Ристо Малчески

ФУНКЦИИТЕ $[x]$ И $\{x\}$

Во оваа статија ќе ги разгледаме функциите цел дел и дробен дел, кои имаат голема примена во теоријата на броеви и воопшто во математиката.

Дефиниција 1. Функцијата $[\cdot]:\mathbf{R}\to\mathbf{Z}$ определена со: ако x е меѓу последователните цели броеви k и $k+1$, т.е. $k\le x<k+1$, тогаш $[x]=k$ ја нарекуваме *цел дел од* x.

Пример 1. Ако $\mathrm{NZD}(a,4)=1$, тогаш $[\frac{a}{4}]+[\frac{2a}{4}]+[\frac{3a}{4}]=\frac{3a-3}{2}$. Докажи!

Решение. Од условот во задачата имаме $a=4q+1$ или $a=4q+3$. Во првиот случај

$$[\tfrac{a}{4}]+[\tfrac{2a}{4}]+[\tfrac{3a}{4}]=q+2q+3q=6q=\tfrac{3a-3}{2}.$$

Во вториот случај

$$[\tfrac{a}{4}]+[\tfrac{2a}{4}]+[\tfrac{3a}{4}]=q+(2q+1)+(3q+2)=6q+3=\tfrac{3a-3}{2}. \blacksquare$$

Пример 2. Докажи дека $[\frac{4}{p}]+[\frac{6}{p}]+\dots+[\frac{2(p-1)}{p}]=[\frac{p+1}{4}]$, каде p е непарен прост број.

Решение. За $p=3$ точноста на тврдењето е очигледна. Ако $p>3$, тогаш $p=4n+1$ или $p=4n+3$. Бидејќи $[\frac{4}{p}]=0$ и $[\frac{2(p-1)}{p}]=[1+\frac{p-2}{p}]=1$, добиваме дека во збирот од левата страна имаме само нули и единици, при што собираме $\frac{p-1}{2}$ броеви.

За да го определиме бројот на нулите од левата страна доволно е во собирокот од облик $[\frac{2\cdot 2x}{p}]=[\frac{4x}{p}]$ да ставиме $4x<p$ или $x<\frac{p}{4}$. Значи, $x=[\frac{p}{4}]$. Според тоа, бројот на собраните единици е $\frac{p-1}{2}-[\frac{p}{4}]$, т.е. n ако $p=4n+1$ или $n+1$ ако $p=4n+3$. Но, $[\frac{p+1}{4}]$ е еднаков на n ако $p=4n+1$ или $n+1$ за $p=4n+3$. $\blacksquare$

Дефиниција 2. Функцијата $\{\cdot\}:\mathbf{R}\to[0,1)$ определена со $\{x\}=x-[x]$ ја нарекуваме *дробен дел од* x.

Пример 3. Докажи дека сите броеви $\{10^n\sqrt{2}\}, n=0,1,...$ се различни меѓу себе.

Решение. Нека $\{10^p\sqrt{2}\}=\{10^q\sqrt{2}\}$, $p\neq q$ и нека $\sqrt{2}=1{,}d_1d_2d_3...$ е децималниот запис на бројот $\sqrt{2}$. Од претходното равенство следува $d_{n+p}=d_{n+q}$, за $n=1,2,3,...$. Според тоа, $\sqrt{2}$ има мешовит периодичен децимален запис со периода $|p-q|$, што не е можно, бидејќи $\sqrt{2}$ е ирационален број. ■

Теорема 1. Нека x и y се реални броеви. Тогаш

а) $[x]\leq x<[x]+1$, $x-1<[x]\leq x$, $0\leq x-[x]<1$

б) $[x]+[-x]=\begin{cases}0, & \text{ако } x \text{ е цел број,}\\ -1, & \text{ако } x \text{ не е цел број.}\end{cases}$

в) $[x+m]=[x]+m$, ако m е цел број.

г) $[x]+[y]\leq[x+y]\leq[x]+[y]+1$.

д) $[x-y]\leq[x]-[y]\leq[x-y]+1$.

ѓ) $[x][y]\leq[xy]\leq[x][y]+[x]+[y]$, ако $x,\ y\geq 0$.

е) $[\frac{[x]}{m}]=[\frac{x}{m}]$, ако m е природен број.

ж) $[\sqrt{[x]}]=[\sqrt{x}]$, ако $x\geq 0$.

