронски машини за сметање, бројот π е пресметан и со над 2 000 децимали.

Бројот π напишан со првите петнаесет точки децимали гласи:

$$\pi = 3{,}141\ 592\ 653\ 589\ 793\ \ldots$$

Обично при поточното пресметување бројот π се зема со пет децимали ($\pi \approx 3{,}14159$), но за наши потреби е доволно да земеме дека $\pi \approx 3{,}14$ или $\pi \approx \frac{22}{7}$.

§ 26. ДОЛЖИНА НА КРУЖНИЦА

Теорема: *Должината на кружницата е еднаква на удвоениот производ од бројот π и нејзиниот радиус.*

Навистина, од $\frac{L}{d} = \pi$ следува $L = \pi d$.

Но бидејќи $d = 2r$, тоа ќе биде $L = 2\pi r$

Ако кружницата ја разгледуваме како гранична линија (контура) на соодветниот круг, тогаш нејзината должина L ќе претставува всушност *периметар на кругот*. Значи, сè што рековме за должината на кружницата, важи и за периметар на кругот.

Ако должината на кружницата ни е позната, а треба да се одреди нејзиниот радиус, тогаш од формулата: $L=2\pi r$ добиваме $r=\frac{L}{2\pi}$.

При пресметување радиусот на кружницата, полезно е да се знае и да се користи уште и реципрочната вредност на бројот π, што приближно изнесува: $\frac{1}{\pi}\approx 0{,}318$.

Задача 1. Да се одреди должината на кружницата со радиус 12,5 cm

Решение: $L=2\pi r\approx 2\cdot 3{,}14\cdot 12{,}5=3{,}14\cdot 25=78{,}5$ (cm)

Значи, должината на кружницата е $L\approx 78{,}5$ cm.

Задача 2. Тркалата на една кола имаат дијаметар 56 cm. Колкав пат ќе измине колата, ако секое тркало се заврти 500 пати?

Решение: Ако секое тркало направи едно полно завртување, тогаш колата ќе измине пат што е еднаков на периметарот на тркалата.

Според тоа, прво ќе го пресметаме периметарот на тркалото. Во овој случај, бидејќи мерниот број на дијаметарот е делив со 7, згодно е за бројот π да ја земеме вредноста $\pi\approx\frac{22}{7}$, наместо $\pi\approx 3{,}14$. Така добиваме: $L=\pi d\approx\frac{22}{7}\cdot 56=22\cdot 8\approx 176$ (cm).

Значи, при едно полно завртување на секое тркало колата изминува 176 cm$=1{,}76$ m пат. Ако пак секое тркало се заврти 500 пати, колата ќе измине пат, што е приближно еднаков на: $1{,}76\cdot 500=880$ m.

Задача 3. Ако една челична лента долга 1 m, ја свиткаме во кружницата, колкав ќе биде дијаметарот на таа кружница?

Решение: Тука должината на кружницата е дадена $L=1$ m $=100$ cm, а треба да се одреди нејзиниот дијаметар.

Од формулата $L=\pi d$, имаме дека $d=\frac{L}{\pi}$. Наместо да делиме со $\pi\approx 3{,}14$, можеме да помножиме со $\frac{1}{\pi}\approx 0{,}318$, што е несомнено полесно, па ќе добиеме: $d=\frac{L}{\pi}=L\cdot\frac{1}{\pi}\approx$ $\approx 100\cdot 0{,}318=31{,}8$ (cm).

Значи, дијаметарот на кружницата ќе биде долг 31,8 cm.

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1. Пресметај ја должината на кружница, чиј дијаметар е: а) $d=7$ cm, б) $d=12{,}4$ cm, в) $d=0{,}8$ m.

2. Пресметај ја должината на кружница, чиј радиус е долг: а) $r=4{,}5$ cm, б) $r=1$ dm, в) $r=3{,}2$ dm.

3. Најди ја должината на работ на отворот на една кофа, чиј дијаметар е 2,3 dm.

4. Должината на кружницата е еднаква $L=9{,}42$ dm. Одреди го нејзиниот дијаметар и радиус.

5. Дијаметарот на тркалата на една кола е еднаков на 5,2 dm. Колкав пат ќе помине колата, ако секое тркало се заврти 5 000 пати.

6. Колкав е радиусот на Земјата, кога знаеме дека должината на земјиниот меридијан приближно изнесува 40 000 km?

7. Колкав пат ќе измине Земјата во своето вртење околу Сонцето за: а) една недела, б) еден ден в) 1 час, г) 1 минута, д) 1 секунда, ако нејзината патека ја сметаме за кружница, чиј радиус е 150 000 000 km, а Земјата се завртува еднаш околу Сонцето за 365 дена и 6 часа?

8. Периметарот на едно стебло е 2,5 *m*. Одреди го радиусот на стеблото!

9. Минутната стрелка на еден часовник е долга 1,4 cm. Колкав пат ќе измине врвот на таа стрелка за: а) 1 час, б) 1 ден?

10. Два круга имаат радиуси $r_1=3{,}5$ cm и $r_2=6$ cm. Пресметај го радиусот на круг, чиј периметар е еднаков на збирот од периметрите на дадените кругови. Што забележуваш?

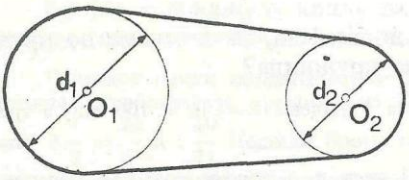
11. Околу правилен шестаголник со страна $a=4{,}6$ cm опиши кружница и пресметај ја нејзината должина!

12. Радиусот на една кружница е 8 cm. Колкав е радиусот на друга кружница, која има двапати поголема должина?

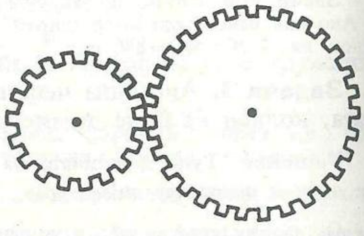
13. Како ќе се промени должината на кружницата, ако нејзиниот радиус: а) се зголеми 3 пати, б) се намали 5 пати?

14. Тркалата на еден автомобил имаат дијаметар 0,8 m. Колку завртувања во една минута прави секое тркало, ако за 15 минути автомобилот изминува 17 km?

15. Задните тркала на една запрежна кола имаат дијаметар 75 cm, а предните 50 cm. Ако задното тркало направи 200 завртувања, колку завртувања ќе направи предното тркало за тоа време?



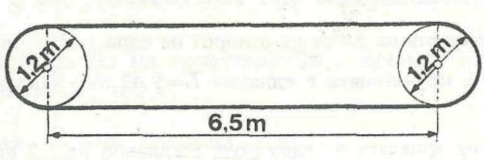
Црт. 110


Црт. 111

16. Две тркала со дијаметри $d_1=60$ cm и $d_2=45$ cm, се обвиени со непрекинат ремен (црт. 110). Поголемото тркало се врти од мотор и прави 180 завртувања во 1 минута, а помалото тркало го врти ременот. Колку завртувања во 1 минута ќе направи помалото тркало?

17. Еден запченик со 30 запци зафаќа во друг запченик со 18 запци. Ако првиот запченик прави 45 завртувања во минута, колку завртувања ќе прави вториот запченик во тоа време? (црт. 111).

18. Две еднакви тркала со дијаметар 1,2 m се обвиени со непрекинат ремен (црт. 112). Одреди ја должината на ременот ако растојанието меѓу центрите на тркалата е еднакво на 6,5 m.



Црт. 112

§ 27. ДОЛЖИНА НА КРУЖЕН ЛАК

Досега кружниците лаци ги изразувавме (меревме) со лачни степени, минути и секунди. Но бидејќи кружниот лак е дел од кружницата, тогаш и тој има некоја одредена должина, којашто можеме да ја мериме со истите должински единици со кои ја мериме и должината на кружницата.

Знаеме дека: Секој кружен лак има онолку лачни степени, минути и секунди, колку што аголни степени, минути и секунди има централниот агол што му одговара.

На централен агол од $1°$ му одговара кружен лак, кој претставува 360-ти дел од кружницата, чија должина е $2\pi r$. Ако должината на тој кружен лак ја означиме со $l_{1°}$, ќе имаме: $l_{1°} = \frac{2\pi r}{360}$ или $l_{1°} = \frac{\pi r}{180}$.

Според тоа, должината l на кружен лак, што му одговара на централен агол α, ќе биде еднаква на $l = \frac{\pi r}{180} \cdot \alpha$ или $l = \frac{\pi r \alpha}{180}$.

Од формулата за пресметување на должината на кружниот лак, лесно ги добиваме и формулите: $r = \frac{180 l}{\pi \alpha}$ и $\alpha = \frac{180 l}{\pi r}$ кои ни служат: првата за пресметување на радиусот, кога ни се познати должината на кружниот лак и соодветниот централен агол и втората за пресметување на централниот агол, а кога ни се познати должината на соодветниот кружен лак и радиусот.

Забелешка: Ако централниот агол е изразен во степени, минути и секунди, тогаш истиот треба претходно да се претвори во најниските единици минути или секунди, а исто така во истите единици треба да се птретвори и аголот $180°$.

Задача 1. Да се пресмета должината на кружен лак во кружница со радиус 12 cm, што му одговара на централен агол $\alpha = 18°$.

Решение: Со замена на $r = 12$ cm и $\alpha = 18°$ во формулата за должина на кружен лак, добиваме:

$$l = \frac{\pi r \alpha}{180} \approx \frac{3{,}14 \cdot 12 \cdot 18}{180} = \frac{3{,}14 \cdot 12}{10} = 3{,}768 \text{ cm} \approx 3.8 \text{ (cm)}.$$

Задача 2. Пресметај го радиусот на кружница во која на централен агол $\alpha = 42° \, 30'$ му одговара кружен лак $l = 11$ cm.

Решение: Бидејќи $30' = 0{,}5°$, тоа централниот агол го изразуваме во едноимен број, и тоа во степени, побрзо вака: $\alpha = 42° 30' = 42{,}5°$ Така добиваме:

$$r = \frac{180 l}{\pi \alpha} \approx \frac{180 \cdot 11}{\frac{22}{7} \cdot 42{,}5} = \frac{180 \cdot 11 \cdot 7}{22 \cdot 42{,}5} = \frac{90 \cdot 7}{42{,}5} = 14{,}8 \text{ (cm)}.$$

Значи, радиусот на кружницата е $r \approx 14{,}8$ cm.

Задача 3. Да се одреди централниот агол, на којшто во кружница со радиус $r = 15$ cm му припаѓа кружен лак $l = 10$ cm.

Решение: Со замена на $r = 15$ и $l = 10$ во формулата $\alpha = \frac{180 l}{\pi r}$ добиваме:

$$\alpha = \frac{180 l}{\pi r} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{180 l}{r} \approx 0{,}318 \cdot \frac{180 \cdot 10}{15} = 0{,}318 \cdot 120 = 38{,}16, \text{ т. е}$$

$\alpha \approx 38{,}16°$ или $\alpha \approx 38° \; 9' \; 36''$.

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1. Пресметај ја должинатэ на кружен лак во кружница со радиус 0,7 m, што му одговара на централен агол: а) 30°, б) 45°, в) 84° 24′ 35″.

2. Колкав кружен лак му припаѓа на централен агол 135° во кружница, чија должина е 6,8 cm?

3. Должината на кружницата е 4,5 m. Колкава е должината на лакот што му одговара на централен агол: а) 15°, б) 75°, в) 120°?

4. Пресметај ја должината на лаците во две концентрични кружници, со радиуси $r_1=7$ cm и $r_2=5$ cm, коишто им припаѓаат на ист централен агол $\alpha=122°\ 30'$.

5. Во кружница со радиус 15 cm е впишан: а) рамностран триаголник, б) квадрат, в) правилен шестаголник г) правилен осумаголник. Пресметај ги должините на лаците над нивните страни.

6. Пресметај го централниот агол, што му припаѓа на кружниот лак $l=4{,}71$ *d*m, ако радиусот на кружницата е 16 *d*m.

7. Колкав централен агол му одговара на кружен лак, чија должина е еднаква на радиусот на кружницата?

8. На централен агол од 40° му припаѓа кружен лак $l=6$ *d*m. Одреди ја должината на кружницата без користење на формулата.

9. Пресметај го радиусот на кружницата, во која на централен агол 33° му одговара кружен лак $l=34{,}54$ *d*m.

10. Периферен агол од 36° зафаќа кружен лак долг $l=2{,}5$ cm. Одреди ја должината на кружницата.

11. Од кружен лак со радиус 6 cm, што му одговара на централен агол $\alpha=150°$, свиткуваме кружница. Одреди го радиусот на таа кружница!

12. Кружница со радиус 4 cm е разгрната во кружен лак со радиус 10 cm. Одреди го централниот агол, што му одговара на тој кружен лак.

13. Кружница со радиус 8 cm ја разгрнуваме во полукружница. Одреди го радиусот на полукружницата!

14. Во кружницата на централен агол 120° му одговара лак 18 *cm*. Колкава е должината на лакот, што му одговара на централен агол: а) 30°, б) 60°, в) 90°, г) 150°, д) 180°, ѓ) 12° во таа кружница?

15. Пресметај ја должината на лакот од земјиниот меридијан, што му одговара на: а) 1°, б) 1′, в) 1″, ако должината на земјиниот меридијан изнесува 40003,423 km. (Должината на лакот од земјиниот меридијан што му одговара на 1′, се вика *морска милја*).

16. При вртењето на Земјата околу својата оска, колкав пат изминува секоја точка од екваторот за: а) 1 час, б) 1 мин., в) 1 сек.? (радиусот на Земјата е $r=6370$ km).

17. Скопје има географска ширина $\alpha=42°$. Пресметај колкава е оддалеченоста на Скопје од екваторот!

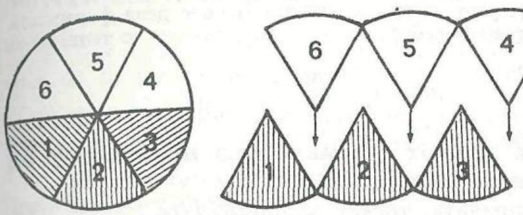
18. Белград и Охрид се наоѓаат приближно на ист меридијан. Пресметај ја нивната оддалеченост, ако се познати нивните географски ширини. За Белград $\alpha_1=44°\ 48'$ и за и за Охрид $\alpha_2=41°\ 7'$.

19. Ленинград и Александрија се наоѓаат приближно на ист меридијан. Пресметај ја нивната оддалеченост, ако знаеме дека Ленинград се наоѓа на географска ширина 59°52′, а Александрија на 31°12′.

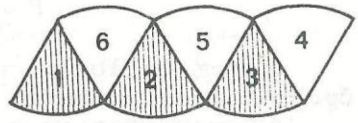
20. Крагуевац и Тетово се наоѓаат приближно на ист меридијан. Одреди ја нивната оддалеченост, кога се познати нивните географски ширини: за Крагуевац $\alpha_1=44°$ и за Тетово $\alpha_2=42°$.

§ 28. ПЛОШТИНА НА КРУГ

Нацртај круг со радиус r и раздели го на шест складни делови (кружни исечоци)! Ако ги изрежеме и ги составиме тие делови, како што е тоа покажано на цртежот 113, ќе ја добиеме фигурата на цртежот 114, која не потсетува на паралелограм, само што двете нејзини страни (основи) се состојат од три кружни лака. Основата на добиената фигура е еднаква на половина од должината на кружницата, а висината е еднаква на радиусот на кружницата.



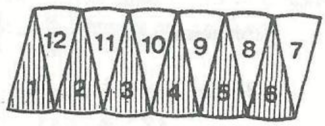
Црт. 113



Црт 114

Ако кругот го разделиме на повеќе складни делови, на пример, на 12, 24, 48, итн. па нив ги изрежеме и составиме на ист начин, ќе добиеме фигури (црт. 115), кои уште повеќе се приближуваат до формата на паралелограм. Плоштината на секој од тие фигури е еднаква на плоштината на кругот. Но бидејќи плоштината на секоја од тие фигури е еднаква на производот од должината на полукружницата и радиусот (Зошто?), тогаш јасно е дека формулата за плоштина на кругот ќе биде:

$$P = \frac{L}{2} \cdot r = \frac{2\pi r}{2} \cdot r = \pi r \cdot r \text{ или } P = \pi r^2$$

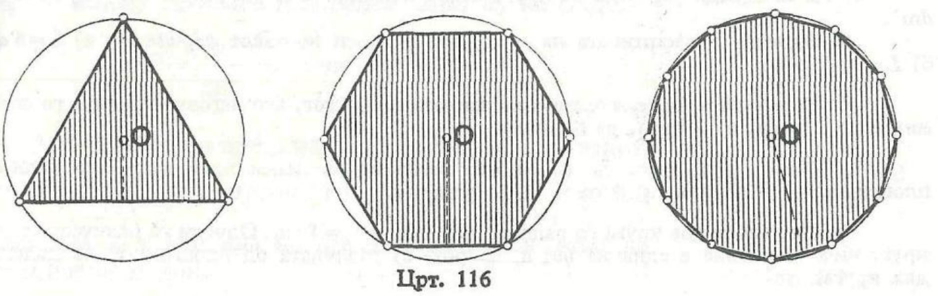


Црт. 115

Формулата за плоштина на круг можеме да ја добиеме и на следниов начин:

Нацртај три кружници со еднакви радиуси и во нив впишете рамностран триаголник, правилен шестаголник и правилен дванаесетаголник (црт. 116).

Ако внимателно го разгледаме цртежот 116, ќе забележиме дека со постепеното удвојување бројот на страните на впишаниот правилен многуаголник во даден круг, периметарот на правилниот многуаголник расте и сè повеќе се приближува до периметарот на кругот, а исто така и плоштината на правилниот многуаголник расте и сè повеќе се приближува до плоштината на кругот. Забележуваме дека и апотемата (т.е. радиусот на впишаната кружница во правилниот многуаолник) расте, така што таа пак сè повеќе се приближува до радиусот на опишаната кружница, кој останува постојанен.



