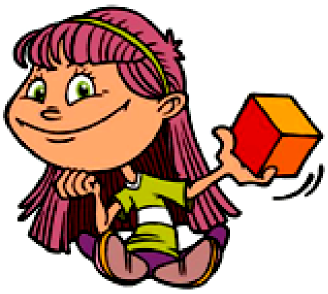
О АЛГЕБРИ, ДОН КИХОТУ И РЕБУСИМА

Ратко Тошић, Нови Сад



У основној школи изучавају се разни садржаји из математике, али се они грубо могу поделити на геометрију и остало. То остало спада у аритметику (изучавање бројева) и алгебру, коју у основној школи чине линеарне једначине и системи линеарних једначина.

Реч *аритметика* долази од грчке речи *αριθμος* (аритмос) – број. Како су Грци под бројевима подразумевали само целе бројеве веће од 1, њихова аритметика је била наука и целим бројевима и о својствима бројева. Прва штампана књига из аритметике објављена је анонимно у Италији 1478. године.

А да ли сте се некад запитали, одакле нам је дошла реч *алгебра*?

Да бисмо одговорили на то питање, рећи ћемо прво неколико речи о једном великом математичару.

Абу Џафар Мухамед ибн Муса Ал-Хорезми (око 780 – око 850), први велики арапски математичар, родио се у Хиви, у покрајни Хорезм, на ушћу Аму-Дарје у Аралско језеро. Одатле и потиче додатак у његовом имену, или *нисба*, „ал-Хорезми". Додатак ибн Муса значи да је био син Мусе, што је арапски облик имена Мојсије. Оно због чега ал-Хорезмија сматрамо једним од највећих математичара јесте његово дело Китаб ал-мухтасар *фи хисаб ал џабр ва ал-мукабала*.

Ова књига је једна од најчувенијих у историји математике. У њој је заснована једна нова, у потпуности оригинална грана математике: алгебра.

Ал-Хорезмију дугујемо појам једначине, појам који пре тога није био познат ни Грцима ни Индусима. Решавање једначине састоји се у одређивању вредности непознате величине полазећи од неких услова које она задовољава. „Ту ствар коју тражимо", каже Ал-Хорезми, „прво именујем. Али, пошто је не познајем, јер за њом управо трагам, назваћу је просто *ствар*".

Ал-Хорезмијево велико откриће састоји се у томе што ће он са том ствари (арапски *шеј*), мада је још непозната, оперисати као да је позната.

Да би се схватила величина Ал-Хорезмијевог открића, треба имати у виду да једначина не представља један проблем, него целу класу проблема истог типа. Једна класа проблема, на пример, може се овако описати: „Производ неке ствари са једним бројем сабран са другим бројем даје трећи број." У данашњој нотацији, то записујемо овако:

$$ax + b = c.$$

Ствар која се тражи је x, а бројеви о којима се говори у тексту су a, b, c. Проблем се састоји у проналажењу те ствари сваки пут кад су дата три броја. На пример, ако су дати бројеви $a = 3$, $b = -2$, $c = 7$, једначина постаје

$$3x - 2 = 7.$$

Овде је у питању једначина првог степена (линеарна). Специјалност Ал-Хорезмија, међутим, биле су много сложеније, квадратне једначине.

У једначини учествују два израза од којих бар један садржи бар једну непознату. Кад се једначина реши и непозната величина (ствар) замени нађеном вредношћу, једначина постаје једнакост.

У неколико својих аксиома, грчки математичар Еуклид (3. век пре нове ере), говори о једнакости. На пример:

Ако једнаким стварима додамо једнаке ствари, целине су једнаке.
Ако од једнаких ствари одузмемо једнаке ствари, остаци су једнаки.

Полазећи од тога, у решавању једначина Ал-Хорезми користи два поступка, џабр и мукабала, да би произвољну једначину свео на један од 6 основних облика, за које даје начин решавања.

Поступак „џабр" (тачније ал-џабр) састоји се у томе да се на обе стране једначине дода члан једнак члану који се у једначини појављује са негативним предзнаком. На пример, на тај начин се из једначине $3x - 2 = 7$ добија њој еквивалентна једначина $3x - 2 + 2 = 7 + 2$, која се даље трансформише у $3x = 7 + 2$, тј. $3x = 9$.

У суштини, реч „ал-џабр" је означавала операцију преноса чланова са једне стране једначине на другу, уз промену знака. Буквални смисао речи у арапском језику је „допуњавање", „изравнавање".

Поступак „мукабала" (тачније „ал-мукабала") састоји се у узајамном поништавању једнаких чланова на једној и другој страни једначине.

