Površina tangencijalno-tetivnog četverokuta

Mladen Halapa, Bjelovar

U mnoštvu mnogokuta zanimljiva je formula za površinu četverokuta kojemu se istodobno može upisati i opisati kružnica:

$$P = \sqrt{abcd}, \tag{1}$$

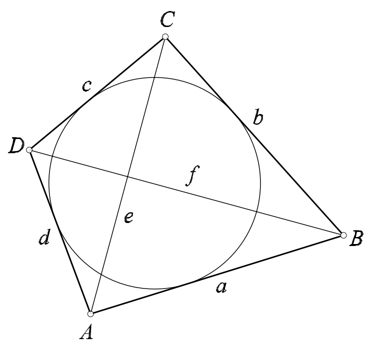
gdje su a, b, c, d duljine stranica.

Dokažimo formulu!

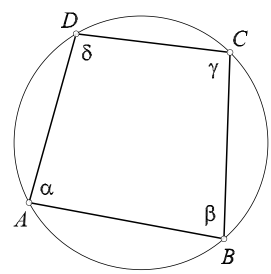
Podsjetimo se definicija tangencijalnog i tetivnog četverokuta.

• Četverokut u koji se može upisati kružnica (*kojemu su stranice tangente kružnice*), zove se tangencijalni četverokut (slika 1) i vrijedi:

$$a + c = b + d. \tag{2}$$



Slika 1.



Slika 2.

• Četverokut oko kojeg se može opisati kružnica (*kojemu su stranice tetive kružnice*), zove se tetivni četverokut (slika 2) i vrijedi:

$$\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180^\circ. \tag{3}$$

Da bismo izveli formulu (1), dokazat ćemo prije toga tri stavka.

Stavak 1. (Ptolemejev[1] poučak) Za svaki tetivni četverokut $ABCD$ je:

$$ef = ac + bd, \tag{4}$$

gdje je:

$$|AB| = a,\ |BC| = b,\ |CD| = c,\ |DA| = d,\ |AC| = e,\ |BD| = f. \tag{5}$$

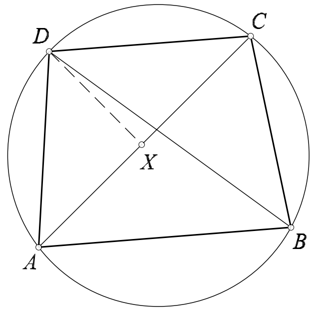
Dokaz. Na dijagonali AC konstruiramo točku X tako da je:

$$\angle ADX = \angle BDC.$$

Budući da su kutovi $\angle DAC$ i $\angle DBC$ obodni kutovi nad lukom $\overset{\frown}{CD}$, slijedi:

$$\angle DAC = \angle DBC.$$

[1] Ptolemej, Klaudije (oko 100. – oko 178.), starogrčki matematičar.



Slika 3

Trokuti AXD i BCD slični su jer imaju jednake kutove. Valjan je omjer:

$$|AD| : |AX| = |BD| : |BC|,$$

odnosno:

$$|AD| \cdot |BC| = |AX| \cdot |BD|. \tag{6}$$

Istu argumentaciju ponovimo za trokute ABD i CDX. Obodni kutovi $\sphericalangle ACD$ i $\sphericalangle ABD$ jednaki su jer su nad istim lukom $\overset{\frown}{DA}$. Budući je

$$\sphericalangle ADB = \sphericalangle XDC,$$

trokuti ABD i XCD su slični. Zato je:

$$|AB| : |BD| = |CX| : |CD|,$$

tj.

$$|AB| \cdot |CD| = |BD| \cdot |CX|. \tag{7}$$

Zbrojimo (6) i (7), a nakon sređivanja dobijemo traženu jednakost:

$$|AD| \cdot |BC| + |AB| \cdot |CD| = |AX| \cdot |BD| + |BD| \cdot |CX| = |BD| \cdot |AC|$$

ili zbog (5):

$$ef = ac + bd.$$

□

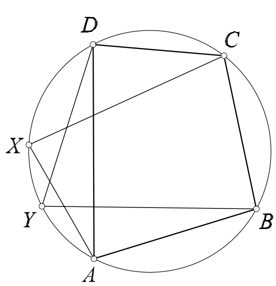
Stavak 2. Za svaki tetivni četverokut $ABCD$ vrijedi jednakost:

$$|AC| : |BD| = (|AB| \cdot |AD| + |CB| \cdot |CD|) : (|BA| \cdot |BC| + |DA| \cdot |DC|).$$

Koristeći oznake (5), možemo pisati:

$$e : f = (ad + bc) : (ab + cd). \tag{8}$$

Dokaz.



Slika 4

Konstruirajmo tetivni četverokut $ABCD$ i na kružnici odredimo točke X i Y tako da vrijedi:

$$\overset{\frown}{XA} = \overset{\frown}{CD}, \quad \overset{\frown}{DY} = \overset{\frown}{AB}.$$

