Регионален натпревар 2010

I година

1. За природните броеви a,b,c,d се исполнети равенствата

$$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}=\frac{ab+1}{cd+1}.$$

Докажи дека $a=c$ и $b=d$.

Решение. Бидејќи $a,b,c,d\in\mathbb{N}$, постои рационален број α таков што

$$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}=\frac{ab+1}{cd+1}=\alpha.$$

Тогаш $a=\alpha c$, $b=\alpha d$ и $ab+1=\alpha(cd+1)$. Ако во последните равенства замениме $a=\alpha c$ и $b=\alpha d$, добиваме

$$\alpha^2cd-\alpha cd-\alpha+1=0$$
$$\alpha cd(\alpha-1)-(\alpha-1)=0$$
$$(\alpha-1)(\alpha cd-1)=0.$$

Притоа можни се два случаи

а) $\alpha-1=0$, т.е. $\alpha=1$. Тогаш $a=c$, $b=d$.

б) Ако $\alpha-1\neq 0$, а $\alpha cd-1=0$ имаме $(\alpha c)d-1=0$, па затоа $ad=1$ (бидејќи $\alpha c=a$). Бидејќи $a,d\in\mathbb{N}$, последното равенство е можно ако и само ако $a=d=1$. Но тогаш $\frac{1}{c}=\frac{d}{1}$, односно $bc=1$. Повторно, бидејќи $b,c\in\mathbb{N}$, добиваме $b=c=1$.

Значи, и во овој случај $a=b=c=d=1$.

2. Докажи дека за секој природен број $n\in\mathbb{N}$ е точно равенството

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}.$$

Решение. Ако тргнеме од левата страна на равенството, добиваме дека за секој природен број $n\in\mathbb{N}$ важи:

$$\begin{aligned}L&=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\\&=(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n})-2(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n-2}+\frac{1}{2n})\\&=(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n})-(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n})\\&=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}=D\end{aligned}$$

3Б. Најди го најголемиот делител на 1001001001 кој што е помал од 10000.

Решение. Да забележеме дека:

$$\begin{aligned}1001001001&=1001\cdot 10^6+1001=1001\cdot(10^6+1)\\&=1001\cdot(10^2+1)\cdot(10^4-10^2+1)\\&=1001\cdot 101\cdot 9901=7\cdot 11\cdot 13\cdot 101\cdot 9901\end{aligned}$$

Бројот 9901 е прост. Лесно се проверува дека тој е најголемиот делител на 1001001001 помал од 10000.

3А. Најди ги сите природни броеви n за кои броевите

$$3n-4, 4n-5, 5n-3$$

се прости.

Решение. Да забележиме $3n-4+4n-5+5n-3=12n-12$ е парен. Па затоа мора барем еден од броевите $3n-4, 4n-5, 5n-3$ да е парен. Бидејќи единствен прост парен број е 2, мора барем еден од нив да е 2. Јасно $4n-5$ не може. Па мора да е $3n-4$ или $5n-3$. Ако $3n-4=2$ тогаш $n=2$, па броевите би биле 2, 3 и 7 што се прости броеви. Ако $5n-3=2$ тогаш $n=1$ и тогаш бревите би биле -1, -1 и 2. Но тие не се сите прости. Значи, само за $n=2$ броевите $3n-4,\ 4n-5,\ 5n-3$ се прости.

4. Дадени се 80 топчиња, наизглед сите еднакви (по форма, боја и големина) и познато е дека 79 од нив се со иста маса, а едно е полесно. Располагаме со вага со два таса (без тегови). Како може со четири мерења на вагата да откриеме кое е полесното топче?

