

Vedska matematika

MARIJA MILOLOŽA*

Sažetak. *Ovim člankom, koji je gradivom i pristupom prilagođen prvim razredima srednjih škola prikazuju se drugačiji načini množenja i kvadriranja brojeva pomoću formula vedske matematike. Ti načini su opisani riječima i dani su njihovi algebarski dokazi.*

Ključne riječi: *vedska matematika, sutre, množenje, kvadriranje*

Vedic mathematics

Abstract. *This article, which is in content and approach adapted for the first-year high school students, presents different ways of multiplication and squaring of numbers by using formulas of the Vedic mathematics. These ways are described in words and their algebraic proofs are given.*

Key words: *vedic mathematics, sutras, multiplication, squaring*

1. Uvod

Vedska matematika (5) je ime dano drevnom sustavu matematike koji je između 1911. i 1918. Sri Bharati Krsna Tirthaji (1884.-1960.) otkrio u Vedama. Prema njegovom istraživanju, sva matematika temelji se na 16 sutri ili formula izraženih riječima. Jednostavnost vedske matematike znači da se računanja mogu obavljati mentalno, što stvara kreativnije i zainteresiranije učenike.

Početak 20. stoljeća, dok je u Europi vladalo veliko zanimanje za sanskrske tekstove, neki znanstvenici odbacili su određene tekstove pod nazivom Ganita sutre - što znači "matematika" - jer u prijevodu nisu mogli pronaći nikakvu matematiku. Međutim, Bharati Krsna, koji se bavio sanskrtom, matematikom, poviješću i filozofijom, proučio je te tekstove i nakon dugog i pažljivog istraživanja uspio rekonstruirati matematiku Veda. Svoja istraživanja objavio je u knjizi "Vedska matematika" objavljenoj 1965. godine. Tih 16 sutri, ili jednostavnih sanskrskih formula izraženih riječima, rješavaju mnoge poznate matematičke probleme u granama aritmetike, algebre, geometrije i diferencijalnog računa. One su lako razumljive, lako primjenjive i lako pamtljive.

*Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, Trg Ljudevita Gaja 6, HR-31 000 Osijek, mmiloloz@mathos.hr

2. Sutre

1. Sve od devetke, a zadnju od desetke
2. Sa jedan više od prethodnog
3. Okomito i dijagonalno
4. Premjesti i primijeni
5. Ako je Samuccaya jednaka, rezultat je nula
6. Ako je jedan u omjeru, drugi je nula
7. Sa zbrajanjem i oduzimanjem
8. Sa dopunom i bez dopune
9. Diferencijalni račun
10. Sa manjkom
11. Specifičan i općenit
12. Ostaci sa zadnjom znamenkom
13. Zadnji i dvostruki predzadnji
14. Sa jedan manje od prethodnog
15. Produkt sume
16. Svi množitelji

U daljnjem tekstu bit će prikazana primjena nekoliko sutri i to na nekoliko specifičnih vrsta računskih zadataka. Vedska matematika omogućava računanje različitih računskih zadataka u jednom retku, koji se može zapisati ili zamišljati. Rezultat računanja se dobije u nekoliko koraka, a pošto se računa u jednom retku ti će se dijelovi rezultata u daljnjem tekstu odvajati znakom “/” .

2.1. Sve od devetke, a zadnju od desetke

Želimo li oduzeti 5783 od 10000 jednostavno primijenimo sutru “Sve od devetke, a zadnju od desetke”. Svaku znamenku u broju 5783 oduzmemo od 9, a zadnju oduzmemo od 10 i dobivamo 4217.