Црт. 116

Ако сега во дадениот круг впишеме правилен 24-аголник, 48-аголник 96-аголник итн., кое практички станува се потешко, јасно е дека плоштините на тие многуаголници се помалку ќе се разликуваат од плоштината на кругот.

Ова не упатува на тоа дека, за пресметување плоштината на кругот можеме да ја ползуваме истата формула, со која ја пресметуваме и плоштината на правилните многуаголници.

Знаеме дека плоштината на правилниот многуаголник е еднаква на полупроизводот од периметарот и апотемата на многуаголникот, т.е.

$$P = \frac{L \cdot r}{2}$$

Бидејќи периметарот на многуаголникот е сосема близок до периметарот на кругот $L = 2\pi r$, а апотемата r пак е блиска до радиусот на кругот, тогаш јасно е дека формулата за пресметување на плоштината на кругот ќе биде:

$$P = \frac{L \cdot r}{2} = \frac{2\pi r \cdot r}{2} \quad \text{или} \quad P = \pi r^2$$

Според тоа: **Плоштината на кругот е еднаква на производот од бројот π и квадратот на неговиот радиус.**

Ако плоштината на кругот е позната, тогаш од формулата $P = \pi r^2$ следува дека неговиот радиус ќе биде:

$$r^2 = \frac{P}{\pi} \quad \text{или} \quad r = \sqrt{\frac{P}{\pi}}$$

Задача 1. Пресметај ја плоштината на круг чиј радиус е 4 cm.

Решение: $P = \pi r^2 \approx 3{,}14 \cdot 4^2 = 60{,}24$, т.е. $P \approx 60{,}24$ cm^2.

Задача 2. Одреди го радиусот на круг, чија плоштина е $P = 30{,}8$ cm^2.

Решение: $r = \sqrt{\frac{P}{\pi}} = \sqrt{\frac{1}{\pi} \cdot P} \approx \sqrt{0{,}318 \cdot 30{,}8} = \sqrt{9{,}7944} \approx 3{,}1$ (cm)

Значи, кругот има радиус $r \approx 3{,}1$ cm.

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1. Пресметај ја плоштината на круг, чиј радиус е: а) 4,5 cm, б) 7 cm, в) 1 *d*m, г) 3,08 m.

2. Пресметај ја плоштината на кругот, чиј дијаметар е: а) 6 cm, б) 4,2 *d*m, в) 45 m, г) 0,75 m.

3. Пресметај ги периметарот и плоштината на круг, чиј радиус е: а) 3,8 cm, б) 5 *d*m, в) 1 m.

4. Да се одреди радиусот на круг, чија плоштина е: а) $P = 254{,}47$ cm^2, б) $P = 28{,}27$ *d*m^2.

5. Одреди ја плоштината на круг, ако е даден неговиот периметар: а) $L = 5$ *d*m, б) $L = 15{,}7$ cm.

6. Колку пати ќе се зголеми плоштината на кругот, ако неговиот радиус го зголемиме: а) 2 пати, б) 3 пати, в) 5 пати?

7. Колку пати треба да се намали радиусот на даден круг, така што неговата плоштина да се намали: а) 4 пати, б) 9 пати?

8. Дадени се два круга со радиуси $r_1 = 6$ cm и $r_2 = 4$ cm. Одреди го радиусот на оној круг, чија плоштина е еднаква на: а) збирот, б) разликата од плоштините на дадените два круга.

9. Една кружна леа има плоштина 50 m^2. Колкав е нејзиниот радиус?

10. Пресметај ја плоштината на кругот, што е впишан во квадрат со страна $a=9$ cm.

11. Пресметај ги периметарот и плоштината на круг, што е опишан околу правилен шестаголник со страна $a=2{,}8$ cm.

12. Две кружници со радиуси $r_1=5{,}4$ cm и $r_2=3$ cm се допираат однатре. Пресметај ја плоштината на делот од рамнината, што е зафатен од тие две кружници.

13. Одреди го односот на плоштините на квадрат и круг, кои имаат еднакви периметри.

14. Старите Египќани земале дека плоштината на кругот е еднаква на плоштината на квадрат со страна еднаква на $\frac{8}{9}$ од дијаметарот на тој круг. Со која приближна вредност на бројот π тие работеле?

15. Атомска бомба од местото на експлозија има дејство до 280 km. Колкава плоштина од земјината површина е загрозена од бомбата?

16. Круг со радиус 15,5 cm и еден квадрат имаат приближно еднакви плоштини. Пресметај ја страната на тој квадрат.

17. Квадрат со страна 15,7 cm и еден круг имаат приближно еднакви периметри. Која од тие две фигури има поголема плоштина и за колку е поголема?

18. Земјотресот се шири со брзина $800\,\frac{m}{сек.}$ Пресметај колкава површина може да зафати земјотресот по 5 сек. од неговиот почеток?

19. Две цевки со внатрешни дијаметри 6 cm и 8 cm треба да се заменат со една цевка, која ќе има ист капацитет, како двете заедно. Колкав ќе биде нејзиниот дијаметар?

20. Еден моторциклист, кој минува 10 m во секунда, обиколува едно езеро што има приближно форма на круг, за 1 час и 8 мин. Пресметај ја плоштината на езерото!

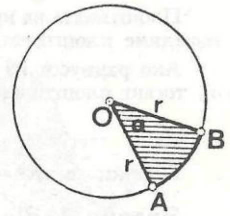
§ 29. ПЛОШТИНА НА ДЕЛОВИТЕ ОД КРУГ

Ќе ги разгледуваме следниве делови од кругот:

Дефиниција 1. *Делот од круг, ограничен со два негови радиуси и лакот што е зафатен од нив, се вика кружен исечок или сектор* (црт. 117).

Кружен исечок на кој му припаѓа централен агол од 1° има плоштина, што претставува 360-ти дел од плоштината на кругот (Зошто?). Според тоа, плоштината на тој кружен исечок ќе биде $\frac{\pi r^2}{360}$, а плоштината на кружен исечок, на кој му одговара централен агол α, ќе биде:

$$P=\frac{\pi r^2}{360}\cdot\alpha \quad \text{или} \quad P=\frac{\pi r^2\alpha}{360}$$



Црт. 117

Ако земеме во предвид дека должината на лакот, што му одговара на кружниот исечок, е $l=\frac{\pi r\alpha}{180}$ тогаш формулата за плоштина на кружен исечок, можеме да ја запишеме и вака:

$$P=\frac{\pi r^2\alpha}{360}=\frac{\pi r\alpha}{180}\cdot\frac{r}{2},$$

каде што, ако изразот $\frac{\pi r\alpha}{180}$ го замениме со l, ќе добиеме дека:

$$P=l\cdot\frac{r}{2}\quad\text{или}\quad P=\frac{lr}{2}$$

Според тоа: **Плоштината на кружниот исечок е еднаква на полупроизводот од должината на соодветниот кружен лак и радиусот на кругот.**

Како што гледаме имаме две формули за пресметување на плоштината на кружен исечок. Едната од нив ја применуваме кога ни се дадени радиусот и соодветниот централен агол, а другата кога ни се дадени радиусот и должината на односниот кружен лак.

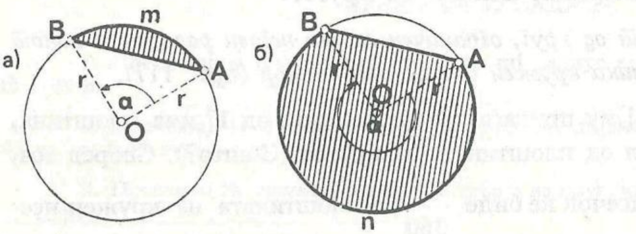
Забелешка: При примената на формулата $P=\frac{\pi r^2\alpha}{360}$, треба да водиме сметка во кои единици е изразен централниот агол α. Ако централниот агол е изразен во степени, минути и секунди, тогаш тој треба претходно да се претвори во најниските единици — минути или секунди, а исто така во тие единици треба да се претвори и аголот од 360°.

Дефиниција 2. *Дел од круг, ограничен со една тетива и лакот што ѝ припаѓа, се вика кружен отсечок или сегмент* (црт. 118).

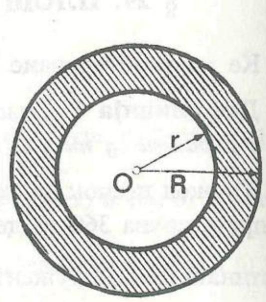
Плоштината на кружниот отсечок AmB (црт. 118-а), на кој кружниот лак е помал од 180°, ја наоѓаме кога од плоштината на соодветниот кружен исечок $OAmB$ ја извадиме плоштината на триаголникот AOB, кој за основа ја има тетивата AB, а врвот му лежи во центарот на кругот.

Ако пак кружниот лак на кружниот отсечок е поголем од 180°, тогаш плоштината на кружниот отсечок AnB ја наоѓаме кога ги собереме плоштините на кружниот исечок $AnBO$ и триаголникот AOB (црт. 118-б).

Дефиниција 3. *Делот од рамнината, што е ограничен со две концентрични кружници, се вика кружен прстен* (црт. 119).



Црт. 118



Црт. 119

Плоштината на кружниот прстен ќе ја добиеме кога од плоштината на големиот круг ја извадиме плоштината на малиот круг.

Ако радиусот на големиот круг го обележиме со R, а радиусот на малиот круг — со r, тогаш плоштината на кружниот прстен, ќе биде:

$$P=\pi R^2-\pi r^2\ \text{или}\ P=\pi\,(R^2-r^2)$$

Бидејќи е $R^2-r^2=(R-r)\,(R+r)$, тоа $P=\pi\,(R-r)\,(R+r)$

Задача 1. Да се пресмета плоштината на кружен исечок, што му одговара на централен агол $\alpha=57°$ во круг со радиус $r=6$ cm.

Решение: Со замена на мерните броеви на r и α во формулата за плоштина на кружен исечок добиваме:

$$P=\frac{\pi r^2\alpha}{360}\approx\frac{3{,}14\cdot 6^2\cdot 57}{360}=\frac{3{,}14\cdot 57\cdot 36}{360}=\frac{3{,}14\cdot 57}{10}=\frac{178{,}98}{10}=17{,}898\ (\text{cm}^2)$$

Значи, плоштината на кружниот исечок е $P\approx 17{,}90$ cm.

Задача 2. Да се пресмета плоштината на кружен прстен, кога се дадени радиусите на концентричните кружници $R=9$ cm и $r=5{,}7$ cm.

Решение: $P=\pi\ (R+r)\ (R-r)\ \approx 3{,}14\cdot(9+5{,}7)\cdot(9-5{,}7)=3{,}14\cdot 14{,}7\cdot 3{,}3=$ $=152{,}3214\ (\text{cm}^2)$

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1. Пресметај ја плоштината на кружен исечок, ако се дадени: а) $r=5$ cm, $l=6{,}8$ cm, б) $r=8$ cm, $l=8$ cm.

2. Пресметај ја плоштината на кружен исечок, ако се дадени: а) $r=3$ m, $\alpha=30°$, б) $r=4{,}5$ dm, $\alpha=45°30'$.

3. Пресметај ја плоштината на кружен исечок, што му припаѓа на централен агол од $75°$ во круг, чиј периметар е $L=3{,}64$ dm.

4. Кружен исечок со радиус 7 cm има плоштина 64,2 cm². Одреди го централниот агол, што му припаѓа на тој кружен исечок.

5. Како се менува плоштината на кружниот исечок, ако централниот агол, што му припаѓа, го зголемиме 2, 3, 4, . . . пати? Објасни!

6. Колкав дел од плоштината на еден круг претставува кружен исечок, чиј централен агол е: а) 30°, б) 45°, в) 60°, г) 72°, д) 75°, ѓ) 90°, е) 120°, ж) 135°, з) 144°, ѕ) 150°?

7. Плоштината на еден круг е 140 cm². Одреди ја плоштината на кружен исечок, што му одговара на централен агол од 36°.

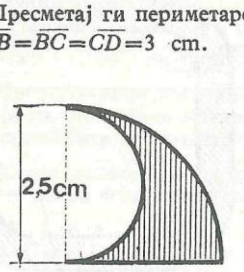
8. Плоштината на кружниот исечок претставува: а) $\frac{1}{2}$, б) $\frac{1}{3}$, в) $\frac{2}{3}$, г) $\frac{3}{4}$, д) $\frac{5}{9}$ од плоштината на кругот. Колкав е централниот агол што му припаѓа на неговиот кружен лак?

9. Периметарот на еден круг е $L=25{,}2$ cm, а должината на лакот е $l=8{,}4$ cm. Да се пресмета централниот агол и плоштината на соодветниот кружен исечок.

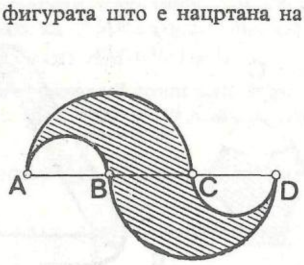
10. Европа зазема околу $\frac{1}{16}$ од целата копнена површина на Земјата, Азија со островите околу $\frac{1}{3}$, Африка $\frac{1}{5}$, Америка $\frac{1}{4}$, Австралија $\frac{1}{18}$, а остатокот отпаѓа на Антарктикот, кој е под мраз. Претстави ги површините на одделните континенти со кружни исечоци во круг со радиус $r=5$ cm.

11. Пресметај ги периметарот и плоштината на фигурата на црт. 120.

12. Пресметај ги периметарот и плоштината на фигурата што е нацртана на цртеж 121 ако $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=3$ cm.



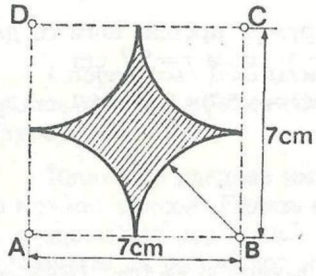
Црт. 120



Црт. 121

13. Пресметај ги периметарот и плоштината на шрафираниот дел од квадратот $ABCD$ (црт. 122).

14. Радиусите на две концентрични кружници се: а) $R=4{,}5$ cm, $r=3$ cm, б) $R=6$ cm, $r=2{,}5$ cm. Пресметај ја плоштината на кружниот прстен.



Црт. 122

15. Две концентрични кружници се долги $L_1=9{,}42$ dm и $L_2=6{,}28$ dm. Пресметај ги ширината и плоштината на кружниот прстен.

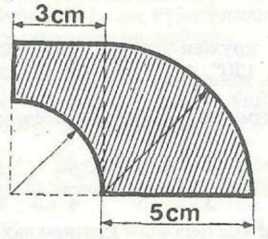
16. Периметарот на едно игралиште, што има форма на круг, изнесува 132 m. Околу игралиштето направена е патека широка 5 m. Да се пресмета плоштината на таа патека.

17. Пресметај ги периметарот и плоштината на фигурата, што е нацртана на цртеж 123.

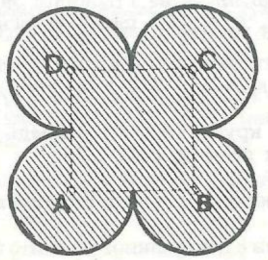
18. Од темињата на квадратот $ABCD$, што е со страна $a = 7$ cm, опишани се лаци со радиус $r = 3{,}5$ cm. Пресметај ја плоштината на фигурата, што ја ограничуваат лаците (црт. 124).

19. Пресметај ја плоштината на шрафираната фигура на црт. 125.

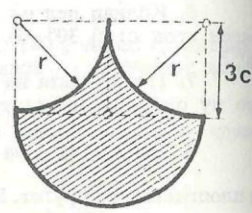
20. Од темињата на рамностраниот триаголник ABC, што е со страна $a=6$ cm, опишани се кружни лаци со радиус 2 cm, како што е покажано на цртеж 126. Пресметај ја плоштината на шрафираниот дел од триаголникот!



Црт. 123



Црт. 124

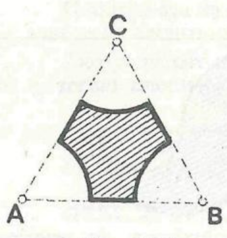


Црт. 125

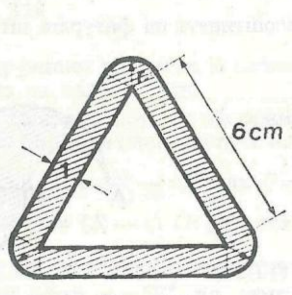
21. Пресметај ја плоштината на триаголната рамка, што е нацртана на цртежот 127.

22. Пресметај ја плоштината на квадратната рамка, што е нацртана на цртежот 128.

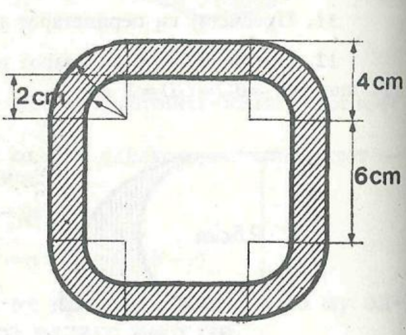
23. Четири кружници со еднакви радиуси $r=2{,}8$ cm се допираат една со друга однадвор. Пресметај ја плоштината на делот од рамнината меѓу нив. Направи цртеж!



Црт. 126



Црт. 127

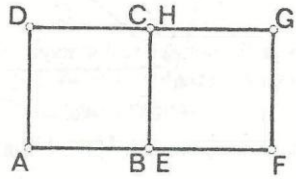


Црт. 128

ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ

1. Средините на страните AB и BC на квадратот $ABCD$ означи ги соодветно со P и S. Одреди ја ротацијата, која го пресликува векторот $\overrightarrow{AP}$ на векторот $\overrightarrow{SC}$.

2. Со кои познати пресликувања квадратот $ABCD$ може да се преслика на квадратот $EFGH$ (црт. 129)? Која транслација треба да се изврши? Одреди ја осата на симетријата, центарот на симетријата и центрите на ротациите, како и аглите на тие ротации!



Црт. 129

3. Конструирај рамностран триаголник на кој темињата да лежат на три дадени концентрични кружници.

4. Познато е, дека $ABC \xrightarrow{r\,(M,\,90^\circ)} A_1B_1C_1$. Докажи дека медијаната A_1S_1 на триаголникот $A_1B_1C_1$ е нормална на медијаната AS на $\triangle ABC$.