Решение. Ги делиме топчињата на три групи: групираме на два пати по 27 топчиња, а преостанатите 26 топчиња формираат трета група. Ги споредуваме на вагата двете групи со по 27 топчиња. Со тоа сме потрошиле едно мерење, и како резултат сме добиле: или вагата не е во рамнотежа, па знаеме меѓу кои 27 топчиња е полесното топче; или пак вагата е во рамнотежа па знаеме дека полесното топче е во групата од 26 топчиња. Во вториов случај кон тие 26 додаваме произволно топче од првите две групи. Така со едно мерење на вагата успеваме да дојдеме до група од 27 топчиња меѓу кои е и полесното. Оваа група ја делиме на три подгрупи со по 9 топчиња, секоја, и споредуваме на вагата две од тие три подгрупи. Така после две мерења успеваме да дојдеме до група од 9 топчиња меѓу кои е и полесното. Оваа група ја делиме на 3 подгрупи со по 3 топчиња, секоја, и споредуваме на вагата две од тие три подгрупи. Така после три мерења успеваме да дојдеме до група од 3 топчиња меѓу кои е и полесното. Во четвртото мерење споредуваме две од тие 3 топчиња: доколку вагата не е во рамнотежа полесното топче е на тасот кој не натежнал, а доколку вагата е во рамнотежа полесното топче е преостанатото трето топче.

II година

1. За позитивните рационални броеви $a,\ b$ и c е исполнето равенството

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}.$$

Докажи дека $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ е рационален број.

Решение. Равенството $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$ можеме да го запишеме во облик

$$ac+bc=ab,$$

односно

$$ab-ac-bc=0.$$

Тогаш

$$a^2+b^2+c^2=a^2+b^2+c^2-2(ab-ac-bc)=(a+b-c)^2.$$

Сега

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\sqrt{(a+b-c)^2}=|a+b-c|,$$

Бидејќи $a,b,c\in\mathbb{Q}^+$, добиваме $|a+b-c|\in\mathbb{Q}^+$, односно $\sqrt{a^2+b^2+c^2}\in\mathbb{Q}^+$.

2А. Нека е даден комплексниот број u. Да се определат сите комплексни броеви z, такви што бројот $a=\frac{u-\bar{u}z}{1-z}$ да е реален број.

Решение. *Прв начин.* Бројот a е реален ако и само ако $a=\bar{a}$. Во задачата $\frac{u-\bar{u}z}{1-z}=\overline{(\frac{u-\bar{u}z}{1-z})}$, од каде се добива $\frac{u-\bar{u}z}{1-z}=\frac{\bar{u}-u\bar{z}}{1-\bar{z}}$, па по средување на добиеното равенство следи дека: $(\bar{u}-u)(1-z\bar{z})=0,\ z\neq 1$. Од последната релација заклучуваме дека ако $u=\bar{u}$, т.е. ако u е реален број, тогаш решение е секој комплексен број $z\neq 1$. Ако u не е реален број, тогаш $1-z\bar{z}=0\Leftrightarrow 1-|z|^2=0\Leftrightarrow |z|=1$, т.е решение е секој комплексен број чиј модул е еднаков на 1 ($z\neq 1$).

Втор начин. Нека $u=a+ib, z=x+iy$. Тогаш

$$a=\frac{u-\bar{u}z}{1-z}=\frac{a+ib-(a-ib)(x+iy)}{1-x-iy}=\frac{a-ax-by+i(b-ay+bx)}{1-x-iy},$$

па по рационализација со конјугираниот комплексен број на именителот на оваа дропка и средување на равенствата се добива $b(1-x^2-y^2)=0$, од каде: $b=0$ или $x^2+y^2=1$, (|z|=1). Ако b=0, т.е ако u е реален број, тогаш решение е секој комплексен број $z\neq 1$, а ако u не е реален број, тогаш решение е секој комплексен број чиј модул е еднаков на 1 ($z\neq 1$).

2Б. Реши го системот равенки

$$\begin{cases}\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}=\sqrt{y}\\ x^2-y^2=9\end{cases}$$

Решение. Дефиниционата област на системот е множеството од сите парови (x,y) за кои што важи $x\geq y\geq 0$. Првата равенка ја квадрираме и го добиваме еквивалентниот систем

$$\begin{cases} x+y-2\sqrt{x+y}\sqrt{x-y}+x-y=y \\ x^2-y^2=9 \end{cases}$$

односно

$$\begin{cases} 2x-2\sqrt{(x+y)(x-y)}=y \\ x^2-y^2=9 \end{cases}$$

Со замена на втората равенка во првата добиваме

$$\begin{cases} 2x-2\cdot 3=y \\ x^2-y^2=9 \end{cases}.$$

Оттука имаме

$$\begin{cases} 2x-2\cdot 3=y \\ x^2-(2x-6)^2=9 \end{cases}$$

односно

$$\begin{cases} 2x-2\cdot 3=y \\ x^2-8x+15=0 \end{cases}.$$

Решенијата на квадратната равенка се $x_1=5$ и $x_2=3$. Тогаш, $y_1=4$ и $y_2=0$. Решенија на системот се (5,4) и (3,0), бидејќи се точки од дефиниционата област.

