Сојузен натпревар 1979

I година

1. Определи ги реалните броеви x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 за кои важи

$$x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5,$$

ако се познати збировите $S_1, S_2, ..., S_{10}$ на два по два од овие броеви при што важи

$$S_1 < S_2 < ... < S_{10}.$$

Решение. Од $x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5$ и $S_1 < S_2 < ... < S_{10}$, следува

$$S_1 = x_1 + x_2,\ S_2 = x_1 + x_3, ...,\ S_9 = x_3 + x_5,\ S_{10} = x_4 + x_5,$$
$$S_1 + S_2 + ... + S_{10} = 4(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5).$$

Според тоа, $S_1 + S_{10} = x_1 + x_2 + x_4 + x_5$, па затоа

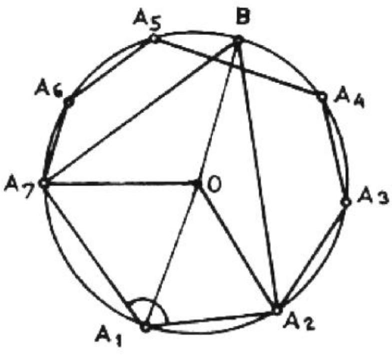
$$x_3 = \frac{S_1 + S_2 + ... + S_{10}}{4} - S_1 - S_{10},$$
$$x_1 = S_2 - x_3 = S_1 + S_2 + S_{10} - \frac{S_1 + S_2 + ... + S_{10}}{4},$$
$$x_2 = S_1 - x_1 = -S_2 - S_{10} + \frac{S_1 + S_2 + ... + S_{10}}{4},$$
$$x_5 = S_9 - x_3 = S_1 + S_9 + S_{10} - \frac{S_1 + S_2 + ... + S_{10}}{4},$$
$$x_4 = S_{10} - x_5 = -S_1 - S_9 + \frac{S_1 + S_2 + ... + S_{10}}{4}.$$

2. Во кружница е впишан седумаголник чии три агли се еднакви на 120°. Докажи дека барем две страни на овој седумаголник се еднакви.

Решение. Да претпоставиме дека никои два соседни агли на дадениот седумаголник не се еднакви на 120° и нека на пример

$$\measuredangle A_7A_1A_2 = \measuredangle A_2A_3A_4 = \measuredangle A_4A_5A_6 = 120^\circ,$$

а B е точката дијаметрално спротивно на точката A_1, цртеж десно. Тогаш



$$\measuredangle A_1A_2B = \measuredangle A_1A_7B = 90^\circ,$$

па добиваме

$$\measuredangle A_2BA_7 = 360^\circ - 120^\circ - 2 \cdot 90^\circ = 60^\circ.$$

Затоа $\measuredangle A_2OA_7 = 120^\circ$. Аналогно докажуваме $\measuredangle A_2OA_4 = \measuredangle A_4OA_6 = 120^\circ$, па оттука следува $\measuredangle A_6OA_7 = 0^\circ$, што е противречност. Значи, два соседни агли на дадениот осумаголник се еднакви на 120°. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $\measuredangle A_7A_1A_2 = \measuredangle A_1A_2A_3 = 120^\circ$. Тогаш отсечките A_2A_3 и A_1A_7 се симетрилни во однос на симетралата на отсечката A_1A_2, па затоа $A_2A_3 = A_1A_7$,што и требаше да се докаже.

3. Дали во круг со радиус 1 може да се сместат определен број кругови така што никои два од нив немаат заедничка внатрешна точка и збирот на нивнте радиуси да е еднаков на 1979?

Решение. Во дадениот круг да сместиме квадрат со страна 1. Овој квадрат со страна 1 да го поделиме на n^2 еднакви квадрати со страна $\frac{1}{n}$ и во секој од нив да впишеме круг. Збирот на радиусите на впишаните круови ќе биде $\frac{n^2}{2n}$ и е еднаков на 1979 ако $n = 2\cdot 1979$.

4. За кои природни броеви n збирот на цифрите на бројот $n!$ е еднаков на 9?