5. Конструирај рамнокрак триаголник со врв во дадена точка C и агол при врвот еднаков на 75°, така што другите две темиња да лежат соодветно на две дадени кружници.

6. Дадени се кружниците $k_1\,(O_1,\, r_1)$ и $k_2\,(O_2,\, r_2)$ и точка S. Да се конструира рамностран триаголник, на кој едното теме лежи во точката S, а другите две темиња да лежат соодветно на кружниците k_1 и k_2.

7. Какво множество од точки образуваат центрите на кружниците со даден радиус, кои од дадена права p отсекуваат тетиви со еднаква должина?

8. Докажи дека: ако тангентата на една кружница е паралелна на дадена тетива од кружницата, тогаш допирната точка на тангентата го преполовува кружниот лак што ѝ одговара на тетивата.

9. Дадени се кружница $k\,(O,\, r)$ и една точка M различна од центарот O. Конструирај друга кружница со центар во точката M, која да ја преполовува дадената кружница k.

10. Докажи дека: ако околу која и да е точка од бисектрисата на даден агол се опише кружница, која ги сече краците на аголот; добиените тетиви на краците се складни.

11. Низ крајните точки на еден дијаметар во кружницата повлечени се две паралелни тетиви. Докажи дека кружните лаци над тие тетиви се складни.

12. Во правоаголен триаголник ABC ($AC \perp BC$) со должини на страните a, b и c е впишана кружница со радиус r. Користејќи го својството на тангентните отсечки, покажи дека $r = \dfrac{a+b-c}{2}$.

13. Во дадена кружница впиши триаголник ABC со внатрешни агли $\alpha = 60^\circ$ и $\beta = 45^\circ$.

14. Докажи дека висините на триаголникот ABC се бисектриси на аглите во триаголникот $A_1B_1C_1$ чии темиња се подножјата на висините во $\triangle ABC$.

15. Околу рамностраниот триаголник ABC е опишана кружница k и произволна точка $M \in k$ различна од A, B и C е сврзана со темињата на $\triangle ABC$ (црт. 130). Со помош на ротацијата $r\,(B,\, 60^\circ)$ на триаголникот BCM покажи дека: $\overline{AM} = \overline{BM} + \overline{MC}$.

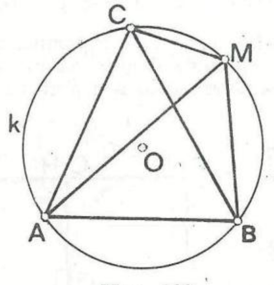
16. Две кружници се сечат во точките A и B. Низ точката B повлечена е произволна права p која ги сече двете кружници во точките M и N. Докажи дека аголот MAN не зависи од положбата на правата p.

17. Какво множество од точки образуваат врвовите на триаголниците со дадена основа AB и даден агол при врвот C?

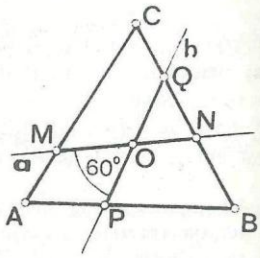
18. Познато е, дека еден многуаголник има 3 пати повеќе дијагонали, отколку страни. Кој е тој многуаголник?

19. Докажи дека секој тангентен многуаголник со складни агли е правилен.

20. Низ центарот на правилен триаголник ABC повлечени се правите a и b, кои зафаќаат агол 60°. Нека правите a и b ги сечат страните на триаголникот соодветно во точките M, N и P, Q (црт. 131). Докажи дека: $MN \cong PQ$.



Црт. 130



Црт. 131

21. Нацртај правилен десетаголник кога е позната должината на неговата најмала дијагонала.

22. Конструирај правилен шестаголник кога е позната должината на неговата помала дијагонала.

23. Со делење на кружницата на складни делови нацртај правилна ѕвезда: а) шесткрака, б) осумкрака, в) десеткрака. Кои разделни точки треба да се соединуваат?

24. Надворешниот агол на еден правилен многуаголник има 20°. Колку страни има тој многуаголник и колку вкупно дијагонали можат да се повлечат во него?

25. Конструирај кружница со даден радиус r, која ќе се допира до дадена права p, а чиј центар лежи на друга дадена права q.

26. Конструирај кружница со радиус 1,8 cm, што ќе се допира до друга дадена кружница, а чиј центар да лежи на дадена права.

27. Конструирај кружница со даден радиус, што ќе допира друга дадена кружница и да минува низ дадена точка!

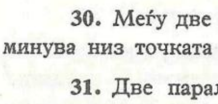
28. Конструирај кружница со даден радиус, која ќе се допира до дадена кружница и до дадена права!

29. Конструирај кружница, која ќе минува низ дадена точка M и ќе допира дадена права p во одредена точка A од неа!

30. Меѓу две паралелни прави дадена е точка M. Да се конструира кружница, што минува низ точката M и ги допира паралелните прави.

31. Две паралелни прави пресечени се со трета. Конструирај кружница што ќе ги допира сите три прави!

32. За колку проценти ќе се зголеми плоштината на квадратот со страна 8 m, ако страната ја зголемиме за: а) 2 cm, б) 4 cm.



Црт. 132

33. Пресметај ја плоштината на подот и вкупната плоштина на стаклата од прозорците во вашата училница. Проверите дали вашата училница е нормално осветлена, кога се знае дека за да биде таа нормално осветлена, плоштината на стаклата, што ја пропуштаат светлината треба да биде поголема од 20 % од плоштината на подот.

34. На цртежот 132 е нацртан квадрат $ABCD$, а точките K, L, M и N се средини на неговите страни. Спореди ја плоштината на четириаголникот $PQRS$ со плоштината на квадратот $ABCD$.

35. Пресекот на дијагоналите на паралелограмот е оддалечен од правите на кои лежат неговите страни за 2,5 cm и 3 cm. Одреди го периметарот на тој паралелограм, ако неговата плоштина е 60 cm^2.

36. Како се однесуваат плоштините на два паралелограма, кои имаат: а) складни основи, а различни висини, б) складни висини, а различни основи?

37. Во триаголникот ABC на страната BC е земена точка M, така што $\overline{CM}=3\overline{BM}$. Одреди ги плоштините на триаголниците ABM и AMC, ако плоштината на $\triangle ABC$ е еднаква на 28 cm^2.

38. Докажи дека: трите медијани го разбиваат триаголникот на шест еквивалентни триаголници.

39. Во внатрешната област на паралелограмот е земена произволна точка T и е соединета со секое теме на паралелограмот. Докажи дека збирот на плоштините на два вкрстени триаголници е еднаков на половина од плоштината на паралелограмот.

40. Како ќе се промени плоштината на триаголникот, ако секоја негова страна се зголеми: а) 2 пати, б) 3 пати?

41. Еден комбајн дневно (за 8 часа) жнее 11 *ha*. За колку време ќе се изжнее еден блок, кој има форма на трапез со основи 940 m и 660 m и висина 550 m.

42. Пресметај ја плоштината на трапез со основи долги $a=9$ cm и $b=5$ cm, а еден од неговите краци $c=6$ cm со основата гради агол од 30°.

43. Докажи дека: секоја права што минува низ пресекот на дијагоналите на паралелограмот, го разбива истиот на две еквивалентни фигури.

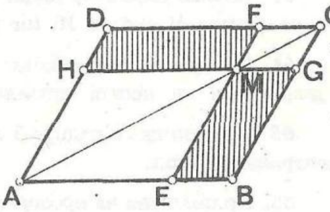
44. Докажи дека: секоја права што минува низ средината на средната линија на трапезот и ги сече основите, го дели истиот на две еквивалентни фигури.

45. Во паралелограмот $ABCD$ (црт. 133) е повлечена дијагоналата AC и на неа е земена произволна точка M. Низ точката M повлечени се прави EF и GH паралелни со страните на паралелограмот. Докажи дека: образуваните притоа паралелограми $AEFD$ и $ABGH$ се еквивалентни.

46. Од трапез $ABCD$ треба да се отсече триаголник, чија плоштина да биде еднаква на преостанатиот дел од трапезот. Како тоа ќе го сториш?

47. Низ произволна точка T од внатрешната област на паралелограмот повлечи права p, која ќе го разбие паралелограмот на два еквивалентни делови.

48. Даден квадрат расечи го на делови и од нив состави квадратна рамка, чија празнина да има форма на квадрат.



Црт. 133

49. Еден тротоар, кој има форма на правоаголник, долг е 124 m и широк 2,5 m. Колку плочки се потребни за поплочувањето на тротоарот ако плочките имаат форма на квадрат со страна 25 cm.

50. Во Битолско една задруга од една посеана нива со шеќерна репка, што имала форма на ромб со страна 340 m и висина 250 m, остварила среден принос на репка по хектар 318 квинтали. Колку шеќерна репка добила задругата од таа посеана нива.

51. Една нива има форма на паралелограм со основа 500 m и висина 280 m. За колку дена таа ќе биде изорана: а) со два коња кои за еден ден изоруваат по 40 ари, б) од еден трактор кој за еден ден изорува по 3,5 *ha*?

52. Квадрат со страна 24 m е еквивалентен на правоаголник со должина 32 m. Колкава е ширината на правоаголникот?

53. Една ливада има форма на трапезоид. Едната дијагонала изнесува 380 m. Да се пресмета плоштината на ливадата, ако темињата на триаголниците се оддалечени од измерената дијагонала на 210 m и 270 m. Колку сено ќе се добие од таа ливада, ако минатата година средно од секој декар е добиено по 420 кг сено?

54. Еден градинар засадил една леа, што имала форма на правоаголник со должина 50 m и ширина 18 m, со зелки. Друга леа која исто така имала форма на правоаголник само покуса за 12 m, а поширока за 6 m отколку првата, ја засадил со пипер. Која леа има поголема плоштина и за колку е поголема?

55. Нацртан е планот на една градина, што има форма на трапез, во размер 1:2000. На планот основите на трапезот се долги 9,5 cm и 4 cm, а висината 6,2 cm. Пресметај ја плоштината на таа градина.

56. Пресметај ја плоштината на едно кошаркашко игралиште, кое е нацртано во размер 1:500 со должина 5,2 cm и ширина 2,8 cm.

57. Должините на две концентрични кружници се: $L_1=16,7$ dm и $L_2=11,7$ dm. Одреди ја ширината на кружниот прстен!

58. Два кружни лака од две различни кружници имаат еднаква должина. Одреди го односот на радиусите на тие кружни лаци, ако аголната големина на едниот кружен лак е 30°, а на другиот 36°.

59. Нека A, B и C се три точки, кои лежат на една права, при што $\overline{AB}=7$ cm и $\overline{BC}=3$ cm. Конструирани се кружници со дијаметри AB, BC и AC. Покажи дека должината на најголемата кружница е еднаква на збирот од должините на другите две.

60. Докажи дека: ако една катета е аритметичка средина на хипотенузата и другата катета, тогаш периметарот на триаголникот е 3 пати поголем од таа катета.

61. Стожерот на едно гумно има дијаметар 14 cm. Коњот за стожерот е врзан со јаже долго 6 m. Колку пати коњот треба да го обиколи стожерот, за да се приближи до него на 0,7 m?

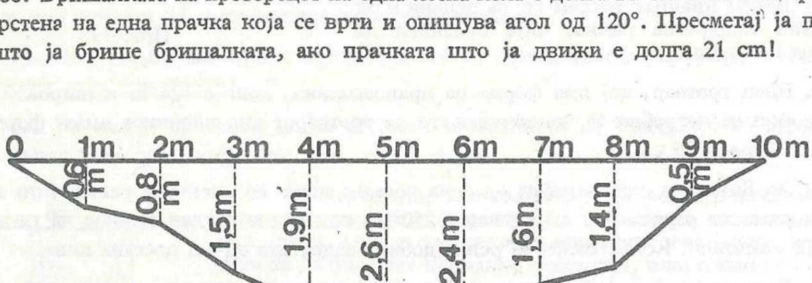
62. Една кружна натпреварувачка патека има радиус 350 m. Еден моторциклист истата патека ја обиколува 6 пати за 11 мин. Одреди ја брзината на движењето на моторциклистот во: а) метри во секунда, б) километри во час!

63. Колкав дијаметар имаат тркалата на еден автомобил, ако тие прават 500 заврти во една минута и ако за 10 минути автомобилот изминува 11 km.

64. Одреди го централниот агол на оној кружен исечок, чиј периметар е еднаков на должината на целата кружница.

65. Кружница со радиус 3 cm разгрната е во кружен лак со радиус 7,5 cm. Колкав е централниот агол?

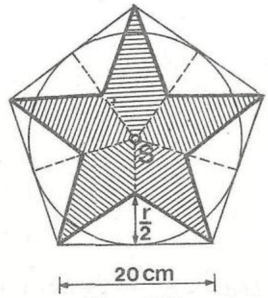
66. Бришалката на прозорецот на една лесна кола е долга 18 cm што е на средината прицврстена на една прачка која се врти и опишува агол од 120°. Пресметај ја плоштината што ја брише бришалката, ако прачката што ја движи е долга 21 cm!



Црт. 134

67. Пресметај ја плоштината на попречниот пресек на една река што е даден на цртежот 134 со означените длабочини на реката на секој еден метар од нејзиниот брег!

68. Пресметај ја плоштината на петокраката ѕвезда, која се образува кога темињата на правилниот петаголник, чија страна е $a=20$ cm, ги сврземе со средините од радиусите на впишаната кружница во него (црт. 135).



Црт. 135

69. Две тангенти на кружницата се сечат под агол 60°. Одреди го растојанието на пресекот на тангентите од центарот на кружницата, ако кружницата има радиус 7 cm.

70. Покажи дека: во правоаголен триаголник, на кој еден остар агол е 60°, висината што е повлечена од темето на правиот агол ја разделува хипотенузата на делови во однос 1:3.

ОДГОВОРИ И УПАТСТВА

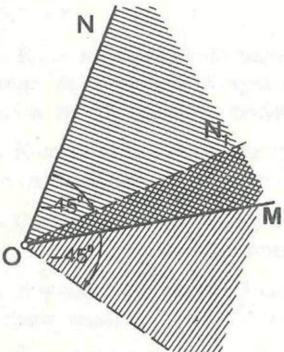
Глава I

РОТАЦИЈА

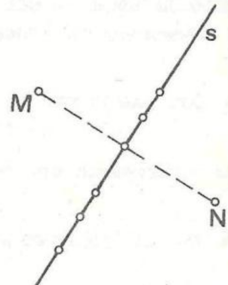
§ 1 и § 2

4. Се пресликува на: а) отсечка, б) полуправа, в) права, г) кружница, **5.** Разгледај го цртежот 136. Од него гледаме: а) $\sphericalangle MON \cup \sphericalangle M_1ON_1 = \sphericalangle M_1ON$, $\widehat{M_1ON} = 105°$, б) $\sphericalangle MON \cap \sphericalangle M_1ON_1 = \sphericalangle MON_1$, $\widehat{MON_1} = 15°$.

6. Секоја точка од симетралата s на отсечката MN (црт. 137) е можен центар на ротацијата r, при која $M \xrightarrow{r} N$.

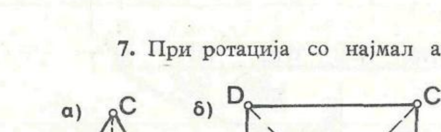


Црт. 136



Црт. 137

7. При ротација со најмал агол: а) $r(0, 120°)$, б) $r(0, 90°)$. Види цртеж. 138



Црт. 138

8. Постои таква ротација: а) $r(S, 180°)$, каде што S е средина на отсечката AB, б) $r(M, 180°)$, каде што M е произволна точка од правата p.

9. Можат. При најмал агол на ротацијата: а) $\alpha = 90°$, б) $\alpha = 180°$, в) $\alpha = 360°$, г) $\alpha = 180°$, д) $\alpha = 180°$, ѓ) $\alpha = 120°$. За секоја фигура одреди го уште и центарот на ротацијата.

10. Само една неподвижна точка — точката O.

11. Ротацијата е зададена, ако се дадени: а) центарот O и аголот на ротацијата, или б) центарот O и кои било две соодветни точки.

12. Не се различни. Таа ротација се вика централна симетрија.

13. Упатство: Од цртежот 6 гледаме дека ротациите за агол $60°$ и агол $-300°$ претставуваат една иста ротација и пишуваме $r(0, -300°) = r(0, 60°)$. Може да се покаже дека ќе важи и: $r(0, \alpha) = r(0, \alpha + k \cdot 360°)$, каде што k е кој било цел број.

Според тоа: $r(0, 240°) = r(0, 240° - 360°) = r(0, -120°)$,
$r(0, -200°) = r(0, -200° + 360°) = r(0, 160°)$,
$r(0, 330°) = r(0, 330° - 360°) = r(0, -30°)$.

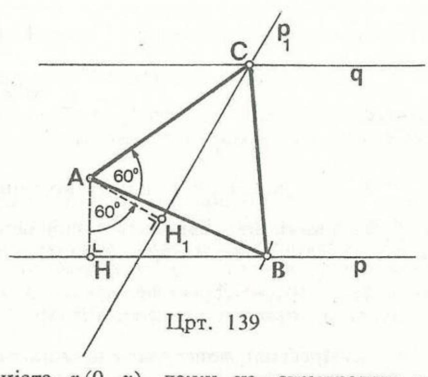
14. Постои. Тоа е ротацијата $r(0, \widehat{AOB})$.

15. Упатство: а) Произволна точка $M \neq 0$ и $M \in p$ ротирај ја при ротација $r(0, -45°)$. Тогаш $p \xrightarrow{r} OM_1$, б) Две произволни точки $A \in p$ и $B \in p$ ротирај ги при ротација $r(0, -45°)$. Тогаш $p \xrightarrow{r} A_1B_1$.

17. Упатство: а) Ротирај го центарот на кружницата $k(0, r)$ околу точката S за агол α. Тогаш кружницата $k(0, r)$ ќе се преслика на кружницата $k_1(0_1, r)$, б) Ротирај ги темињата на дадениот квадрат околу точката S за агол α.