3. Периметарот на еден правоаголен триаголник е $2p$ ($p>0$), а неговата висина спуштена кон хипотенузата има должина h. Определи ги неговите страни.

Решение. Од условот на задачата имаме $a+b+c=2p$, каде a и b се должините на катетите, а c е должина на хипотенузата. Според тоа

$$a+b=2p-c \tag{1}$$

Последното равенство го квадрираме и $a^2+2ab+b^2=(2p-c)^2$, па ако ја искористиме Питагоровата теорема добиваме $c^2+2ab=(2p-c)^2$, од кдаде следува

$$ab=2p^2-2pc. \tag{2}$$

Бидејќи $ab=ch$, ако замениме во (2) добиваме $ch+2pc=2p^2$ т.е. $c=\frac{2p^2}{h+2p}$.

Ако добиеното c го замениме во (1) и (2) добиваме.

$$\begin{cases} a+b=\frac{2p(h+p)}{h+2p} \\ a\cdot b=\frac{2p^2h}{h+2p} \end{cases}$$

Според тоа, a и b се корени на квадратната равенка

$$x^2-\frac{2p(h+p)}{h+2p}x+\frac{2p^2h}{h+2p}=0.$$

Значи,

$$a = \frac{p}{h+2p}(h + p + \sqrt{(p-h)^2 - 2h^2}),$$

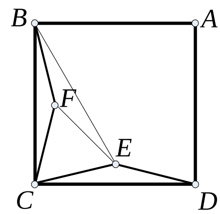
$$b = \frac{p}{h+2p}(h + p - \sqrt{(p-h)^2 - 2h^2}) \text{ и}$$

$$c = \frac{2p^2}{h+2p}.$$

4Б. Во внатрешноста на квадратот $ABCD$ се дадени точки E и F така што триаголникот CDE е рамнокрак со агол 150° кај темето E и триаголникот BCF е рамнокрак со агол 150° кај темето F.

а) Докажи дека триаголникот CEF е рамностран.

б) Колкав е аголот ABE ?



Решение. а) Триаголниците BCF и CDE се складни (еднакви агли и страна) и затоа $\overline{CF} = \overline{CE}$. Имаме

$$\measuredangle FCE = 90^\circ - \measuredangle BCF - \measuredangle DCE = 90^\circ - 15^\circ - 15^\circ = 60^\circ.$$

Значи, триаголникот CEF е рамнокрак со агол 60° и затоа е рамностран.

б) Бидејќи триаголникот CEF е рамностран, следува $\overline{FE} = \overline{FC}$. Но, $\overline{FC} = \overline{FB}$ па $\overline{FE} = \overline{FB}$. Значи, триаголникот BFE е рамнокрак. Уште,

$$\measuredangle BFE = 360^\circ - \measuredangle BFC - \measuredangle CFE = 360^\circ - 150^\circ - 60^\circ = 150^\circ$$

и затоа триаголникот EBF е складен со BCF. Оттука $\measuredangle EBF = \measuredangle CBF = 15^\circ$, односно $\measuredangle CBE = 30^\circ$ и затоа $\measuredangle ABE = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$.

4А. Даден е тетивен четириаголник $ABCD$ со заемно нормални дијагонали. Од пресекот на дијагоналите T се спуштени нормали кон страните на четириаголникот и тие ги сечат страните AB, BC, CD, DA во точките E, F, G, H соодветно.

Докажи дека четириаголникот $EFGH$ е тетивен.