Решение. Нека x_n е збирот на цифрите на бројот $n!$. Бројот $n!$ е делив со 9 ако и само ако $n \geq 6$. Понатаму имаме

$$6! = 720, \quad x_6 = 9, \qquad 7! = 5040, \quad x_7 = 9,$$
$$8! = 40320, \quad x_8 = 9, \qquad 9! = 362880, \quad x_9 = x_{10} > 9.$$

Нека $n \geq 11$, $n! = \overline{a_k a_{k-1} ... a_2 a_1 a_0}$. Да претпоставиме дека

$$a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_{k-1} + a_k = 9. \tag{1}$$

Бидејќи $n \geq 11$ бројот $n!$ е делив со 11, па затоа

$$a_0 - a_1 + a_2 - ... + (-1)^{k-1} a_{k-1} + (-1)^k a_k = 11m. \tag{2}$$

каде m е цел број. Бидејќи

$$-9 = -(a_0 + a_1 + ... + a_k) \leq a_0 - a_1 + a_2 - ... + (-1)^k a_k = 11m \leq a_0 + a_1 + ... + a_k = 9,$$

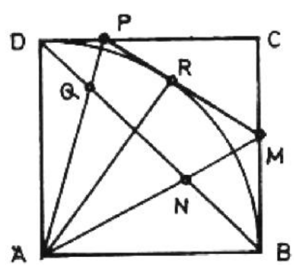
добиваме $m = 0$. Ако ги собереме равенствата (1) и (2) добиваме

$$2(a_0 + a_2 + a_4 + ...) = 9,$$

што е противречност. Според тоа, бараните бреови се 6, 7 и 8.

II година

1. Нека P и M се точки на страните DC и BC на кавадратот $ABCD$ такви што PM е тангента на кружницата со центар A и радиус AB. Понатаму, нека Q и N се пресечните точки на правите PA и MA со дијаметарот BD. Докажи дека точките P, Q, M, N, C се конциклични.



Решение. Нека R е допирната точка на тангентата MP и дадената кружница, цртеж десно. За триаголниците AMB и AMR важи

$$MB = MR, AB = AR \text{ и } AM = AM,$$

па затоа тие се складни. Според тоа,

$$\measuredangle RAM = \measuredangle BAM = \frac{1}{2}\measuredangle BAR .$$

Аналогно добиваме $\measuredangle PAR = \frac{1}{2}\measuredangle RAD$, па следува

$$\measuredangle PAN = \measuredangle PAM = \measuredangle PAR + \measuredangle RAM = \frac{1}{2}\measuredangle RAD + \frac{1}{2}\measuredangle BAR = 45^\circ .$$

Бидејќи $\measuredangle PDN = 45^\circ = \measuredangle PAN$ и $\measuredangle PDA = 90^\circ$, точките N, P, D, A припаѓаат на кружница со дијаметар AP, па затоа $\measuredangle PNA = 90^\circ$. Понатаму добиваме дека $\measuredangle PNM = 90^\circ$. Аналогно докажуваме дека $\measuredangle MQP = 90^\circ$, а важи и $\measuredangle PCM = 90^\circ$. Според тоа, точките M, C, P, Q, N припаѓаат на кружница со дијаметар PM .

2. Ако $x > y \ge 0$, докажи дека

$$x + \frac{4}{(x-y)(y+1)^2} \ge 3 .$$

Решение. За $x \ge 3$ неравенството е очигледно, а за $x < 3$ истото е еквивалентно со неравенството

$$(x-y)(y+1)^2(3-x) \le 4$$

кое е точно, бидејќи од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина, при $0 \le y < x < 3$ имаме

$$\begin{aligned}(x-y)(y+1)^2(3-x) &= \tfrac{1}{4}(y+1)(y+1)(2x-2y)(6-2x)\\ &\le \tfrac{1}{4}[\tfrac{1}{4}(y+1+y+1+2x-2y+6-2x)]^4 = 4.\end{aligned}$$

3. Определи ги сите разложувања на бројот 2001 во вид на збир на 1979 квадрати на природни броеви.

