„ГУСКА И ПО ЗА ДАН И ПО СНЕСЕ ЈАЈЕ И ПО, ...“

***др Славиша Б. Прешић*, Београд**

а) ОСНОВНИ ДЕО

1. Овај чланак је у највећој мери у вези са добро знаним, у наслову наговештеним, задатком тројичних пропорција. У овом делу ћемо најпре тај задатак решити, а потом ћемо начинити одређено мисаоно винуће и доћи до једне мале теорије која наткриљује речени задатак, о којој ће подробније бити речи у Додатку.

Прелазимо на речени задатак. Замислимо да неко постави задатак: „Гуска и по за дан и по снесе јаје и по, колико ће једна гуска снести за једна дан ?“ Ево једног решавања:

Први корак. Полазимо од претпоставке

(∗1) Гуска и по за дан и по снесе јаје и по.

Други корак. Замислимо да поменута Гуска и по носи јаја не за дан и по, него за дупло дуже време, тј. за три дана. Она ће онда снести два пута више јајета, односно 3. Тако:

(∗2) Гуска и по за 3 дана снесе 3 јајета.

Трећи корак. Сада замислимо да у реченом се појављује двапут више гусака, али да број дана остане исти. Будући да се број гусака удвојио то закључујемо да

(∗3) 3 гуске за 3 дана снешће 6 јајета.

Ту је крај првог полувремена у коме да бисмо лакше мислили смо се ослободили разломака, односно оног и по. Сада нам је наум да реченицу (∗3) поступно премотамо тако да у новој стоји *једна гуска и један дан.* У ту сврху из (∗3) најпре, утврђујући, тј. не мењајући број дана, али делењем броја гусака са 3, добијемо закључак

(∗4) 1 гуска за 3 дана снешће 2 јајета.

Сада утрђујући број гусака и делењем са 3 броја дана добијемо закључак

(∗5) 1 гуска за 1 дан снешће $\frac{2}{3}$ јајета.

И тако завршисмо решавање гуска и по–задатка.

2. Тај задатак има велики број рођака, односно задатака њему сличних: оних о радницима и послу, зупчаницима бицикла, комарцима који носе много јаја, итд. Обично се каже да су то задаци о *продуженим пропорцијама (сразмерама).* Није нам намера да се у овом чланку бавимо разноликим таквим задацима, коначно већ је много о томе писано.

Да, у њима је реч о продуженим пропорцијама, али шта су оне? То је у Математици један мали примерак овакве врсте

> Некако радимо и умемо да мислимо о нечему али га немамо строго и јасно дефинисаног. И ту се појављује питање, како да га Математиком опишемо, *ухватимо.* Ето већ вековима Математика је један од најзначајнијих хватача за многе проблеме, али –истичем– не и за све.

Ево, једног начина математчког хватања гуска и по задатка. Наиме, у задатку се говори о три величине, три броја: броју гусака, броју дана и броју јаја. Договорно, редом их означимо са x, y, z. И сада долази главна досетка:

> У вези са x, y, z уведимо тројичну релацију ρ и с тим у вези запис облика $\rho(x, y, z)$ читајмо овако: x гусака за y дана снесе z јаја.

Значи, користимо релацијску хватаљку, а сутра ће се пронаћи и ко зна какве нове хватаљке: Математика је једна од најстаријих наука, али и вечито млада. У ствари, што се тиче гуска и по задатка ове речи су мало пребрзе, јер се не види каква је корист од тих релацијских записа. Али, ево одмах ненаведених додатака:

> Помоћу релације ρ једну малу теорију Gus уводимо како следи:
>
> Прво, основна полазница, аксиома је $\rho(a, b, c)$ где a, b, c су неке константе. У изворном задатку оне су $3/2, 3/2, 3/2$.
>
> Друго, у вези са присутним сразмерама управним (директним) и обрнутим (индиректним) као опште полазнице, аксиоме узимамо ове импликације:
>
> (1) $\rho(x, y, z) \Rightarrow \rho(x, \lambda y, \lambda z)$
>
> (2) $\rho(x, y, z) \Rightarrow \rho(\lambda x, y, \lambda z)$
>
> (3) $\rho(x, y, z) \Rightarrow \rho(\lambda x, \frac{1}{\lambda} y, z)$ где λ ма који позитиван број.

