А. Малчески, Скопје
Р. Малчески, Скопје

РАЗБИВАЊЕ НА БРОЕВИ

Во оваа статија ќе ги разгледаме претставувањата на даден природен број како збир на други природни броеви. За таа цел, најпрво ќе ги разгледаме основните комбинаторни принципи и основните комбинаторни конфигурации.

1. ВОВЕДНИ ПОИМИ

Дефинција 1. За непразното множество A ќе велиме дека е конечно, ако за некој природен број n постои биекција $f:\{1,2,...,n\} \to A$. Притоа, ќе велиме дека множеството A содржи n елементи или едноставно дека A е n-множество. Бројот на елементите на A го означуваме со $|A|$.

За непразното множество A ќе велиме дека е бесконечно, ако тоа не е конечно.

Следните тврдења ќе го презентираме без доказ.

Лема 1. Две непразни конечни множества A и B имаат еднаков број елементи ако и само ако постои биекција $f: A \to B$.

Лема 2. Ако A е конечно множество такво што важи равенството $A = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n$, каде $A_k \cap A_j = \varnothing$, за $k \neq j$, тогаш $|A| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|$.

Лема 3. Ако множествата $A_1,...,A_n$ содржат $k_1,...,k_n$ елементи, соодветно, тогаш Декартовиот производ $A_1 \times ... \times A_n$ е $k_1 k_2 ... k_n$-множество, т.е. $|A_1 \times A_2 \times ... \times A_n| = |A_1||A_2|...|A_n|$.

Специјално, ако $|A| = m$, тогаш $\left|A^n\right| = |A|^n = m^n$.

2. ОСНОВНИ КОМБИНАТОРНИ КОНФИГУРАЦИИ

Дефиниција 2. $k-$варијација на елементи на $n-$множество A е подредена k-торка елементи на множеството A, т.е. елемент на множеството A^k.

Лема 4. Бројот на $k-$варијациите на $n-$множеството A еднаков е на n^k.

Доказ. Непосредно следува од лема 3.

Пример 1. Тикет за спортска прогноза содржи 13 парови фудбалски екипи, кои меѓусебно играат по еден натпревар. Прогнозерот покрај секој пар запишува еден од броевите 0, 1 или 2, кои соодветно означуваат нерешен резултат, победа на домашната екипа или победа на гостинската екипа. На колку начини прогнозерот може да ги прогнозира сите 13 резултати.

Решение. Прогнозирајќи ги сите резултати прогнозерот запишува 13-варијација на 3-множеството $\{0,1,2\}$. Според лема 4, прогнозерот може да ги прогнозира сите 13 резултати на $3^{13} = 1594323$ начини.

Дефиниција 3. Нека претпоставиме дека $k \le n$. $k-$варијација без повторување на елементите на n-множеството A е $k-$торка различни елементи на множеството A.

Лема 5. Нека $k \le n$. Бројот на $k-$варијациите без повторување од елементите на n-множеството A е $n(n-1)...(n-k+1)$.

Доказ. Во $k-$торката $(a_1,\dots,a_k)$ различни елементи на n-множеството A, првиот член a_1 можеме да го избереме од n-те елементи на A, вториот член a_2 може да биде било кој елемент од $(n-1)-$множеството $A\setminus\{a_1\}$, итн. $k-$от член a_k може да биде било кој елемент од $(n-k+1)-$множеството

$$A\setminus\{a_1,a_2,...,a_{k-1}\}.$$

Според лема 3 бројот k-торки различни елементи на n-множеството A е $n(n-1)(n-2)...(n-k+1)$.

Пример 2. На колку начини од 25 луѓе можат да се распоредат 5 на 5 работни места R_1, R_2, R_3, R_4, R_5.

Решение. Бројот на можните распореди на 5 од 25 лица на 5 работни места R_1, R_2, R_3, R_4, R_5 е еднаков на бројот на 5-варијациите без повторување од елементите на множеството $\{1,2,...,24,25\}$ т.е. на

$$25\cdot 24\cdot 23\cdot 22\cdot 21 = 6375600.$$

Дефиниција 4. Пермутација на n-множеството A е n-варијација без повторување на елементите на n-множеството A.

Лема 6. Бројот на пермутациите на n-множеството A е еднаков на $n!$.
Доказ. Непосредно следува од лема 5.

Пример 3. На колку начини можеме да ги распоредиме во низа буквите a,b,c,d,e,i,j,k,o ,така што на првите четири места да се наоѓаат самогласките.