Primjer 1. *Izračunajmo $1000 - 429$. Svaku znamenku u umanjitelju oduzmimo od 9, a zadnju od 10. Stoga je $1000 - 429 = 571$.*

Primjer 2. *U primjeru $1000 - 64$, u kojemu imamo više nula u umanjeniku, nego što umanjitelj ima znamenaka samo pretpostavimo da je 64 zapravo 064. Tako $1000 - 64$ postaje $1000 - 064 = 936$.*

$$\begin{array}{r}
 1000 - 429 = \\
 \quad \quad \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\
 \quad \quad \quad \text{Od 9} \quad \text{Od 9} \quad \text{Od 10} \\
 \quad \quad \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\
 \quad \quad \quad 5 \quad 7 \quad 1
 \end{array}$$

Slika 1: Oduzimanje od 1000

Ova sutra je također vrlo učinkovita kod *množenja brojeva koji su blizu baze 10*, 100, 1000, . . . , tj. potencije broja 10. Razlika između broja i baze zove se *devijacija*. Ona može biti pozitivna (tzv. višak) i negativna (tzv. manjak). Ukoliko je devijacija pozitivna, ne stavlja se znak + ispred nje, a ukoliko je negativna stavlja se znak -. Primjeri su dani u tablici:

Broj	Baza	Broj-Baza	Devijacija
12	10	12 - 10	2
6	10	6 - 10	-4
89	100	89 - 100	-11
108	100	108 - 100	08
986	1000	986 - 1000	-014
1005	1000	1005 - 1000	005

Ukoliko imamo broj 89 kojemu je baza 100, njegovu devijaciju možemo izračunati pomoću sutre "Sve od devetke, a zadnju od desetke" i dobivamo -11. Devijacija treba imati onoliko znamenki koliko baza ima nula; u suprotnom nadopišemo nule ispred znamenki devijacije.

Pogledajmo primjer množenja 7 s 8. Ovdje je baza 10, a devijacije od 7 i 8 su redom -3 i -2. Grafički bi to zapisali na sljedeći način: brojeve 7 i 8 pišemo

$$\begin{array}{r}
 7 \quad -3 \\
 8 \quad -2
 \end{array}$$

Slika 2: Množenje brojeva 7 i 8

u lijevom stupcu, a njihove devijacije u desnom. Rezultat će se sastojati od dva dijela:

1. dio dobit će se zbrajanjem jednog broja s devijacijom drugog: npr. $7 + (-2) = 5$,
2. dio množenjem devijacija: $(-3) \cdot (-2) = 6$.

Dakle, $7 \cdot 8 = 5/6 = 56$.

Drugi dio treba sadržavati onoliko znamenki koliko ima nula u bazi. U ovom

slučaju 6 ostaje kako jest. Ukoliko drugi dio rezultata ima manje znamenki nego baza nula, onda se dodaju nule ispred znamenki drugog dijela rezultata tako da drugi dio ima jednako znamenki koliko i baza nula. Ukoliko drugi dio rezultata ima više znamenki nego baza nula, onda se događa prijenos znamenki u prvi dio rezultata.

Općenito, množenje bi mogli prikazati na sljedeći način:

Neka su N_1 i N_2 brojevi koji su blizu neke baze, potencije broja 10, a D_1 i D_2 redom njihove devijacije. Tada se njihov umnožak može prikazati na sljedeći način:

$$\begin{array}{r} N_1 \qquad \qquad D_1 \\ N_2 \qquad \qquad D_2 \\ \hline N_1 + D_2 \quad \text{ili} \quad / \quad D_1 \cdot D_2 \\ N_2 + D_1 \end{array}$$

Slika 3: Množenje brojeva N_1 i N_2

a) Množenje brojeva koji su manji od baze

Primjer 3. *Želimo pomnožiti 88 s 98.* Njihova baza je 100, a devijacije su -12 za 88 i -02 za 98. Možemo reći i da je manjak od 88 broj 12, a od 98 broj 2. To zapišemo kao na slici 4. Umnožak dobijemo u dva dijela. Prvi dio je zbroj jednog broja s devijacijom drugog. Možemo reći i da od jednog broja oduzmemo manjak drugog: $88 - 2 = 86$ (ili $98 - 12 = 86$; svejedno je jer ćemo uvijek dobiti isti broj). Drugi dio umnoška je umnožak devijacija (tj. umnožak manjaka: $12 \cdot 2 = 24$). Dakle, $88 \cdot 98 = 86/24 = 8624$.