§ 3

1. Анализа: Бараниот триаголник нека е ΔABC на црт. 139. При ротација на правата p околу точката A за агол $60°$, таа ќе се преслика на правата p_1. При истата ротација темето $B \in p$ ќе се преслика во точката C, која е пресек на правите p_1 и q (црт. 139), Бидејќи $\widehat{BAC} = 60°$ и $AB \cong AC$, тоа триаголникот ABC е равностран, па според тоа тој ги исполнува условите на задачата.



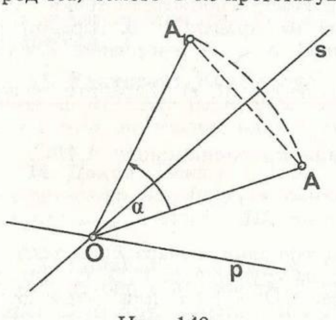
Црт. 139

Конструкција: 1. При ротација $r(A, 60°)$ правата p ја пресликуваме на правата p_1, 2. Точката C — пресек на правите p_1 и q, 3. Точката B — пресек на правата p и кружницата $k(A, \overline{AC})$.

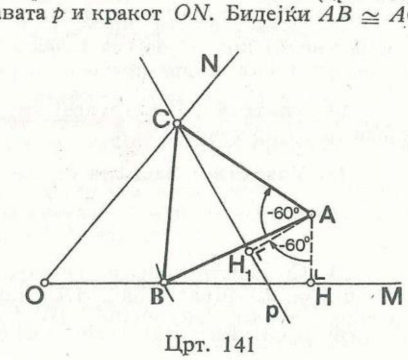
2. Упатство: На правата q избери произволна точка A. Понатаму исто како во претходната задача.

3. Анализа: Нека A и A_1 се две соодветни точки на ротацијата $r(0, \alpha)$. Бидејќи $OA \cong OA_1$, тоа триаголникот AA_1O е равнокрак. Според тоа, центарот на ротацијата $r(0, \alpha)$ лежи на симетралата s на отсечката AA_1 (црт. 140). Бидејќи $0 \in p$ и $0 \in s$, тоа центарот O ќе го одредиш како пресек на правата p и симетралата s, а аголот на ротацијата ќе биде аголот AOA_1.

4. Анализа: Бараниот равностран триаголник нека е ΔABC. При ротација $r(A, -60°)$ кракот OM ќе се преслика на дел од правата p, а темето B во темето C (црт. 141). Според тоа, темето C ќе претставува пресек на правата p и кракот ON. Бидејќи $AB \cong AC$



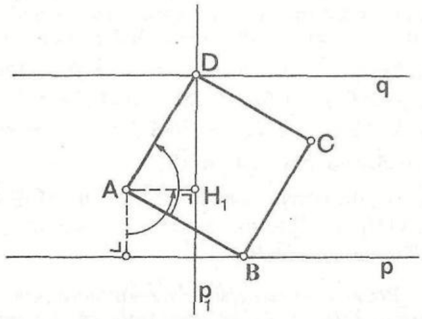
Црт. 140



Црт. 141

и $\widehat{BAC} = 60°$, тоа триаголникот ABC е рамностран, па според тоа тој ги исполнува условите на задачата.

5. Анализа: Задачата нека е решена и $ABCD$ нека е бараниот квадрат (црт. 142). При ротација на рамнината околу точката A за агол $90°$ правата p ќе се преслика на



Црт. 142

правата p_1, а темето $B \in p$ ќе се преслика во точката D, која е пресек на правите p_1 и q (црт. 142). Бидејќи $\widehat{BAD} = 90°$ и $AB \cong AD$, тоа точките A, B и D се три темиња на квадрат — кој ги исполнува условите на задачата. По одредувањето на темето D, како пресек на p_1 и q, потоа лесно ги одредуваме и другите две темиња B и C на бараниот квадрат.

Глава II

КРУЖНИЦА

§ 4

1. Две различни точки на кружницата формираат два кружни лаци.

2. Упатство: Дадените точки земај ги во парови. Преброј ги семожните парови. Одг.: а) 6, б) 12, в) 20 кружни лаци.

3. а), б), в) Да, г) не, д) да. **4.** На кружницата не ѝ припаѓа нејзиниот центар, на кругот му припаѓа неговиот центар.

5. Пресекот може да содржи: а) две точки една точка, или ниту една точка, б) бесконечно многу точки, само една точка, или ниту една точка, в) две точки, една точка, или ниту една точка, г) бесконечно многу точки, само една точка, или ниту една точка.

7. Упатство: Низ дадената точка $M \in p$ повлечи нормала кон дадената права p! Центарот на кружницата ќе лежи на таа нормала.

8. Нека е дадена права p и точка $T \in p$. Бараното множество точки е права q, која минува низ T (но без точката T) и е нормална на правата p. **9.** Бараното множество од точки се две прави — паралелни на правата p и на растојание r од неа.

10. Упатство: Конструирај кружница (кружен лак) $k(M, r)$. Бараните точки се одредени со пресекот $p \cap k$.

11. Упатство: Задачата се сведува на опишување кружница околу ΔABC.

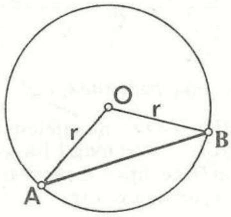
§ 5

1. Со конструкција на симетралите на две произволни непаралелни тетиви на кружницата. **2. Доказ:** Нека AB е произволна тетива на кружницата $k(O, r)$ (црт. 143). Од триаголникот ABO имаме: $\overline{AB} < \overline{AO} + \overline{OB}$, односно $\overline{AB} < r + r$ или $\overline{AB} < 2r$. Ако $O \in AB$, тогаш $\overline{AB} = 2r$.

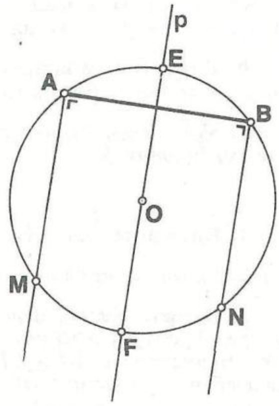
3. Упатство: Центарот на бараната кружница ќе лежи во средишната точка на отсечката AB.

4. Упатство: Центарот на бараната кружница ќе лежи на симетралата на отсечката — одредена со двете дадени точки.

5. Упатство: Разгледај ја претходната задача.



Црт. 143



Црт. 144

6. Упатство: Низ точката M повлечи права — нормална на отсечката OM.

7. Упатство: Конструирај ја симетралата на отсечката AB.

8. Нека C е произволна внатрешна точка на кружницата k (црт. 26). Најголема е тетивата MN — определена од секантата OC; а најмала е тетивата AB, што е нормална на MN (црт. 26).

9. Доказ: Нека AB, AM и BN се три тетиви на кружницата $k(O, r)$ и нека $AM \perp AB$ и $BN \perp AB$ (црт. 144). Треба да докажеме: $AM \cong BN$. Да ја повлечеме симетралата p на тетивата AB. При осна симетрија во однос на правата p полукружницата EAF ќе се преслика на полукружницата EBF, точката A ќе се преслика во точката B, а полуправата AM — на полуправата BN (Зошто?). Тоа пак повлекува дека точката M ќе се преслика во точката N. Според тоа, $AM \cong BN$, штд.

10. Тоа множество точки е: а) бисектрисата на дадениот агол, б) права — паралелна на дадените две паралелни прави и на еднакво растојание од нив.

11. Тоа множество точки е кружница со центар во дадената точка и радиус — еднаков на радиусите на сите кружници.

12. Упатство: Точките од рамнината, кои се на дадено растојание r од точката M, лежат на кружницата $k(M, r)$, а точките кои се на еднакви растојанија од точките A и B лежат на симетралата s на отсечката AB. Бараните точки од рамнината ќе ни ги даде пресекот $k \cap s$.

13. Упатство: Конструирај кружница k со центар во точката M и радиус — еднаков на даденото растојание. Потоа конструирај права q — нормална на правата p и на даденото растојание од неа. Бараната точка (точки) ќе ни ги даде пресекот $k \cap q$.

14. Доказ: Нека е дадена кружница $k(O, r)$ и во неа нека е повлечен произволен дијаметар AB. Бидејќи тангентите t_A и t_B во точките A и B на кружницата k се нормални на дијаметарот AB, тоа тие се паралелни меѓу себе, штд.

15. Упатство: За да се конструираат бараните тангенти на дадена кружница $k(O, r)$ потребно е претходно да се определат нивните допирни точки. За таа цел низ центарот O на кружницата k повлечи права q, што е: а) нормална, б) паралелна на дадената права p.

16. Упатство: Низ точката P повлечи права q што ќе биде нормална на дадената права p. Потоа конструирај ја симетралата s на отсечката PM. Центарот на бараната кружница ќе лежи во пресекот $q \cap s$.

17. Упатство: Низ точката $A \in p$ повлечи права $s \perp p$. Центарот на бараната кружница ќе лежи во пресекот $s \cap q$.

18. Упатство: Во полурамнината, во која лежи точката M, повлечи права q – паралелна на дадената права p и на растојание r од неа. Потоа конструирај кружница $k_1(M, r)$. Пресекот $q \cap k_1$ ни ги дава точките, што се центри на бараната кружница.

19. Упатство: Конструирај прво кружница k, со центар во точката M и радиус еднаков на даденото растојание. Бараните точки ќе ни ги даде пресекот $k \cap k_1$.

20. Упатство: Радиусот на бараната кружница е еднаков на растојанието од точката M до правата p.

§ 6

1. Кружните лаци $\widehat{AC}$ и $\widehat{BC}$ се складни.

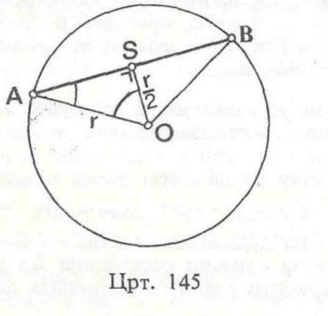
2. Секој од кружните лаци $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$ и $\widehat{AC}$ има аголна големина $120°$.

3. Доказ: Нека е дадена кружница $k(O, r)$, а AB и CD се два нејзини нормални дијаметри. Треба да докажеме дека четириаголникот $ABCD$ е квадрат. Бидејќи дијагоналите (дијаметрите) AB и CD на четириаголникот $ACBD$ се преполовуваат, тоа тој е паралелограм. А бидејќи $AB \cong CD$ и $AB \perp CD$, тоа тој е квадрат, штд.

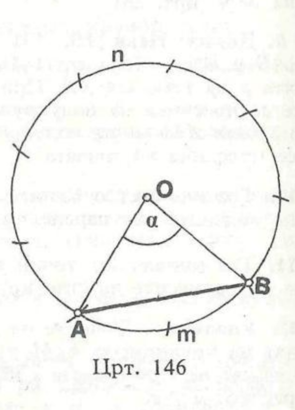
4. а) $60°$, б) $45°$, в) $30°$, г) $20°$. **5.** $60°$.

6. Доказ: Нека $\widehat{AB} \cong \widehat{BC}$ и нека M и N се средини на кружните лаци $\widehat{AB}$ и $\widehat{BC}$. Од $\widehat{AM} \cong \widehat{MB} \cong \widehat{BN} \cong \widehat{NC}$ следува дека $\widehat{AM} + \widehat{MB} \cong \widehat{MB} + \widehat{BN} \cong \widehat{BN} + \widehat{NC}$, односно $\widehat{AB} \cong \widehat{MN} \cong \widehat{BC}$, штд.

7. Упатство: Нацртај произволна кружница $k(O, r)$. а) Конструирај два заемно нормални радиуси $OA \perp OB$, потоа конструирај ја симетралата на тетивата AB односно кружниот лак AB. б) Конструирај тетива MN, чија должина е еднаква на радиусот r, а потоа конструирај ја симетралата на тетивата MN, односно кружниот лак $\widehat{MN}$., в) Конструирај тетива $\widehat{NM} = r$., г) $135° = 3 \cdot 45°$.



Црт. 145



Црт. 146

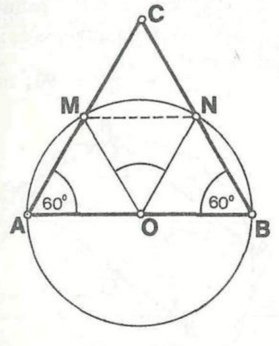
8. Упатство: Разгледај го црт. 145. Во правоаголниот триаголник ASO гледаме дека катетата OS е половина од хипотенузата OA, па според тоа $\widehat{A} = 30°$, а $\widehat{AOS} = 60°$. Значи $\widehat{AOB} = 120°$. Одг.: Аголната големина на $\widehat{AB}$ изнесува $120°$.

9. Упатство: Ако кружницата ја разделиме на $2 + 7 = 9$ складни делови, тогаш секој од тие делови (кружни лаци) ќе има по $40°$ (црт. 146). Кружниот лак $\widehat{AmB}$ содржи два такви делови, значи неговата аголна големина е $80°$. Одг.: $\alpha = 80°$.

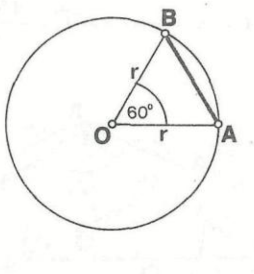
10. Упатство: Разгледај го црт. 147, каде што ΔABC е рамностран. Значи: $\widehat{A} = 60°$ и $\widehat{B} = 60°$. Оттука следува дека и триаголниците AMO и BNO се рамнострани. Значи: $\widehat{AOM} = 60°$ и $\widehat{BON} = 60°$. Според тоа и $\widehat{MON} = 60°$. Одг.: Секој од кружните лаци $\widehat{AM}$, $\widehat{MN}$ и $\widehat{NB}$ има по $60°$.

§ 7

1. Од 0° до 180°. **2.** И соодветниот периферен агол ќе се зголеми 3 пати. **3.** а) $\frac{1}{4}$, б) $\frac{1}{5}$, в) $\frac{1}{6}$ од кружницата.



Црт. 147

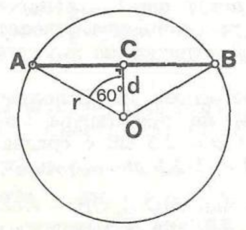


Црт. 148

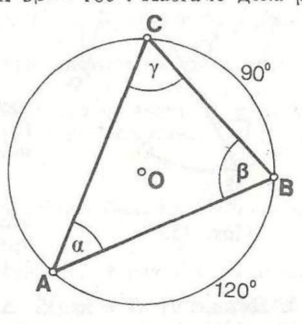
4. Доказ: Нека е дадена кружница $k(O, r)$ (црт. 148) Ако $AB \cong OA \cong OB$, тогаш триаголникот ABO е рамностран. Оттука следува дека централниот агол AOB и кружниот лак AB имаат 60°. Обратно: ако $\widehat{AOB} = 60°$, тогаш рамнокракиот триаголник ABO е рамностран. Значи: $AB \cong OA$, штд.

5. Упатство: Прво одреди ја аголната големина на односниот кружен лак. Одг.: а) 45°, б) 40°, в) 150°, г) 72°.

6. Од $\beta + \alpha = 180°$, односно $\beta + 2\beta = 180°$ или $3\beta = 180°$. Наоѓаме дека $\beta = 60°$, а $\alpha = 120°$.



Црт. 149



Црт. 150

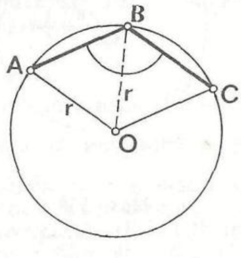
7. Упатство: Разгледај го црт. 149, во кој $\widehat{AOB} = 120°$. Гледаме правоаголниот триаголник ACO има остри агли 60° и 30°. Знаете дека: катетата што лежи спроти острииот агол 30° е еднаква на половина од хипотенузата. Оттука добиваме: $d = \frac{\overline{AO}}{2} = \frac{r}{2} = \frac{5 \text{ cm}}{2} = 2{,}5$ cm.

8. Упатство: Разгледај го цртежот 150, каде што кружните лаци $\widehat{AB}$ и $\widehat{BC}$ соодветно се еднакви на 120° и 90°. Гледаме: внатрешните агли на ΔABC се периферни агли на опишаната околу него кружница. Одг.: $\alpha = \frac{90°}{2} = 45°$, $\gamma = \frac{120°}{2} = 60°$ и $\beta = 180° - (60° + 45°) = 75°$.

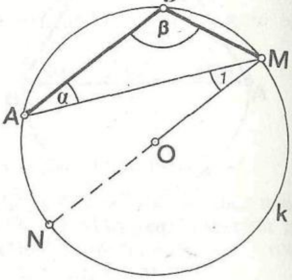
9. Упатство: Разгледај го цртежот 151, каде што $\widehat{AB} = \widehat{BC} = r$. Гледате триаголниците ABO и BCO се рамнострани. Оттука: $\widehat{ABO} = 60°$ и $\widehat{OBC} = 60°$. Според тоа: $\widehat{ABC} = 60° + 60° = 120°$.

10. Упатство: Направи соодветен цртеж. Одг.: 60°.

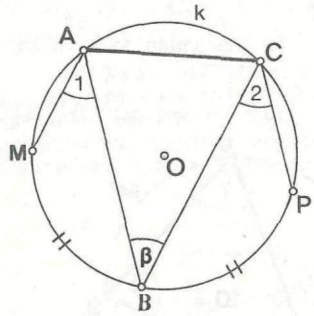
11. Доказ: Нека во кружницата k (црт. 152) повлечеме произволен радиус OM и тетива $AB \parallel OM$. Бидејќи е $\widehat{1} = \alpha$ (Зошто), тоа $\widehat{AN} \cong \widehat{BM}$. Оттука добиваме: $\widehat{MBA} - \widehat{MAB} = \beta - \alpha = \beta - \widehat{1} = \frac{\widehat{ANM}}{2} - \frac{\widehat{AN}}{2} = \frac{\widehat{ANM} - \widehat{AN}}{2} = \frac{\widehat{NM}}{2} = \frac{180°}{2} = 90$; штд.



