

Ирена Стојковска,

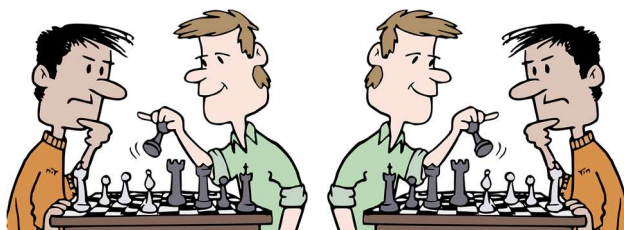
Природно-математички факултет, Скопје

ИГРИ И СТРАТЕГИИ

Игрите се едни од најомилените активности на децата, а анализата на игрите вклучува многу интересна математика. Секоја од игрите во овој прилог има иста структура: постојат двајца играчи кои наизменично ги играат потезите. Играчот кој прв почнува се нарекува *првиот играч*, а неговиот противник е *вториот играч*. При анализа на игрите всушност бараме дали постои *победничка стратегија*, односно *чекори од инструкции кои треба да ги следи играчот за да си обезбеди сигурна победа*. Инструкциите треба да се *прецизни и комплетни* т.е. каков и да е потегот на спротивниот играч, играчот кој игра во согласност со победничката стратегија, да може во секое време да одигра според инструкциите. Исто така треба да може да се објасни зошто победничката стратегија сигурно му обезбедува победа на играчот кој игра според таа стратегија.

Често победничките стратегии при играњето на игрите се состојат од *симетрични потези*. Да ја разгледаме следната ситуација.

Пример 1. Претпостави дека играш шах на две шаховски табли со други два играчи истовремено. И двата играчи со кои играш се светски шампиони во шах. Како да ги испланираш своите потези за да победиш или одиграш нерешено во барем една од игрите?



Одговор. На едната табла ќе бидеш играчот кој втор почнува да игра, а на другата табла ти ќе ја почнеш играта. Потезите на противникот од првата табла ќе ги играш ти на втората табла, и обратно, потезите на противниот од втората табла, ќе ги играш ти на првата табла. Така, на двете табли всушност ќе играат

ОДДЕЛЕНСКА НАСТАВА

меѓусебно светските шампиони. Па, ако тие одлучат да ја завршат играта нерешено, тоа ќе значи нерешено и за двете твои игри, ако пак едниот го победи другиот, тоа значи дека и ти ќе имаш една победа.

Пример 2. Двајца играчи играат игра. Пред нив има две купчиња со по 23 бонбони секое. Играчите наизменично земаат 1, 2, 3, 4 или 5 бонбони од било кое од купчињата. Победник е играчот кој ќе ја земе последната бонбона. За кој од играчите постои победничка стратегија и која е таа?



Решение. Во оваа игра вториот играч има победничка стратегија базирана на симетрија. Вториот играч треба да го игра истиот потег на првиот играч, само од другото купче. На пример, ако првиот играч земе 3 бонбони од второто купче, вториот играч треба да земе 3 бонбони од првото купче, ако пак првиот играч земе 5 бонбони од првото купче, вториот треба да земе 5 бонбони од второто купче. Бидејќи купчињата имаат на почетокот еднаков број бонбони, после секој потег на вториот играч, во купчињата остануваат еднаков број бонбони. На тој начин вториот играч ќе биде последен кој зел бонбона, па првиот играч нема да може да одигра потег, односно победник е вториот играч.

Да забележиме дека, доколку вториот играч не е запознаен со стратегијата, и при некој негов потег не го изедначи бројот на бонбони во двете купчиња, тогаш, првиот играч ја презема улогата на втор играч, при секој негов потег ги изедначува бонбоните во купчињата, и на крајот тој победува.

Пример 3. На лист хартија се означени 8 точки, така што никои три од нив не лежат на иста права. Двајца играчи ја играат следната игра: Играчите наизменично цртаат отсечки со крајни точки во дадените точки, но така што отсечката која ќе ја нацртаат да не сече ниедна од претходно нацртаните отсечки (но може да има заедничка крајна точка со некоја од веќе нацртаните отсечки). Играчот кој не може да го одигра својот потег, е губитник во играта.