Европски преводиоци су у почетку користили пун назив главног Ал-Хорезмијевог дела, али је постепено други део наслова коришћен све ређе. Коначно је остао кратак наслов „ал-џабр", који се постепено трансформисао у „алгебра". У првој глави своје књиге Арс Магна (Велика вештина), која је објављена 1545. године, Ђироламо Кардано творцем алгебре назива „Мухамеда, сина арапина Мусе". Он Ал-Хорезмија ставља на осмо место у низу највећих генија човечанства.

Реч ал-џабр у арапском језику има и смисао исправљања нечега што је сломљено. Арапи су осам векова владали Шпанијом, па је преко Арапа у народни шпански језик ушла реч *алгебриста*, као назив за човека који намешта поломљене или ишчашене кости. У 15. глави друге књиге Сервантесовог „Дон Кихота" описан је двобој који су водили Дон Кихот и Самсон Караско; после двобоја Санчо Панса води витезове у оближње село, где неки видар (ун алгебриста) лечи угруваног Караска.

У Европи се назив „алгебра" употребљавао већ почетком 13. века, мада је још и касније Њутн за алгебру користио назив „општа аритметика". Књига Ал-Хорезмија је имала изузетан значај у историји математике, јер је дуго коришћена као уџбеник у целој Европи. Управо под утицајем арапске математике алгебра се формирала као наука о решавању једначина. У савременој математици, алгебра је наука која се бави операцијама записаним у симболичкој форми.

Сада када смо решили проблем порекла речи *алгебра*, забавимо се мало ребусима у којима фигурише та реч.

1. Ако је

$$АЛГ + Е = БРА,$$

израчунај $А \cdot Л \cdot Г \cdot Е \cdot Б \cdot Р \cdot А$. Различита слова представљају различите цифре, иста слова једнаке цифре.

Решење. $Е$ је једноцифрен број, дакле $Е \leq 9$. Следи да је $Б = А + 1$, $Л = 9$, $Р = 0$, па је тражени производ 0.

2. Нађи сва решења ребуса

$$АЛГ + Е = БРА.$$

Различита слова представљају различите цифре, иста слова једнаке цифре.

Решење. Како је $Е$ једноцифрен број, дакле $Е \leq 9$, то је $Б = А + 1$, $Л = 9$, $Р = 0$, па $БРА$ може бити неки од бројева 201, 302, 403, 504, 605, 706, 807. Имајући у виду још и да је $Г + Е = 10 + А$, налазимо 18 решења:

$$193 + 8 = 201, \quad 194 + 7 = 201, \quad 195 + 6 = 201, \quad 196 + 5 = 201,$$
$$197 + 4 = 201, \quad 198 + 3 = 201, \quad 294 + 8 = 302, \quad 295 + 7 = 302,$$
$$297 + 5 = 302, \quad 298 + 4 = 302, \quad 395 + 8 = 403, \quad 396 + 7 = 403,$$

$397 + 6 = 403$, $398 + 5 = 403$, $496 + 8 = 504$, $498 + 6 = 504$,
$597 + 8 = 605$, $598 + 7 = 605$.

3. На колико начина је могуће заменити слова цифрама (иста слова истим цифрама, а различита различитим) тако да вредност производа

$$А \cdot Л \cdot Г \cdot Е \cdot Б \cdot Р \cdot А$$

буде 2016?

Решење. Приметимо прво да је $2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$. У производу

$$А \cdot Л \cdot Г \cdot Е \cdot Б \cdot Р \cdot А$$

појављује се шест различитих цифара, од којих једна два пута. Размотримо разне могућности за цифру *А*.
$А = 1$: Тада број 2016 треба представити у облику производа пет различитих једноцифрених бројева. Једна од тих цифара мора бити 7, јер она помножена са било којим другим простим чиниоцем броја 2016 даје број већи од 10. Цифра 9 не може да се користи, јер онда број 2^5 није могуће представити као производ три различита једноцифрена броја већа од 1. Остаје једина могућност да се број 2016 представи као производ пет различитих једноцифрених бројева већих од 1, а то је: $2 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8$. Како се цифре 2, 3, 6, 7, 8 могу на $5! = 120$ начина распоредити уместо слова *Л*, *Г*, *Е*, *Б*, *Р*, у овом случају има укупно 120 могућности за замену слова цифрама тако да буде испуњен услов задатка.
$А = 2$: Тада пет преосталих различитих цифара и различитих од 2 треба изабрати тако да њихов производ буде $2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$, а то је могуће учинити на само један начин: $2^3 \cdot 3^2 \cdot 7 = 1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7$. На овај начин добијамо још 120 решења.
Лако се проверава да не постоји решење у коме је цифра А већа од 2. Дакле, тражени број решења је 240.