Тако, прву од њих можемо овако прочитати: Ако за x дана, y гусака снесе z јајета, онда за исти број дана ће λy гусака снети λz јајета. Рецимо, ако $\lambda = 2$ онда закључна реченица би гласила: дупло већи број гусака би снео двапут више јајета. Ако $\lambda = \frac{1}{2}$ онда би испало да дупло мањи број гусака би снео дупло мањи број јајета. Слично се образлаже аксиома (2). Кратко речено у вези са првом аксиомом: ако је x утврђено, онда y и z су управно сразмерни, а у вези са другом ако је y утврђено онда су x и z управно сразмерни.

Међутим, код аксиоме (3) где је z утврђено бројеви x и y су обратно сразмерни. Рецимо, нека $z = 3/2$. Тада према трећој аксиоми: ако x гусака за y дана снесе јаје и по, онда двапут већи, уопште λ пута већи, број гусака ће то јаје и по снести за упола мање време, односно за $\frac{1}{\lambda}$ дана.

Сада ћемо на неким примерима видети како делује та теорија Gus. Прво, нека основна аксиома буде $\rho(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2})$, што значи да се укључује полазни задатак. Тада, на почетку наведено решавање се помоћу Gus може исказати овим импликацијским ланцем на чијем почетку је основна аксиома

$\rho(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2})$

$\Rightarrow \rho(\frac{3}{2}, 3, 3)$ (Применом (1), $\lambda = 2$)

$\Rightarrow \rho(3, 3, 6)$ (Применом (2), $\lambda = 2$)

$\Rightarrow \rho(1, 3, 2)$ (Применом (2), $\lambda = 1/3$)

$\Rightarrow \rho(1, 1, \frac{2}{3})$ (Применом (1), $\lambda = 1/3$).

Ево сада и једне краће доказне стазе:

$\rho(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2})$

$$\Rightarrow \rho(1, \tfrac{3}{2}, 1) \qquad \text{(Применом (2), } \lambda = 2/3)$$

$$\Rightarrow \rho(1, 1, \tfrac{2}{3}) \qquad \text{(Применом (1), } \lambda = 2/3).$$

Да решимо још један задатак, односно да пронађемо колико гусака ће за 5 дана да снесе 20 јајета. Чинимо, слично претходном: полазимо од основне аксиоме и применом правила (1), (2), (3) се трудимо да број дана постане 5, број јајета 20 и тада на првом месту ће стајати број гусака. Ево таквог решавања, описаног корак-за-кораком:

Први корак. Полазимо од аксиоме $\rho(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ и прво желимо да број дана постане 5. У ту сврху користимо аксиому (1) у облику

$$\rho(\tfrac{3}{2}, \tfrac{3}{2}, \tfrac{3}{2}) \Rightarrow \rho(\tfrac{3}{2}, \lambda\tfrac{3}{2}, \lambda\tfrac{3}{2}).$$

Број λ одређујемо из једначине $\lambda\frac{3}{2} = 5$ одакле добијемо $\lambda = 10/3$. Тако смо добили

$$\rho(\tfrac{3}{2}, \tfrac{3}{2}, \tfrac{3}{2}) \Rightarrow \rho(\tfrac{3}{2}, 5, 5).$$

Други корак. Сада хоћемо да број јајета буде 20. У ту сврху користимо аксиому (2) у облику

$$\rho(\tfrac{3}{2},\ 5,\ 5) \ \Rightarrow\ \rho(\lambda \cdot \tfrac{3}{2},\ 5,\ \lambda \cdot 5).$$

Број λ одређујемо из једначине $\lambda \cdot 5 = 20$ одакле добијемо $\lambda = 4$. Тако смо добили

$$\rho(4 \cdot \tfrac{3}{2}, \tfrac{3}{2}, \tfrac{3}{2}) \Rightarrow \rho(6, 5, 20).$$

И тако стигосмо до решења: 6 гусака за 5 дана ће снести 20 јајета.

б) Додатак

У претходном излагању смо користили уведену теорију Gus и при том у раду са њом мислили смо на гуска–дан–јаје интерпретацију. У овом делу не чинимо тако, већ полазимо од основне аксиоме у облику $\rho(a, b, c)$ где су a, b, c извесни задани позитивни реални бројеви као и аксиома (1), (2), (3). Занима нас тај математички свет, хоћемо да му откријемо разне правилности.

Па једно занимање, а о њему ће управо бити речи, односи се на разноразне доказне стазе. А оне настају тако што на полазу имамо $\rho(a, b, c)$ а онда час користимо прву, час другу, час трећу аксиому. То подсећа на оно кад уопште у Математици имамо неки скуп аксиома и трагамо за разним доказним стазама на чијим крајевима су теореме таквог скупа аксиома.