Доказ. а) Секој дел од тврдењето следува од дефиниција 1.

б) Ако x е цел број, тогаш $[-x]=-[x]$. Ако x не е цел број, тогаш од $[-x]=y$ следува $-y-1<x<-y$ или $[x]=-y-1$ и $[-x]=-[x]-1$.

в) Од а) следува дека

$$x+m-1<[x+m]\leq x+m \text{ и } x+m-1<[x]+m\leq x+m.$$

Бидејќи $[x+m]$ и $[x]+m$ се цели броеви, од претходните две неравенства следува $[x+m]=[x]+m$.

г) Нека $x=n+\sim$, $y=m+\ $, каде $m,n\in\mathbf{Z}$ и $0\leq\sim,\ \ <1$. Тогаш

$$[x]+[y]=m+n\leq[n+\sim+m+\ \ ]==[x+y]$$

$$=m+n+[\sim+\ \ ]\leq n+m+1=[x]+[y]+1$$

д) Според г) имаме

$$[x-y]+[y]\leq[(x-y)+y]\leq[x-y]+[y]+1,$$

т.е.

$$[x-y]\leq[x]-[y]\leq[x-y]+1.$$

ѓ) Според а) имаме $[x][y]\leq xy<([x]+1)([y]+1)$. Значи,

$$[x][y]\leq[xy]\leq([x]+1)([y]+1)-1=[x][y]+[x]+[y].$$

е) Нека $x=n+\sim$, $n=qm+r$, $0\leq\sim<1$, $0\leq r<m-1$. Имаме

$$[\frac{x}{m}]=[\frac{qm+r+\sim}{m}]=q+[\frac{r+\sim}{m}]=q\ . \qquad (1)$$

Од друга страна, бидејќи $0\le r+\sim<m$ добиваме

$$[\frac{[x]}{m}]=[\frac{n}{m}]=[q+\frac{r}{m}]=q\ . \qquad (2)$$

Конечно, од (1) и (2) следува $[\frac{[x]}{m}]=[\frac{x}{m}]$.

ж) Бидејќи $x\ge 0$, x може да се запише во облик $x=n^2+r+\{x\}$ каде n и r се ненегативни цели броеви, $0\le r\le 2n$. Тогаш,

$$[\sqrt{[x]}]=[\sqrt{n^2+r}]=[\sqrt{n^2+r}-n+n]=n+[\sqrt{n^2+r}-n]=n+[\frac{r}{\sqrt{n^2+r}+n}]=n.$$

Слично,

$$[\sqrt{x}]=[\sqrt{n^2+r+\{x\}}-n+n]=n+[\sqrt{n^2+r+\{x\}}-n]=n+[\frac{r+\{x\}}{\sqrt{n^2+r+\{x\}}+n}]=n$$

бидејќи $0\le r+\{x\}<2n<\sqrt{n^2+r+\{x\}}+n$. Значи, $[\sqrt{[x]}]=[\sqrt{x}]$. ■

Лема 1. За секој $x\in\mathbf{R}$ важи

$$[x+\frac{1}{2}]=[2x]-[x]. \qquad (3)$$

Доказ. Секој реален број x може да се запише во облик $x=k+\sim$ или $x=k+\frac{1}{2}+\sim$ каде што $k\in\mathbf{Z}$ и $0\le\sim<\frac{1}{2}$.

Ако $x=k+\sim$, тогаш

$$[k+\sim+\frac{1}{2}]=k\ ;\ [2k+2\sim]=2k\ ;\ [k+\sim]=k\ ,$$

па затоа точно е равенството (3). Ако $x=k+\sim+\frac{1}{2}$, тогаш

$$[k+\sim+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}]=k+1;\ [2k+2\sim+1]=2k+1\ ;\ [k+\sim+\frac{1}{2}]=k\ ,$$

па затоа точно е равенството (3). ■

Пример 4. Нека $n\in\mathbf{N}$. Пресметај го збирот

$$[\frac{n+1}{2}]+[\frac{n+2}{2^2}]+[\frac{n+2^2}{2^3}]+...+[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}]+...\ .$$

Решение. *Прв начин.* Од лема 1 следува

$$[\frac{n+1}{2}]+[\frac{n+2}{2^2}]+[\frac{n+2^2}{2^3}]+...+[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}]+...=[\frac{n}{2}+\frac{1}{2}]+[\frac{n}{4}+\frac{1}{2}]+....+[\frac{n}{2^{k+1}}+\frac{1}{2}]+...$$

$$=[n]-[\frac{n}{2}]+[\frac{n}{2}]-[\frac{n}{4}]+...+[\frac{n}{2^k}]-[\frac{n}{2^{k+1}}]+..=n,$$

бидејќи почнувајќи од $k=[\log_2 n]+1$ сите собироци во разгледуваниот збир се еднакви на 0.

