Весна Целакоска-Јорданова
Скопје

ТЕОРЕМА ЗА ИДЕНТИЧНИ ПОЛИНОМИ И НЕЈЗИНА ПРИМЕНА

Цел рационален израз или **полином** е израз којшто е составен од променливи и од броеви само со помош на операциите собирање и множење. На пример, полиноми се: $2x+1$, x^2-5x+6, $(x-2)(x-3)$, $5x^3-xy^2+2y$. Првите три полиноми зависат од една променлива, додека во последниот се јавуваат две променливи.

Овде ќе се задржиме на полиномите што зависат само од една променлива.

Изразот

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0, \qquad (1)$$

каде што $a_0, a_1, ..., a_{n-1}, a_n$ се дадени реални броеви и n е ненегативен цел број, е полином што зависи од една променлива, x. За него велиме дека е претставен во **каноничен вид**. Изразот (1) кусо се означува со $P(x)$.

Броевите $a_0, a_1, ..., a_{n-1}, a_n$ се викаат **коефициенти** на полиномот $P(x)$. За полиномот $P(x)$ велиме дека има степен n, ако $a_n \neq 0$. Ако сите коефициенти на полиномот $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ се еднакви на нула, т.е. $a_n = ... = a_0 = 0$, тогаш тој се вика **нулти полином** (нему не му се припишува никаков степен).

Важна улога кај полиномите има поимот корен, т.е. нула на полином. Имено, за еден реален број x_0 велиме дека е **корен** на полиномот $P(x)$ ако вредноста на $P(x)$ за $x = x_0$ е нула, т.е. $P(x_0) = 0$. На пример, $x = 2$ е корен на полиномот $x^3 - 3x^2 + 5x - 6$, зашто $2^3 - 3\cdot 2^2 + 5\cdot 2 - 6 = 0$, а $x = 1$ не е негов корен, зашто $1^3 - 3\cdot 1^2 + 5\cdot 1 - 6 = -3 \neq 0$.

Теорема 1. *Ако полиномот $P(x)$ е нулти, тогаш за секоја вредност на x тој добива вредност нула.*

Во тој случај се вели дека $P(x)$ е идентички еднаков на нула и се запишува $P(x) \equiv 0$.

Навистина, ако $P(x)$ е нулти полином, тогаш $a_n = a_{n-1} = ... = a_0 = 0$, па за која било вредност на x, $P(x) = 0\cdot x^n + 0\cdot x^{n-1} + ... + 0\cdot x + 0 = 0$.

Точно е и обратното тврдење.

Теорема 2. *Ако за секоја вредност на* x *полиномот*

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0 \qquad (2)$$

има вредност нула, тогаш тој е нулти полином, т.е. сите негови коефициенти се нули.

Ова тврдење ќе го покажеме за $n=3$, т.е. за полиномот

$$P(x)=ax^3+bx^2+cx+d\ . \qquad (3)$$

Се прашуваме: во кој случај полиномот (3) е еднаков на нула за која било вредност на x, т.е. какви треба да бидат коефициентите a,b,c,d за да важи:

$$ax^3+bx^2+cx+d\equiv 0\,. \qquad (4)$$

$P(x)$ треба да биде нула за која било вредност на x, па и за $x=0$. Заменувајќи го x со 0 во (4), добиваме дека $d=0$. Тогаш (4) го добива обликот $ax^3+bx^2+cx\equiv 0$, односно $x(ax^2+bx+c)\equiv 0$. Одовде следува дека $x=0$, а за да биде производот идентички еднаков на нула мора да важи $ax^2+bx+c\equiv 0$. И ова равенство мора да биде задоволено за која било вредност на x, па и за $x=0$. Оттука следува дека $c=0$, а последното равенство го добива обликот $ax^2+bx\equiv 0$, т.е. $x(ax+b)\equiv 0$. Слично како претходно, добиваме дека $ax+b\equiv 0$, а оттука дека $b=0$ и конечно, $a=0$.

Следствено, (4) е идентитет ако $a=b=c=d=0$, т.е. ако (3) е нултиот полином.