Решение. Нека $x_1, x_2, ..., x_{1979}$ се природни броеви за кои важи

$$x_1 \ge x_2 \ge ... \ge x_{1979} \text{ и } x_1^2 + x_2^2 + ... + x_{1979}^2 = 2001 .$$

Не е можно сите овие броеви да се поголеми од 1, бидејќи тогаш ќе важи

$$x_1^2 + x_2^2 + ... + x_{1979}^2 \ge 1979 \cdot 2^2 > 2001 .$$

Нека $x_1 \ge x_2 \ge ... \ge x_k > 1 = x_{k+1} = ... = x_{1979}$. Тогаш важи

$$kx_k^2 \le x_1^2 + x_2^2 + ... + x_k^2 = 2001 - 1979 + k = k + 22 ,$$

односно $4 \le x_k^2 \le 1 + \frac{22}{k}$, од каде добиваме $k \le 7$. Бидејќи $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_7^2 = 29$, добиваме $x_1, x_2, ..., x_7 \in \{1, 2, 3, 4\}$, (Во спротивно $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_7^2 \ge 5^2 + 6 = 31$.) Нека меѓу броевите $x_1, x_2, ..., x_7$ има редоследно a, b, c, d единици, двојки, тројки,четворки. Тогаш

$$a + b + c + d = 7,\ a + 4b + 9c + 16d = 29 ,$$

па следува

$$22 = a + 4b + 9c + 16d - (a + b + c + d) = 3b + 8c + 15d \ ,$$

$c \leq 2$ и $3 \mid 22 - 8c$. Ова е можно само за $c = 2$. Во овој случја $15d + 3b = 6$, па затоа $d = 0$ и $b = 2$. Значи, $a = 7 - (b + c + d) = 3$. Лесно се проверува дека

$$2001 = 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 2^2 + 1975 \cdot 1^2 \ ,$$

што значи дека имаме само едно разложувања на бројот 2001 за кое се исполнети дадените услови.

4. Нека е дадена низа од $m + n$ топчиња, каде m и n се заемно прости броеви. Првите m топчиња од оваа низа ги преместуваме во истиот редослед по преостанатите n топчиња, па постапката ја повторуваме со така добиената низа. Докажи дека по неколку чекори првото топче може да се доведе на било кое (однапред определено) место во низата.

Решение. Прво да забележиме дека, бидејќи броевите m и n се заемно прости, при делењето на броевите $n, 2n, 3n, ..., mn$ се добиваат сите можни остатоци $0, 1, 2, ..., m-1$. Нека $l \in \{1, 2, ..., m\}$ е бројот за кој при делење на nl со бројот m се добива количник s и остаток $k - 1 \in \{0, 1, 2, ..., m-1\}$, т.е. $nl = sm + k - 1$. Тогаш

$$(l + s)m + k = 1 + l(m + n) \ . \qquad (1)$$

Нека е дадена низа места нумерирани со броевите $1, 2, 3, ...$ и нека топчињата се наоѓаат на местата означени со броевите $1, 2, ..., m + n$. Во првиот чекор топшињата кои се наоѓаат на местата $1, 2, ..., m$ се преместуваат редоследно на местата $m + n + 1, m + n + 2, ..., 2m + n$. Во вториот чекор топчињата кои се наоѓаат на местата $m + 1, m + 2, ..., 2m$ се преместуваат редоследно на местата $2m + n + 1$, $2m + n + 2, ..., 3m + n$ итн. Топчето кое било на првото место се појавува на местата

$$1, 1 + m + n, 1 + 2(m + n), 1 + 3(m + n), ... \ ,$$

а почетокот на низата топчиња е на местата $1, 1 + m, 1 + 2m, 1 + 3m, ...$. Од равенството (1) добиваме дека по $l + s$ чекори почетокот на низата топчиња се наоѓа на местото $(l + s)m + 1$, а топчето кое на почетокот било на местото 1 се наоѓа на местото со реден број $(l + s)m + k$, т.е. на $k -$тото место во низата топќиња.

III година

1. Дадени се полиноми со комплексни коефициенти

$$P(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_n \text{ , со нули } x_1, x_2, ..., x_n$$

$$Q(x) = x^n + b_1 x^{n-1} + ... + b_n \text{ , со нули } x_1^2, x_2^2, ..., x_n^2 \ .$$

Ако $a_1 + a_3 + a_5 + ...$ и $a_2 + a_4 + a_6 + ...$ се реални броеви, докажи дека и $b_1 + b_2 + ... + b_n$ е реален број.