Втор начин. Нека $n = \overline{x_m x_{m-1} ... x_1 x_0} = \sum_{k=o}^{m} 2^i x_i$, $x_i \in \{0,1\}$

е запис на бројот n во бинарен броен систем. Тогаш

$$[\tfrac{n+2^k}{2^{k+1}}] = \begin{cases} \overline{x_m x_m .... x_{k+1}} + x_k , & \text{ако } k > m, \\ x_m , & \text{ако } k = m, \\ 0 , & \text{ако } k > m. \end{cases}$$

Ако го искористиме претходното равенство, добиваме:

$$\sum_{k=0}^{\infty} [\tfrac{n+2^k}{2^{k+1}}] = (\overline{x_m x_{m-1} ... x_1} + x_o) + (\overline{x_m x_{m-1} ... x_2} + x_1) + ... + (x_m + x_{m-1}) + x_m$$

$$= x_m (2^{m-1} + ... + 2^1 + 2^0 + 1) + x_{m-1}(2^{m-2} + ... + 2^1 + 2^0 + 1) + ... + x_1(2^0 + 1) + x_0$$

$$= 2^m x_m + 2^{m-1} x_{m-1} + ... + 2x_1 + x_o = n,$$

што и требаше да се докаже. ■

Лема 2. Ако $n \in \mathbf{N}$ и $x \geq 0$, тогаш постојат точно $[\frac{x}{n}]$ природни броеви помали или еднакви на x, деливи со n.

Доказ. Броеви деливи со n се: $n, 2n, 3n, ...$. Нека има j природни броеви помали или еднакви на x, деливи со n. Тогаш

$$jn \leq x < (j+1)n , \text{ т.е. } j \leq \tfrac{x}{n} < j+1 .$$

Според тоа, $j \leq [\frac{x}{n}] < j+1$, односно $[\frac{x}{n}] = j$. ■

Теорема 2. Нека p е прост број, n е природен број и a е најголемиот степен на бројот p таков што $p^a \mid n!$. Тогаш,

$$a = [\tfrac{n}{p}] + [\tfrac{n}{p^2}] + ... + [\tfrac{n}{p^k}] + ... \qquad (4)$$

Доказ. Според лема 2 во низата $1, 2, ..., n$ има $[\frac{n}{p}]$ броеви деливи со p , па затоа

$$n! = p \cdot 2p \cdot ... \cdot [\tfrac{n}{p}] p M_1 = p^{[n/p]} \cdot [\tfrac{n}{p}]! \cdot M_1$$

и M_1 е природен број кој не е делив со p .

Ако претходното размислување го примениме на низата $1, 2, ..., [\frac{n}{p}]$ и ако земеме во предвид дека $[\frac{[n/p]}{p}] = [\frac{n}{p^2}]$, добиваме дека

$$n! = p^{[n/p] + [n/p^2]} \cdot [\tfrac{n}{p^2}]! \cdot M_2$$

и M_2 е природен број кој не е делив со p.

Продолжувајќи ја постапката добиваме дека

$$n! = Mp^{[n/p]+[n/p^2]+[n/p^3]+\dots}$$

каде M е природен број кој не е делив со p, што значи дека точно е равенството (2). ■

Забелешка 1. Постапката во претходниот доказ ќе заврши после конечен број чекори, бидејќи простиот број p е конечен број пати е делител на природниот број $n!$.

Пример 5. На колку нули завршува бројот $1993!$?

Решение. Ако N е бараниот број нули, тогаш е $1993! = 10^N M, M$ е природен број кој не е делив со 10. Бидејќи $10 = 2\cdot 5$ добиваме $N = \min\{N_1, N_2\}$, каде

$$N_1 = [\frac{1993}{5}] + [\frac{1993}{5^2}] + [\frac{1993}{5^5}] + [\frac{1993}{5^4}] + [\frac{1993}{5^5}] + \dots = 495 \text{ и}$$

$$N_1 = [\frac{1993}{2}] + [\frac{1993}{2^2}] + [\frac{1993}{2^3}] + \dots + [\frac{1993}{2^{10}}] + [\frac{1993}{2^{11}}] + \dots = 1986 .$$

Значи, $N = 495$, т.е. бројот $1993!$ завршува на 495 нули. ■

Пример 6. Ако $a+b+\dots+m \le n; n,a,b,\dots,m \in \mathbf{N}$, тогаш $\frac{n!}{a!b!\dots m!} \in \mathbf{N}$. Докажи!