Како последица од теорема 1 и теорема 2 се добива:

Теорема 3. *Еден полином е нулти ако и само ако за секоја вредност на променливата тој добива вредност нула.*

Да ги разгледаме полиномите

$$P(x)=3x^3+x^2+9x-5 \text{ и } Q(x)=3(x-1)^3+2(4x^2-1)\,.$$

Ако, на пример, x ги има вредностите $-3,-2,-1,0,1,2,3$, тогаш вредностите на $P(x)$ и $Q(x)$ можеме да ги сместиме во една ваква табела:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$P(x)$	-104	-43	-16	-5	8	41	112
$Q(x)$	-104	-43	-16	-5	8	41	112

Од оваа табела се гледа дека вредностите на двата полинома се еднакви за дадените вредности на x. Уште повеќе, за која било вредност на x, соодветните вредности на двата полинома $P(x)$ и $Q(x)$ се еднакви, затоа што

$$3(x-1)^3+2(4x^2-1)=3x^3+x^2+9x-5.$$

За ваквите полиноми велиме дека се идентични.

За два полинома $P(x)$ и $Q(x)$ велиме дека се **идентични** ако и само ако за секој $x\in\mathbb{R}$, тие добиваат исти вредности, т.е. $P(x)=Q(x)$.

Следната теорема е позната под името **теорема за идентични полиноми**.

Теорема 4. *Два полинома*

$$\begin{aligned}P(x)&=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0\\ Q(x)&=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+...+b_1x+b_0\end{aligned}\tag{5}$$

се идентични ако и само ако $n=m$, $a_n=b_n, a_{n-1}=b_{n-1},...,a_1=b_1, a_0=b_0$.

Доказ. Ако за секој $x\in\mathbb{R}$, полиномите $P(x)$ и $Q(x)$ се такви што $P(x)=0$ и $Q(x)=0$, тогаш според теоремата 2 тие се нулти полиноми, па според тоа, тие се меѓу себе еднакви. Да претпоставиме дека $P(x)$ и $Q(x)$ се ненути полиноми и дека $n=m$.

Од претпоставката дека $P(x)=Q(x)$ за секој $x\in\mathbb{R}$, следува дека за секој $x\in\mathbb{R}$

$$(a_n-b_n)x^n+(a_{n-1}-b_{n-1})x^{n-1}+...+(a_1-b_1)x+(a_0-b_0)=0.$$

Од теорема 2 следува дека полиномот

$$(a_n-b_n)x^n+(a_{n-1}-b_{n-1})x^{n-1}+...+(a_1-b_1)x+(a_0-b_0)$$

е нултиот полином, па значи

$$a_n-b_n=0,\ ...,\ a_1-b_1=0,\ a_0-b_0=0,\text{ т.е. } a_n=b_n,\ ...,\ a_0=b_0.$$

Нека $n>m$. Вредноста на полиномот $Q(x)$ нема да се промени ако го претставиме во обликот

$$Q(x)=0\cdot x^n+0\cdot x^{n-1}+...+0\cdot x^{m+1}+b_mx^n+b_{m-1}x^{n-1}+...+b_1x+b_0,$$

па постапувајќи како во случајот кога $n=m$, добиваме дека $a_n=b_n$, ... , $a_0=b_0$, каде што $b_n=0$, $b_{n-1}=0$, ..., $b_{m+1}=0$. Слично се постапува и во случајот кога $n<m$.

Обратно, ако $n=m$, $a_n=b_n, a_{n-1}=b_{n-1},...,a_1=b_1, a_0=b_0$, тогаш $P(x)$ и $Q(x)$ се еден ист полином, па за секој $x\in\mathbb{R}$, $P(x)=Q(x)$, т.е. $P(x)$ и $Q(x)$ се идентични.

Значи, два полинома се идентични ако и само ако и двата се нулти полиноми или, ако не се, тогаш коефициентите пред соодветните степени им се еднакви. Ненулти полином не може да биде идентичен со нултиот полином.

Теорема 5. *Еден полином* $P(x)$ *со степен* n *на единствен начин може да се претстави во каноничен вид, т.е. во обликот* (2).

Навистина, секој полином со степен n може да се претстави во обликот (1). Останува да се покаже дека тоа претставување е единствено. Да претпоставиме дека полиномот $P(x)$ може да се претстави во каноничен вид на два начини, на пример

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 \quad \text{и}$$

$$P(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_1 x + b_0 \,.$$

Овие полиноми се еднакви за која било вредност на променливата x, па според теоремата за идентични полиноми следува дека $n = m$, $a_n = b_n$, ... , $a_0 = b_0$. Значи, двете претставувања на полиномот $P(x)$ не се различни, т.е. претставувањето на полиномот $P(x)$ е единствено.

Овие пет теореми, а посебно теоремата за идентични полиноми, имаат голема примена кај таканаречениот метод на неопределени коефициенти.

