XVI РЕГИОНАЛЕН НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД ОСНОВНОТО ОБРАЗОВАНИЕ

V-1 Во една паралелка има вкупно 34 ученици. Во текот на годината една ученичка се отпишала, така што во паралелката останале два пати повеќе машки отколку женски.

Колку машки и колку женски биле во паралелката на почетокот?

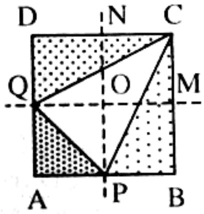
Решение: Откако едната ученичка се отпишала во паралелката останале 34-1=33 ученици и тоа 33:3=11 ученички и $2\cdot 11=22$ ученици (машки). На почетокот имало 11+1=12 ученички и 22 ученици (машки).

V-2 Колку најмногу еднакви букети и со колку цветови може да се направат, ако се употребат 48 бели и 72 црвени каранфили? Во секој букет треба да има ист број каранфили од иста боја.

Решение: НЗД (48, 72)=24. Може да се направат 24 букети. Во секој букет има 48:24=2 бели каранфили и 72:24=3 црвени каранфили.

V-3. Точките P и Q се средишни точки на две соседни страни на квадрат со плоштина 36 cm^2. Одреди ја плоштината на триаголникот чии две темиња се P и Q, а третото теме е темето од квадратот што е најоддалечено од правата PQ.

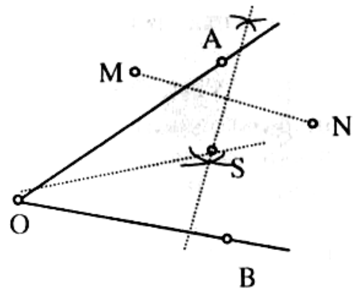
Решение: Нека P_Δ е плоштината на триаголникот PQC, а $P_\square$ нека е плоштината на квадратот ABCD ($P_\square = 36\ cm^2$). Триаголникот PBC има плоштина еднаква на половината од плоштината на правоаголникот PBCN, односно четвртина од плоштината на квадратот. Слично е и за триаголникот DQC. Триаголникот QAP има плоштина еднаква на осмина од плоштината на квадратот. Плоштината на бараниот триаголник се добива кога од плоштината на квадратот се одземат плоштините на трите триаголници.



$P_{\Delta} = P_{\square} - (P_{\Delta PBC} + P_{\Delta QDC} + P_{\Delta QAP}) = P_{\square} - (\frac{1}{4}P_{\square} + \frac{1}{4}P_{\square} + \frac{1}{8}P_{\square}) = 36 - (\frac{1}{4}\cdot 36 + \frac{1}{4}\cdot 36 + \frac{1}{8}\cdot 36) = = 13\frac{1}{2}\text{cm}^2$.

V-4. Нацртај агол AOB и точки M и N (како на цртежот). Конструирај точка S што е на еднакви растојанија од точките M и N и на еднакви растојанија од краците на аголот.

Решение: Конструирај симетрала на отсечката MN. Конструирај симетрала на аголот AOB. Бараната тачка S е во пресекот на двете симетрали.



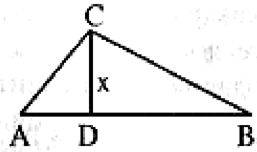
VI-1. Еден ученик потрошил за купување на една книга и една тетратка 434,80 денари, при што за книгата платил 80,00 денари повеќе отколку за тетратката. За купување молив платил $\frac{3}{4}$ од вредноста на тетратката. Ако ученикот имал 700 денари, колку денари му останале?

Решение: (434,80-80):2=354,80:2=177,40 денари е цената на тетратката. $\frac{3}{4}\cdot 177{,}40=133{,}05$ ден. е цената на моливот. На ученикот му останале: 700-(434,80+133.05)=132,15 денари.

VI-2. Збирот на два броја е 140, а нивнот најголем заеднички делител е 28. Кои се тие броеви?

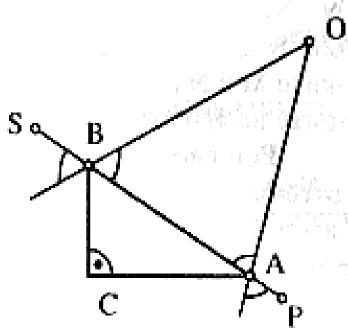
Решение: Бидејќи двата броја се деливи со 28, тие се од облик 28m и 28n. Од 28m+28n=140, следува m+n=5. Можно е: m=1, n=4, па броевите се 28 и 112; m=2, n=3, па броевите се 56 и 84.