Може ли еден од играчите, ако игра на некој одреден начин, да обезбеди сигурна победа?

Решение. Точките ќе ги означиме редоследно со 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 и 8. Првиот играч е тој кој има победничка стратегија, ако во првиот негов потег ги спои точките 1 и 5, и на тој начин остави по три точки од двете страни на отсечката со крајни точки 1 и 5. Понатаму, првиот играч треба да игра симетрични потези на потезите на вториот играч во однос на отсечката со крајни точки 1 и 5. На пример, ако вториот играч ги спои точките 2 и 3, првиот треба да ги спои точките 8 и 7, потоа ако вториот играч ги спои точките 8 и 5, првиот треба да ги спои точките 2 и 5 итн. (направи цртеж) На тој начин, првиот играч ќе биде тој што последен нацртал отсечка и победува.

Пример 4. Двајца играчи играат игра. Петнаесет камчиња се наредени во редица. Играчите наизменично земаат 1, 2 или 3 последователни камчиња. (Последователни значи камчиња кои се едно до друго. Камчињата меѓу кои има празно место на кое претходно стоело некое камче, не се последователни камчиња.) Играчот кој не може да го одигра својот потег, е губитник во играта. За кој од играчите има победничка стратегија и која е таа?

Решение. Постои победничка стратегија за првиот играч. Првиот играч го зема централното камче, камчето кое е на 8-то место. По овој негов потег лево и десно од местото на земеното камче остануваат по 7 камчиња. Понатаму, вториот играч смее да земе 1, 2 или 3 последователни камчиња од една од страните лева или десна. Која страна и да ја одбере вториот играч, првиот играч ќе го одигра симетричниот потег на вториот играч од другата страна. На пример, ако вториот играч ги зел 2-рото и 3-тото камче, првиот играч ќе ги земе 13-тото и 14-тото камче. Првиот играч ќе ги игра сите свои наредни потези на тој начин, симетрично во однос на централното 8-мо место. На тој начин, првиот играч ќе биде последен кој зел камче, и за вториот играч нема да има камчиња за земање, значи победува првиот играч.

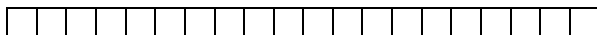
Пример 5. Размислете, ако на почетокот во Пример 4 беа 16 камчиња, за кој од играчите има победничка стратегија и која е

таа? Дали може да ја обопштите победничката стратегија за произволен број почетни камчиња?

Одговор. Ако на почетокот има 16 камчиња, првиот играч ќе ги земе централните две камчиња, 8-то и 9-то, и понатаму ќе игра симетрични потези на потезите на вториот играч во однос на централните две места, односно првиот играч има победничка стратегија и е победник во играта. Лесно се воочува дека за било кој број почетни камчиња првиот играч има победничка стратегија. Ако бројот на почетни камчиња е непарен број, тогаш првиот играч во првиот потег зема едно централно камче и понатаму игра симетрични потези. Ако бројот на почетни камчиња е парен број, тогаш првиот играч ги зема централните две камчиња и понатаму игра симетрични потези.

Не секогаш може да се одиграат симетрични стратегии. Следно, ќе ги истражиме *комплементарните стратегии*, стратегиите при кои потезите се надополнуваат.

Пример 6. Двајца играчи играат игра. Пред нив имаат лента со 20 квадратчиња, како на сликата. Играчите играат наизменично, при што кога ќе им дојде редот отсекуваат 1, 2, 3 или 4 последователни квадратчиња од некој од краевите на лентата. (Последователни значи едно до друго.) Играчот кој не може да го реализира својот потег, е губитник во играта. Кој од играчите има победничка стратегија и каква?



