ЈБМО 2016

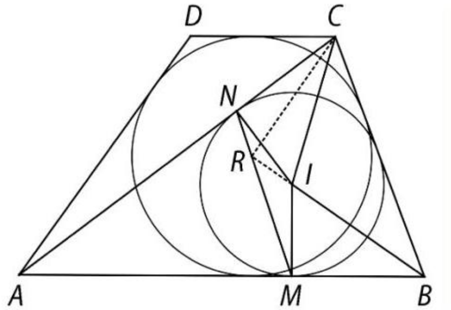
1. Во трапез $ABCD$ ($AB \parallel CD, \overline{AB} > \overline{CD}$) може да се впише кружница. Впишаната кружница во триаголникот ABC ја допира страната AB во точката M, а страната AC во точката N. Докажи дека центарот на впишаната кружница во трапезот $ABCD$ лежи на отсечката MN.

Решение. Нека I е центsарот на впишаната кружница во $\triangle ABC$ и R е спресекот на отсечките BI и MN. Бидејќи

$$\measuredangle ANM = 90^\circ - \tfrac{1}{2}\measuredangle MAN \text{ и}$$

$$\measuredangle BIC = 90^\circ + \tfrac{1}{2}\measuredangle MAN,$$

четириаголникот $IRNC$ е тетивен. Следува дека $\tfrac{1}{2}\measuredangle BRC = 90^\circ$,



а оттука

$$\measuredangle BCR = 90^\circ - \measuredangle CBR = \measuredangle ANM = 90^\circ - \tfrac{1}{2}(180^\circ - \measuredangle BCD) = \tfrac{1}{2}\measuredangle BCD.$$

Значи, CR е симетрала на $\measuredangle DCB$, па затоа R е центар на впишаната кружница во четириаголникот.

2. Нека a,b,c се позитивни реални броеви. Докажи дека

$$\frac{8}{(a+b)^2+4abc} + \frac{8}{(b+c)^2+4abc} + \frac{8}{(c+a)^2+4abc} + a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{8}{a+3} + \frac{8}{b+3} + \frac{8}{c+3}.$$

Решение. Од $2ab \leq a^2 + b^2$ следува дека

$$(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2) \text{ и } 4abc \leq 2c(a^2+b^2),$$

за секои позитивни реални броеви a,b,c. Ако гиу собереме овие неравенства, добиваме

$$(a+b)^2 + 4abc \leq 2(a^2+b^2)(c+1),$$

па затоа

$$\frac{8}{(a+b)^2+4abc} \geq \frac{4}{(a^2+b^2)(c+1)^2}.$$

Сега од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$\frac{4}{(a^2+b^2)(c+1)^2} + \frac{a^2+b^2}{2} \geq 2\sqrt{\frac{2}{c+1}} = \frac{4}{\sqrt{2c+1}}$$

и

$$\frac{c+3}{8}=\frac{(c+1)+2}{8}\geq\frac{\sqrt{2(c+1)}}{4},$$

па затоа

$$\frac{8}{(a+b)^2+4abc}+\frac{a^2+b^2}{2}\geq\frac{4}{(a^2+b^2)(c+1)^2}+\frac{a^2+b^2}{2}\geq\frac{8}{c+3}.$$

Конечно, бараното неравенство го добиваме ако го собереме последното неравенство со другите две аналогни неравенства.

3. Определи ги сите тројки цели броеви (a,b,c) такви што бројот

$$N=\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{2}+2$$

е степен на бројот 2016.

Решение. Нека a,b,c се цели броеви и n е природен број такви што

$$(a-b)(b-c)(c-a)+4=2\cdot 2016^n.$$

Воведуваме смени $a-b=-x$, $b-c=-y$ и горната равенка го добива видот

$$xy(x+y)+4=2\cdot 2016^n.$$

Ако $n>0$, тогаш десната страна е делива со 7, па затоа последователно добиваме

$$\begin{aligned}&xy(x+y)+4\equiv 0(\mathrm{mod}\,7)\\&3xy(x+y)\equiv 2(\mathrm{mod}\,7(\\&(x+y)^3-x^3-y^3\equiv 2(\mathrm{mod}\,7).\end{aligned}$$

Според малата теорема на Ферма за секој цел број k важи $k^3\equiv -1,0,1$ $(\mathrm{mod}\,7)$. Оттука заклучуваме дека во последната конгруенција некој од членовите $x,y,x+y$ мора да е делив со 7. Меѓутоа, оттука следува дека $xy(x+y)$ е делив со 7, што не е можно.

Ако $n=0$, тогаш $xy(x+y)+4=2$, односно $xy(x+y)=-2$. Во овој случај решенија се $(x,y)\in\{(-1,-1),(2,-1),(-1,2)\}$, па затоа бараните тгројки се $(a,b,c)\in\{(k+2,k+1,k), k\in\mathbb{Z}\}$.