Решение. Според теорема 2 простиот број p учествува во каноничното разложување на броевите $n!, a!, b!, \dots, m!$ соодветно со степени

$$[\frac{n}{p}] + [\frac{n}{p^2}] + \dots + [\frac{n}{p^k}] + \dots$$

$$[\frac{a}{p}] + [\frac{a}{p^2}] + \dots + [\frac{a}{p^k}] + \dots$$

$$[\frac{b}{p}] + [\frac{b}{p^2}] + \dots + [\frac{b}{p^k}] + \dots$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$[\frac{m}{p}] + [\frac{m}{p^2}] + \dots + [\frac{m}{p^k}] + \dots$$

Според тоа, ако p е прост број, тогаш од теорема 2 следува дека за степените во каноничните разложувања на именителот и броителот на дропката $\frac{n!}{a!b!\dots m!}$ важи

$$([\frac{a}{p}] + [\frac{a}{p^2}] + \dots + [\frac{a}{p^k}] + \dots) + ([\frac{b}{p}] + [\frac{b}{p^2}] + \dots + [\frac{b}{p^k}] + \dots) + \dots + ([\frac{m}{p}] + [\frac{m}{p^2}] + \dots + [\frac{m}{p^k}] + \dots) =$$

$$= ([\frac{a}{p}] + [\frac{b}{p}] + \dots + [\frac{m}{p}]) + ([\frac{a}{p^2}] + [\frac{b}{p^2}] + \dots + [\frac{m}{p^2}]) + \dots + ([\frac{a}{p^k}] + [\frac{b}{p^k}] + \dots + [\frac{m}{p^k}])$$

$$\leq ([\frac{a}{p}+\frac{b}{p}+...+\frac{m}{p}])+([\frac{a}{p^2}+\frac{b}{p^2}+...+\frac{m}{p^2}])+...+([\frac{a}{p^k}+\frac{b}{p^k}+...+\frac{m}{p^k}])$$

$$\leq [\frac{n}{p}]+[\frac{n}{p^2}]+...+[\frac{n}{p^k}]+...$$

т.е. степенот на простиот број p во каноничното разложување на именителот е помал или еднаков од степенот на простиот број p во каноничното разложување на броителот. Ова важи за секој прост број, па затоа

$$\frac{n!}{a!b!...m!}=\frac{p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_t^{\alpha_t}}{p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}...p_t^{\beta_t}}=p_1^{\alpha_1-\beta_1}p_2^{\alpha_2-\beta_2}...p_t^{\alpha_t-\beta_t},\ \ 0\leq\beta_i\leq\alpha_i,\text{ за } i=1,2,...,t,$$

т.е. $\frac{n!}{a!b!...m!}\in\mathbf{N}$. ■

Лема 3. Ако $a,b\in\mathbf{R}^+$. Тогаш

$$[2a]+[2b]\geq[a]+[b]+[a+b]$$

Доказ. Нека $a=[a]+\alpha$ и $b=[b]+\beta$, каде што $0\leq\alpha<1$ и $0\leq\beta<1$.

Ако $\alpha+\beta<1$, тогаш $[a+b]=[a]+[b]$ и затоа

$$[2a]+[2b]\geq 2[a]+2[b]=[a]+[b]+[a+b]$$

Ако $\alpha+\beta\geq1$, тогаш $2\alpha\geq1$ или $2\beta\geq1$. Нека $2\alpha\geq1$. Тогаш

$$[a+b]=[a]+[b]+1 \text{ и } [2a]=2[a]+1,$$

па затоа

$$[2a]+[2b]\geq 2[a]+1+2[b]=[a]+[b]+[a+b].\ ■$$

Пример 7. Докажи дека $\frac{(2m)!(2n)!}{m!n!(m+n)!}\in\mathbf{N}$, за секои $m,n\in\mathbf{N}$.