Једна од првих ствари у вези са доказним стазама у случају Gus је исказива овим речима:

$(Tvr1)$ Редослед у коме се користе аксиоме (1), (2), (3) није битан.

Може се десити да на први поглед та реченица није јасна. Па, прво замислимо да смо у неком кораку доказне стазе стигли до $\rho(x, y, z)$ са неким изразима x, y, z. Даље смо у наредном кораку употребили аксиому (i), а потом аксиому (j), где ти i, j глуме бројке 1, 2, 3. Примера ради употребили смо најпре аксиому (2), а потом (1). И $(Tvr1)$ нам поручује: добићеш исто ако преокренеш тај редослед, тј. најпре користиш (1) па након тога (2). Ево сада ћемо одмах проверити исправност управо тога:

Па, ако смо на $\rho(x, y, z)$ најпре применили (2) добићемо $\rho(\lambda x, y, \lambda z)$, а ако затим применимо (1) добићемо $\rho(\lambda x, \mu y, \mu\lambda z)$, где смо поред λ употребили и μ.

> С друге стране, ако на $\rho(x, y, z)$ најпре применимо (1) добићемо $\rho(x, \mu y, \mu z)$, а ако затим применимо (2) добићемо $\rho(\lambda x, \mu y, \lambda\mu z)$, што се поклапа са оним претходним; захваљујући једнакости $\mu\lambda = \lambda\mu$, примерку закона комутативности за множење.

На сасвим сличан начин се тврђење $(Tvr1)$ доказује у осталим случајевима коришћења аксиома (1), (2), (3), па доказ не наводимо.

И сада благодарећи тврђењу $(Tvr1)$ ма коју доказну стазу можемо овако замислити

> Полазећи од $\rho(a, b, c)$ најпре се неколико пута примени аксиома (1), па онда неколико пута аксиома (2) и након тога неколико пута аксиома (3).

Већ по мало ухватисмо свет доказних стаза. Да, али муку чини оно неколико три пута поменуто у претходом опису. Али, и ту има али. Као што ћемо убрзо видети, грубо речено то неколико се сме заменити са *тачно једаред*. Наиме имамо ову чињеницу

$(Tvr2)$ Ако на извесну формулу $\rho(x, y, z)$ за редом двапут употребимо исту аксиому (i), онда се та два корака могу заменити једним. Ближе, ако у првом кораку смо употребили λ_1, а у другом λ_2, онда исти плод добијемо ако на формулу $\rho(x, y, z)$ једанпут применимо (i) са ламбдом једнаким $\lambda_1 \cdot \lambda_2$.

И то се тврђење лако доказује. Рецимо, да смо на формулу $\rho(x, y, z)$ двапут за редом употребили аксиому (1). Тада бисмо имали ланац:

$$\rho(x, y, z) \;\Rightarrow\; \rho(x, \lambda_1 y, \lambda_1 z) \;\Rightarrow\; \rho(x, \lambda_2\lambda_1 y, \lambda_2\lambda_1 z)$$

што је скупљиво у један корак

$$\rho(x, y, z) \;\Rightarrow\; \rho(x, \lambda y, \lambda z)$$

где λ је $\lambda_2 \cdot \lambda_1$, тј. $\lambda_1 \cdot \lambda_2$. Доказ се слично обавља и у случају остале две аксиоме.

И на основу та два тврђења испада да свака доказна стаза се може премотати на стазу од највише три члана. Заиста замислимо да смо полазећи од аксиоме $\rho(a, b, c)$ примењивали све три аксиоме, при чему нека $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$ буду производи свих коришћених ламбда, редом за прву, за другу и трећу аксиому. Тада претпостављена доказна стаза се може заменити овом стазом

$\rho(a, b, c)$

$\Rightarrow \rho(a, \Lambda_1 \cdot b, \Lambda_1 \cdot c)$ (Скупљени су сви кораци примене аксиоме (1) и стављени као један корак)

$\Rightarrow \rho(\Lambda_2 \cdot a, \Lambda_1 \cdot b, \Lambda_2 \cdot \Lambda_1 \cdot c)$ (Слично учињено за другу аксиому)

$\Rightarrow \rho(\Lambda_3 \cdot \Lambda_2 \cdot a, {\Lambda_3}^{-1} \cdot \Lambda_1 \cdot b, \Lambda_2 \cdot \Lambda_1 \cdot c)$ (Слично учињено за трећу аксиому)

Ту је описан случај кад су све три аксиоме упошљене, а може се догодити и да нека није. У таквом случају у наведеном опису одговарајући ламбда ће бити 1.