Решение. Од тетивниот четириаголник $GCFT$ следува $\measuredangle TGF = \measuredangle TCF$, а од тетивниот четириаголник $ABCD$ имаме $\measuredangle ACB = \measuredangle ADB$, па следува дека

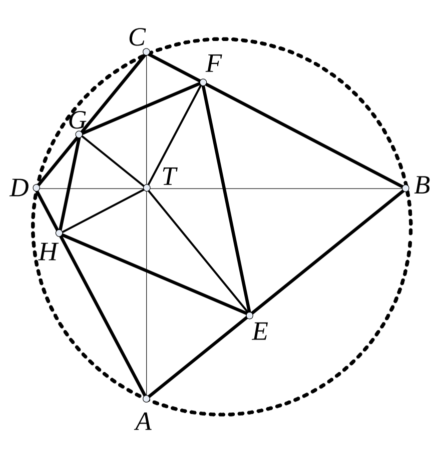
$$\measuredangle TGF = \measuredangle ADB.$$

Од тетивниот четириаголник $HTGD$ следува $\angle HDT = \angle HGT$. Па имаме дека

$$\measuredangle TGF = \measuredangle ADB = \measuredangle HGT.$$

Аналогно се покажува дека

$$\measuredangle HET = \measuredangle DAC = \measuredangle DBC = \measuredangle TEF.$$



Следува дека

$$\angle HGF + \angle HEF = 2\cdot\angle HGT + 2\cdot\angle HET = 2\cdot\angle ADB + 2\cdot\angle DAC = 180^\circ$$

каде што последното равенство важи од тоа што дијагоналите на $ABCD$ се заемно нормални.

III година

1А. Реши ја неравенката

$$|x+1|^{x^2-\frac{5}{2}x+\frac{3}{2}} < 1.$$

Решение. Прво да ја определиме дефиниционата област. Со оглед на својствата на експоненцијалната функција, потребно е $|x+1|>0, |x+1|\neq 1$, од каде $x\neq -1$ и дефиниционата област е $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. Имајќи предвид дека зависно од основата, експоненцијалната функција може да биде и растечка и опаѓачка, ќе разгледаме два случаи:

Случај 1. Нека $0<|x+1|<1$, неравенка чие решение е

$$-1<x<1 \Leftrightarrow x\in(-2,-1)\cup(-1,0).$$

Тогаш функцијата е опаѓачка и од $|x+1|^{x^2-\frac{5}{2}x+\frac{3}{2}} < 1 = |x+1|^0$, добиваме дека $x^2-\frac{5}{3}x+\frac{3}{2}>0$. По разложувањето на квадратниот трином имаме неравенка $(x-1)(x-\frac{3}{2})>0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,1)\cup(\frac{3}{2},+\infty)$. Конечно, по наоѓање на пресек на интервалите, за решението имаме $x\in(-2,-1)\cup(-1,0)$.

Случај 2. Нека $|x+1|>1$, односно $x\in(-\infty,-2)\cup(0,+\infty)$. На овој интервал, функцијата е растечка, па од $|x+1|^{x^2-\frac{5}{2}x+\frac{3}{2}} < 1. = |x+1|^0$, следува дека

$$x^2-\frac{5}{2}x+\frac{3}{2}<0 \Leftrightarrow x\in(1,\frac{3}{2}).$$

Множеството решенија е унија од решенијата добиени во двата разгледани случаи $M=(-2,-1)\cup(-1,0)\cup(1,\frac{3}{2})$.

1Б. Реши ја равенката

$$\log_2(9^{x-1}+7)=\log_2(3^{x-1}+1)+2.$$

Решение. Прво да ја определиме дефиниционата област. Од својствата на експоненцијалната функција, $9^{x-1}>0, 3^{x-1}>0$ на целото множество реални броеви, па $D=\mathbb{R}$. Користејќи својства на логаритамските функции, од $2=\log_2 4$ и $\log_2 a+\log_2 b=\log_2 ab$, равенката добива облик

$$\log_2(9^{x-1}+7)=\log_2(3^{x-1}+1)+\log_2 4 \Leftrightarrow \log_2(9^{x-1}+7)=\log_2 4(3^{x-1}+1).$$

