Male tajne Fibonaccijevih brojeva

Dušan Murovec, Križevci pri Ljutomeru, Slovenija

Jedan od najpoznatijih nizova prirodnih brojeva je sigurno Fibonaccijev niz koji se definira na sljedeći način:

$$F_1 = F_2 = 1, \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad n > 2.$$

Pozabavimo se najprije izračunavanjem Fibonaccijevih brojeva. U tu svrhu riješimo diferencijsku jednadžbu

$$f(n) = f(n-1) + f(n-2)$$

uz početne uvjete $f(0) = f(1) = 1$.

Iz kombinatorike znamo da funkcija f mora zadovoljavati karakterističnu jednadžbu

$$s^2 = s + 1 \quad \text{tj.} \quad s^2 - s - 1 = 0.$$

Rješenja ove kvadratne jednadžbe su $s_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Dana diferencijska jednadžba je riješena s točnošću do na konstante C_1 i C_2:

$$f(n) = C_1 s_1^n + C_2 s_2^n = C_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Iz početnih uvjeta odredimo konstante C_1 i C_2:

$$\begin{aligned} 1 &= C_1 + C_2, \\ 1 &= C_1 \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} + C_2 \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$

Rješavanjem ovog sistema linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice dobivamo:

$$C_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}, \quad C_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$$

pa je

$$f(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} \right). \tag{1}$$

Ovo je poznata Binetova formula.

Po definiciji lako izračunamo prvih 15 Fibonaccijevih brojeva: $F_1 = F_2 = 1$, $F_3 = 3$, $F_4 = 3$, $F_5 = 5$, $F_6 = 8$, $F_7 = 13$, $F_8 = 21$, $F_9 = 34$, $F_{10} = 55$, $F_{11} = 89$, $F_{12} = 144$, $F_{13} = 233$, $F_{14} = 377$, $F_{15} = 610$.

Vjerojatno imate kalkulator pa se malo pozabavite računanjem Fibonaccijevih brojeva po Binetovoj formuli (1) $\left(\text{ili } F_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$. Budući da moje računalo nije bilo od dovoljno velike točnosti dobio sam: $F_4 = 2.999999$, $F_5 = 4.919349$, $F_{10} = 55.000014$, $F_{15} = 609.999934$, $F_{20} = 6\,765$, $F_{25} = 75\,025$, $F_{30} = 832\,040$, $F_{35} = 9\,227\,465$, $F_{40} = 102\,334\,155$, a već kod F_{44} osjeća se greška računala zbog zaokruživanja $\sqrt{5}$. Kod $F_{50} = 12\,586\,269\,025$ greška računala je 25 jedinica. Najveći Fibonaccijev broj kojeg sam mogao direktno dobiti kalkulatorom bio je $F_{478} = 3.5205 \cdot 10^{99}$. Pomoću logaritama i kalkulatora moguća je procjena i većih Fibonaccijevih brojeva.

Uzmimo sada nekoliko prvih prirodnih brojeva i pokušajmo ih prikazati kao sumu Fibonaccijevih brojeva, ali tako da ne upotrijebimo dva uzastopna Fibonaccijeva broja (i još isključimo F_1). Evo nekoliko primjera:

5	=	5
6	=	5+1
7	=	5+2
8	=	8
9	=	8+1
10	=	8+2
11	=	8+3
12	=	8+3+1
13	=	13
14	=	13+1
15	=	13+2
100	=	89+8+3
801	=	610+144+34+13

Ovime naslućujemo da vrijedi posebno značajan tzv. Zeckendorfov teorem.

Teorem. *Svaki prirodni broj n može se na jednoznačan način prikazati kao*

$$n = \sum_{i \geq 2} c_i F_i, \quad c_i \in \{0, 1\}, \quad c_i c_{i+1} = 0.$$

To znači da se u sumi nikad ne pojavljuju dva uzastopna Fibonaccijeva broja.

Dokaz. Za svaki $m \in \mathbf{N}$ vrijedi ovaj identitet

$$F_1 + F_3 + \ldots + F_{2m-1} = F_{2m}. \tag{2}$$

Da to dokažemo, primijetimo da vrijede jednakosti

$$F_1 = F_2, \quad F_3 = F_4 - F_2, \quad \ldots, \quad F_{2m-1} = F_{2m} - F_{2m-2},$$

a njihovim zbrajanjem dobivamo traženi identitet. Analogno je

$$F_2 + F_4 + \ldots + F_{2m} = F_{2m+1} - 1.$$

Pokažimo sada da za svaki prirodni broj n postoji traženi prikaz, tj.