Решение. Ќе докажеме дека максималниот степен на произволен прост број p со кој е делив броителот на дадената дропка, не е помал од максималниот степен на бројот p со кој е делив именителот на дадената дропка. Нека p е прост број. Од теорема 2, следува дека степенот на бројот p во броителот на дропката е

$$s=[\frac{2n}{p}]+[\frac{2n}{p^2}]+[\frac{2n}{p^3}]+...+[\frac{2m}{p}]+[\frac{2m}{p^2}]+[\frac{2m}{p^3}]+...,$$

а степенот на бројот p во именителот е

$$t=[\frac{n}{p}]+[\frac{n}{p^2}]+[\frac{n}{p^3}]+...+[\frac{m}{p}]+[\frac{m}{p^2}]+[\frac{m}{p^3}]+...+[\frac{m+n}{p}]+[\frac{m+n}{p^2}]+[\frac{m+n}{p^3}]+....$$

Сега тврдењето на задачата следува од лема 3, за $a=\frac{n}{p^k}$, $b=\frac{m}{p^k}$, $k=1,2,...$. ■

Задачи за самостојна работа

1. Докажи дека постојат бесконечно многу природни броеви n такви што $\sqrt{n}$ не е цел број, и n е делив со $[\sqrt{n}]$.
2. Докажи дека $x+[\frac{n}{x}]\geq 2[\sqrt{n}]$, за секои $x,n\in\mathbf{N}$.
3. Докажи дека важи $[a[na]]+1=[na^2]$, за секој $n\in\mathbf{N}$ и $a=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
4. Кој е степеновиот показател на простиот број p во каноничното разложување на $p^n!$?
5. Докажи, дека ако $\frac{p}{q}$, $p,q\in\mathbf{N}$ не е цел број, тогаш $\frac{p}{q}\geq[\frac{p}{q}]+\frac{1}{q}$.
6. Докажи, дека за секој реален број a и за секој природен број n важи
$$n[a]\leq[na]\leq n[a]+n-1.$$
7. Докажи дека $\frac{(ab)!}{a!(b!)^a}$ е природен број, за секои $a,b\in\mathbf{N}$.
8. Докажи дека за секој позитивен број x важи $[\sqrt{[\sqrt{x}]}]=[\sqrt{\sqrt{x}}]$.
9. а) Дади пример на број a таков што $\{a\}+\{\frac{1}{a}\}=1$.

   б) Докажи, дека таков број a не може да биде рационален.
10. Докажи,
$$[\frac{a}{m}]+[\frac{2a}{m}]+...+[\frac{(m-1)a}{m}]=\frac{(m-1)(a-1)}{2}\text{, ако } m\geq 2, a\geq 2 \text{ и } \mathrm{NZD}(a,m)=1 .$$
11. Докажи дека $\sum\limits_{k=0}^{n-1}[x+\frac{k}{n}]=[nx]$, за секој $n\in\mathbf{N}$ и за секој $x\in\mathbf{R}$.
12. Докажи дека $\sum\limits_{k=1}^{n^2-1}[\sqrt{k}]=\frac{1}{6}(n-1)n(4n+1)$, за секој $n\in\mathbf{N}$.
13. Докажи дека, ако n е природен број поголем од 1, за кој важи
$$[\frac{n}{1}]+[\frac{n}{2}]+...+[\frac{n}{n}]=2+[\frac{n-1}{1}]+[\frac{n-1}{2}]+\ldots+[\frac{n-1}{n-1}],$$
тогаш n е прост број.
14. Пресметај ги збировите:

    а) $\sum\limits_{k=1}^{n^2+2n}k[\sqrt{k}]$, б) $\sum\limits_{k=1}^{n^2}\frac{n-[\sqrt{k-1}]}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}}$.
15. Нека $0\leq x<1$. Докажи дека $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[2^k x]}}{2^k}=1-2x$.

16. Низата $\{a_n\}$, $n=1,2,\ldots$ е дефинирана со: n-тиот член на оваа низа е последната цифра на бројот $[\sqrt{10^n}]$, за $n=1,2,\ldots$. Дали оваа низа е периодична?
17. Дали постои природен број n таков што дробниот дел на бројот $(2+\sqrt{2})^n$ е поголем од 0,999999?
18. Докажи дека за секој природен број n, бројот $[(2-\sqrt{3})^n]$ е непарен природен број.

Статијата прв пат е објавена во списанието СИГМА на Сојузот на математичарите на Македонија