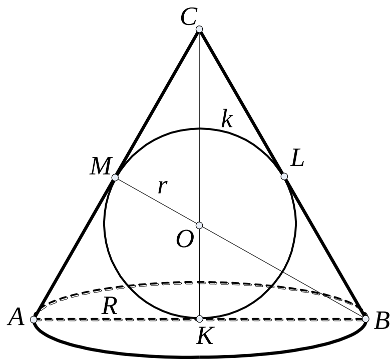
Тогаш

$$9^{x-1}+7=4(3^{x-1}+1)\Leftrightarrow,9^{x-1}+7=4(3^{x-1}+1)\Leftrightarrow$$
$$3^{2(x-1)}-4\cdot 3^{x-1}+7-4=0\Leftrightarrow 3^{2(x-1)}-4\cdot 3^{x-1}+3=0,$$

а со воведувањето на смената $3^{x-1}=t$, равенката ја доведуваме до квадратна равенка $t^2-4t+3=0$, со решенија $t_1=1, t_2=3$. Враќајќи во смената $3^{x-1}=1=3^0$ и $3^{x-1}=3=3^1$, добиваме линеарни равенки $x-1=0$, односно $x-1=1$. Конечно, решенијата по променливата x, се $x\in\{1,2\}$.

2. Во конус е впишана топка, при што плоштината на топката и плоштината на основата на конусот се еднакви. Пресметај го косинусот од аголот на оскиниот пресек на конусот во темето што е и врв на конусот.

Решение. Еден оскин пресек на конусот и впишаната топка е рамнокрак триаголник ABC, со должина на основата еднаква на $2R$ каде R е радиус на основата на конусот, во кој е впишана кружница k со радиус r. При тоа r е радиусот на впишаната топка. Нека центар на k е точката O, а допирните точки со страните AB, BC и CA се точките K, L и M соодветно (види цртеж).



Од равенството $4r^2\pi=R^2\pi$ добиваме $R=2r$.

Триаголниците AKC и OMC се слични. Ако воведеме стандардни ознаки $\overline{AK}=R$, $\overline{OK}=\overline{OM}=r$, $\overline{CK}=H$ и $\overline{AC}=s$ добиваме:

$$\frac{\overline{OM}}{\overline{OC}}=\frac{\overline{AK}}{\overline{CK}},$$
$$\frac{r}{H-r}=\frac{R}{s}=\frac{R}{\sqrt{H^2+R^2}}=\frac{2r}{\sqrt{H^2+4r^2}}.$$

па затоа $H=\frac{8}{3}r$, па според тоа

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{r}{\frac{8}{3}r-r}=\frac{3}{5}.$$

Сега, користејќи го идентитетот $\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$ не е тешко да се пресмета дека $\cos\alpha=\frac{7}{25}$.

3. Дали постои триаголник, таков што за неговите агли α,β и γ е точно равенството

$$\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta+\mathrm{tg}\gamma=\mathrm{ctg}\alpha+\mathrm{ctg}\beta+\mathrm{ctg}\gamma.$$

Решение. Нека постои триаголник со агли α, β и γ за кои е исполнето даденото равенство. За било кое θ, $\theta \neq k\pi$ е исполнето равенството $\mathrm{tg}\theta = \frac{1}{\mathrm{ctg}\theta}$. Користејќи го идентитетот $\mathrm{ctg}2\theta = \frac{\mathrm{ctg}^2\theta - 1}{\mathrm{ctg}\theta}$ и равенството $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, имаме

$$\mathrm{ctg}\alpha - \frac{1}{\mathrm{ctg}\alpha} + \mathrm{ctg}\beta - \frac{1}{\mathrm{ctg}\beta} + \mathrm{ctg}\gamma - \frac{1}{\mathrm{ctg}\gamma} = 0,$$

$$\frac{\mathrm{ctg}^2\alpha - 1}{\mathrm{ctg}\alpha} + \frac{\mathrm{ctg}^2\beta - 1}{\mathrm{ctg}\beta} + \frac{\mathrm{ctg}^2\gamma - 1}{\mathrm{ctg}\gamma} = 0,$$

$$\mathrm{ctg}2\alpha + \mathrm{ctg}2\beta + \mathrm{ctg}2\gamma = 0,$$

$$\mathrm{ctg}2\alpha + \mathrm{ctg}2\beta + \mathrm{ctg}[2\pi - (2\alpha + 2\beta)] = 0. \qquad (1)$$