Решение. Самогласките a,e,i,o на првите четири места можеме да ги распоредиме на 4! начини, а согласките b,c,d,j,k на 5! начини, па затоа вкупниот број на распореди е еднаков на $4!\cdot 5! = 2880$.

Дефиниција 5. Нека $k \le n$. $k-$комбинација на елементите од n-множеството A е $k-$подмножество на множеството A.

Лема 7. Бројот на $k-$комбинациите од елементите на n-множеството A е еднаков на

$$\frac{n!}{k!(n-k)!}=\binom{n}{k}.$$

Доказ. Нека е S_1 множеството од сите k – варијации без повторување на n-множеството A. Од лема 5 следува дека множеството S_1 содржи $n(n-1)(n-2)...(n-k+1)$ елементи. Дефинираме функција

$$f:S_1 \to S_2$$

на следниот начин: на k – варијацијата без повторување $x=(a_1,...,a_k)\in S_1$ и ја придружуваме k – комбинацијата $f(x)=\{a_1,a_2,...,a_k\}\in S_2$. Секој елемент $f(x)\in S_2$ е слика на точно $k!$ елементи на множеството S_1. Според лема 2 имаме $k!|S_2|=|S_1|=n(n-1)...(n-k+1)=\frac{n!}{(n-k)!}$ т.е. $|S_2|=\frac{n!}{k!(n-k)!}=\binom{n}{k}$.

Пример 4. Во едно одделение има 15 ученички и 11 ученици. На колку различни начини може да се избере одделенска заедница од две момчиња и три девојчиња.

Решение. Од 15 ученички, 3 можеме да избереме на $\binom{15}{3}$ начини, а 2 момчиња од 11 можеме да избереме на $\binom{11}{2}$ начини. Значи саканиот избор можеме да го направиме на $\binom{15}{3}\binom{11}{2}=25025$ начини.

Дефиниција 6. Дадено е множеството $A=\{a_1,a_2,...,a_m\}$ за чии елементи важи $a_1<a_2<...<a_m$. Нека $k_1,k_2,\dots,k_m$ се ненегативни цели броеви и $n=k_1+k_2+k_3+...+k_m>0$. n-варијација од елементите на множеството A, која има тип $(k_1,k_2,...,k_m)$ е n-торка елементи на множеството A, во која за секој број $j\in\{1,2,...,m\}$ елементот a_j се појавува k_j пати.

Лема 8. а) Бројот на n-варијации од тип $(k_1,k_2,...,k_m)$ е еднаков на $\frac{n!}{k_1!k_2!...k_m!}$.

б) Бројот на различните типови n-варијации од елементите на m-множество е $\binom{n+m-1}{n}$.

Доказ. а) Нека е $B=\left\{a_1^1,a_1^2,...,a_1^{k_1},...,a_m^1,a_m^2,...,a_m^{k_m}\right\}$, S_1 е множеството на пермутации на множеството B, а S_2 е множеството на оние n-варијации од елементите на множеството A кои имаат тип $(k_1,k_2,...,k_m)$. Множеството

S_1 содржи $(k_1+k_2+...+k_m)!=n!$ елементи. Дефинираме функција $f:S_1\to S_2$ на следниот начин: сликата на пермутацијата $p\in S_1$ е онаа варијација $v\in S_2$ која се добива од пермутацијата p со бришење на горните индекси. Множеството S_1 содржи $k_1!k_2!...k_m!$ пермутации на множеството B, во кои за секој $j\in\{1,2,...,m\}$ елементите $a_j^1,a_j^2,....,a_j^{k_j}$ се наоѓаат на k_j фиксирани места. Според тоа, секој елемент $v\in S_2$ е слика на точно $k_1!k_2!...k_m!$ елементи на множеството S_1, па затоа $|S_2|=\frac{|S_1|}{k_1!k_2!...k_m!}$.

б) Нека $A=\{1,2,...,m\}$, S е множеството од сите $(n+m-1)$ – варијации на елементите на $\{0,1,\ldots,m\}$ кои имаат облик $v=\underbrace{1 1..1}_{k_1}\underbrace{2 2...2}_{k_2}...\underbrace{m m...m}_{k_m}$ и T е множеството од сите типови n-варијации од елементите на m-множество. Секоја варијација $v\in S$ содржи $m-1$ нула и еднозначно е одредена положбата на нулите. Според тоа, множеството S содржи $\binom{m+n-1}{m-1}$ елементи. Функцијата $f:S\to T$ дефинирана со $f(v)=(k_1,...,k_m)$ е биекција, па затоа $|T|=|S|=\binom{n+m-1}{m-1}=\binom{n+m-1}{n}$.