VI-3. Периметарот на ΔABC е 24 cm. Висината CD го дели триаголникот на два триаголници ACD и BCD со периметри, соодветно, 14 cm и 18 cm. Одреди ја должината на висината CD.



Решение: $L_{\Delta ACD}=14$ cm; $L_{\Delta BCD}=18$ cm. $(\overline{AD}+\overline{AC}+\overline{CD})+(\overline{BD}+\overline{BC}+\overline{CD})-(\overline{AD}+\overline{DB})-\overline{BC}-\overline{CA}=14+18-24=8$ cm; или $2\overline{CD}=8$ cm, $\overline{CD}=4$ cm.

VI-4. Хипотенузата AB на правоаголниот триаголник ABC е продолжена преку темето A до точката P и преку темето B до точката S. Симетралите на аглите PAC и SBC се сечат во точката O. Пресметај го аголот AOB.



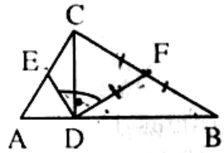
Решение: Двата надворешни агли CBS и CAP заедно имаат $2\cdot180^\circ-90^\circ=270^\circ$. Симетралите на двата агли со хипотенузата образуваат агли чиј збир е $270^\circ:2=135^\circ$. Овие два агли се внатрешни агли во ΔABO. Третиот агол $\angle AOB=180^\circ-135^\circ=45^\circ$.

VII-1. Во една фабрика 30% од вработените биле жени. Бројот на мажите бил за 240 поголем од бројот на жените. Колку работници имало во фабриката?

Решение: x - жени, x+240-мажи. Вкупно биле x+x+240=2x+240. $\frac{30}{100}(2x+240)=x$; x=180 - жени; 180+240=420 - мажи; 420+180=600 - вработени.

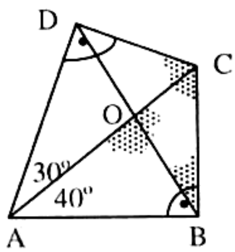
VII-2. Во правоаголниот триаголник ABC повлечена е висината CD кон хипотенузата. Нека E е средина на катетата AC, а F средина на катетата BC.

Докажи дека аголот EDF е прав.



Решение: ΔADC е правоаголен, DE е тежишна линија и $\overline{DE}=\overline{EC}$. Според тоа $\angle EDC = \angle ECD$. Триаголникот **DBC** е правоаголен, DF е тежишна линија и $\overline{DF}=\overline{FC}$. Според тоа $\angle FDC=\angle FCD$. $\angle ECD+\angle FCD=90^\circ$, по услов, $\angle EDF=\angle EDC+\angle FDC = \angle ECD + \angle FCD$.

VII-3. Во четириаголникот ABCD, аглите ABC и ADC се прави. Дијагоналата **AC со страната** AB образува агол од 40°, а со страната **AD агол од 30°. Да се** пресмета острион агол меѓу **дијагоналите AC и BD.**



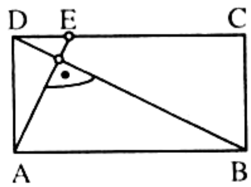
Решение: Во **ΔACD,** $\angle ACD=180^\circ-(90^\circ+30^\circ) = 60^\circ$. **Исто така и** $\angle ABD=\angle ACD=60^\circ$, **како периферни агли над ист** лак, следува $\angle DBC=90^\circ-60^\circ=30^\circ$. $\angle DCB=180^\circ-70^\circ=110^\circ$. Од $\angle ACD = 60^\circ$, **следува дека** $\angle ACB =110^\circ-60^\circ = 50^\circ$. Во ΔBCD, $\angle BOC=180^\circ-(50^\circ+30^\circ) = 100^\circ$.

Острионт агол $BOA=180^\circ-100^\circ=80^\circ$.

VII-4. Одреди **двоцифрен** број што е еднаков на збирот од **цифрата** на десетките и квадратот од **цифрата** на единиците.

Решение: Нека a и b се цифрите. $10a+b=a+b^2$, $9a=b^2-b$; $9a=b(b-1)$; b е делив со 9 или b-1 е делив со 9. Нека b е делив со 9. За b=9 имаме $9a=9\cdot 8$, a=8. Бараниот број е 89. Нека b-1 е делив со 9. Тогаш b-1=9 или b=10, што не е можно бидејќи b е цифра.