Во идентитетите

$$\mathrm{ctg}[2\pi - (2\alpha + 2\beta)] = \mathrm{ctg}(2\alpha + 2\beta),$$

$$\mathrm{ctg}(2\alpha + 2\beta) = \frac{\mathrm{ctg}2\alpha\ \mathrm{ctg}2\beta - 1}{\mathrm{ctg}2\alpha\ \mathrm{ctg}2\beta},$$

ако воведеме ознаки $\mathrm{ctg}\,2\alpha = x$ и $\mathrm{ctg}\,2\beta = y$, и замениме во (1) добиваме

$$x + y + \frac{xy - 1}{x + y} = 0.$$

Последното равенство можеме да го запишеме во обликот

$$(x + \tfrac{y}{2})^2 + \tfrac{3}{4}y^2 + 1 = 0.$$

Не постојат реални броеви за кои ова равенство е исполнето. Бидејќи последното равенство според воведените ознаки за x и y е еквивалентно со почетното равенство, добиваме дека не постои таков триаголник.

4. Даден е квадратниот трином

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

при што $c < 0$ и $a + b + c > 0$.

Докажи дека f има реални корени.

Решение. Нека $f(x) = ax^2 + bx + c$ нема реални корени. Тогаш дискриминантата $D = b^2 - 4ac < 0$. Значи, $4ac > b^2$ и бидејќи $c < 0$ добиваме $a < \frac{b^2}{4c}$.

Оттука имаме

$$a + b + c < \frac{b^2}{4c} + b + c = \frac{b^2 + 4bc + 4c^2}{4c} = \frac{(b + 2c)^2}{4c} < 0,$$

што е во контрадикција со почетниот услов.

IV година

1. Нека p и q се природни броеви и $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ е аритметичка прогресија за која a_p е еднаков на q, а a_q е еднаков на p.

Пресметај ја вредноста на a_n.

Решение. Разликата на прогресијата ќе ја означиме со d. Од условот на задачата имаме

$$\begin{cases} a_1 + d(p-1) = q \\ a_1 + d(q-1) = p \end{cases}$$

Според тоа,

$$d(p-1) - d(q-1) = q - p,$$

$$d(p-q) = q - p,$$

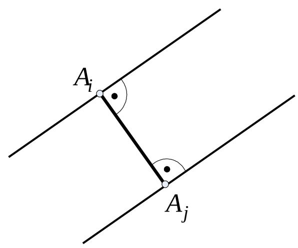
односно $d = -1$. Сега, $a_1 = p + q - 1$, од каде добиваме

$$a_n = p + q + d(n-1) = p + q - (n-1).$$

2А. Дадени се 2010 точки во рамнина така што секои три од нив формираат тапоаголен триаголник.

Докажи дека може да се додаде уште една точка така што повторно секои три од добиените 2011 точки формираат тапоаголен триаголник.

Решение. Од тие точки можеме да формираме $\binom{2010}{2}$ ленти (види цртеж).



За дадени две точки од дадените повлекуваме две прави кои минуваат низ крајните точки на отсечката формирана со нив, и се нормални на таа отсечка. Бидејќи бројот на точки е конечен, тие ленти не ја покриваат целата рамнина. Ако избереме точка надвор од унијата на формираните $\binom{2010}{2}$ ленти, тогаш таа ќе ги задоволува наведените услови.

2Б. Нека q е реален број различен од 1. Ако

$$A_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n,$$

$$B_n = 1 + \tfrac{1+q}{2} + (\tfrac{1+q}{2})^2 + \dots + (\tfrac{1+q}{2})^n$$

докажи дека важи

$$\binom{n+1}{1} + \binom{n+1}{2}A_1 + \binom{n+1}{3}A_2 + \dots + \binom{n+1}{n+1}A_n = 2^n B_n.$$

Решение. Јасно е дека

$$A_n = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}; \quad B_n = \frac{(\frac{1+q}{2})^{n+1}}{\frac{1+q}{2}-1} = \frac{)1+q\_^{n+1}-2^{n+1}}{(q-1)\cdot 2^n}.$$