Решение. Бидејќи $P(1)=1+a_1+a_2+...+a_n$, $P(-1)=(-1)^n+(-1)^{n-1}a_1+...+a_n$ и $a_1+a_3+a_5+...$ и $a_2+a_4+a_6+...$ се реални броеви добиваме дека $P(1)$ и $P(-1)$ се реални броеви. Понатаму,

$$P(x)=(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n) \text{ и } Q(x)=(x-x_1^2)(x-x_2^2)...(x-x_n^2)$$

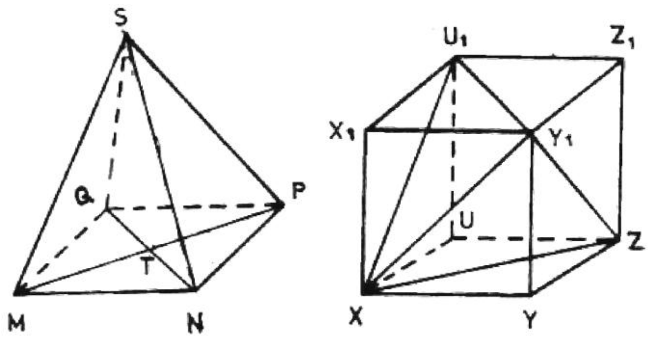
па затоа

$$\begin{aligned}1+b_1+b_2+...+b_n &= Q(1)=(1-x_1^2)(1-x_2^2)...(1-x_n^2)\\ &=(1-x_1)(1-x_2)...(1-x_n)(1+x_1)(1+x_2)...(1+x_n)\\ &=(-1)^n P(1)P(-1).\end{aligned}$$

Значи $Q(1)$ е реален број, па затоа $b_1+b_2+...+b_n=Q(1)-1$ е реален број.

2. Дадени се правилен тетраедар со раб a и правилна четиристрана пирамида со раб a (основата е квадрат и сите рабови се еднакви). Расечи ги овие тела и од добиените делови состави коцка.

Решение. Нека $ABCD$ е правилен тетраедар со раб a, $SMNPQ$ правилна пирамида со врв S и раб a, цртеж лево, и нека $XYZUX_1Y_1Z_1U_1$ е коцка со раб $\frac{a}{\sqrt{2}}$, цртеж десно.



Нека T е пресекот на дијагоналите на квадратот $MNPQ$. Тогаш

$$MN=NT=PT=QT=\frac{a}{\sqrt{2}},\ ST=\sqrt{SM^2-MT^2}=\sqrt{a^2-\frac{a^2}{2}}=\frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Според тоа, рамнините SMP и SQN ја делат пирамидата $SMNPQ$ на четири тристрани пирамиди, секоја од кои има три прави рабни агли во едно теме и сите рабови кои минуваат низ ова теме се еднакви на $\frac{a}{\sqrt{2}}$. Доволно е да забележиме дека рамнинте $XY_1Z, XY_1U_1, XZU_1, ZY_1U_1$ ја делат коцката на правилен тетраедар XZY_1U_1 со раб a и пирмиди $YXZY_1, X_1XY_1U_1, UXZU_1, Z_1ZU_1Y_1$ (првото означено теме е врв), кај кои сите рабни агли при врвот се прави, а сите рабови кои минуваат низ врвот се еднакви на $\frac{a}{\sqrt{2}}$.

3. Нека $z_1, z_2, ..., z_n$ се комплексни броеви. Докажи дека може да се изберат природни броеви $i_1, i_2, ..., i_k$ такви што $1 \le i_1 < i_2 < ... < i_k \le n$ и

$$|z_{i_1} + z_{i_2} + ... + z_{i_k}| \ge \frac{1}{4\sqrt{2}}(|z_1| + |z_2| + ... + |z_n|).$$

Решение. Нека $z_j = x_j + iy_j$, $x_j, y_j \in \mathbf{R}$, $j = 1, ..., n$. Да означиме

$$S_1 = \{j \mid x_j \ge 0, y_j \ge 0\}, S_2 = \{j \mid x_j < 0, y_j \ge 0\},$$

$$S_3 = \{j \mid x_j < 0, y_j < 0\}, S_4 = \{j \mid x_j \ge 0, y_j < 0\}.$$

Тогаш,

$$\sum_{j=1}^{n} |z_j| = \sum_{j=1}^{4} \sum_{j \in S_k} |z_j|$$

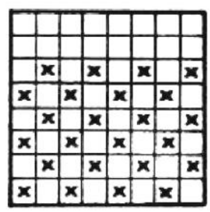
па од принципот на Дирихле следува дека за некој $k \in \{1, 2, 3, 4\}$ важи неравенството