4. Дешифруј ребус

$$АЛ^Г = ЕБРА.$$

Решење. Приметимо прво да је $А \neq 0$, јер је *АЛ* двоцифрен број. Тада је и $Л \neq 0$, јер би се у противном и број *ЕБРА* завршавао цифром 0, а $А \neq 0$.
Како је $АЛ^Г$ четвороцифрен број *ЕБРА*, то је $2 \leq Г \leq 3$ (јер и најмањи двоцифрен број степенован са 4 даје петоцифрен број, $10^4 = 10000$). Следи да је $Г = 2$ или $Г = 3$. Размотримо обе могућности.
1. Ако је $Г = 3$, онда је $А = 1$ или $А = 2$ ($Г < 3$, јер је већ 30^3 петоцифрен број).
Нека је $А = 1$. Тада је $Л \neq 1$; међутим, ниједна друга цифра степенована са 3 не завршава се цифром 1. Дакле, овај случај је немогућ.
Нека је $А = 2$. Тада је $Л = 1$ (јер је $Л \neq 0$, а већ 22^3 је петоцифрен број). Међутим, сваки степен броја који се завршава цифром 1, такође се завршава цифром 1, док је $А \neq 1$. Контрадикција.
2. Ако је $Г = 2$, тада је $А \neq 1$, јер је чак и 19^2 троцифрен број 361. $А \neq 2$, јер је $Г = 2$.
Даље је $А \neq 3$, $А \neq 7$, $А \neq 8$, јер ниједна цифра при квадрирању не даје број који се завршава са 3, 7 или 8. Такође је $А \neq 5$, јер је тада и $Л = 5$ (иначе се $АЛ^2$ не би завршавао цифром 5), а *Л* и *А* су различите цифре.
Ако је $А = 4$, тада је $Л = 2$ или $Л = 8$ (у противном се $АЛ^2$ неће завршавати цифром 4). Међутим, $Л \neq 2$, јер је $Г = 2$. Такође $Л \neq 8$, јер је $48^2 = 2304$, тј. $Е = 2$, што је контрадикција, јер је $Г = 2$. Дакле, $А \neq 4$.
Размотримо случај $А = 6$. Тада је $Л = 4$ или $Л = 6$ (иначе се $АЛ^2$ неће завршавати цифром 6). Међутим, $Л \neq 6$, јер је $А = 6$. Следи да је $Л = 4$. Међутим, $64^2 = 4096$, тј. $Е = 4 = Л$. Контрадикција. Дакле, $А \neq 6$.

Једина преостала могућност је $A = 9$. Тада је $Л = 3$ или $Л = 7$. За $Л = 7$ имамо $97^2 = 9409$, одакле је $A = E$, што не одговара условима задатка. Провером за $Л = 3$ налазимо јединствено решење

$$93^2 = 8649.$$

5. Дешифруј ребус

$$АЛГЕ - БРА = АЛГ - ЕБ.$$

Решење. Напишимо једнакост у облику

$$АЛГЕ + ЕБ = АЛГ + БРА.$$

Како је збир два троцифрена броја мањи од 2000, следи да је $A = 1$, па имамо једнакост

$$1ЛГЕ + ЕБ = 1ЛГ + БР1.$$

Збир $1ЛГ + БР1$ је мањи од $200 + 1000 = 1200$, одакле је $Л = 0$ (јер је $A = 1$). Тада је

$$10ГЕ + ЕБ = 10Г + БР1.$$

Ако је $Б \neq 9$, тада је $10Г + БР1 < 110 + 900 = 1010$; међутим, $10ГЕ + ЕБ > 1010$. Дакле, $Б = 9$, па је

$$10ГЕ + Е9 = 10Г + 9Р1,$$

или

$$1000 + ГЕ + Е9 = 100 + Г + 900 + Р1 = 1000 + Р1 + Г,$$

тј. $ГЕ + Е9 = Р1 + Г$. Приметимо да се лева страна завршава истом цифром као и $Е + 9$, а десна страна истом цифром као и $Г + 1$, тј. $Е + 8$ завршава се цифром $Г$.

Сада, ако је $Е = 2$, тада је $Г = 0$, што је немогуће; ако је $Е = 3$, тада је $Г = 1$, што је немогуће; ако је $Е = 4$, тада је $Г = 2$ и тада је $24 + 49 = Р1 + 2 = 73$, одакле је $Р = 1$, што одговара условима задатка.

Ако $Е$ узима вредности од 5 до 8, тада $Г$ узима вредност од 3 до 6 редом и тада је $ГЕ + Е9 \geq 35 + 59 = 94$, док је $Р1 + Г \leq 81 + 6 = 87$. Дакле, ти случајеви су немогући. Тако смо добили јединствено решење $1024 - 971 = 102 - 49$.