Црт. 151



Црт. 152



Црт. 153

12. Доказ: На цртеж 153 околу ΔABC опишана е кружница k и во неа повлечени се две тетиви $AM \parallel BC$ и $CP \parallel AB$. Од $AM \parallel BC$ следува дека $\sphericalangle 1 \cong \beta$, а од $CP \parallel AB$ следува дека $\beta \cong \sphericalangle 2$. Оттука: $\sphericalangle 1 \cong \beta$ и $\beta \cong \sphericalangle 2 \Rightarrow \sphericalangle 1 \cong 2$. Според тоа: $\widehat{MB} \cong \widehat{PB}$, штд.

§ 8

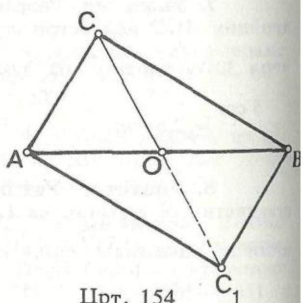
1. Упатство: Конструирај кружница k, чиј дијаметар е отсечката AB, потоа одреди го пресекот $k \cap p$. Секоја точка од $k \cap p$ ги исполнува условите на задачата. па според тоа таа е решение на задачата.

2. Решение: Врз основа на Талесовата теорема отсечката AB (црт. 40) ќе претставува дијаметар на кружницата k. Бидејќи $\overline{CD} = 2{,}5$ cm е средна линија на ΔABM, тоа $\overline{AB} = 2 \cdot CD = 2 \cdot 2{,}5$ cm $= 5$ cm.

3. Доказ: Нека е даден ΔABC (црт. 154), кај кој $\overline{AO} = \overline{OB} = \overline{CO}$. При централна симетрија во однос на точката O триаголникот ABC ќе се преслика на ΔBAC_1, т. е. $A \to B$, $B \to A$ и $C \to C_1$. Да го разгледаме четириаголникот AC_1BC. Во него $\overline{AO} = \overline{OB} = \overline{CO} = \overline{OC_1}$ и $\overline{AB} = \overline{CC_1}$. Значи, дијагоналите AB и CC_1 се преполовуваат и се складни. Според тоа, четириаголникот AC_1BC е правоаголник, т. е. $\widehat{C} = 90°$, штд.

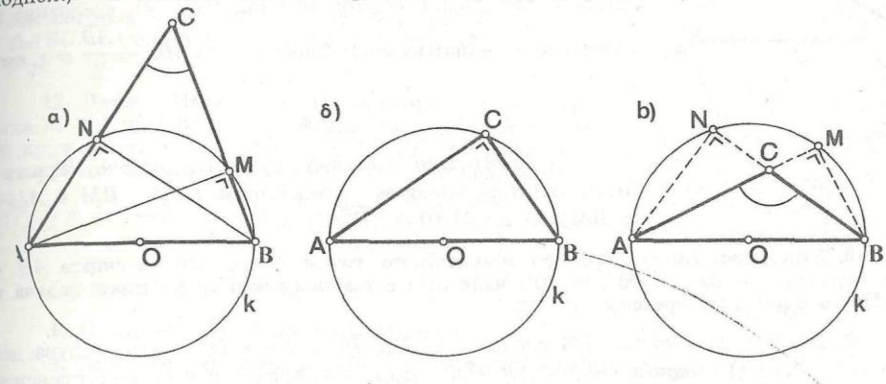
4. Конструкција: На црт. 41 повлечи ги отсечките AN и BM. Тие се две висини на ΔABC (Зошто?) Пресекот на отсечките AN и BM ќе претставува бараниот ортоцентар на ΔABC.

5. Конструкција: 1. Полуправи AC и BC, 2. Точка M — пресек на полуправата BC и кружницата k, 3. Точка N — пресек на AC и k, 4,. Полуправа AM и BN, 5. Точка S — пресек на полуправите AM и BN, 6. Правата SC е бараната нормала на дијаметарот AB (црт. 42).



Црт. 154

6. Доказ: Нека е даден триаголник ABC и над страната AB (како дијаметар) конструирана е кружница k (црт. 155). Постојат три можности: а) Темето C лежи надвор од кружницата k (црт. 155-а). Тогаш пресечната точка M на страната BC и кружницата k е подножје на висината AM кон страната BC, бидејќи $AM \perp BC$. Слично на тоа и точката $N \in k$ е подножје на висината BN кон страната AC., б) Темето C лежи на кружницата k (црт. 155-б). Тогаш ΔABC е правоаголен, па според тоа точката $C \in k$ е подножје на двете висини: AC кон страната BC, и BC кон страната AC., в) Темето C лежи во внатрешноста на кружницата k (црт. 155-в). Тогаш точката $M \in k$ ќе биде подножје на висината BM кон страната AC (бидејќи $BM \perp AM$, а точката N ќе биде подножје на висината AN кон страната BC (бидејќи $AN \perp BN$).



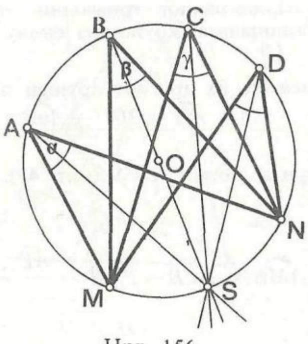
Црт. 155

7. Упатство: Конструирај кружница $k(B,\ 3\ \text{cm})$, и од точката A повлечи тангенти на кружницата k.

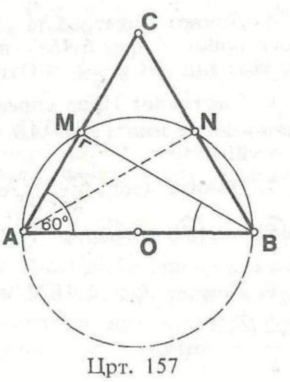
8. Доказ: Нека се дадени неколку периферни агли α, β, γ, ... што зафаќаат ист кружен лак $\widehat{MN}$ во кружницата k (црт. 156). Аглите α, β и γ се складни, бидејќи $\alpha = \beta = \gamma = \dfrac{\widehat{MN}}{2}$. Бисектрисата на аголот α го разделува истиот на два складни периферни агли MAS и NAS. Значи: $\widehat{MS} \cong \widehat{SN}$, па според тоа точката S е средина на кружниот лак $\widehat{MN}$. Исто така и бисектрисите на аглите β и γ ќе минат низ точката S — средина на кружниот лак $\widehat{MN}$ (Зошто?).

9. Упатство: Разгледај го цртежот 39. Во овој случај, бидејќи $\widehat{TMT_1} = 45°$, тоа $\widehat{TOT_1} = 135°$. Според тоа: $\widehat{TT_1} = \widehat{TOT_1} = 135°$.

10. Упатство: Разгледај го црт. 157, каде што ABC е рамностран триаголник. Гледаме: $BM \perp AC$. Од ΔABM наоѓаме дека $\widehat{ABM} = 30°$. Според тоа: кружниот лак $\widehat{AM}$, а исто така и $\widehat{BN}$ има 60°. Оттука следува дека и кружниот лак $\widehat{MN}$ има аголна големина 60°.

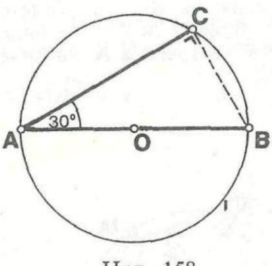


Црт. 156



Црт. 157

11. Упатство: а) Над хипотенузата c конструирај полукружница и права p — паралелна на хипотенузата, а на растојание h од неа: б) Над збирот од отсечките на кои е разделена хипотенузата, конструирај полукружница и низ заедничката точка на отсечките повлечи права — нормална на нив.



Црт. 158

12. Доказ: Нека е дадена кружница k, во која е повлечен дијаметар AB и тетива AC, таква што $\widehat{BAC} = 30°$ (црт. 158). Значи, ΔABC е правоаголен ($AC \perp BC$) со еден остар агол $\widehat{BAC} = 30°$. Знаете дека: во правоаголен триаголник катетата што лежи спроти остриот агол 30° е еднаква на половина од хипотенузата. Според тоа: $\overline{BC} = \dfrac{\overline{AB}}{2} = r$, штд.

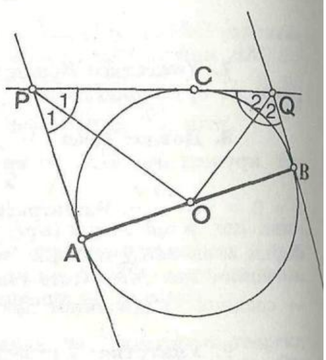
§ 9

1. Упатство: Направи соодветен цртеж. Триаголникот ABM е равнокрак правоаголен ($AM \perp BM$ и $AM \cong \cong BM$). Одг.: $\widehat{MAB} = \widehat{MBA} = 45°$.

2. Упатство: Конструирај го множеството точки Φ од кои отсечката AB се гледа под агол: а) 60°, б) 90°, в) 30°, каде што е тоа покажано со решената задача во § 9. Потоа одреди го пресекот $\Phi \cap p$.

3. Доказ: Од цртежот 159 гледаме: а) Од $\overline{PC} = \overline{PA}$ и $\overline{QC} = \overline{QB}$ следува дека $\overline{PC} + \overline{QC} = \overline{PA} + \overline{QB}$, односно $\overline{PQ} = \overline{AP} + \overline{QB}$, штд., б) Аглите $\widehat{P}$ и $\widehat{Q}$ се суплементни (Зошто?), $\widehat{P} + \widehat{Q} = 180°$. Од друга страна пак PO и QO се бесектриси на аглите $\widehat{P}$ и $\widehat{Q}$, т. е. $\widehat{1} = \dfrac{\widehat{P}}{2}$ и $\widehat{2} = \dfrac{\widehat{Q}}{2}$.

Од ΔPOQ имаме: $\widehat{POQ} = 180° - (\widehat{1} + \widehat{2}) = 180° - \left(\dfrac{\widehat{P}}{2} + \dfrac{\widehat{Q}}{2}\right) = 180° - \dfrac{\widehat{P} + \widehat{Q}}{2} = 180° - \dfrac{180°}{2} = 180° - 90° = 90°$, штд.



Црт. 159

4. Упатство: Прво определи ја аголната големина на секој од лаците $\widehat{AmB}$ и $\widehat{AnB}$. Од секоја точка на лакот $\widehat{AmB}$ (освен A и B) тетивата AB ќе се гледа под агол $\alpha = \dfrac{\widehat{AnB}}{2}$, а од секоја точка на лакот $\widehat{AnB}$ (освен A и B) тетивата AB ќе се гледа под агол $\beta = \dfrac{\widehat{AmB}}{2}$. Одг.: а) $\alpha = 80°$, $\beta = 100°$, б) $\alpha = 140°$ $\beta = 40°$.

5. Доказ: Симетралата s на основата AB на рамнокракиот триаголник ABC минува низ врвот C на ΔABC и низ центарот на опишаната кружница околу ΔABC. Според тоа: $s \perp AB$ и $s \perp t$. Оттука следува дека $t \parallel AB$.

6. Упатство: Прво определи ја аголната големина на другиот кружен лак $\widehat{AnB}$, а потоа — на дадениот лак $\widehat{AB}$. Одг.: $\widehat{AnB} = 2 \cdot 75° = 150°$, $\widehat{AB} = 360° - \widehat{AnB} = 360° - 150° = 210°$.

7. Доказ: Аголот ASB е надворешен за триаголникот BPS (црт. 47). Според тоа: $\widehat{ASB} = \widehat{APB} + \widehat{MBP} = \dfrac{\widehat{AB}}{2} + \dfrac{\widehat{MP}}{2} = \dfrac{\widehat{AB} + \widehat{MP}}{2}$, штд.

8. Доказ: Од ΔAEM (црт. 48) имаме: $\widehat{AMB} = \widehat{AEB} - \widehat{PAE} = \dfrac{\widehat{AB}}{2} - \dfrac{\widehat{PE}}{2} = \dfrac{\widehat{AB} - \widehat{PE}}{2}$, штд.

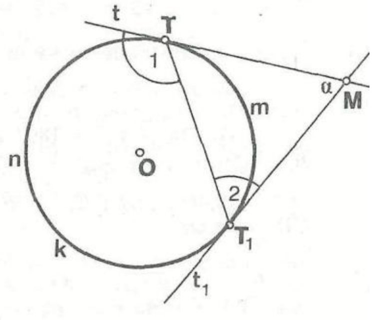
9. Упатство: Конструирај ја отсечката AB и права p — паралелна на AB и на растојание h од неа. Потоа конструирај го множеството точки Φ од кои отсечката AB се гледа под дадениот агол $\widehat{C}$. Трето теме C на бараниот ΔABC може да биде секоја точка од пресекот $\Phi \cap p$. Ако $\Phi \cap p = \varnothing$, тогаш задачата нема решение.

10. Упатство: Разгледај ја решената задача во § 9.

11. Упатство: Бараната точка нека е M, од која секоја страна на ΔABC се гледа пcд ист агол. Тој агол мора да биде $\alpha = \dfrac{360°}{3} = 120°$. Нека Φ_{AB}, Φ_{BC} и Φ_{AC} се множествата точки од кои страните AB, BC и AC на ΔABC се гледаат под агол $120°$. Тогаш $\Phi_{AB} \cap \Phi_{BC} \cap \Phi_{AC} = \{M\}$.

12. Доказ: Нека е дадена кружница k и една точка $M \notin k$ од која се повлечени две тангенти t и t_1 кон кружницата k (црт. 160). Од ΔMTT_1, а врз основа на теоремата за агол меѓу тангента и тетива, имаме:

$$\widehat{TMT_1} = \alpha = \hat{1} - \hat{2} = \frac{\widehat{TnT_1}}{2} - \frac{\widehat{TmT_1}}{2} = \frac{\widehat{TnT_1} - \widehat{TmT_1}}{2}, \text{ штд.}$$



Црт. 160

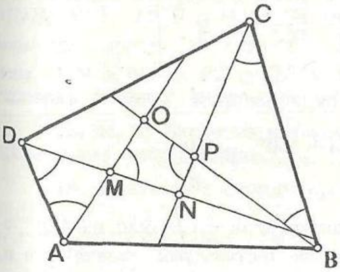
§ 10

1. Околу правоаголникот., **2.** Во ромбот.

3. Доказ: Нека трапезот $ABCD$ ($AB \parallel CD$) е тетивен. За него ќе важи: $\widehat{B} + \widehat{C} = 180°$ (бидејќи е трапез) и $\widehat{A} + \widehat{C} = 180°$ (бидејќи е тетивен). Оттука следува дека $\widehat{A} = \widehat{B}$, т. е. аглите при долната основа се еднакви. Значи, трапезот е равнокрак, штд.

4. Доказ: а) Кај равнокракиот трапез $ABCD$ ($\overline{AD} = \overline{BC}$) кракот нека е складен на неговата средна линија, т. е. нека $\overline{AD} = \overline{BC} = \dfrac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2}$. Во тој случај имаме: $\overline{AD} + \overline{BC} = 2 \cdot \dfrac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2}$, односно $\overline{AD} + \overline{BC} = \overline{AB} + \overline{CD}$, а тоа значи дека трапезот $ABCD$ е тангентен., б) Равнокракиот трапез $ABCD$ ($\overline{AD} = \overline{BC}$) нека е тангентен, т. е. нека $\overline{AD} = \overline{BC}$ и $\overline{AD} + \overline{BC} = \overline{AB} + \overline{CD}$. Оттука следува дека: $\overline{BC} + \overline{BC} = \overline{AB} + \overline{CD}$ или $2 \cdot \overline{BC} = \overline{AB} + \overline{CD}$, односно $\overline{BC} = \dfrac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2}$. Значи, должината на кракот е еднаква на должината на средната линија, штд.

5. Доказ: Разгледај го цртеж 161, каде што $ABCD$ е произволен четириаголник, а бисектрисите на неговите внатрешни агли го образуваат четириаголникот $MNPQ$. За да докажеме дека $MNPQ$ е тетивен четириаголник, доволно е да покажеме дека $\widehat{M} + \widehat{P} = 180°$. Од ΔAMD имаме $\widehat{M} = 180° - \left(\dfrac{\widehat{A}}{2} + \dfrac{\widehat{D}}{2}\right)$, а од ΔBPC имаме $\widehat{P} = 180° - \left(\dfrac{\widehat{B}}{2} + \dfrac{\widehat{C}}{2}\right)$. Оттука добиваме: $\widehat{M} + \widehat{P} = 360° - \left(\dfrac{\widehat{A}}{2} + \dfrac{\widehat{B}}{2} + \dfrac{\widehat{C}}{2} + \dfrac{\widehat{D}}{2}\right) = 360° - \dfrac{\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D}}{2} = 360° - \dfrac{360°}{2} = 180°$, штд.



Црт. 161

6. Упатство: Лесно може да се покаже дека точките A, B, A_1 и B_1 се темиња на равнокрак трапез, околу кого секогаш може да се опише кружница.

7. Доказ: Нека четириаголникот $ABCD$ е тетивен. Околу него може да се опише кружница k. Аглите ABD и ACD во кружницата k се периферни што зафаќаат исти кружен лак AD. Оттука следува дека $\sphericalangle ABD \cong \sphericalangle ACD$, штд.

8. Доказ: Нека трапезот $ABCD$ е тангентен. Значи за него ќе важи: $\overline{AB}+\overline{CD}=\overline{AD}+\overline{BC}$. Ако земеме предвид дека $\overline{AB}+\overline{CD}+\overline{AD}+\overline{BC}=L$, тогаш $2(\overline{AB}+\overline{CD})=L$ или $\overline{AB}+\overline{CD}=\frac{L}{2}$. Во таков случај средната линија на трапезот $ABCD$, ќе биде долга $m=\frac{\overline{AB}+\overline{CD}}{2}=\frac{\frac{L}{2}}{2}=\frac{L}{4}$, штд.

9. Околу ромб со прави агли, т. е. околу квадрат.

10. Во правоаголник со еднакви страни, т. е. во квадрат.