Задача 1. Да се најде полином $P(x)$ со степен 2, таков што

$$P(x+1) = P(x) + 2x + 1 \text{ и } P(0) = 1.$$

Ако постои полином $P(x)$ со бараните својства, тогаш тој на единствен начин може да се претстави во обликот $P(x) = ax^2 + bx + c$, каде што $a \neq 0$ Треба да ги најдеме коефициентите a,b,c. Од условот $P(0) = 1$, имаме дека $P(0) = c = 1$. Според тоа, $P(x) = ax^2 + bx + 1$. Од друга страна

$$P(x+1) = a(x+1)^2 + b(x+1) + 1 = ax^2 + (2a+b)x + a + b + 1\,.$$

Заменувајќи ги $P(x+1)$ и $P(x)$ во $P(x+1) = P(x) + 2x + 1$, добиваме:

$$ax^2 + (2a+b)x + a + b + 1 = ax^2 + (b+2)x + 2\,.$$

Од теоремата за идентични полиноми имаме:

$$a = a,\ 2a + b = b + 2,\ a + b + 1 = 2\,,$$

од каде што, решавајќи систем од две равенки со две непознати, добиваме дека $a = 1$, $b = 0$. Според тоа, $P(x) = x^2 + 1$.

Задача 2. $x^2 + 2$ да се претстави во обликот

$$A(x^2 + x + 1) + B(x^2 - x + 1) + C(x^2 - 1)\,.$$

Треба да ги определиме A, B, C така што за секоја вредност на x

$$x^2+2=A(x^2+x+1)+B(x^2-x+1)+C(x^2-1)\,. \qquad (4)$$

Да забележиме дека равенството (4) е исполнето за која било вредност на x, па и за $x=-1$, $x=0$ и $x=1$. Заменувајќи ја секоја од овие вредности на x во (4), го добиваме системот равенки

$$A+3B=3,\; A+B-C=2,\; 3A+B=3,$$

а оттука $A=B=\frac{3}{4}$, $C=-\frac{1}{2}$. Значи,

$$x^2+2=\tfrac{3}{4}(x^2+x+1)+\tfrac{3}{4}(x^2-x+1)-\tfrac{1}{2}(x^2-1)\,.$$

Решените задачи ни даваат претстава за методот на неопределени коефициенти. Тој се применува обично тогаш кога бараме алгебарски израз од определен вид или кога сакаме даден алгебарски израз да го претставиме на определен начин. Значи, познат е само видот на бараниот израз, но не и коефициентите. Затоа, нив ги означуваме со некои букви. Така означените букви се неопределени (непознати). Оттука доаѓа и името **метод на неопределени коефициенти**. Нив треба да ги определиме во зависност од условот на задачата. Задачата 1 е решена со помош на теоремата за идентични полиноми. За таа цел, најчесто се изедначуваат коефициентите пред соодветните степени на полиномите, па се решава систем равенки. Задачата 2 е решена со помош на дефиницијата за идентични полиноми. Имено, два полиноми се идентични ако се еднакви за која било вредност на x, па затоа ги изедначуваме вредностите на полиномите за зададени вредности на x. Потоа, решаваме систем равенки по непознатите коефициенти.

Задача 3. Да се претстави во каноничен вид производот

$$(x+2)(x+3)(x-5)\,.$$

Производот е полином со степен 3; коефициентот пред највисокиот степен е 1, а слободниот член е -30. Да ставиме

$$(x+2)(x+3)(x-5)=x^3+ax^2+bx-30\,.$$

За пресметување на a и b да ставиме: $x=-2$ и $x=-3$. Тогаш $4a-2b-38=0$ и $9a-3b-57=0$. Оттука $a=0$, $b=-19$.

Задача 4. Полиномот $x^3-6x^2+14x-9$ да се претстави по степените на $x-2$.

Полиномот

$$P(x)=x^3-6x^2+14x-9$$

има степен 3, па неговото претставување по степените на $x-2$ е

$$P(x)=a(x-2)^3+b(x-2)^2+c(x-2)+d\,.$$

За да ги најдеме коефициентите a,b,c,d ќе го искористиме фактот што за секој $x\in\mathbb{R}$ треба да биде исполнето

$x^3-6x^2+14x-9=a(x-2)^3+b(x-2)^2+c(x-2)+d$, т.е.

$x^3-6x^2+14x-9=ax^3+(-6a+b)x^2+(12a-4b+c)x+(-8a+4b-2c+d)$.

Применувајќи ја теоремата за идентични полиноми, го добиваме следниот систем равенки:

$a=1$, $-6a+b=-6$, $12a-4b+c=14$, $-8a+4b-2c+d=-9$.