6. Дешифруј ребус

$$\frac{АЛГЕ}{БРА} = \frac{4}{3}.$$

Решење. Приметимо да је $А = 1$, јер би у противном било

$$\frac{АЛГЕ}{БРА} > \frac{2000}{999} > 2 > \frac{4}{3}.$$

Напишимо једнакост у облику

$$1ЛГЕ \cdot 3 = БР1 \cdot 4.$$

Видимо да се $3 \cdot Е$ мора завршавати цифром 4. Малим претраживањем лако налазимо да је $Е = 8$.

Како је $АЛГЕ > 1000$, то је $АЛГЕ \cdot 3 > 3000$, па је $БРА > \frac{3000}{4} = 750$. Дакле, број БРА је већи од 750, завршава се цифром 1 и све су му цифре различите и различите од 8 (јер је $Е = 8$). Има тачно 10 таквих бројева: 751, 761, 791, 901, 921, 931, 941, 951, 961 и 971. Поред тога, $БРА$ је дељив са 3, а међу наведеним бројевима такви су само 921 и 951. Број 921 не одговара, јер је тада $АЛГЕ = 921 \cdot 4 : 3 = 1228$, а цифре Л и Г су различите.

Како је $951 \cdot 4 : 3 = 3804 : 3 = 1268$, јединствено решење задатка је $\frac{1268}{951} = \frac{4}{3}$.

7. Дешифруј ребус

$$\frac{АЛГЕБ}{РА} = 2016.$$

Решење. Дата једнакост може се написати у облику

$$АЛГЕБ = РА \cdot 2016.$$

Размотрићемо све могућности за цифру $А$.

$А = 1$: Тада је $1ЛГЕБ = Р1 \cdot 2016$, па се лако види да је

$$4 < \frac{10000}{2016} < Р1 < \frac{20000}{2016} < 10,$$

што је немогуће јер је цифра $Р$ различита од 0.

$А = 2$: Тада је $2ЛГЕБ = Р2 \cdot 2016$, одакле је $Р = 1$. Како је $12 \cdot 2016 = 24192$, ни у овом случају нема решења, јер мора бити $А \neq В$.

$А = 3$: И у овом случају је $Р = 1$ (јер је $3ЛГЕБ = Р3 \cdot 2016$), а како је $13 \cdot 2016 = 26208$, нема решења јер је $А \neq 2$.

$А = 4$: У овом случају је $Р4 \cdot 2016 = 4ЛГЕБ$, па мора бити Р = 2, а како је $24 \cdot 2016 = 48384$, у овом случају нема решења, јер мора бити $А \neq В$.

$А = 5$: У овом случају је $Р5 \cdot 2016 = 5ЛГЕБ$, па мора бити Р = 2, а како је $25 \cdot 2016 = 50400$, у овом случају нема решења, јер мора бити $Л \neq Е$.

$А = 6$: У овом случају је $Р6 \cdot 2016 = 6ЛГЕБ$, па мора бити Р = 3, а како је $36 \cdot 2016 = 72576$, нема решења, јер је $А \neq 7$.

$А = 7$: У овом случају је $Р7 \cdot 2016 = 7ЛГЕБ$, па мора бити Р = 3, а како је $37 \cdot 2016 = 74592$, добијамо решење

$$\frac{74592}{37} = 2016.$$

$А = 8$: У овом случају је $Р8 \cdot 2016 = 8ЛГЕБ$, па мора бити Р = 4, а како је $48 \cdot 2016 = 96768$, у овом случају нема решења, јер је $А \neq 9$.

$А = 9$: У овом случају је $Р9 \cdot 2016 = 9ЛГЕБ$, па мора бити Р = 4, а како је $49 \cdot 2016 = 98784$, нема решења, јер мора бити $Л \neq Е$.

Дакле, једино решење ребуса је

$$\frac{74592}{37} = 2016.$$

Задаци за самостални рад

1. У речи *АЛГЕБРА* једно слово заменити знаком $\cdot$ и једно знаком +, а остала слова цифрама (иста слова истим цифрама, а различита различитим) тако да вредност добијеног израза буде највећа.

2. Да ли је могуће заменити слова цифрама (иста слова истим цифрама, а различита различитим), тако да важи

$$\frac{АЛГЕБ}{РА} = 2017?$$

3. Да ли је могуће заменити слова цифрама (иста слова истим цифрама, а различита различитим), тако да важи

$$\frac{АЛГЕБ}{РА} = 2013?$$

4. Дешифруј ребус

$$АЛГ \cdot Е = БРА.$$

5. Дешифруј ребус

$$АЛ + ГЕ = БРА.$$

Статијата прв пат е објавена во списанието Математички лист на ДМ на Србија