И сада се указује мисаона прилика да се опише кад уопште извесна формула $\rho(x, y, z)$ је Gus−теорема:

$(Tvr3)$ Формула $\rho(x, y, z)$ је Gus−теорема ако и само ако x, y, z су редом облика

$$\Lambda_3 \cdot \Lambda_2 \cdot a, \quad {\Lambda_3}^{-1} \cdot \Lambda_1 \cdot b, \quad \Lambda_2 \cdot \Lambda_1 \cdot c$$

за неке позитивне бројеве $\Lambda_1,\ \Lambda_2,\ \Lambda_3$.

Доказ. Ако је $\rho(x, y, z)$ теорема, онда је она доказива претходно наведеном доказном стазом, тј. она је његов крај, елем x, y, z имају тај описани облик.

Обратно, x, y, z су редом наведеном облика, онда из тог облика су сазнатљиви $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$ и за такве ламбде видимо да наведена стаза је исправна, односно она је доказна стаза, а на њеном крају управо стоји $\rho(x, y, z)$, које је значи $Gus-$теорема.

То тврђење можемо и овако изрећи: Формула $\rho(x, y, z)$ је $Gus-$теорема ако и само ако x, y, z су одређени обрасцима

$$(Obr) \qquad \begin{aligned} x &= \Lambda_3 \cdot \Lambda_2 \cdot a \\ y &= {\Lambda_3}^{-1} \cdot \Lambda_1 \cdot b \\ z &= \Lambda_2 \cdot \Lambda_1 \cdot c \end{aligned}$$

где $\Lambda_1,\ \Lambda_2,\ \Lambda_3$ могу бити ма који позитивни бројеви.

Множењем прве две једнакости (Obr) добијемо ову једнакост

$$xy = \Lambda_2 \cdot \Lambda_1 \cdot ab$$

помоћу које и треће једнакости (Obr) добијемо ову једнакост

(Gus)-*једначина*: $\qquad xyc = abz.$

Значи, свака тројка (x, y, z) која потиче из (Obr), задовољава ту једначину. Рецимо, ако $a = 3/2, b = 3/2, c = 3/2$, као у полазном задатку, та једначина гласи $2xy = 3z$. Питање је да ли важи и обратно. О томе управо говори ово тврђење:

$(Tvr4)$ Формула $\rho(x, y, z)$ је $Gus-$теорема ако и само ако $x,\ y,\ z$ задовољавају (Gus)-једначину.

Доказ. Прво, ако $\rho(x, y, z)$ је $Gus-$теорема, онда важе једнакости (Obr) из којих следи $(Gus)-$једначина, па и она важи.

Друго, нека x, y, z задовољавају једначину $xyc = abz$. Потражићемо непознате $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$ из једначина (Obr). И ако их нађемо, онда је јасно да су x, y, z редом облика описаног у $(Tvr3)$, следствено $\rho(x, y, z)$ би била теорема теорије Gus. Тако уочимо овај по $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$ систем једначина

$$\Lambda_3 \cdot \Lambda_2 \cdot a = x, \quad {\Lambda_3}^{-1} \cdot \Lambda_1 \cdot b = y, \quad \Lambda_2 \cdot \Lambda_1 \cdot c = z$$

и потражимо му макар једно решење. Није тешко видети да рецимо Λ_3 смемо заменити неком вредношћу по вољи, на пример управо са 1. Тако добијемо ово решење

$$\Lambda_1 = \frac{y}{b}, \quad \Lambda_2 = \frac{x}{a}, \quad \Lambda_3 = 1$$

чиме се завршава доказ тврђења $(Tvr4)$. Најпре ћемо упознати неке примере дејства доказане $(Gus)-$једначине, а након тога ћемо јој се вратити.

Рецимо, за полазан задатак, када $a = b = c = 3/2$ се, као што је већ речено, јавља једначина $3xy = 2z$. Из ње се очас посла добију разне већ тражене ствари. Тако, ако $x = 1, y = 1$, а пита се колико је z, одмах добијемо $z = 2/3$, што је одговор на оно: колико једна гуска снесе за један дан. Међутим, благодарећи тој (Gus)-једначини можемо рецимо потражити све случајеве кад $z = 1$. То се дешава за ма која два x, y чији производ је $2/3$.