Понатаму од биномната формула имаме

$$\binom{n+1}{1} + \binom{n+1}{2}A_1 + \binom{n+1}{3}A_2 + \ldots + \binom{n+1}{n+1}A_n =$$

$$= \frac{1}{q-1}\left(\binom{n+1}{1}(q-1) + \binom{n+1}{2}(q^2-1) + \ldots + \binom{n+1}{n+1}(q^{n+1}-1)\right)$$

$$= \frac{1}{q-1}\left((1+q)^{n+1} - (1+1)^{n+1}\right)$$

$$= \frac{2^n}{2^n(q-1)}\left((1+q)^{n+1} - 2^{n+1}\right) = 2^n B_n$$

3. Темињата на еден триаголник се точки со целобројни координати, во Декартов координатен систем.

Докажи дека неговите агли се различни од 60°.

Решение. Нека $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ и $C(x_3, y_3)$ се темиња на триаголникот (тие се со целобројни координати). Од формулите за растојание помеѓу две точки добиваме дека квадратите на должините на страните на триаголникот a^2, b^2 и c^2 се цели броеви.

Плоштината на триаголникот е еднаква на

$$P = \tfrac{1}{2}\,|\, x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\,|,$$

и јасно е дека P е рационален број.

Нека претпоставиме дека барем еден агол на триаголникот има 60°, односно нека $\gamma = 60^\circ$. Според косинусна теорема

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma = a^2 + b^2 - ab\,,.$$

од каде добиваме $ab = a^2 + b^2 - c^2 \in \mathbb{Z}$. Од друга страна, плоштината на триаголникот е еднаква на

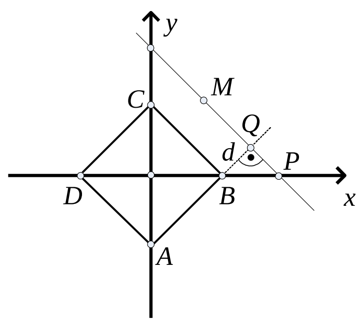
$$P = \tfrac{1}{2}ab\sin\gamma = \tfrac{\sqrt{3}}{4}ab\,,$$

од каде добиваме $\sqrt{3} = \frac{4P}{ab} \in \mathbb{Q}$. Последното равенство не е точно, па според тоа триаголникот не може да има агол од 60°.

4. Даден е квадрат $ABCD$ со должина на страна a. Одреди ги сите точки M во рамнината за кои е исполнето

$$\overline{MA}^2 - \overline{MB}^2 - \overline{MC}^2 + \overline{MD}^2 = 2c$$

(c е позитивен број). Докажи дека растојанието од тие точки до правата на која што лежи стра-



ната BC е константно. Одреди го тоа растојание.

Решение. Координатниот систем ќе го поставиме како на цртежот, т.е.

$$A(0,-\frac{a\sqrt{2}}{2}),\ B(\frac{a\sqrt{2}}{2},0),\ C(0,\frac{a\sqrt{2}}{2}),\ D(-\frac{a\sqrt{2}}{2},0).$$

Ако $M\left(x,y\right)$, дадениот услов може да се запише во обликот

$$x^2+(y+\frac{a\sqrt{2}}{2})^2-(x-\frac{a\sqrt{2}}{2})^2-y^2-x^2-(y-\frac{a\sqrt{2}}{2})^2+(x+\frac{a\sqrt{2}}{2})^2+y^2=2c, \quad (*)$$

кој што по поедноставувањето се сведува на

$$x+y=\frac{c}{a\sqrt{2}}. \quad (**)$$

Значи множеството точки кои што го задоволуваат условот на задачата е правата зададена со равенката $x+y=\frac{c}{a\sqrt{2}}$. Тоа е права паралелна со правата на која што лежи страната BC на квадратот.

Растојанието од произволна точка M до правата на која што лежи страната BC е всушност растојание помеѓу две паралелни прави, кое што е константно.

Растојанието d меѓу правите може да се одреди од рамнокракиот правоаголен триаголник BPQ (со $P(\frac{c}{a\sqrt{2}},0)$). Значи, $2d^2=\overline{BP}^2 \Rightarrow d=\frac{\overline{BP}}{\sqrt{2}}=\left|\frac{c}{2a}-\frac{a}{2}\right|$.