

ПАРАН ИЛИ НЕПАРАН?

Ратко Тошић, Нови Сад

Знања о парним и непарним бројевима могуће је применити у разним ситуацијама, повезаним са математичким задацима. Многи задаци се лако решавају ако уочимо да је вредност неког израза паран или непаран број. Некада је неопходно користити такав израз, на пример, посматрати парност збира или производа, парове неких предмета, уочити смењивање парности и непарности. У неким играма за играче је важно очување парности неке величине при сваком његовом потезу.



Подсетимо се: Парни бројеви су они који су дељиви са 2 (на пример, 2, 4, 6 ...). Сваки такав број може се написати у облику $2k$, за погодно изабран цео број k (на пример, $2 = 2 \cdot 1$, $4 = 2 \cdot 2$, $6 = 2 \cdot 3$, итд.). Непарни бројеви су они који при дељењу са 2 дају остатак 1 (на пример, 1, 3, 5, итд.). Сваки такав број може се написати у облику $2k + 1$, за погодно изабран цео број k (на пример, $3 = 2 \cdot 1 + 1$, $5 = 2 \cdot 2 + 1$, итд.).

Парни и непарни бројеви одликују се неким интересантним својствима:

- (1) збир (разлика) два парна броја је паран број;
- (2) збир (разлика) два непарна броја је паран број;
- (3) збир (разлика) два броја различите парности је непаран број.

Уопштавајући даље, можемо да закључимо:

(4) Збир неколико бројева је паран ако је број непарних сабирака паран, а непаран ако је број непарних сабирака непаран. (Тврђење важи и ако се неки знаци сабирања замене знацима одузимања.)

(5) Производ два или више бројева је непаран ако су сви ти бројеви непарни, а паран ако је бар један од тих бројева паран.

ЗАДАТАК 1. Да ли је могуће бројеве 1, 2, 3, ..., 10 поделити на две групе тако да зборови бројева у те две групе буду једнаки?

Решење. Ако саберемо збир бројева из једне групе са збиром бројева из друге групе добијамо као збир непаран број $1 + 2 + 3 + \dots + 10 = 55$. С друге стране, ако су зборови бројева у две групе једнаки, њихов збир мора бити паран број. Према томе, зборови бројева у две групе не могу бити једнаки.

ЗАДАТАК 2. Да ли је могуће исплатити износ од 25 перпера са 10 новчаница од 1, 3 и 5 перпера?

Решење. Не. Збир 10 непарних сабирака мора бити паран број.

ЗАДАТАК 3. Марко је написао на табли два цела броја. Илија је помножио разлику та два броја са њиховим производом и добио број 7735. Марко тврди да је Илија погрешно у рачуну. Да ли је Марко у праву?

Решење. Број који је добио Илија је непаран, па следи да су оба броја, као и њихова разлика непарни бројеви, што је немогуће.

ЗАДАТАК 4. Дато је шест бројева: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Сваке секунде се бирају два броја и сваки повећава за 1. Може ли се на тај начин после извесног времена добити шест једнаких бројева?

Решење. Не. Сваке секунде се збир шест бројева повећава за 2, што значи да тај збир не мења парност. Како је на почетку тај збир непаран ($1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$), он ће увек бити непаран. Зато никад на описан начин не можемо добити шест једнаких бројева (јер би њихов збир био паран).

ЗАДАТАК 5. Никола са сином и Петар са сином били су на пецању. Никола је упецао толико риба колико и његов син, а Петар три пута више него његов син. Укупно су упецали 25 риба. Колико је риба упецао Никола?

Решење. Никола и његов син упецали су заједно паран број риба (два пута више него сам Николин син). Исто тако, Петар и његов син упецали су заједно паран број риба (четири пута више него сам Петров син). Како је збир два парна броја паран број, следи да су сви заједно упецали паран број риба, па је немогуће да тај број буде 25. То, међутим, важи само ако су у питању четири различите особе. Размотримо случај када је Никола Петров син, а трећа особа Николин син. Тада су сви заједно упецали пет пута више риба него сам Николин син. Значи да је Николин син упецао пет риба, Никола исто толико, а Петар 15 риба. Случај када је Петар Николин син такође је немогућ, јер би тада број упецаних риба био дељив са 7. (Образложи!)

ЗАДАТАК 6. Марко је купио свеску са 100 листова и нумерисао њене странице бројевима од 1 до 200. Његов млађи брат Илија забављао се правећи авионе од папира и истргао је неких седам листова из Маркове свеске. Да ли збир бројева којима су нумерисане странице на истргнутим листовима може да буде једнак

(а) 2010; (б) 2011?

Решење. (а) Две странице једног листа нумерисане су са два узастопна броја од којих је први непаран, а други паран. Збир та два броја је непаран број. Збир седам непарних бројева је непаран; према томе, збир 14 бројева на истргнутим листовима не може бити једнак парном броју 2010.

(б) Не. Збир два броја на страницама једног листа је непаран број облика $4k - 1$ (Образложи!). Тај збир може бити најмање 3, а највише 399. С друге стране, број 2011 не може се представити као збир седам различитих непарних бројева облика $4k - 1$, не мањих од 3 и не већих од 399. Наиме, 2011 је број облика $4k - 1$ ($2011 = 4 \cdot 503 - 1$) и он се не може добити као збир 7 бројева облика $4k - 1$ (Образложи!).

ЗАДАЦИ ЗА САМОСТАЛНИ РАД:

1. Да ли је у ситуацији из задатка 6. могуће да се добије збир 2013?
2. Да ли је у ситуацији из задатка 6. могуће да се добије збир 2009, ако је Марков млађи брат Илија истргнуо из књиге седам узастопних листова?
3. По кружници је произвољним редом исписано 9 цифара – 4 јединице и 5 нула. Сваке секунде се извршава следећа операција: између две суседне цифре се записује нула, ако су те две цифре различите, а јединица ако су цифре једнаке,

после чега се старе цифре бришу. Да ли се на тај начин може постићи да после извесног времена све цифре буду једнаке?

4. Око округлог стола седе 25 девојака и 25 младића. Показати да међу особама за столом постоји бар једна која седи између две девојке.