VIII-1. Во правоаголникот ABCD страната AB е двапати поголема од страната AD. Нормалата повлечена од темето A на дијагоналата BD, ја сече страната CD во точката E. Докажи дека $\overline{DE}=\frac{1}{4}\overline{DC}$.



Решение: $\Delta AED\sim\Delta BDA$, ($\angle ADE =\angle BAD= =90^\circ$ и $\angle DAE=\angle ABD$ како агли со заемно нормални краци).

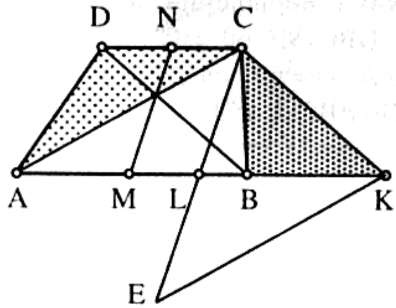
$$\overline{DE}:\overline{AD}=\overline{AD}:\overline{AB}=1:2\,;\overline{DE}=\frac{1}{2}\overline{AD}\,;\overline{AD}=\frac{1}{2}\overline{AB}\,;$$

$$\cdot\,\overline{DE}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\overline{CD}=\frac{1}{4}\overline{CD}\,.$$

VIII-2. Од местото A тргнува велосипедист кој се движи со брзина 15 km на час. Еден час подоцна по него тргнува друг велосипедист кој поминува 20 km на час. По колку часа вториот велосипедист ќе го стигне првиот и на кое растојание од A?

Решение: Нека x е број на часови. Вториот велосипедист ќе го стигне првиот кога: $15x=20(x-1)$; $x = 4$. Вториот велосипедист ќе го стигне првиот по: $x-1=4-1=3$ часа. Растојанието од местото A до местото каде вториот велосипедист го стигнал првиот е $20\cdot3=60$ km.

VIII-3. Должините на дијагоналите на трапезот ABCD се $\overline{AC}=5\,\text{cm}$ и $\overline{BD}=3\,\text{cm}$, а должината на отсечката што ги поврзува средишните точки на основите AB и CD е 2 cm. Пресметај ја плоштината на трапезот ABCD.



Решение: Нека M е средишна точка на AB, а N е средишна точка на CD. Низ C повлекуваме права паралелна со BD, којашто правата AB ја сече во точката K. Триаголниците BCK и ACD имаат еднакви плоштини ($\overline{BK}=\overline{CD}$ и имаат еднакви висини). Значи $P_{ABCD}=P_{\Delta AKC}$. Бидејќи BKCD е паралелограм, следува $\overline{CK}=\overline{BD}=3$ cm. Нека CL е тежишна линија во ΔAKC.

$$\overline{AK}=\overline{AB}+\overline{BK}=\overline{AB}+\overline{CD}\,;\ \overline{AL}=\frac{\overline{AB}+\overline{CD}}{2}\,;\ \overline{AM}=\frac{\overline{AB}}{2}\,;$$

$\overline{ML}=\dfrac{\overline{CD}}{2}=\overline{NC}$. Значи $\overline{ML}=\overline{NC}$ и $ML\parallel NC$, па четириаголникот MLCN е паралелограм и $\overline{CL}=\overline{MN}=2$ cm. CL ја продолжуваме преку точката L до точката E, така што да важи $\overline{CL}=\overline{LE}$. Тогаш $\overline{CE}=4\,\text{cm}$. $\Delta EKL\cong\Delta ALC$ ($\overline{AL}=\overline{LK}$, $\angle ALC=\angle EKL$, $\overline{CL}=\overline{LE}$). Значи

$P_{\Delta EKL}= P_{\Delta ALC}$ и $\overline{EK} = \overline{AC} = 5\,\text{cm}$. Конечно $P_{ABCD}=P_{\Delta AKC}= P_{\Delta ALC}+ P_{\Delta LKC} = P_{\Delta EKL}+ P_{\Delta LKC} = P_{\Delta EKC} = \sqrt{6(6-3)(6-5)(6-4)} = 6\,\text{cm}^2$.

VIII-4. Двоцифрен број на кој цифрата на единиците е двапати поголема од цифрата на десетките, еднаков е на квадратот на единиците. Кој е тој број?

Решение: Нека a е цифра на десетки, a b цифра на единици. Имаме: $\overline{ab} = 10a + b$ $(a\neq 0)$, $b=2a$, $10a+2a=(2a)^2$, $12a=4a^2$, $a=3$, $б=2\cdot 3=6$. Бројот е 63.