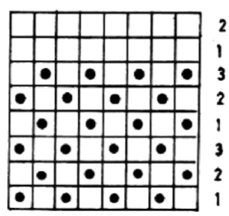
$$\sum_{j \in S_k} |z_j| \ge \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{n} |z_j|.$$

За тој број k добиваме

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\sqrt{2}} \sum_{j=1}^{n} |z_j| \le \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{j \in S_k} |z_j| = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{j \in S_k} |x_j + iy_j| \le \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{j \in S_k} (|x_j| + |y_j|) \\ = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\sum_{j \in S_k} x_j| + |\sum_{j \in S_k} y_j|) \\ \le \frac{2}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1}{2}(|\sum_{j \in S_k} x_j|^2 + |\sum_{j \in S_k} y_j|^2)} = |\sum_{j \in S_k} z_j|. \end{aligned}$$

4. На сите црни полиња на првите шест реда на шаховска табла се наоѓаат пешаци (цртеж десно). Во секој потез пешак прескокнува еден од пешаците кои му се соседни по дијагонала и со тоа се поместува за две полиња по дијагонала доаѓајќи на слободно поле, а прескокнатиот пешак се отстранува од таблата. Дали може да се игра така што по определн број потези на таблата ќе остане само еден пешак?





Решение. Редовите на шаховската табла ги делиме на три класи, така што во првата класа се првиот , четвртиот и седмиот ред, во втората класа се вториот, петтиот и осмиот ред, во третата класа се третиот и шестиот ред (види цртеж). На почетокот во секоја калса има по осум пешаци. Да забележиме дека по секој потез се менува парноста на пешаците во секоја класа. Навистина, во секој потез се менува за еден бројот на пешаците во секои три соседни реда (од првиот и вториот од тие редови се отстранува по еден пешак, а во третиот ред се додава еден пешак), а три соседни реда припаѓаат на три различни класи. Освен тоа, по секој потез вкупниот број пешаци се намалува за еден. Според тоа, по 22 одиграни потези (ако е тоа можно) на таблата ќе останат точно два пешаци и бидејќи броевите на пешаците во различните класи се со иста парност, и двата пешаци ќе бидат во иста класа. Тоа значи дека следниот потез не е можен (пешаците не се во соседни редови), т.е. на таблата не може да остане еден пешак.

IV година

1. Докажи дека не постојат природни броеви n и $p>5$ такви што важи

$$(p-1)!+1=p^n\,. \tag{1}$$

Решение. Нека пртпоставиме дека за природните броеви $p>5$ и n важи равенството (1). Тогаш p и $(p-1)!$ сезаемно прости броеви, од каде што следува дека p е прост број. Понатаму

$$(p-2)!=\frac{(p-1)!}{p-1}=\frac{p^n-1}{p-1}=p^{n-1}+p^{n-2}+...+p+1\,.$$

Бидејќи за $p>5$ важи $2<\frac{p-1}{2}\le p-2$, а $\frac{p-1}{2}$ е цел број, бидејќи p е непарен прост број, заклучуваме дека броевите 2 и $\frac{p-1}{2}$ се делители на бројот $(p-2)!$. Според тоа, и бројот $2\cdot\frac{p-1}{2}=p-1$ е делител на бројот $(p-2)!$. Бидејќи

$$\begin{aligned}(p-2)!&=p^{n-1}+p^{n-2}+...+p+1\\&=(p-1+1)^{n-1}+(p-1+1)^{n-2}+...+(p-1+1)+1\\&\equiv n(\text{mod }p-1),\end{aligned}$$

заклучуваме дека и бројот n е делив со $p-1$. Затоа $p-1\le n$, т.е. $p-2\le n-1$, па понатаму добиваме дека

$$(p-1)!+1<p^{p-2}+1\le p^{n-1}+1<p^n\,,$$

што противречи на претпоставката.

2. Дали постојат броеви $a,b>0$ такви што

а) $a,b\notin\mathbb{Q}$ и $a^b\in\mathbb{Q}$?