Uočimo dva nova tetivna četverokuta $AXCB$ i $BYDC$. Na svaki od njih primijenimo Ptolemejev poučak:

$$|AC| \cdot |BX| = |AB| \cdot |CX| + |AX| \cdot |BC|, \tag{9}$$

$$|BD| \cdot |CY| = |CD| \cdot |BY| + |BC| \cdot |DY|. \tag{10}$$

Zaključujemo da zbog jednakosti duljine lukova (slika 4) slijede jednakosti među duljinama tetiva:

$$\begin{aligned}
&\overset{\frown}{AX} = \overset{\frown}{DC} \implies |AX| = |DC|, \quad \overset{\frown}{DY} = \overset{\frown}{AB} \implies |DY| = |AB|,\\
&\overset{\frown}{CY} = \overset{\frown}{CD} + \overset{\frown}{DY} = \overset{\frown}{XA} + \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{XB} \implies |BX| = |CY|,\\
&\overset{\frown}{CX} = \overset{\frown}{CD} + \overset{\frown}{DX} = \overset{\frown}{DX} + \overset{\frown}{XA} = \overset{\frown}{DA} = \overset{\frown}{DY} + \overset{\frown}{YA} = \overset{\frown}{YA} + \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{YB}\\
&\qquad \implies |CX| = |BY| = |AD|.
\end{aligned}$$

Relaciju (9) podijelimo s (10) i, koristeći gornje jednakosti, dobijemo tvrdnju (8).

Sada se duljina svake dijagonale tetivnog četverokuta lako može izračunati pomoću duljina stranica. Iz (8) se, na primjer, dobiva duljina dijagonale e:

$$e = f\frac{ad + bc}{ab + cd},$$

a s pomoću Ptolemejeva poučka (4) konačno:

$$e^2 = \frac{(ac + bd)(ad + bc)}{ab + cd}. \tag{11}$$

□

Stavak 3. (Heronova[2] formula za površinu tetivnog četverokuta)

Površina tetivnog četverokuta je:

$$P = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}, \tag{12}$$

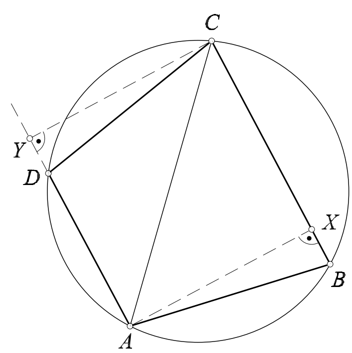
gdje su a, b, c, d duljine stranica, a s poluopseg

$$s = \frac{a + b + c + d}{2}. \tag{13}$$

Zanimljivo je da je ta formula slična formuli za površinu trokuta. U literaturi ćemo naći podatak kako je bila poznata već staroindijskim matematičarima.

Dokaz. Tetivni četverokut $ABCD$ rastavimo dijagonalom AC na dva trokuta ABC i ACD. Konstruirajmo njihove visine AX i CY. Površina četverokuta $ABCD$ može se izraziti kao zbroj površina trokuta ABC i ACD:

$$P = P_{\triangle ABC} + P_{\triangle ACD}.$$



Slika 5

[2] Heron, starogrčki matematičar, živio u Aleksandriji vjerojatno u 1. stoljeću poslije Krista.

Trokuti ABX i CDY slični su jer imaju jednake kutove. Uvjerimo se:

$$\begin{aligned} \sphericalangle YCD + \sphericalangle CDY &= \sphericalangle XBA + \sphericalangle BAX, \\ \sphericalangle YCD + \sphericalangle CDY &= 180^\circ - \sphericalangle ADC + \sphericalangle BAX, \\ \sphericalangle YCD + \sphericalangle CDY + \sphericalangle ADC &= 180^\circ + \sphericalangle BAX. \end{aligned}$$

Slijedi:

$$\sphericalangle YCD = \sphericalangle BAX.$$

Vrijedi omjer:

$$|AX| : |CY| = |AB| : |CD|. \tag{14}$$

Površina tetivnog četverokuta je:

$$\begin{aligned} P &= P_{\triangle ABC} + P_{\triangle ACD} = \frac{1}{2}|BC||AX| + \frac{1}{2}|AD||CY| = (\text{zbog } (14)) \\ &= \frac{1}{2}|BC||AX| + \frac{1}{2} \cdot \frac{|AD||AX||CD|}{|AB|} = \frac{1}{2} \cdot \frac{|AB||BC| + |AD||CD|}{|AB|}|AX|. \end{aligned} \tag{15}$$

Iz pravokutnog trokuta ABX izrazimo duljinu visine $|AX|$:

$$|AX|^2 = |AB|^2 - |BX|^2. \tag{16}$$

U trokutu ABC redom vrijedi:

$$\begin{aligned} |AC|^2 - |CX|^2 &= |AB|^2 - |BX|^2, \\ |AC|^2 - |AB|^2 &= |CX|^2 - |BX|^2, \\ |BX| &= \frac{1}{2} \cdot \frac{|AB|^2 + |BC|^2 - |AC|^2}{|BC|} = \frac{a^2 + b^2 - e^2}{2b}. \end{aligned}$$

Za dijagonalu $|AC| = e$ uvrstimo izraz (11) i sve uvrstimo u (16) te nakon sređivanja i zamjene (5) dobijemo

$$|AX| = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{ab + cd}\sqrt{(a+b+c-d)(a+b-c+d)(a-b+c+d)(-a+b+c+d)}.$$

Izraz za duljinu visine $|AX|$ na kraju stavimo u (15) pa formula za površinu glasi

$$P = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c-d)(a+b-c+d)(a-b+c+d)(-a+b+c+d)}.$$

Zbog (13) konačno se dobije:

$$P = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}.$$

□

Sada možemo pokazati kako izvodimo formulu (1). Primjenom svojstva (2) tangencijalnog četverokuta slijedi:

$$s = \frac{a+b+c+d}{2} = a + c = b + d$$

pa relacija (12) prelazi u (1):

$$P = \sqrt{abcd}.$$

Na primjer, za kvadrat vrijedi:

$$a = b = c = d \implies P = \sqrt{a^4} = a^2.$$