11. Од $\widehat{A}+\widehat{C}=180°$ и $\widehat{A}=127°$, следува дека $\widehat{C}=53°$; а од $\widehat{B}+\widehat{D}=180°$ и $\widehat{B}=72°$, наоѓаме дека $\widehat{D}=108°$.

12. Од $\overline{AB}+\overline{CD}=\overline{BC}+\overline{AD}$ и $\overline{AB}=7$ cm, $\overline{BC}=12$ cm, $\overline{AD}=5$ cm наоѓаме дека $\overline{CD}=10$ cm.

Глава III

ПРАВИЛНИ МНОГУАГОЛНИЦИ

§ 11 и § 12

4. а) Една, б) две, в) 12 дијагонали.

5. а) 5, б) 14, в) 54, г) 170, д) 1175 дијагонали.

6. а) Седумаголник, 14 дијагонали; б) десетаголник, 35 дијагонали; в) 18-аголник, 135 дијагонали; г) 28-аголник, 350 дијагонали.

7. Кај: а) четириаголникот, б) седумаголникот.

8. На: а) 2, б) 3, в) 5, г) 13 триаголници.

9. а) Петаголник, б) седумаголник, в) 19-аголник, г) 42-аголник.

10. а) 540°, б) 720°, в) 1080°, г) 1800°.

11. а) Петаголник, б) шестаголник, в) седумаголник, г) 10-аголник, д) 12-аголник.
12. 116°.

13. а) 108°, б) 120°, в) 135°, г) 140°, д) 144°, ѓ) 150°, е) 160°.

14. Кај: а) осумаголникот, б) 12-аголникот, в) 15-аголникот, г) 20-аголникот.

15. а) 72°, б) 60°, в) 40°, г) 36°.

16. Кај квадратот.

§ 13

1. Централниот агол е $\frac{360°}{n}$, а исто така и надворешниот агол е $180° - \frac{(n-2)\cdot 180°}{n}=\frac{180°\cdot n-(180°\cdot n-360°)}{n}=\frac{180°n-180°n+360°}{n}=\frac{360°}{n}$.

2. Бидејќи збирот на внатрешниот и надворешниот агол е еднаков на 180°, а надворешниот агол е еднаков на централниот агол (види ја претходната задача) тоа и збирот на внатрешниот и централниот агол кај секој правилен многуаголник е еднаков на 180°.

3. а) 120°, б) 90°, в) 72°, г) 60°.

4. а) $\left(128\dfrac{4}{7}\right)^\circ$, $\left(51\dfrac{3}{7}\right)^\circ$, $\left(51\dfrac{3}{7}\right)^\circ$, б) 135°, 45°, 45°, в) 140°, 40°, 40°.

5. а) Осумаголникот, б) 12-аголникот, в) 10-аголникот.

6. Во: а) 18-аголникот, б) 20-аголникот.

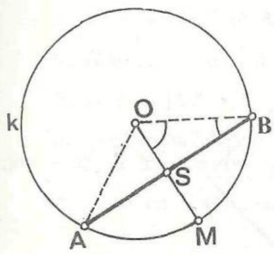
7. Упатство: Да ја одредиме прво големината на внатрешниот агол. Внатрешниот агол нека е α, тогаш централниот агол ќе биде $\alpha - 108^\circ$. Но збирот на тие два агла е еднаков на 180°. Оттука имаме $\alpha + \alpha - 108^\circ = 180^\circ$ или $2\alpha = 288^\circ$ или $\alpha = 144^\circ$. Значи, внатрешниот агол има 144°. Тоа е правилен десетаголник.

8. а) Не постои, б) 18-аголник, в), г) не постои, д) осумаголник, ѓ) не постои.

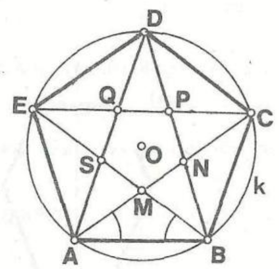
9. Упатство: Околу правилниот петаголник $ABCDE$ опиши кружница k. Дијагоналите AC и AD го разделуваат аголот A на три агли, кои во кружницата k се периферни и зафаќаат складни кружни лаци $\widehat{BC} \cong \widehat{CD} \cong \widehat{ED}$. Според тоа, добиените три агли се складни.

10. Упатство: Разгледај го црт. 162, во кој $AB \perp OM$ и $MS \cong SO$. Гледаме, во правоаголниот ΔOBS катетата OS е половина од хипотенузата OB. Значи: $\widehat{B} = 30^\circ$, а $\widehat{BOS} = 60^\circ$. Според тоа, централниот агол AOB што ѝ одговара на тетивата AB има 120°. Оттука следува дека тетивата AB е страна на вписан рамностран триаголник во кружницата k.

11. Доказ: Разгледај го црт. 163, на кој околу правилниот петаголник $ABCDE$ е опишана кружница и повлечени се сите негови дијагонали а) Да го разгледаме ΔABD. Аглите BAD и ABD во кружницата k се периферни и зафаќаат складни кружни лаци ($\widehat{BCD} \cong \widehat{AED}$), според тоа и тие се складни, т. е. $\sphericalangle BAD \cong \sphericalangle ABD$. Тоа значи дека



Црт. 162



Црт. 163

триаголникот ABD е рамнокрак, т. е. неговите краци — дијагоналите AD и BD се складни. На сличен начин се докажува дека и другите дијагонали на правилниот петаголник се складни., б) Да ги разгледаме триаголниците ABM, BCN, CDP, DEQ и ASE. Сите тие се рамнокраки (аглите при основата им се складни $\sphericalangle BAC \cong \sphericalangle ABE$) и имаат складни основи. Според тоа, тие триаголници се складни. Од нивната складност следува дека: $\widehat{M} = \widehat{N} = \widehat{P} = \widehat{Q} = \widehat{S}$ и $AM \cong BM \cong BN \cong CN \ldots$ Значи. петаголникот $MNPQS$ има складни внатрешни агли. Да ги разгледаме сега рамнокраките триаголници MSA, MNB, NPS, PQD и QSE. И тие се складни, бидејќи имаат складни краци и складни агли при врвот ($\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = \widehat{D} = \widehat{E}$). Значи, сите тие се складни, од што следува дека $MN \cong NP \cong PQ \cong QS \cong MS$. Според тоа, петаголникот $MNPQS$ има складни страни и складни внатрешни агли. Следователно, тој е правилен, штд.

12. а), б) Бараното множество точки се состои само од една точка — центарот на правилниот многуаголник.

13. Упатство: Опиши кружница околу правилниот петаголник $ABCDE$. Аглите x, y и z се периферни. Одг.: $x = \dfrac{\widehat{CD}}{2} = \dfrac{72^\circ}{2} = 36^\circ$, $z = \dfrac{\widehat{AB}}{2} = \dfrac{72^\circ}{2} = 36^\circ$ и $y = \dfrac{\widehat{ABC}}{2} = \dfrac{2\cdot 72^\circ}{2} = 72^\circ$.

14. Доказ: Добиениот шестоаголник е правилен, бидејќи има складни страни *(Зошто?) и складни внатрешни агли (Зошто?).*

15. Доказ: Ако еден тетивен многуаголник има складни страни, тогаш околу него може да се опише кружница, а неговите темиња ќе ја разделат кружницата на n складни кружни лаци. Согласно со теоремата 1 во § 13, тој многуаголник е правилен, штд.

§ 14

3. Упатство: Нацртај кружница k со радиус r и раздели ја на шест складни делови. Потоа во разделените точки конструирај тангенти на кружницата k.

6. Упатство: Знаеш дека внатрешниот агол кај правилниот осумаголник има 135°, а централниот 45°. Конструирај агол $\widehat{MAN} = 135°$ и од темето A по неговите краци нанеси отсечки $\overline{AB} = \overline{AH} = 2$ cm. Потоа конструирај ги симетралите на отсечките AB и AH. Просекот на тие симетрали ќе ни го даде центарот на бараниот правилен осумаголник $ABCDEFGH$.

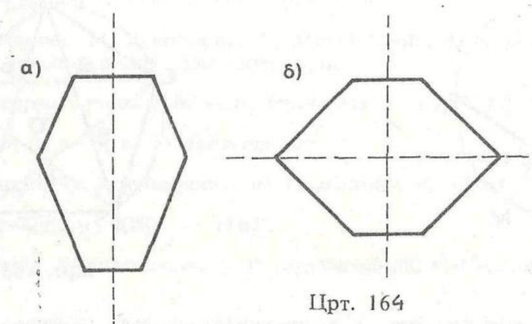
8. Упатство: а) Разгледај го црт. 74. б) Внатрешниот агол кај правилниот деветаголник изнесува 140°. Останатото како кај задача 6. **11.** $d \approx 65{,}3$ m.

§ 15

1. n оски на симетријата.

2. Правилните многуаголници со парен број на страни.

3. Кај правилните многуаголници со непарен број страни — не постојат; а кај тие со парен број страни — постојат.



Црт. 164

4. Можат. На пример, такви се правоаголникот, ромбот и др.

5. Види цртеж 164. **6.** Шест оски на симетријата. Да, таа е централно симетрична

7. Добиениот осумаголник не е правилен, бидејќи сите страни не му се складни. Тој има четири оски на симетријата.

Глава IV

ПЕРИМЕТАР И ПЛОШТИНА НА МНОГУАГОЛНИЦИТЕ

§ 16

1. Најмногу три складни страни.

2. Најмногу две складни страни. **3.** $b = 4$ cm. **4.** $a = 9{,}1$ cm.

5. $c = 7{,}5$ cm. **6.** $a = 12\ 2$ cm. **7.** $d = 6{,}8$ cm.

8. 1887 m жица. **9.** $\overline{AB} = \overline{BC} = 16$ cm, $\overline{CD} = 15$ cm.

10. а) 11,5 cm, б) 7,5 dm, в) 1,25 m.

11. а) 19,2 cm, б) 22,4 cm, в) 28,8 cm. **12.** $a = 3,5$ cm.

13. $L = 25,8$ cm. **14.** а) $L = 31,5$ cm б) $L = 15$ cm.

§ 17

3. За оние што имаат еднакви плоштини.

4. Правоаголник, равнокрак трапез, равнокрак правоаголен триаголник и др. Тие се еквивалентни.

5. Ромбоид, равнокрак триаголник, делтоид.

§ 18

1. а) $P = 408$ cm^2, б) $P = 108$ dm^2.

2. Плоштината на правоаголникот: а) ќе се зголеми 2 пати, б) ќе се зголеми 6 пати, в) останува непроменета, г) ќе се зголеми 9 пати, д) ќе се намали 2 пати.

3. Можат да се нацртаат четири различни правоаголници и тоа: со страни: а) 1 cm, 7 cm, б) 2 cm, 6 cm, в) 3 cm, 5 cm и г) 4 cm, 4 cm. Најголема плоштина ќе има правоаголникот — квадрат.

4. а) $b = 40$ m, б) $a = 8,2$ dm.

5. а) 45 000 m^2. б) 450 a, в) 0,045 km^2.

6. Правоаголниците ќе имаат висини: а) 4,8 cm, б) 4 cm, в) 3 cm, г) 2,4 cm.

7. а) $P = 12,25$ cm^2, б) $P = 0,64$ m^2, в) $P = 7,29$ dm^2.

8. Упатство: Прво одреди една лоза од колкава површина ќе се храни. Одг.: 36 000 лози. **9.** Потребни се 3224 плочки.

10. 25,88 cm^2. **11.** Правоаголникот. **12.** Квадратот.

§ 19

5. а) $P = 62,4$ cm^2, б) $P = 250$ cm^2. **6.** $h = 11$ cm.

7. Упатство: Пресметај ја прво плоштината на ромбоидот. Одг.: 10 cm.

8. Еквивалентни се правоаголниците: а) 1 и 2, б) 3, 4 и 8, в) 5, 7 и 11, г) 6, 9 и 10.

11. Упатство: На поголемата страна на паралелограмот и одговара помалата негова висина. Одг.: $P = 12$ cm^2.

12. Упатство: Нацртај го тој ромб и повлечи ја неговата висина. Висината ќе претставува катета во правоаголен триаголник што лежи спроти агол од 30°. Според тоа, висината на нашиот ромб ќе биде еднаква на половина од неговата страна. Одг.: $P = 25,92$ cm^2.

13. Упатство: Пресметај ги прво должините на страните на паралелограмот. Одг.: $L = 30$ cm. **14.** $h_a = 4$ cm.

§ 20

1. $P = 24,8$ cm^2. **2.** $P = 16,65$ cm^2. **3.** $P = 28,125$ cm^2.

4. 14,4 cm. **5.** 189 m^2. **10.** а) $P = 108$ cm^2, б) $P = 3,6$ dm^2, в) $P = 21,5$ m^2. **11.** 4,5 cm. **12** h_b 8 cm.

13. Плоштината на триаголникот: а) ќе се зголеми 3 пати, б) ќе се зголеми 2 пати, в) ќе се намали 3 пати, г) ќе се зголеми 9 пати.

14. Доказ: Ако ја повлечеме која било медијана на триаголникот, истиот се разделува на два триаголника кои имаат иста висина и складни основи. Според тоа, тие се еквивалентни.

15. Упатство: Дијагоналата AC го дели паралелограмот $ABCD$ на два складни триаголници ABC и ADC. Ако темето A на тие триаголници го сврземе со средините на спротивните страни BC и CD, тие отсечки се всушност медијани на триаголниците ABC и ADC. Понатаму види ја претходната задача.

16. Упатство: Направи соодветен цртеж и во него повлечи ги уште и дијагоналите на четириаголникот $KLMN$. Разгледај ги триаголниците што се добиваат на цртежот. Какви се тие триаголници?. Покажи дека плоштината на четириаголникот $KLMN$ е половина од плоштината на четириаголникот $ABCD$. Одг.: $P_{KLMN} = 27$ dm².

17. Еквивалентни се фигурите: а) 2 и 9, б) 3, 5 7 и 8, в) 4 и 6.

18. а) 10, б) 19,5.

19. а) Може, б) може. Во тој случај триаголникот е правоаголен, а дадените страни 5 cm и 8 cm се негови катети., в) не може. Дадениот триаголник не може да има поголема плоштина од 20 cm².

20. Триаголникот ABC расечи го по една негова средна линија.

21. Доказ: Формулата за плоштина на триаголникот може да се запише и вака $P = \frac{a}{2} \cdot h_a$, каде што $\frac{a}{2}$ е должината на средната линија на триаголникот што е паралелна на страната a.

22. Од $\frac{bh_b}{2} = \frac{ah_a}{2}$ наоѓаме дека $h_b = 7{,}875$ cm.

23. Тој треба да биде правоаголен триаголник со катети a и b.

24. $\frac{P_1}{P_2} = \frac{\frac{1}{2}ah_1}{\frac{1}{2}ah_2} = \frac{h_1}{h_2}$. Значи: Плоштините на два триаголника кои имаат еднакви основи, се однесуваат како нивните соодветни висини.

25. Упатство: Ако ги повлечеш трите средни линии на триаголникот, ќе забележиш дека тие го разделуваат триаголникот на четири еквивалентни триаголници. Одг.: Бараниот однос е 1 : 3, односно 3 : 1.

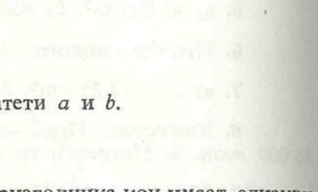
§ 21

1. а) $P = 99$ cm², б) $P = 255$ cm², в) $P = 5$ m².

2. $h = 6$ cm. **3.** 7 cm. **4.** 20 cm. **5.** Приближно 455 kg памук.

6. 252 m². **7.** 5,8 cm.

8. Упатство: Од цртеж 165 гледаш дека триаголникот AED е рамнокрак правоаголен. Според тоа, $h = \overline{AE} = 3$ cm. Одг.: 10,5 cm².



Црт. 165

10. Упатство: а) Разгледај го црт. 99, б) Трапезот прво претвори го во паралелограм, а потоа добиениот паралелограм — во правоаголник., в) Разгледај го цртежот 98.

§ 22

1. $P = 15{,}12$ cm². **2.** 24 cm. **3.** 31,205 cm². **4.** 28,88 cm².

5. Упатство: Рамнокракиот правоаголен триаголник е половина од квадрат со дијагонала — хипотенузата на триаголникот. Одг.: 18,49 cm².

6. 40 cm. **7.** Од $ah = \frac{d_1 d_2}{2}$ наоѓаме дека $a = 6$ cm.

8. Страните на добиениот правоаголник ќе бидат; дијагоналата што е симетрала на делтоидот и половината од другата дијагонала на делтоидот.

§ 23

2. 29400 m². **3.** а) 28 cm², б) 27 cm² **4.** 292,5 cm².

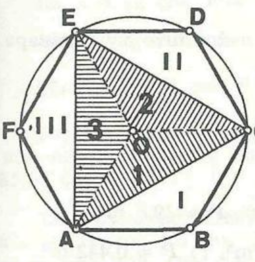
5. а) Од $5 \cdot 3 + \frac{8+5}{2}(x-3) = 54$ наоѓаме $x = 9$ cm, б) од $\frac{(10+6) \cdot 4}{2} + \frac{10+3}{2}(x-4) = 71$ наоѓаме $x = 10$.

6. а) 112 cm², б) Двата складни рамнокраки правоаголни триаголници се делови од квадрат со дијагонала 9 cm. Одг.: 76,5 cm².

§ 24

1. а) $L \approx 26{,}55$ cm, $P \approx 48{,}20$ cm², б) $L \approx 27$ cm, $P \approx 52{,}65$ cm², в) $L \approx 27{,}72$ cm, $P \approx 57{,}31$ cm², г) $L \approx 27{,}54$ cm, $P \approx 58{,}52$ cm².

2. а) $L = 18{,}17$ cm, $P \approx 15{,}93$ cm², б) $L \approx 19{,}74$ cm, $P \approx 24{,}5$ cm², в) $L \approx 21{,}84$ cm, $P \approx 36{,}75$ cm². **3.** $L \approx 23{,}2$ cm, $P \approx 37{,}17$ cm²



Црт. 166

4. $P \approx 17{,}3$ cm². **5.** $P \approx 70{,}45$ cm².