$$\begin{array}{r} 88 \quad \quad -12 \\ 98 \quad \quad -02 \\ \hline 86 \quad / \quad 24 \end{array}$$

Slika 4: Množenje brojeva 88 i 98

b) Množenje brojeva koji su veći od baze

Primjer 4. *Želimo pomnožiti 102 sa 107.* Baza je 100. Devijacija od 102 je 02, a od 107 je 07. Rezultat je u dva dijela: jednom broju dodamo devijaciju drugog

broja, a zatim tom zbroju “prilijepimo” umnožak višaka. Pa imamo:

$$(102 + 7)/(2 \cdot 7) = 109/14 = 10914$$

c) Množenje brojeva kod kojih je jedan veći od baze, a drugi manji od baze

Pomnožimo 13 sa 7. Baza je 10. Devijacija od 13 je 3, a od 7 je -3 . Prvi dio rezultata će biti $13 + (-3) = 10$, a drugi dio $3 \cdot (-3) = -9$. Dakle, od prvog dijela morat ćemo oduzimati 9. Pogledajte sliku 5:

$$\begin{array}{r} 13 \qquad 3 \\ 7 \qquad -3 \\ \hline 13-3 \quad \text{iii} \quad / \quad 3 \cdot (-3) = 10/(-9) = 100-9=91 \\ 7+3 \end{array}$$

Slika 5: Množenje brojeva 13 i 7

Imamo: $13 \cdot 7 = 10/(-9) = 100 - 9 = 91$.

Pojasnimo oznaku: $10/(-9)$. Upotrebom sutre “Sve od devetke, a zadnju od desetke”, od 10 (tj. od baze) oduzimamo apsolutnu vrijednost umnoška devijacija i dobivamo drugi dio traženog rezultata. Pogledajte sljedeće primjere:

$$\begin{aligned} 8 &= 1/(-2) \\ 97 &= 100 - 3 = 10/(-3) \\ 14/(-6) &= 140 - 6 = 134 \end{aligned}$$

Primjer 5. Pomnožimo 108 s 94.

$$\begin{array}{r} 108 \qquad 08 \\ 94 \qquad -06 \\ \hline 108-06 \quad \text{iii} \quad / \quad 8 \cdot (-6) = 102/(-48) = 10200-48=10152 \\ 94+08 \end{array} \quad (\text{pošto je } 48+52=100)$$

Slika 6: Množenje brojeva 108 i 94

Sljede dokazi tvrdnji za množenje brojeva blizu neke baze, potencije broja 10.

Dokaz:

a) Neka su N_1 i N_2 brojevi blizu baze B , ali oba manja od B . Tada N_1 možemo zapisati kao $N_1 = B - a$, a N_2 kao $N_2 = B - b$, gdje su $-a$ i $-b$ njihove devijacije. Računamo $N_1 \cdot N_2$:

$$\begin{aligned} N_1 \cdot N_2 &= (B - a)(B - b) \\ &= B^2 - Ba - Bb + ab \\ &= B(B - a - b) + ab \\ &= B(N_1 - b) + ab = B(N_2 - a) + ab. \end{aligned}$$

Prvi dio rezultata je zbroj jednog broja s devijacijom drugog, a drugi dio umnožak devijacija.