б) $a,b,a^b\notin\mathbb{Q}$?

в) $a\in\mathbb{Q}$ и $b,a^b\notin\mathbb{Q}$?

Решение. Одговорот е потврден во сите три случаи. Во доказот ќе користиме дека бројот e е ирационален и трансцедентен,т.е.не е нула на ниту еден полином со целобројни коефициенти. Прво ќе докажеме дека $\ln 2\notin\mathbb{Q}$. Нека претпоставиме дека $\ln 2=\frac{p}{q}$, каде p и q се природни броеви. Тогаш $e^{\frac{p}{q}}=2$, односно $e^{p}=2^{q}$, што не е можно, бидејќи e е трансцедентен број. Сега следуваат примерите:

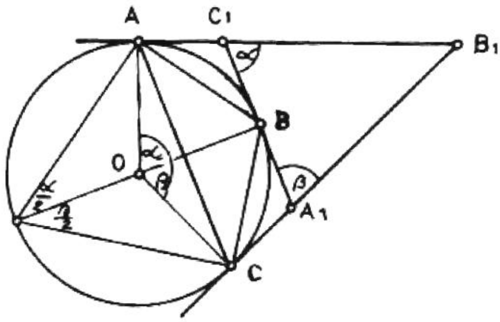
а) $a=e\notin\mathbb{Q}$, $b=\ln 2\notin\mathbb{Q}$, $a^{b}=e^{\ln 2}=2\in\mathbb{Q}$,

б) $a=e\notin\mathbb{Q}$, $b=\frac{1}{2}\ln 2\notin\mathbb{Q}$, $a^{b}=e^{\ln\sqrt{2}}=\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$,

в) $a=2\in\mathbb{Q}$, $b=\log_{2}e=\frac{1}{\ln 2}\notin\mathbb{Q}$, $a^{b}=e\notin\mathbb{Q}$.

3. Нека A,B,C се три различни точки на кружница, P е плоштината на триаголникот ABC и P_1 е плоштината на триаголникот определен со тангентите на кружницата во точките A,B,C. Определи ја граничната вредност на односот $P_1:P$, кога точката A е фиксирана, а B и C тежат кон A по кружницата така што секогаш важи $B\neq C$.

Решение. Нека $A_1B_1C_1$ е триаголникот определен со тангентите на кружницата во точките A, B,C, нека B е на пократкиот лак AC, O е центарот на дадената кружница и $r=OA, \alpha=\measuredangle AOB$, $\beta=\measuredangle BOC$, цртеж десно. Тогаш



$$C_1A=C_1B=r\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \text{ и}$$

$$A_1C=A_1B=r\operatorname{tg}\frac{\beta}{2},$$

па следува

$$A_1C_1=A_1B+BC_1=r(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2})=r\,\frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}.$$

Бидејќи $AB=2r\sin\frac{\alpha}{2}$, $BC=2r\sin\frac{\beta}{2}$ и $\measuredangle ABC=\pi-\frac{\alpha+\beta}{2}$, добиваме

$$P=\frac{1}{2}AB\cdot BC\sin\measuredangle ABC=2r^{2}\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Понатаму, $\measuredangle A_1C_1B_1=\measuredangle BOA=\alpha$ и $\measuredangle C_1A_1B_1=\measuredangle BOC=\beta$ (како агли со нормални краци) и $\measuredangle A_1B_1C_1=\pi-\alpha-\beta$, па затоа

$$A_1B_1=A_1C_1\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)},\quad B_1C_1=A_1C_1\frac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)},$$

$$P_1=\frac{1}{2}A_1B_1\cdot B_1C_1\sin\measuredangle A_1B_1C_1=r^{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Конечно, добиваме

$$\frac{P_1}{P}=\frac{1}{2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}.$$

Ако $B \to A$ и $C \to A$,тогаш $\alpha \to 0, \beta \to 0$, па затоа $\frac{P_1}{P} = \frac{1}{2}$.

4. Иста како 3. задача за 3. година.