6. $R \approx 2{,}62$ cm $r \approx 2{,}42$ cm, $P \approx 19{,}32$ cm².

7. $L \approx 24{,}64$ cm, $P \approx 47{,}52$ cm².

8. Упатство: Разгледај го цртежот 166. Гледаме, страната AC на рамностраниот триаголник ACE е дијагонала на ромбот $ABCD$. Таа го дели ромбот на два складни триаголници што се означени со 1 и I. Понатаму гледаме, површината на правилниот шестаголник покриена е со шест складни триаголници 1, I, 2, II, 3, и III, а површината на рамностраниот триаголник — само со триаголниците 1, 2 и 3. Според тоа. плоштината на шестаголникот е два пати поголема од плоштината на триаголникот. **9.** Околу 2344 плочки. **10.** 19,32 m².

Глава V

ДОЛЖИНА НА КРУЖНИЦА И ПЛОШТИНА НА КРУГ

§ 25 и § 26

1. а) ≈ 22 cm, б) ≈ 39 cm, в) $\approx 2{,}51$ m.

2. а) $\approx 28{,}27$ cm, б) $\approx 6{,}28$ dm. в) $\approx 20{,}11$ dm.

3. $\approx 7{,}23$ dm. **4.** $d \approx 3$ cm, $r \approx 1{,}5$ cm. **5.** ≈ 8168 m.

6. ≈ 6366 km. **7.** а) $\approx 18\,060\,000$ km, б) $\approx 2\,580\,000$ km, в) $\approx 107\,500$ km, г) ≈ 1800 km, д) ≈ 30 km. **8.** $\approx 0{,}4$ m. **9.** а) $\approx 8{,}8$ cm, б) ≈ 211 cm.

10. $r = 9{,}5$ cm. Забележуваме дека $r = r_1 + r_2$. **11.** $L \approx 28{,}9$ cm.

12. $r = 16$ cm. **13.** Должината на кружницата: а) ќе се зголеми 3 пати, б) ќе се намали 5 пати. **14.** ≈ 450 завртувања. **15.** 300 завртувања.

16. Упатство: Производот од периметарот (или само дијаметарот) на поголемото тркало и бројот на завртувањата што тоа ги прави во 1 *мин.* е еднаков на производот од соодветните величини на помалото тркало. Одг.: 240 завртувања.

17, Упатство: Производот од бројот на запците на едниот запченик и бројот на завртувањата што тој ги прави во една минута еднаков е на производот од соодветните величини на другиот запченик. Одг.: 75 завртувања. **18.** $\approx 16{,}77$ m.

§ 27

1. а) $l \approx 0{,}37$ m, б) $l \approx 0{,}55$ m, в) $l \approx 1{,}03$ m. **2.** $l \approx 2{,}55$ cm.

3. а) $l \approx 0{,}19$ m, б) $l \approx 0{,}94$ m, в) $l = 1{,}5$ m.

4. $l_1 \approx 14{,}97$ cm, $l_2 \approx 10{,}68$ cm. **5.** а) $l \approx 31{,}4$ cm, б) $l \approx 23{,}6$ cm, в) $l \approx 15{,}7$ cm, г) $l \approx 11{,}8$ cm. **6.** $\alpha \approx 16° 51'$. **7.** $\alpha \approx 57° 17' 45'$.

8. Упатство: Кружниот лак $l =$ dm што му припаѓа на централниот агол од $40°$ претставува $\frac{40}{360} = \frac{1}{9}$ од должината на кружницата. Одг.: $L = 54$ dm. **9.** $r \approx 6$ m.

10. Упатство: Одреди ја прво аголната големина на кружниот лак, што е зафатен од периферниот агол $36°$. Одг.: $L = 12{,}5$ cm.

11· $r = 2{,}5$ cm. **12.** $\alpha = 144°$. **13.** $r = 16$ cm.

14. а) $l = 4{,}5$ cm, б) $l = 9$ cm, в) $l = 13{,}5$ cm, г) $l = 22{,}5$ cm, д) $l = 27$ cm, ѓ) $l = 1{,}8$ cm. **15.** а) 111,12 km, б) 1,852 km. в) ≈ 309 m. **16.** а) $\approx 1666{,}8$ km, б) $\approx 27{,}8$ km, в) $\approx 0{,}463$ km.

17. Упатство: Разгледај ја задача 15. Должината на лакот што му одговара на $1°$ изнесува 111,12 km. Одг.: ≈ 4667 km.

18. $\approx 409{,}3$ km. **19.** ≈ 3185 km. **20.** $\approx 222{,}2$ km.

§ 28

1. а) $P \approx 6{,}3$ cm², б) $P \approx 154$ cm², в) $P \approx 3{,}14$ dm², г) $P \approx 29{,}8$ m².

2. а) $P \approx 28{,}26$ cm², б) $P \approx 13{,}85$ dm², в) $P \approx 1589{,}6$ m², г) $P \approx 0{,}442$ m².

3. а) $L \approx 23{,}8$ cm $P \approx 45{,}34$ cm², б) $L \approx 31{,}4$ dm, $P \approx 78{,}5$ dm², в) $L \approx 6{,}28$ m, $P \approx 3{,}14$ m², **4.** а) $r \approx 9$ cm, б) $r \approx 3$ dm.

5. а) $P \approx 2$ dm², б) $P \approx 19{,}6$ cm². **6.** Плоштината на кругот ќе се зголеми: а) 4 пати, б) 9 пати, в) 25 пати.

7. Радиусот на кругот треба да се намали: а) 2 пати, б) 3 пати.

8. а) $r \approx 7{,}2$ cm, б) $r \approx 4{,}5$ cm. **9.** ≈ 4 m. **10.** $P \approx 63{,}6$ cm².

11. $L \approx 17{,}6$ cm, $P \approx 24{,}6$ cm². **12.** $\approx 63{,}3$ cm².

13. Решение: Квадрат со страна a и круг со радиус r за да имаат еднакви периметри треба да важи: $4a = 2\pi r$, односно $a = \frac{\pi r}{2}$. Потоа наоѓаме: $\frac{P}{P_o} = \frac{a^2}{\pi r^2} =$

$$= \frac{\frac{\pi^2 r^2}{4}}{\pi r^2} = \frac{\pi^2 r^2}{4 \pi r^2} = \frac{\pi}{4}.$$

14. Решение: Од $\pi r^2 = \left(\frac{8}{9}\cdot 2r\right)^2$ наоѓаме дека $\pi \approx 3{,}16$.

15. ≈ 246176 km². **16.** $a \approx 27{,}5$ cm.

17. Упатство: Одреди го прво радиусот на кругот. Одг.: Плоштината на кругот е поголема за $\approx 67{,}5$ cm². **18.** $\approx 50{,}24$ km².

19. Упатство: Новата цевка треба да има плоштина на отворот — еднаква на збирот од плоштините на отворите од двете цевки. Одг.: $d = 10$ cm.

20. Упатство: Одреди го прво периметарот и радиусот на езерото. Одг.: $\approx 132{,}5$ km².

§ 29

1. а) $P = 17$ cm², б) $P = 32$ cm². **2.** а) $P \approx 2{,}36$ m², б) $P \approx 8{,}04$ dm². **3.** $P \approx 0{,}22$ dm². **4.** $\alpha \approx 150°$.

5. Плоштината на кружниот прстен ќе се зголеми 2, 3, 4,... пати.

6. а) $\frac{1}{12}$, б) $\frac{1}{8}$, в) $\frac{1}{6}$, г) $\frac{1}{5}$, д) $\frac{5}{24}$, ѓ) $\frac{1}{4}$, е) $\frac{1}{3}$, ж) $\frac{3}{8}$, з) $\frac{2}{5}$, ѕ) $\frac{5}{12}$ од плоштината на кругот. **7.** 14 cm².

8. а) 180°, б) 120°, в) 240°, г) 270°, д) 200°.

9. $\alpha = 120°$, $P \approx 16{,}85$ cm². **10. Упатство:** Одреди ги претходно централните агли на соодветните кружни исечоци.

11. $L \approx 10{,}35$ cm, $P \approx 2{,}45$ cm². **12.** $L \approx 28{,}3$ cm, $P \approx 21{,}2$ cm².

13. $L \approx 22$ cm, $P \approx 10{,}5$ cm². **14.** а) $P \approx 35{,}33$ cm², б) $P \approx 93{,}42$ cm².

15. $r_1 - r_2 = 0{,}5$ dm, $P \approx 3{,}93$ dm². **16.** $\approx 737{,}9$ m².

17. $L \approx 27{,}56$ cm. $P \approx 27{,}56$ cm². **18.** $\approx 164{,}4$ cm². **19.** $P \approx 18$ cm².

20. Упатство: Пресметај ја прво плоштината на рамностраниот триаголник ABC со помош на таблицата во учебникот. Одг.: $P \approx 14$ cm². **21.** $P \approx 21{,}14$ cm². **22.** $P \approx$ $\approx 85{,}68$ cm².

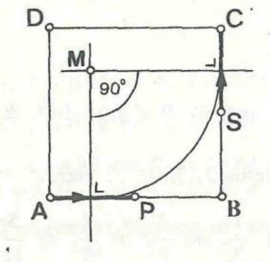
23. Упатство: Центрите на кружниците ќе претставуваат темиња на квадрат $ABCD$ со страна 5,6 cm. Фигурата, чија плоштина треба да се одреди ќе има форма како на црт. 122. Одг.: $P = 5{,}6^2 - \pi\cdot 2{,}8^2 \approx 6{,}74$ cm².

ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ

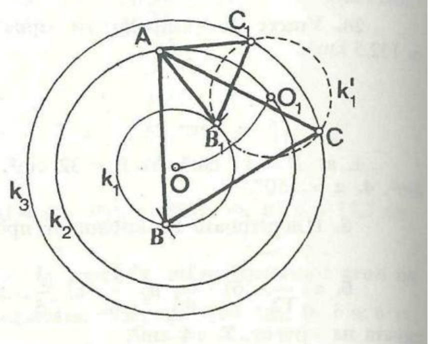
1. Упатство: Разгледај го цртежот 167, каде што $ABCD$ е квадрат, а P и S се средини на страните AB и BC. Центарот на бараната ротација, која векторот $\overrightarrow{AP}$ го пресликува на векторот $\overrightarrow{SC}$, ќе лежи во пресекот M на симетралите на отсечките AP и SC, а аголот на ротацијата ќе биде $\alpha = 90°$ (Зошто?). Според тоа, бараната ротација е $r(M, 90°)$.

2. Квадратот $ABCD$ може да се преслика на квадратот $EFGH$ со помош на: а) транслацијата за вектор $\overrightarrow{AB}$, при која $A \to E$, $B \to F$, $C \to G$ и $D \to H$; б) осната симетрија со оска — правата BC, при која $A \to F$, $B \to E$, $C \to H$ и $D \to G$; в) централната симетрија со центар — средината на отсечката BC, при која $A \to G$, $B \to H$, $C \to E$ и $D \to F$; г) ротацијата $r_1(B, -90°)$, при која $A \to H$, $B \to E$, $C \to F$, $D \to G$ и $r_2(C, 90°)$ при која $A \to F$, $B \to G$, $C \to H$ и $D \to E$.

3. Анализа: Бараниот равностран триаголник нека е ΔABC на црт. 168, каде што $A \in k_2$, $B \in k_1$ и $C \in k_3$. При ротација на кружницата k_1. околу точката A за агол $60°$, таа ќе се преслика на кружницата k'_1. При истата ротација темето $B \in k_1$ ќе се преслика во точката C, која е пресек на кружниците k'_1 и k_3 (црт. 33). Бидејќи $\widehat{BAC} = 60°$ и $AB \cong AC$, тоа триаголникот ABC е равностран, па според тоа тој ги исполнува условите на задачата. Условите на задачата ги исполнува уште и ΔAB_1C_1, каде што C_1 е друга точка од пресекот $k'_1 \cap k_3 = \{C, C_1\}$.



Црт. 167



Црт. 168

4. Доказ: При ротација $r(M, 90°)$ нека $\Delta ABC \to \Delta A_1B_1C_1$. Тогаш и медијаната AS на ΔABC ќе се преслика на соодветната медијана A_1S_1 на $\Delta A_1B_1C_1$. Бидејќи аголот на ротацијата r е $90°$, тоа правата AS и нејзината слика A_1S_1 ќе зафаќаат исто така агол $90°$ (види својство $4°$ во точка 2. 2). Значи $A_1S_1 \perp AS$, штд.

5. Упатство: Нека се дадени точка C и две кружници $k_1(O_1, r_1)$ и $k_2(O_2, r_2)$. При ротација со центар C и агол $75°$ (или $-75°$) кружницата k_1 ќе се преслика на кружница k'_1. Одреди го пресекот $k'_1 \cap k_2$. Една од точките на тој пресек ќе биде едно од темињата при основата на бараниот равнокрак триаголник ABC. Потоа лесно може да се одреди третото теме на бараниот ΔABC.

6. Упатство: Кружницата k_1 (или k_2) ротирај ја за агол $60°$ (или -60) околу точката S. Потоа одреди го пресекот $k'_1 \cap k_2$ (односно $k_1 \cap k'_2$). Понатаму исто како кај претходната задача.

7. Бараното множество точки ќе претставува две прави s и q — што се паралелни на правата p, на еднакво растојание од неа, а на различни страни од неа.

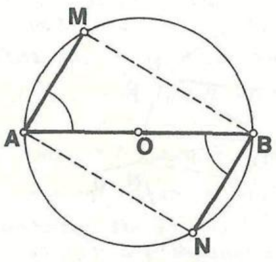
8. Доказ: Нека AB е тетива, а t — тангента на кружницата k со допирна точка T. Од $OT \perp t$ и $t \parallel AB$ следува дека $OT \perp AB$. Врз основа на последицата 1 (во § 5) радиусот OT ја преполовува тетивата AB и кружниот лак AB, штд.

9. Упатство: Повлечи го дијаметарот AB на кружницата што е нормален на отсечката OM. Бараната кружница ќе биде $k_1(M, \overline{MA})$.

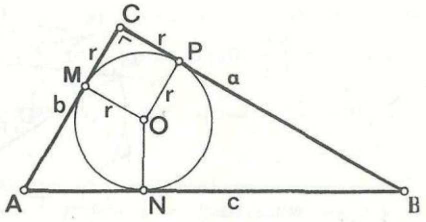
10. Доказ: Нека OS е бисектриса на аголот AOB а M произволна точка од OS, т. е. $M \in OS$. Кружницата $k(M, r)$ нека ги сече краците OA и OB на $\sphericalangle AOB$ во точките A_1, A_2 и B_1, B_2. Треба да докажеме дека $A_1A_2 \cong B_1B_2$. Бисектрисата OS е заедничка оска на симетријата и на аголот AOM и на кружницата $k(M, r)$. Според тоа, при осна симетрија во однос на OS тетивите A_1A_2 и $Б_1Б_2$ ќе се пресликаат една на друга. Значи: $A_1A_2 \cong B_1B_2$.

11. Доказ: Нека AB е произволен дијаметар на кружницата k (црт. 169), а AM и BN две паралелни тетиви на k. Да ги разгледаме триаголниците AMB и BNA. Тие се правоаголни, имаат заедничка хипотенуза AB и $\sphericalangle A \cong \sphericalangle B$ (како наизменични). Според тоа: $\Delta AMB \cong \Delta BNA$. Оттука следува дека $AM \cong BN$, односно $\widehat{AM} \cong \widehat{BN}$, штд.

12. Решение: Разгледај го црт. 170. Четириаголникот $CMOP$ е квадрат со страна $r \cdot \overline{AN} = \overline{AM} = b — r$ и $\overline{NB} = \overline{BP} = a — r$. Оттука имаме: $\overline{AB} = \overline{A_N} + \overline{NB}$, односно $c = a + b — 2r$, според тоа: $2r = a + b — c$ или $r = \dfrac{a + b — c}{2}$.



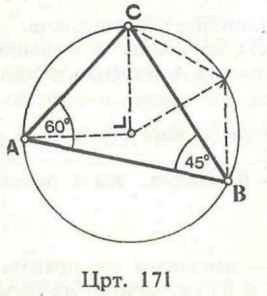
Црт. 169



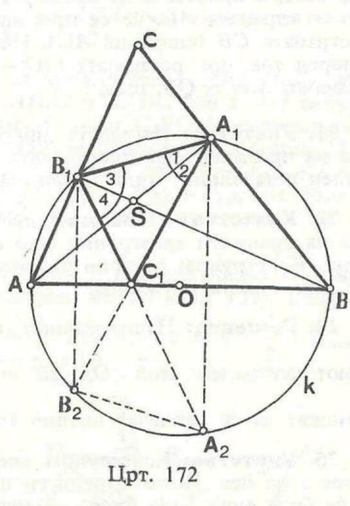
Црт. 170

13. Анализа: Нека ΔABC ($\hat{A} = 60°$ и $\hat{B} = 45°$) е бараниот триаголник што е впишан во кружницата k (црт. 171). Очигледно е дека аголната големина на кружните лаци $\widehat{BC}$ и $\widehat{AC}$ ќе бидат 120° и 90°. Според тоа, страната BC ќе претставува страна на рамностран триаголник — впишан во кружницата k, а страната AC — страна на впишан квадрат во истата кружница k.

14. Доказ: Нека е даден ΔABC. Кружницата k над страната AB (како дијаметар) ќе ги сече страните AC и BC во точките B_1 и A_1. Очигледно е дека $AA_1 \perp BC$ и $BB_1 \perp AC$. Значи AA_1 и BB_1 се две висини на ΔABC. Лесно ја конструираме и третата висина CC_1 (црт. 172). Го добиваме триаголникот $A_1B_1C_1$. Треба да докажеме дека $\sphericalangle 1 \cong \sphericalangle 2$ и $\sphericalangle 3 \cong \sphericalangle 4$. При осна симетрија во однос на дијаметарот AB, полукружницата AB_1A_1B и триаголникот $A_1B_1C_1$ ќе се пресликаат соодветно на полукружницата AB_2A_2B и $\Delta A_2B_2C_1$ (црт. 172). Оттука следува дека $\widehat{AB_1} \cong \widehat{AB_2}$ и $\widehat{BA_1} \cong \widehat{BA_2}$, односно дека $\sphericalangle 1 \cong \sphericalangle 2$ и $\sphericalangle 3 \cong \sphericalangle 4$, штд.