b) Neka su N_1 i N_2 brojevi blizu baze B , ali oba veća od B . Tada N_1 možemo zapisati kao $N_1 = B + a$, a N_2 kao $N_2 = B + b$, gdje su a i b njihove devijacije. Računanjem $N_1 \cdot N_2$ dobivamo:

$$N_1 \cdot N_2 = B(B + a + b) + ab.$$

c) Neka su N_1 i N_2 brojevi blizu baze B , ali neka je npr. N_1 veći od B , a N_2 manji od B . Sličnim računanjem dobije se:

$$(B + a)(B - b) = B(B + a - b) - ab.$$

2.2. Sa jedan više od prethodnog

Upotrebom sutre "Sa jedan više od prethodnog", možemo u jednom retku kvadrirati brojeve koji završavaju s 5. Želimo li kvadrirati 35, to možemo napraviti u dva koraka. Prvi je uočiti znamenku ispred 5 (ona koja prethodi 5), u ovom slučaju to je 3. Po formuli "Sa jedan više od prethodnog", tu uočenu znamenku pomnožimo ("sa" u formulama znači pomnožiti) s njezinim sljedbenikom (tj. s brojem koji je za jedan veći), a u drugom koraku samo nadopišemo 25. U jednom retku to bi izgledalo:

$$35^2 = (3 \cdot 4)/25 = 1225$$

Želimo li kvadrirati troznamenasti broj koji završava s 5 opet radimo slično samo što uočimo dvije znamenke ispred 5.

Tvrđnja 1. *Kvadrat dvoznamenkastog broja $\overline{a5}$ koji završava s 5 je broj*

$$a(a + 1)/25.$$

Dokaz: Neka je zadani dvoznamenkasti broj oblika $\overline{a5}$, gdje je a iz skupa $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Tada se broj $\overline{a5}$ može zapisati kao $10a + 5$. Kvadriramo li taj izraz dobivamo:

$$(10a + 5)^2 = 100a^2 + 100a + 25 = 100a(a + 1) + 25.$$

Uočite da umnožak $100a(a+1)$ odgovara prvom koraku, a 25 drugom. ■

Napomena 1. Slično možemo računati kvadrat troznamenkastog broja koji završava s 5. Troznamenkasti broj $\overline{ab5}$ zapišemo u obliku: $100a+10b+5$ te kvadriramo i dobivamo kao rezultat: $(\overline{ab} \cdot (\overline{ab} + 1))/25$.

Postoji poseban način kako brzo pomnožiti dvoznamenkaste brojeve kojima je znamenka desetica jednaka, a zbroj znamenki jedinica jednak 10.

Primjer 6. Želimo pomnožiti 32 s 38. Brojevi odgovaraju uvjetu. Prvi korak je da znamenku desetica pomnožimo s njezinim sljedbenikom (što daje broj stotica umnoška), a drugi korak je umnožak znamenki jedinica (što daje broj desetica i jedinica umnoška). U jednom retku:

$$32 \cdot 38 = (3 \cdot 4)/(2 \cdot 8) = 1216$$

Primjer 7. Želimo pomnožiti 81 s 89. Rezultat je u jednom retku:

$$81 \cdot 89 = (8 \cdot 9)/0(1 \cdot 9) = 7209$$

Uočite da smo dodali 0 jer drugi korak uvijek treba imati dvije znamenke.

Tvrđnja 2. Neka su zadani dvoznamenkasti brojevi oblika \overline{ab} i \overline{ac} tako da vrijedi $b+c=10$. Tada je njihov umnožak jednak $a(a+1)/bc$.

Dokaz: Neka su zadani dvoznamenkasti brojevi oblika \overline{ab} i \overline{ac} tako da vrijedi $b+c=10$. Broj \overline{ab} možemo pisati kao $10a+b$, a broj \overline{ac} kao $10a+c$. Sada računamo njihov umnožak:

$$\begin{aligned} \overline{ab} \cdot \overline{ac} &= (10a+b)(10a+c) = 100a^2 + 10ac + 10ab + bc = \\ &= 100a^2 + 10a(b+c) + bc = 100a^2 + 100a + bc = 100a(a+1) + bc. \end{aligned}$$