Решението на овој систем е: $a=1$, $b=0$, $c=2$, $d=3$. Според тоа,

$$P(x)=(x-2)^3+2(x-2)+3\,.$$

Задача 5. Да се претстави

$$P(x)=c_nx^n+c_{n-1}x^{n-1}+...+c_1x+c_0$$

по опаѓачки степени на разликата $x-a$.

Да ставиме $P(x)=A_n(x-a)^n+A_{n-1}(x-a)^{n-1}+...+A_1(x-a)+A_0$, каде што $A_0,A_1,...,A_n$ се бараните коефициенти. За да ги најдеме коефициентите $A_0,A_1,...,A_n$, ќе го искористиме фактот што за секој $x\in\mathbb{R}$ треба да биде исполнето

$$A_n(x-a)^n+A_{n-1}(x-a)^{n-1}+...+A_1(x-a)+A_0=c_nx^n+c_{n-1}x^{n-1}+...+c_1x+c_0\,. \quad (5)$$

Левата страна на (5) ја средуваме со помош на биномната формула, а потоа, користејќи ја теоремата за идентични полиноми, ги изедначуваме соодветните коефициенти. Добиваме:

$$A_n=c_n\,,\ -nA_n+A_{n-1}=c_{n-1}\,,\ \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^2A_n-(n-1)aA_{n-1}+A_{n-2}=c_{n-2}\,,$$

итн. Оттука, последоватлно се добива дека $A_n=c_n$, $A_{n-1}=c_{n-1}=nac_n$, итн.

Задача 6. Да се најдат a,b,c,d , така што полиномот

$$P(x)=x^4+2x^3+3x^2+ax+b$$

да биде квадрат на полиномот $Q(x)=x^2+cx+d$.

За секој $x\in\mathbb{R}$ треба да важи равенството

$$x^4+2x^3+3x^2+ax+b=(x^2+cx+d)^2\,.$$

Оттука,

$$x^4+2x^3+3x^2+ax+b=x^4+2cx^3+(c^2+2d)x^2+2cdx+d^2\,.$$

Од теоремата за идентични полиноми добиваме:

$$2c=2,\ c^2+2d=3,\ 2cd=a,\ d^2=b,$$

а оттука $a=2, b=1, c=1, d=1$. Според тоа,

$$P(x)=x^4+2x^3+3x^2+2x+1, \text{ а } Q(x)=x^2+x+1.$$

Задача 7. Да се најдат корените на полиномот

$$P(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e,$$

ако $P(2)=15$ и $P(2x)=16P(x)+15$.

Прво ќе ги определиме коефициентите a,b,c,d,e на полиномот $P(x)$, а потоа ќе ги најдеме неговите корени. Од условот $P(2x)=16P(x)+15$ имаме дека:

$$16ax^4+8bx^3+4cx^2+2dx+e=16ax^4+16bx^3+16cx^2+16dx+16e+15.$$

Според теоремата за идентични полиноми: $16a=16a$, $8b=16b$, $4c=16c$, $2d=16d$, $e=16e+15$. Од последните четири равенки се добива дека $b=c=d=0, e=-1$, додека од равенката $16a=16a$, a не може да се определи. Полиномот $P(x)$ сега го добива обликот $P(x)=ax^4-1$. Од условот $P(2)=15$, имаме $a\cdot 2^4-1=15$, т.е. $a=1$. Според тоа, $P(x)=x^4-1$. Корените на полиномот x^4-1 ќе ги најдеме со решавање на равенката $x^4-1=0$, т.е. $(x^2+1)(x-1)(x+1)=0$. Корените на последната равенка се: $x_1=1$, $x_2=-1$, $x_3=i$, $x_4=-i$.

Задачи за самостојна работа

1. Најди полином $P(x)$ со степен 3, таков што

$$P(0)=4 \text{ и } P(2x+1)-P(x)=7x^3-8x-1.$$

2. Полиномот $x+1$ да се претстави во обликот $A(x-1)+B(x+2)$.
3. Да се претстави во каноничен вид производот $(x-2)(x+1)(x-3)(x-1)$.
4. Полиномот $P(x)=2x^2-5x+7$ да се претстави по степените на $x-1$.
5. Да се најдат a,b,c,d,e така што полиномот $P(x)=x^3+ax^2+bx+c$ да е куб на полиномот $Q(x)=dx+e$.
6. Во множеството на реални броеви реши ја неравенката $P(x)<0$, каде што $P(x)=ax^2+bx+c$, $P(1)=4$ и за секој $x\in\mathbb{R}$,

$$P(2x)=P(x)+3x^2+4x.$$