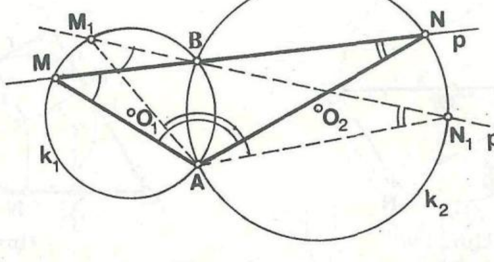
Црт. 171



Црт. 172

15. Доказ: Од црт. 130 гледаме дека $\widehat{AMB} = \dfrac{\widehat{AB}}{2} = \dfrac{120°}{2} = 60°$ и $\widehat{AMC} = 60°$. Значи: $\widehat{BMC} = 120°$. При ротацијата $r(B, 60°)$ триаголникот BCM ќе се преслика на $\Delta BAM'$, бидејќи $B \to B$, $C \to A$ и $M \to M' \in AM$, Значи: $\overline{AM} — \overline{CM}$, а од равностраниот триаголник BMM' имаме $\overline{M'M} = \overline{BM}$. Според тоа: $\overline{AM} = \overline{AM} + \overline{MM} = \overline{CM} + \overline{BM}$, штд.

16. Доказ: Од триаголникот MAN на црт. 173 гледаме дека периферните агли $\sphericalangle M$ и $\sphericalangle N$ зафаќаат едни исти кружни лаци $\widehat{AB}$ без обзир на положбата на правата p. Според тоа: нивната големина е непроменлива. Оттука следува дека и големината на третиот агол $\widehat{MAN} = 180° - (\hat{M} + \hat{N})$ е непроменлива, т. е. таа не зависи од положбата на правата p, штд.



Црт. 173

17. Бараното множество точки се состои од два кружни лака ($\widehat{AmB} \cup \widehat{Am'B}$) од кружници што се симетрично расположени во однос на правата на која лежи основата AB (без крајните точки A и B) види црт. 46). **18.** Деветаголник.

19. Доказ: Штом еден многуаголник е тангентен, тоа значи дека во него може да се впише кружница k. Страните на многуаголникот се тангенти на кружницата k, чии допирни точки ја разделуваат кружницата на n кружни лаци. Ако тангентниот многуаголник има складни внатрешни агли, тогаш допирните точки на неговите страни ја разделуваат вписаната во него кружница на n складни кружни лаци. Согласно теоремата 2 во § 13 тој многуаголник е правилен, штд.

20. Доказ: При ротација $r(O, -120°)$ равностраниот триаголник се пресликува сам на себе, а правата а на правата b (црт. 131). При тоа точката M — пресек на правата a со страната AC, ќе се преслика во точката Q — пресек на правата b (слика на a) и страната CB (слика на AC). Исто така точката N пак ќе се преслика во точката P. Според тоа, при ротацијата $r(O, -120°)$ отсечката MN ќе се преслика на отсечката QP. Значи, $MN \cong QP$, штд.

21. Упатство: Најмалата дијагонала на правилниот десетаголник ќе претставува страна на правилен петаголник што е вписан во десетаголникот. Нацртај го прво тој правилен петаголник (види цртеж 74).

22. Упатство: Помалата дијагонала на правилниот шестаголник претставува страна на правилен триаголник што е вписан во иста кружница со правилниот шестаголник. Конструирај го прво правилниот триаголник кога е позната неговата страна и околу него опиши кружница.

24. Решение: Надворешниот агол на правилниот многуаголник е еднаков на неговиот централен агол. Од $20° = \frac{360°}{n}$ имаме $n = 9$. Значи, тоа е деветаголник. Во него можат да се повлечат вкупно 18 дијагонали.

25. Упатство: Конструирај две прави a и b — паралелни на правата p и на растојание r од неа. Потоа одреди ги пресеците $a \cap q$ и $b \cap q$. Центар на бараната кружница ќе биде една (која било) од точките на пресеците $a \cap q$ и $b \cap q$.

26. Упатство: Нека е дадена кружница $k(O, r)$ и права p. Центарот на бараната кружница ќе се наоѓа во една од точките на пресекот на кружницата $k_1(O, r + 1{,}8)$ и правата p.

27. Упатство: Нека е дадена кружница $k(O, r)$ и точка M, а бараната кружница нека треба да има радиус r_1. Конструирај прво две други кружници $k_1(O, r + r_1)$ и $k_2(M, r_1)$. Центарот на бараната кружница ќе биде една од точките на пресекот $k_1 \cap k_2$.

28. Упатство: Нека е дадена кружница $k(O, r)$ и права p, а бараната кружница нека треба да има радиус r_1. Конструирај прво кружница $k_1(O, r+r_1)$ и две прави a и b, што се паралелни на правата p и на растојание r_1 од неа. Центар на бараната кружница ќе биде една (која било) од точките на пресеците $k_1 \cap a$ и $k_1 \cap b$.

29. Упатство: Низ точката $A \in p$ повлечи права q — нормална на правата p. Потоа конструирај ја симетралата s на отсечката MA. Центарот на бараната кружница ќе лежи во пресекот $q \cap s$.

30. Упатство: Нека се дадени две паралелни прави a и b, чие растојание е d, и една точка M што лежи меѓу нив. Конструирај прво кружница $k_1\left(M, \frac{d}{2}\right)$ и права s — паралелна на a и b и на растојание $\frac{d}{2}$ од нив. Центарот на бараната кружница k ќе лежи во една од точките на пресекот $k_1 \cap s$.

31. Упатство: Нека се дадени две паралелни прави a и b, чие растојание е d, и трета права c што ги сече правите a и b. Конструирај права p — паралелна на a и b и на растојание $\frac{d}{2}$ од нив. Потоа конструирај ја и симетралата s на еден од аглите што правата p ги гради со правите a и b. Центар на бараната кружница е пресекот $s \cap p$.

32. Плоштината на квадратот ќе се зголеми за: а) 56,25%, б) 125%.

34. Упатство: Правоаголниот триаголник KBP ротирај го околу точката K за $-180°$. Неговата слика и четириаголникот $ASPK$ ќе образуваат квадрат — складен на квадратот $SPQR$. Според тоа, секој од четирите правоаголни триаголници ABS, BCP, CDQ и ADR е еквивалентен на квадратот $SPQR$. Одг.: $P_{PQRS} = \frac{1}{5} \cdot P_{ABCD}$.

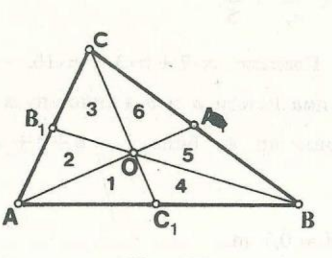
35. Решение: Висините на паралелограмот се $h_a = 2 \cdot 2{,}5 = 5$ (cm) и $h_b = 2 \cdot 3 = 6$ (cm). Од $a \cdot h_a = 60$ и $b \cdot h_b = 60$ наоѓаме $a = 12 =$ cm и $b = 10$ cm. Според тоа: $L = 2(a+b) = 2(12+10) = 44$ (cm).

36. а) $P_1 : P_2 = h_1 : h_2$, б) $P_1 : P_2 = a_1 : a_2$.

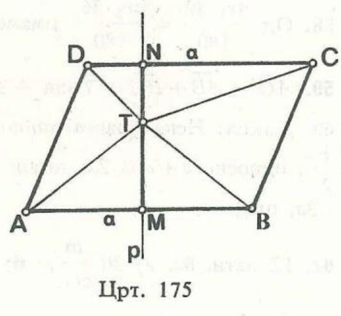
37. Упатство: За основа на ΔABC земи ја страната BC. Отсечката AM го разделува триаголникот ABC на два триаголника BMA и MCA кои имаат иста висина како и триаголникот ABC. Одг.: $P\Delta_{BMA} = 7$ cm², $P\Delta_{MCA} = 21$ cm².

38. Доказ: Да ги повлечеме трите медијани на триаголникот ABC (црт. 174). Медијаната CC_1 го дели ΔABC на два триаголника AC_1C и C_1BC кои имаат складни основи и една иста висина. Според тоа: триаголниците AC_1C и C_1BC се еквивалентни. На сличен начин наоѓаме дека се еквивалентни и следниве парови триаголници: Δ_1 и Δ_4; Δ_2 и Δ_3; Δ_5 и Δ_6 (црт. 174). Од $P_{\Delta AC_1C} = P_{\Delta C_1BC}$, односно од $P_{\Delta_1} + P_{\Delta_2} + P_{\Delta_3} = P_{\Delta_4} + P_{\Delta_5} + P_{\Delta_6}$ и $P_{\Delta_1} = P_{\Delta_4}$ следува дека $P_{\Delta_2} + P_{\Delta_3} = P_{\Delta_5} + P_{\Delta_6}$. Но бидејќи $P_{\Delta_2} = P_{\Delta_3}$ и $P_{\Delta_5} = P_{\Delta_6}$, тоа оттука заклучуваме дека сите шест триаголници Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4, Δ_5 и Δ_6 се еквивалентни еден на друг, штд.

39. Доказ: Направи соодветен цртеж, и низ точката T повлечи права p — нормална на две спротивни страни на дадениот паралелограм $ABCD$ (црт. 175). Гледаме:
$P_{\Delta ABT} + P_{\Delta CDT} = \frac{a}{2} \cdot \overline{MT} + \frac{a}{2} \cdot \overline{NT} = \frac{a}{2} \cdot (\overline{MT} + \overline{TN}) = \frac{a}{2} \cdot \overline{MN} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \overline{MN} = \frac{1}{2} \cdot P_{ABCD}$, штд.



Црт 174



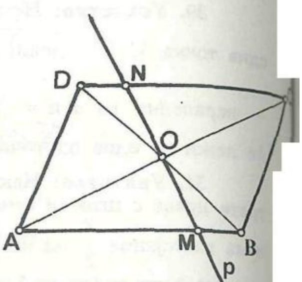
Црт. 175

40. Плоштината на триаголникот ќе се зголеми: а) 4 пати, б) 9 пати.

41. Упатство: Пресметај ја прво плоштината на блокот. Одг.: за 4 дена,

42. Упатство: Висината на тој трапез е половина од кракот c, т. е. $h = 3$ cm. (Зошто?). Одг.: $P = 21$ cm^2.

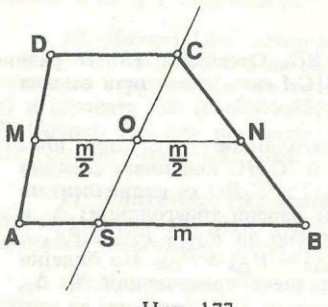
43. Доказ: Разгледај го црт. 176, каде што $ABCD$ е паралелограм, а p — произволна права што минува низ пресекот на дијагоналите. Од складноста на триаголниците AMO и CNO (бидејќи $\overline{AO} = \overline{OC}$, $\widehat{MAO} = \widehat{NCO}$ и $\widehat{AOM} = \widehat{CON}$) следува $MO \cong ON$. При централна симетрија со центар O, трапезот $AMND$ се пресликува на трапезот $CNMB$. Според тоа, тие се складни, а тоа значи дека се еквивалентни.



Црт. 176

44. Доказ: Односната права го дели дадениот трапез на два нови трапези кои имаат складни предни линии и складни висини. Според тоа, тие имаат еднакви плоштини, т. е. тие се еквивалентни.

45. Доказ: Знаеме дека дијагоналата го дели секој паралелограм на складни триаголници. Според тоа: $\Delta ABC \cong \Delta ADC$; $\Delta AEM \cong \Delta AHM$ и $\Delta MGC \cong \Delta MFC$ (црт. 133). Врз основа на правилото за дополнување на фигури заклучуваме дека паралелограмите $EBGM$ и $HMFD$ се еквивалентни. Ако кон паралелограмот $AEMH$ го додадеме еднаш паралелограмот $HMFD$, а друг пат — паралелограмот $EBGM$, ќе ги добиеме соодветно паралелограмите $AEFD$ и $ABGH$. Бидејќи паралелограмите што ги добиваме се еквивалентни, а додавањето го вршиме кон ист паралелограм $AMFH$, тоа и паралелограмите што се добиваат се еквивалентни, штд.



Црт. 177

46. Решение: Нека е даден трапез $ABCD$ чија средна линија е $\overline{MN} = m$, а O нејзина средина (црт. 177).

Правата OC го разделува трапезот на два еквивалентни дела. Навистина: $P_{\Delta SBC} = \dfrac{mh}{2}$ и $P_{ASCD} = \dfrac{m}{2} \cdot h$, каде што h е висина на трапезот.

47. Правата p треба да минува низ дадената точка I и пресекот на дијагоналите O на паралелограмот (види задача 43).

49. Потребни се 4960 плочки.

50. 2703 квинтали (1 квинтал $=$ 100 kg).

51. а) За 35 дена, б) за 4 дена. **52.** 18m. **53.** 38304 kg сено.

54. Втората леа има поголема плоштина од првата за 12 m^2.

55. 16740 m^2. **56.** 364 m^2. **57.** $d = r_1 - r_2 \approx 0{,}8$ dm.

58. Од $\dfrac{\pi r_1 \cdot 30}{180} = \dfrac{\pi r_2 \cdot 36}{180}$ имаме $\dfrac{r_1}{r_2} = \dfrac{36}{30}$ или $\dfrac{r_1}{r_2} = \dfrac{6}{5}$.

59. $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC} = 7\text{ cm} + 3\text{ cm} = 10\text{ cm}$. Гледаме: $\pi \cdot 7 + \pi \cdot 3 = \pi \cdot 10$.

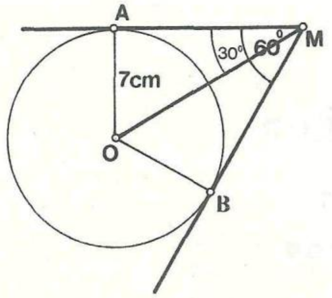
60. Доказ: Нека правоаголниот триаголник има катети a и b а хипотенуза c. Ако $a = \dfrac{b+c}{2}$, односно $b + c = 2a$, тогаш неговиот периметар ќе биде $L = a + b + c = a + 2a = 3a$, штд.

61. 12 пати. **62.** а) $20 \dfrac{\text{m}}{\text{сек}}$, б) $72 \dfrac{\text{km}}{\text{час}}$. **63.** $d \approx 0{,}7$ m.

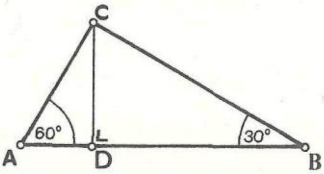
64. $\alpha \approx 245°$. **65.** $\alpha = 144°$. **66.** $\approx 790\ cm^2$. **67.** $P = 13{,}3\ m^2$.

68. Упатство: Пресметај ги прво плоштината на правилниот петаголник и радиусот на впишаната во него кружница со помош на таблицата на стр. 66. Одг.: $P \approx 343\ cm^2$.

69. Упатство: Разгледај го црт. 178. Триаголникот MAO е правоаголен ($\widehat{A} = 90°$) со еден остар агол $\widehat{AMO} = 30°$. Земи во обзир дека катетата што лежи спроти аголот $30°$ е половина од хипотенузата. Одг.: $\overline{OM} = 14$ cm.



Црт. 178



Црт. 179

70. Доказ: Нека е даден правоаголен триаголник ABC ($\widehat{C} = 90°$), а CD е висина што е повлечена од темето C кон хипотенузата (црт. 179). Ако $\widehat{A} = 60°$, тогаш $\widehat{B} = 30°$, па според тоа $\overline{AC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB}$. Од друга страна пак од ΔADC имаме: од $\widehat{ACD} = 30°$ следува дека $\overline{AD} = \frac{1}{2}\, \overline{AC}$. Од $\overline{AD} = \frac{1}{2}\, \overline{AC}$ и $\overline{AC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB}$ следува дека $\overline{AD} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB}$, а $\overline{DB} = \frac{3}{4} \cdot \overline{AB}$. Според тоа: $\overline{AD} : \overline{DB} = \left(\frac{1}{4} \cdot \overline{AB}\right) : \left(\frac{3}{4} \cdot \overline{AB}\right) = 1 : 3$, штд.

СОДРЖИНА

Глава I

РОТАЦИЈА

Глава II

КРУЖНИЦА

Глава III

ПРАВИЛНИ МНОГУАГОЛНИЦИ

Глава IV

ПЕРИМЕТАР И ПЛОШТИНА НА МНОГУАГОЛНИЦИТЕ

Глава V

ДОЛЖИНА НА КРУЖНИЦА И ПЛОШТИНА НА КРУГ

РОЗТ за учебници „Просветно дело“ — Скопје ул. „Иво Рибар Лола“ б.б. Градски ѕид, блок IV

*

За издавачот
Никола Младеновски

*

Глигор Тренчевски
ГЕОМЕТРИЈА
за VII одделение

*

Јазична редакција
Нада Манојловиќ

*

Илустрации
Димитар Елимов

*

Технички уредник
Трајко Димовски

*

Корицата ја илустрирал
Трајче Димчевски

*

Коректори
Николовски Миодраг
и
Димитар Џицев

*

Ракописот е предаден во печат во декември 1979 година. Печатењето е завршено во мај 1980 година. Обем: 112 страни. Формат: 17 x 24 см. Тираж: 15 000 примероци. Книгата е отпечатена во Графичкиот завод „Гоце Делчев“ — Скопје (2054/51)

Цената е одобрена со решение на Републичкиот завод за цени.

372.851.4

ТРЕНЧЕВСКИ Глигор

Геометрија : за VII одделение / Глигор Тренчевски ; [илустрации Димитар Елимов]. – 5. дополнето изд. – Скопје : „Просветно дело", 1980. – 110 стр. : илустр. ; 24 см

1. изд. 1966

НУБ „Кл. Охридски" – Скопје