Uočite da umnožak $100a(a+1)$ odgovara prvom koraku (imamo $a(a+1)$ stotica), a umnožak bc drugom (što daje bc desetica i jedinica). Dakle, drugi dio mora imati dvije znamenke (zato smo u primjeru (7) stavili 0). ■

2.3. Okomito i dijagonalno

Evo kako brzo množimo proizvoljne dvoznamenkaste brojeve pomoću sutre "Okomito i dijagonalno". Želimo li pomnožiti 21 s 23, napišemo ili zamislimo 23 ispod 21:

$$\begin{array}{r} 21 \\ 23 \end{array}$$

Rezultat dobivamo u tri koraka (slika 7):

1. okomito pomnožimo lijeve znamenke (desetice) : $2 \cdot 2 = 4$. Tako dobivamo prvu znamenku (znamenke) rezultata.
2. dijagonalno pomnožimo i zbrojimo: $2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 = 8$. Ovako dobivamo srednju znamenku (znamenke) rezultata.

3. okomito pomnožimo desne znamenke (jedinice) : $1 \cdot 3 = 3$. Ovo daje zadnju znamenku (znamenke) rezultata.

$$\begin{array}{r}
 2 \quad \quad 1 \\
 | \quad \quad | \\
 2 \quad \quad 3 \\
 \hline
 2 \cdot 2 \ / \ 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \ / \ 1 \cdot 3 \\
 \hline
 4 \ / \ 8 \quad / \ 3 \quad = 483
 \end{array}$$

Slika 7: Množenje brojeva 21 i 23

- Primjer 8.** Pomnožimo 61 s 31. Napišemo ili zamišljamo brojeve kao na slici
8. Umnožak $61 \cdot 63$ je jednak $(6 \cdot 3)/(6 \cdot 1 + 1 \cdot 3)/(1 \cdot 1) = 18/9/1 = 1891$.

$$\begin{array}{r}
 6 \quad \quad 1 \\
 | \quad \quad | \\
 3 \quad \quad 1 \\
 \hline
 6 \cdot 3 \ / \ 6 \cdot 1 + 1 \cdot 3 \ / \ 1 \cdot 1 \\
 \hline
 18 \ / \ 9 \quad / \ 1 \quad = 1891
 \end{array}$$

Slika 8: Množenje brojeva 61 i 31

Pogledajmo sljedeći primjer:

Primjer 9. Pomnožimo 21 s 26 (slika 9).

Isti je postupak kao u primjeru (8), samo što smo u drugom koraku dobili dvoznamenkasti broj pa trebamo prenijeti **1** broju iz prvog koraka: 4 se povećava na 5.

Može se dogoditi da imamo više prijenosa kao što pokazuje sljedeći primjer.

Primjer 10. Pomnožimo 33 s 44 (slika 10).

Lijevi okomiti umnožak je 12, dijagonalni je 24, a desni vertikalni je 12, a zbog prijenosa koji se gleda od desno na lijevo dobiva se: 2 u trećem dijelu, 5 u drugom dijelu (jer je 24 dodana jedinica od 12, pa se dobilo 25), a 14 u prvom dijelu jer je 12 dodana dvojke od 25, tj. dobije se 1452.

Napomena 2. Jednostavan dokaz množenja dva dvoznamenkasta broja \overline{ab} i \overline{cd} na gornji način proizlazi iz sljedećeg: $(10a + b)(10c + d) = 100ac + 10(ad + bc) + bd$. Rezultat će se sastojati od 3 dijela: ac stotica, $ad + bc$ desetica i bd jedinica. Jednostavno možemo i kvadrirati dvoznamenkaste brojeve \overline{ab} :

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{cc}
 2 & 1 \\
 | & | \\
 2 & 6
 \end{array} \\
 \hline
 2 \cdot 2 \ / \ 2 \cdot 6 + 1 \cdot 2 \ / \ 1 \cdot 6 \\
 \hline
 4 \ / \ 14 \ / \ 6 \\
 \hline
 5 \ / \ 4 \ / \ 6 = 546
 \end{array}$$