Уопште у вези са $(Gus)-$једначином да подвучемо да према њој следи да за ма која два задана податка од x, y, z онај трећи је јединствено одређен. Гледано наочарима доказних стаза, то рецимо значи: ако смо добили $Gus-$теорему вида $\rho(a, b, z)$, онда то z мора да буде управо c.

Вратимо се (Gus)–једначини, коришћеној пред крај доказа $(Tvr4)$. Као што се види при тражењу једног решења за непознате $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$ за једну од њих управо Λ_3 смо узели вредност 1. То –имајући на уму смисао тих ламбда– вуче на помисао: „Па, значи аксиома (3) при том није употребљена“. Кад се мало охлади глава може се ово помислити: *Аксиома* (3) *је непотребна, односно она следи из аксиома* (1) *и* (2), *тј. теорија Gus се може задати само са те две аксиоме.* То је на први поглед мало необично, али је тачно што следи из доказа који наводимо. Тако имамо ову доказну путању која почиње са $\rho(x, y, z)$:

$\rho(x, y, z)$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \rho(x, \lambda y, \lambda z) && \text{(По (1))}\\
&\Rightarrow \rho(\mu x, \lambda y, \mu\lambda z) && \text{(По (2))}\\
&\Rightarrow \rho(\lambda^{-1} x, \lambda y, \lambda^{-1}\lambda z) && \text{(За } \mu \text{ смо изабрали } \lambda^{-1})\\
&\Rightarrow \rho(\lambda^{-1} x, \lambda y, z).
\end{aligned}$$

Доказана је импликација $\rho(x, y, z) \;\Rightarrow\; \rho(\lambda^{-1}x, \lambda y, z)$, тј. аксиома (3).

Занимљиво је да се међу аксиомама (1), (2), (3) могу изабрати ма које две од њих као нове аксиоме, тада преостала аксиома следи из тих двеју. Видите, теорија Gus јесте мала, али има лепих правилности.

На крају у вези са теоријом Gus да истакнемо ово: почели смо са гускама, данима, снетим јајима, затим смо мисаоним винућем начинили теорију Gus. У њој се појављују $x, y, z, a, b, c, \lambda, \ldots$ који су –по реченом– ма који позитивни бројеви.

Истини за вољу, од тога позитиван број је коришћено тек по нешто. Прилика за ново винуће. Наиме, те бројеве смо где–где множили, даље користили смо закон комутативности и асоцијативности, као и да за сваки број имамо *инверзан број.* Кратко речено: користили смо чињеницу да скуп позитивних реалних бројева чини групу у односу на множење. Следствено, теорија Gus се може уопштити тако да $x, y, z, a, b, c, \lambda, \ldots$ буду чланови ма које комутативне групе.

Да поменем да се теорија Gus може исказати као *формална теорија*, тј. потпуно аксиоматска. Тада као аксиому узимамо $\rho(a, b, c)$ док од (1), (2), (3) начинимо правила извођења:

$$\frac{\rho(x, y, z)}{\rho(x, \lambda y, \lambda z)}, \quad \frac{\rho(x, y, z)}{\rho(\lambda x, y, \lambda z)}, \quad \frac{\rho(x, y, z)}{\rho(\lambda x, \frac{1}{\lambda} y, z)}$$

где је λ ма који позитиван број, или члан изабране комутативне групе, већ према томе како уведемо Gus. Такође, у складу са претходним излагањем не морамо узети сва три правила, већ два од њих; по вољи одабраних.

Тиме се завршава прича о теорији Gus. Напомињем да се она даље може уопштавати у разним правцима.

На самом крају, две–три речи о тројичној релацији чији учесници су управно сразмерни. За њу се обично користи овакав, по мало мутан, запис $x : y : z$. Међутим, све се појашњава ако се користи релацијски запис попут $\rho(x, y, z)$. Даље, слично са Gus можемо овако увести једну малу теорију: имамо једну основну аксиому облика $\rho(a, b, c)$ и једну импликацијску аксиому $\rho(x, y, z) \Rightarrow \rho(\lambda x, \lambda y, \lambda y)$. Доста лако, ту теорију можемо премотати на формалну теорију.

Статијата прв пат е објавена во списанието ТАНГЕНТА на ДМ на Србија во 2005/06 година