Решение. Да ја анализираме играта наназад. Победник е играчот кој после својот потег ќе остави 5 квадратчиња, затоа што ако неговиот противник отсеке 1, 2, 3 или 4 квадратчиња, тогаш играчот ќе ги земе преостанатите 4, 3, 2, односно 1 квадратче и ќе победи. Всушност стратегијата на победникот се состои од комплементарни потези на неговиот противник, и секој пат после неговиот потег да остави број на квадратчиња делив со 5. На почетокот има 20 квадратчиња, па вториот играч е тој кој има победничка стратегија: секој пат кога првиот играч ќе отсеке 1, 2, 3 или 4 квадратчиња, тогаш вториот играчот ќе отсеке соодветно 4, 3, 2, односно 1 квадратче, па после првиот пат потези ќе останат

15 квадратчиња, после вториот пар потези ќе останат 10 квадратчиња, после третиот пар потези ќе останат 5 квадратчиња и после последниот пар потези нема да остане ниедно квадратче, па првиот играч нема да може да реализира потег и победник ќе биде вториот играч.

Пример 7. Размислете, ако на почетокот во Пример 6 беа 22 квадратчиња, за кој од играчите има победничка стратегија и која е таа?

Одговор. Првиот играч има победничка стратегија, со тоа што во првиот потег ќе отсеке 2 квадратчиња и со тоа ќе остави 20 квадратчиња, и потоа ќе игра комплементарни потези на вториот играч, секој пат оставајќи број на квадратчиња делив со 5.

Во општ случај, ако почетниот број на квадратчиња е број делив со 5, тогаш вториот играч има победничка стратегија, а ако не е делив со 5, тогаш првиот играч има победничка стратегија.

Задачи за самостојна работа

1. Двајца играчи играат игра. Пред нив има две тегли со колачиња, во едната тегла има 31 колаче, а во другата има 27 колачиња. Играчите наизменично земаат 1, 2, 3, 4, 5 или 6 колачиња од било која од теглите. Победник е играчот кој ќе го земе последното колаче. За кој од играчите постои победничка стратегија и која е таа?

2. Двајца играчи играат игра. На почетокот имаат купче од 17 монети. Играчите наизменично отстрануваат 1, 2 или 3 монети од купчето. Играта завршува кога нема да остане ниедна монета во купчето, а играчот кој е на ред и за него нема монети за земање, е губитник. Кој од играчите има победничка стратегија и каква?

Извори:

[1] A. Burago, *Mathematical Circle Diaries, Year 1*, MSRI, AMS, 2010.

[2] V. Stojanović, *Matematiskop 1. Vodič za šampione. Priručnik za dodatnu nastavu i pripremu takmičenja za učenike IV, V i VI razred*, Matematiskop, Beograd, 2004.

Решенија на задачите за самостојна работа од
ИГРИ И СТРАТЕГИИ
(на крајот од списанието)

1. Ако на почетокот во двете тегли има еднаков број колачиња, тогаш вториот играч има победничка стратегија со симетрични потези. Но, сега на почетокот во едната тегла има 31 колаче, а во втората тегла има 27 колачиња, па првиот играч е тој кој има победничка стратегија со тоа што во првиот потег ќе ги направи еднаквобројни теглите, односно ќе земе 4 колачиња од теглата со 31 колаче, а понатаму ќе ги повторува потезите на вториот играч и ќе зема исто толку колачиња колку што зема вториот играч, но од другата тегла. На тој начин, првиот играч ќе ги земе последните колачиња и ќе победи.

2. Размислуваме наназад. Победник е тој кој би оставил 4 монети во купчето, така што ако противникот земе 1, 2 или 3 монети, тогаш играчот ќе ги земе преостанатите 3, 2, односно 1 монета и ќе победи. Всушност победничка стратегија има играчот кој после својот потег во купчето остава број на монети делив со 4. Бидејќи на почетокот бројот на монети е 17, не е делив со 4, тоа значи дека првиот играч има победничка стратегија, тој во првиот потег зема 1 монета, остануваат 16 монети, и понатаму игра комлементарни потези, кога вториот играч ќе земе 1, 2 или 3 монети, тогаш првиот играч ќе земе соодветно 3, 2, односно 1 монета, ќе остави купче со број на монети делив со 4. На тој начин првиот играч ќе ги земе последните монети, купчето ќе остане празно и вториот играч нема да може да одира потег, па победник ќе биде првиот играч.

Статијата прв пат е објавена во списанието НУМЕРУС кое го издава Сојузот на математичарите на Македонија