Slika 9: Množenje brojeva 21 i 26

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{cc}
 3 & 3 \\
 | & | \\
 4 & 4
 \end{array} \\
 \hline
 3 \cdot 4 \ / \ 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \ / \ 3 \cdot 4 \\
 \hline
 12 \ / \ 24 \ / \ 12 \\
 \hline
 14 \ / \ 5 \ / \ 2
 \end{array}$$

Slika 10: Množenje brojeva 33 i 44

$$\overline{ab}^2 = (10a + b)^2 = 100a^2 + 10 \cdot 2ab + b^2.$$

Rezultat će se sastojati od 3 dijela: a^2 stotica, $2ab$ desetica i b^2 jedinica. Uočite da se kvadrat dvoznamenkastog broja može riječima opisati na sljedeći način: prva znamenka na kvadrat, dvostruka prva puta druga znamenka, druga znamenka na kvadrat. Zvuči poznato, zar ne?

Primjer 11. *Kvadrirajmo 38, 29 i 87. Uočimo prijenose!*

Rezultat se sastoji od tri dijela:

$$38^2 = 3^2/2 \cdot 3 \cdot 8/8^2 = 9/48/64 = 14/4/4 = 1444;$$

$$29^2 = 2^2/2 \cdot 2 \cdot 9/9^2 = 4/36/81 = 8/4/1 = 841;$$

$$87^2 = 8^2/2 \cdot 8 \cdot 7/7^2 = 64/112/49 = 75/6/9 = 7569.$$

Brzo možemo množiti troznamenkaste brojeve s istom stoticom i to u tri koraka:

1. pomnožiti stotice

2. zbrojiti preostale dvije znamenke pa zbroj pomnožiti sa stoticama
3. pomnožiti preostale dvije znamenke

Evo ilustrirajućeg primjera:

Primjer 12. $203 \cdot 211 = (2 \cdot 2) / ((3 + 11) \cdot 2) / (3 \cdot 11) = 4/28/33 = 42833$.

Zaključak

U ovom radu predstavljen je samo mali dio onoga što se može kreativnije i brže izračunati upotrebom sutri vedske matematike. Izračunati umnožak dva dvoznamenkasta broja i to napamet za samo nekoliko sekundi - nije li to praktično? Ovakvim mentalnim računanjem vizualiziramo problem, malo napregnemo vijuge i ne trebamo koristiti kalkulator jer ga već imamo, samo ga trebamo znati koristiti. Sutre na nama neobičan način omogućuju računanje, no one su samo drugi pogled na isti problem. Kroz dokaze u radu vidi se da manipulacijom algebarskih izraza, koji koriste samo računске operacije i formulu za kvadrat zbroja, možemo u nekoliko kratkih koraka vrlo brzo, bez papira i kalkulatora izračunati kvadrate brojeva, umnožak brojeva i još mnoštvo drugih stvari. Naravno, preduvjet svemu tome je da znamo računati s malim brojevima.

3. Zadaci za vježbu

Zadatak 1. *Dokažite postupak računanja množenja dva troznamenkasta broja s istom stoticom.*

Zadatak 2. *Pomoću sutre "Okomito i dijagonalno" napamet pomnožite sljedeće brojeve:*

$$37 \text{ i } 12; \quad 24 \text{ i } 41; \quad 35 \text{ i } 86.$$

Literatura

- [1] <http://vedicmaths.org/Introduction/Tutorial/Tutorial.asp>
- [2] http://en.wikipedia.org/wiki/Vedic_mathematics
- [3] <http://www.vedamu.org/Mathematics/course.asp>
- [4] <http://www.esnips.com/doc/699a92f8-58ff-4906-98e9-bd570c4585eb/Vedic-Mathematics.pdf>
- [5] http://hr.wikipedia.org/wiki/Vedska_matematika