4. За табелата 5×5 ќе велиме дека е регуларн ако секое нејзино поле содржи еден од четири различни реални броеви, така што секој од тие броеви се јавува точно еднаш во секој подтабела 2×2. Збирот на сите броеви во регуларна табела се нарекува вкупен збир на табелата. Со

било кои четири броја се направени сите можни регуларни табели и за секоја од нив е пресметан нејзиниот вкупен збир. Определи го максималниот број разлини вредности кои можат да ги имаат вкупните збирови на вака направените табели.

Решение. Ќе докажеме дека максималниот број вкупни збирови е еднаков на 60. Доказот се заснова на следнава лема.

Лема. Во регуларна табела или секоја редица содржи точно два од дадените броеви или секоја колона содржи точно два од дадените броеви.

Доказ. Да претпоставиме дека табелата ја пополнуваме со броевите x, y, z, t. Нека R е редица која содржи најмалку три од дадените броеви. Тогаш во таа редица можеме да најдеме три броја x, y, z на последователни положби во редицата. Според претпоставката дека во секоја подтабела 2×2 секој број се јавува точно еднаш, во редицата на R (ако таква редица постои) точно над броевите x, y, z мора се наоѓаат броевите z, t, x, во овој редослед. Над броевите z, t, x пак мора да се броевите x, y, z, во овој редослед. Ист случај е и ако разгледуваме редици по R (види ја табелата долу).

$$\begin{bmatrix} * & x & y & z & * \\ * & z & t & x & * \\ * & x & y & z & * \\ * & z & t & x & * \\ * & x & y & z & * \end{bmatrix}$$

Пополнувајќи ја целата табела, лесно се гледа дека секоја колона содржи точно два од дадените броеви. ■

Ротирајќи ја табелата, ако тоа е потребно, можеме да претпоставиме дека секоја редица содржи два броја. Ако ги изоставиме првата редица и колона во табрлата, добиваме табела 4×4, која можеме да ја поделиме на 4 подтабели 2×2, во кои секој број се јавува точно еднаш, па вкупниот збир во нив е еднаков на $4(x+y+z+t)$.

Останува да определиме на колку различни начини можеме да ги ставиме броевите во првата редица R_1 и правата колона C_1.

Ако со x_1, y_1, z_1, t_1 го означиме бројот на појавувањата на броевите x, y, z, t, редоследно во R_1 и C_1, тогаш вкупниот збир на броевите во табелата 5×5 е днаков на

$$S = 4(x+y+z+t) + xx_1 + yy_1 + zz_1 + tt_1 .$$

Ако првата, третата и петтата редица ги содржат броевите x и y, каде x е бројот на положбата $(1,1)$, тогаш втората и четвртата редица ги содржат само броевите z и t, каде со z е означен бројот на позицијата $(2,1)$. Тогаш

$$x_1 + y_1 = 7, x_1 \geq 3, y_1 \geq 2, z_1 + t_1 = 2 \text{ и } z_1 \geq t_1.$$

Тогаш е $\{x_1, y_1\} = \{5,2\}$ или $\{x_1, y_1\} = \{4,3\}$, а соодветните $\{z_1, t_1\} = \{2,0\}$ или $\{z_1, t_1\} = \{1,1\}$.

Според тоа, четворката (x_1, y_1, z_1, t_1) е определена со пермутацијата на една од следниве четворки: $(5,2,2,0), (5,2,1,1), (4,3,2,0), (4,3,1,1)$. Постојат 12 пермутации на четворката $(5,2,2,0)$, 12 пермутации на четворката $(5,2,1,1)$, 24 пермуатации на четворката $(4,3,2,0)$ и 12 пермутации на четворката $(4,3,1,1)$. Според тоа, постојат 60 различни вкупни збирови.

Секоја од овие 60 комбинации навистина може и да се добие: земаме 3 редици $xyxyx$ наизменично со $ztztz$ за да го добиеме случајот $(5,2,2,0)$, земеме три редици $xyxyx$ наизменично со една редица $ztztz$ и една редица $tztzt$ за да го добиеме случајот $(5,2,1,1)$, земаме 3 редици $xyxyz$ наизменично со $ztztx$ за да го добиеме случајот $(4,3,2,0)$, земаме 3 редици $xyztx$ наизменично со $ztxyz$ за да го добиеме случајот $(4,3,1,1)$.

Земајќи, на пример $x = 10^3, y = 10^2, z = 10, t = 1$ можеме сите вкупни збирови да ги направиме различни.

Според тоа, 60 е максималниот моижен број различни вкупни збирови.