$$n = F_{n_1} + F_{n_2} + \ldots + F_{n_k}. \tag{3}$$

Ovdje je $n_1 > n_2 > \ldots > n_k \geq 2$ i $n_i \geq n_{i+1} + 2$, za $1 \leq i \leq k-1$. Pošto je niz F_2, $F_3, \ldots$ monotono rastući, postoji indeks $n_2 \geq 2$ tako da vrijedi

$$F_{n_1} \leq n < F_{n_1+1}.$$

Ako je $F_{n_1} = n$, onda je dokaz gotov. U protivnom je

$$F_{n_1} < n < F_{n_1+1}.$$

Oduzimamo F_{n_1} i još uzimamo u obzir $F_{n_1+1} = F_{n_1} + F_{n_1-1}$, pa dobivamo

$$0 < n - F_{n_1} < F_{n_1-1}.$$

Sada je

$$F_{n_2} \leq n - F_{n_1} < F_{n_1-1}.$$

Zbog $F_{n_2} \leq n - F_{n_1} < F_{n_1-1}$ i još $F_{n_2} < F_{n_1-1}$, dobijemo $n_2 < n_1 - 1$ ili $n_1 \geq n_2 + 2$. Ako je $n - F_{n_1} = F_{n_2}$ postoji traženi prikaz $n = F_{n_1} + F_{n_2}$. U protivnom nastavljamo opisani postupak. Nakon konačno mnogo koraka dobivamo rješenje u obliku (3). Zbog jednolikosti isključimo prvi Fibonaccijev broj $F_1 = 1$.

Jednoznačnost Zeckendorfovog prikaza lako se dokazuje matematičkom indukcijom.

Time smo dobili jednostavan algoritam kako zapisati Zeckendorfov prikaz bilo kojeg prirodnog broja. Izaberemo najveći Fibonaccijev broj koji nije veći od n, recimo F_k, te na ostatku $n - F_k$ taj korak nastavljamo dok ne dođemo do kraja.

Pokažimo još dva svojstva Fibonaccijevih brojeva.

1° Fibonaccijev broj $f(k)$ je paran ako i samo ako je k oblika $3n+2$, $n \in \mathbf{N}$.

Dokaz. Nenegativne cijele brojeve podijelimo u ova tri podskupa:

$$S = \{3n+1, n \in \mathbf{N} \cup \{0\} : 1, 4, 7, 10, \ldots\},$$
$$R = \{3n+2, n \in \mathbf{N} \cup \{0\} : 2, 5, 8, 11, \ldots\},$$
$$T = \{3n, n \in \mathbf{N} \cup \{0\} : 0, 3, 6, 9, \ldots\}.$$

Sada indukcijom dokazujemo da je $f(k)$ paran ako je $k \in R$, a neparan ako je $k \in S \cup T$.

Za $n = 0$ tvrdnja vrijedi. Pretpostavimo da je ona istinita za neki n, tj. $f(3n+1)$ i $f(3n)$ su neparni, a $f(3n+2)$ je paran broj. Sada računom pokazujemo:

$$\begin{array}{lrcl}
\text{a)} & f(3(n+1)+1) & = & f(3n+4) = f(3n+3) + f(3n+2) \\
 & & = & f(3n+1) + 2f(3n+2) = \text{neparan broj;} \\
\text{b)} & f(3(n+1)) & = & f(3n+2) + f(3n+1) = \text{neparan broj;} \\
\text{c)} & f(3(n+1)+2) & = & f(3n+5) = f(3n+4) + f(3n+3) \\
 & & = & f(3n+2) + 2f(3n+3) = \text{paran broj.}
\end{array}$$

Time je tvrdnja dokazana.

2° Pokažimo i ovo svojstvo Fibonaccijevih brojeva: Svaki peti Fibonaccijev broj je višekratnik od 5.

Ovo također dokazujemo matematičkom indukcijom. S $f(k-1)$ je označen k-ti Fibonaccijev broj. Treba dokazati da je $f(5n+4)$ djeljivo s 5 za svaki $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$.

Za $n = 0$ je $f(4) = 5$ i prema diferencijskoj jednadžbi je

$$\begin{aligned}
f(5(n+1)-1) &= f(5n+4) = f(5n+3) + f(5n+2) = 3f(5n+1) + 2f(5n) \\
&= 5f(5n) + 3f(5n-1).
\end{aligned}$$

Time je dokaz završen.

Zadaci

1. Riješite diferencijsku jednadžbu

$$y(n+2) = y(n+1) + 2y(n), \quad y(0) = y(1) = 1.$$

2. Izračunajte ove Fibnaccijeve brojeve: F_{26}, F_{31}, F_{43}.

3. Nađite Zeckendorfov prikaz ovih brojeva: 20, 33, 110, 517.

4. Pomoću računala dajte procjenu za F_{100} i F_{1000}.

5. Procijenite približno Fibonaccijeve brojeve F_{10^6}, F_{10^9}, $F_{10^{10}}$.

Literatura

[1] S. Klavžar, *Zeckendorfov izrek in Fibonaccijeve kocke*, Obzornik za matematiko in fiziko, **50**(6), godište 2003.

[2] Balakrishman, *Combinatorics*, Schaum's Outlines McGraw-Hill, 1995.