Мала олимпијада

1. Докажи дека за различни природни броеви $a_1, a_2, ..., a_n$ важи

$$(a_1 + a_2 + ... + a_n)^2 \le a_1^3 + a_2^3 + ... + a_n^3.$$

Решение. Природните броеви $a_1, a_2, ..., a_n$ се различни, па затоа без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $a_1 < a_2 < ... < a_n$. Да означиме

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n \text{ и } A_n = a_1^3 + a_2^3 + ... + a_n^3.$$

При вака воведените ознаки, даденото неравенство е еквивалентно со неравенството

$$S_n^2 \le A_n, \qquad (1)$$

кое ќе го докажеме со индукција по n.

За $n = 1$ имаме $S_1^2 = a_1^2 \le a_1^3 = A_1$, т.е. неравенството (1) е точно.

Нека претпоставиме дека $S_k^2 \le A_k$, т.е. дека (1) важи за $n = k$.

За $n = k+1$, од $1 \le a_1 < a_2 < ... < a_k < a_{k+1}$ следува

$$2S_k = 2(a_1 + a_2 + ... + a_k) \le 2[1 + 2 + 3 + ... + a_k + (a_k + 1) + ... + (a_{k+1} - 2) + (a_{k+1} - 1)]$$
$$= 2\frac{a_{k+1}(a_{k+1}-1)}{2} = a_{k+1}^2 - a_{k+1}$$

т.е.

$$2S_k a_{k+1} + a_{k+1}^2 \le a_{k+1}^3,$$

што значи

$$S_{k+1}^2 = (S_k + a_{k+1})^2 = S_k^2 + 2S_k a_{k+1} + a_{k+1}^2 \le A_k + a_{k+1}^3 = A_{k+1}.$$

Според тоа, неравенството (1) важи за $n = k+1$, па од принципот на математичка индукција следува дека важи за секој $n \in \mathbb{N}$.

Јасно, знак за равенство $S_n^2 = A_n$ важи ако и само ако $a_1 = 1$ и за секој $k \in \{1, 2, 3, ..., n\}$ важи $a_k + 1 = a_{k+1}$, т.е. ако и само ако $a_i = i$, за $i = 1, 2, ..., n$.

2. Определи ги сите природни броеви n, каде $1 < n < 1979$, кои го задоволуваат условот: Ако m е природен број, $1 < m < n$ и $(m, n) = 1$, тогаш m е прост број.

Решение. Нека S е множеството од сите природни броеви за кои важи наведениот услов. Ако $n \in S$ и $p^2 < n$, каде p е прост број, тогаш n и p^2 не се заемно прости броеви, бидејќи p^2 не е прост број. Според тоа, $p \mid n$. Ако $n > 49$

и $n \in S$, тогаш секој од броевите 2, 3, 5 и 7 е делител на бројот n. Затоа $n \geq 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210 > 11^2$, па и $11 | n$. Понатаму, следува $n \geq 210 \cdot 11 = 2310 > 1979$, а тоа е противречност. Затоа $S \subset \{2,3,4,...,49\}$.

а) Нека $n > 25$. Тогаш $n \in S$ ако и само ако n е делив со $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$. Таков е само бројот 30.

б) Нека $9 < n \leq 25$. Тогаш $n \in S$, ако и само ако бројот n е делив со $2 \cdot 3 = 6$. Тоа важи за броевите 12, 18 и 24.

в) Нека $4 < n \leq 9$. Тогаш $n \in S$, ако и само ако бројот n е парен. Тоа се броевите 6 и 8.

г) Лесно се проверува дека секој од броевите 2, 3 и 4 припаѓа на множеството S.

Според тоа, $S = \{2,3,4,6,8,12,18,24,30\}$.

3. Дадени се две кружници со периметар 1979. На првата се означени 1979 точки, а на втората неколку лаци така што збирот на должините на сите тие лаци е помал од 1. Докажи дека првата кружница може да се постави на втората така што ниту една од означените точки нема да падне во означен лак.

Решение. Да ја фиксираме втората кружница, потоа на неа да ја поставиме првата кружница и да ја ротираме околу центарот. Да претпоставиме дека фиксирана точка A од првата кружница *запишува траг* на втората кружница, ако било која од означените точки припаѓа на било кој од означените лаци. По ротацијата на на првата кружница за 360° вкупната должина на трагите ќе биде помала од $1979 \cdot 1 = 1979$. Според то, на втората кружница постои точка X која не припаѓа на трагата. Во моментот на шоклопување на точките A и X нту една од означените точки не припаѓа на ниту еден од означените лаци.