Пример 5. Колку различни зборови можат да се добијат со пермутирање на буквите на зборот ***КОМБИНАТОРИКА***.

Решение. Зборот ***КОМБИНАТОРИКА*** има 13 букви и во него по двапати се појавуваат буквите ***К,О,И,А*** а еднаш буквите ***М,Б,Н,Т,Р***, па затоа бараниот броеј е еднаков на $\frac{13!}{2!2!2!2!}=389188800$.

Дефиниција 7. Нека за елементите на множеството $A=\{a_1,...,a_m\}$ важи $a_1<a_2<\ldots<a_m$. n-комбинација со повторување на елементите на множеството A е n-торка $(f(1),f(2),...,f(n))$, која е одредена со монотоно растечка функција, т.е. функција за која важи $f(1)\le f(2)\le...\le f(n)$

Пример 6. Дадено е множеството $A=\{1,2,3\}$. Постојат точно 10 различни 3-комбинации со повторување на елементите од 3-множеството A. Тоа се

$$111,222,333,112,113,122,133,223,233,123.$$

Лема 9. Бројот на n-комбинациите со повторување од елементите на m-множеството A еднаков е на $\binom{n+m-1}{n}$.

Доказ. Нека за елементите на множеството $A=\{a_1,a_2,...,a_m\}$ важи $a_1<a_2<\ldots<a_m$. Нека K е множеството од n-комбинации со повторување од

елементи на m-множеството A и T е множеството од сите парови на n-варијации од елементи на A. Дефинираме функција $f:K \to T$, која типот $(k_1, k_2, ..., k_m) \in K$ го пресликува во варијацијата

$$\underbrace{a_1 \dots a_1}_{k_1} \underbrace{a_2 \dots a_2}_{k_2} \underbrace{a_3 \dots a_3}_{k_3} \dots \underbrace{a_m \dots a_m}_{k_m}.$$

Функцијата f очигледно е биекција, па од лема 8 следува

$$|T| = |K| = \binom{n+m-1}{n}.$$

Лема 10. Бројот на n-комбинации со повторување на елементите на m-множество A во кое секој елемент се повторува најмалку еднаш е $\binom{n-1}{m-1}$.

Доказ. Нека K е множеството на n-комбинации со повторување од елементите на множеството

$$A = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$$

во кои секој елемент на множеството A се појавува најмалку еднаш, а V е множеството на сите n-варијации од елементите на множеството $A \cup \{0\}$. Дефинираме функција $f:K \to V$ која n-комбинацијата со повторување

$$u = \underbrace{a_1 \dots a_1}_{k_1} \underbrace{a_2 \dots a_2}_{k_2} \underbrace{a_3 \dots a_3}_{k_3} \dots \underbrace{a_m \dots a_m}_{k_m}$$

ја пресликува во

$$v = \underbrace{a_1 \dots a_1}_{k_1 - 1} 0 \dots 0 \underbrace{a_{m-1} \dots a_{m-1}}_{k_{m-1} - 1} \underbrace{a_m \dots a_m}_{k_m}.$$

Функцијата f очигледно е инјекција. Нека $f(K) = \{v = f(u) | \ u \in K\}$. n-варијација $v \in f(K)$ содржи $(m-1)$ – на нула и затоа на n-тото место не е нула. Варијацијата $v \in f(K)$ еднозначно е одредена со положбата на нулите, т.е. со $(m-1)$ – комбинација од елементите на множеството $\{1, 2, ..., n-1\}$. Затоа,

$$|K| = |f(K)| = \binom{n-1}{m-1}.$$

На крајот од овој дел ќе дадеме два занимливи примери, кои ќе ги користиме во натамошните излагања.

Пример 7. Нека се m и n природни броеви. Со S_o да го означиме множеството од сите $(m+n)$-варијации на елементите 0 и 1, кои содржат m нули и n единици. Нека S_1 е множеството од оние варијации од S_o во кои две нули не се соседни, а S_2 множеството од оние варијации од S_1 чиј прв и последен член е 1. Одредете $|S_o|, |S_1|, |S_2|$.

Решение. а) Нека е K множеството m-комбинации на множеството $\{1, 2, ..., m+n\}$ и $f:S_o \to K$ е функција дефинирана со: слика на варијацијата

$v: c_1c_2...c_{m+n} \in S_o$ е онаа комбинација од K која ги содржи индексите на оние членови $c_1c_2\ldots c_{m+n}$ кои се еднакви на нула. Функцијата f очигледно е биекција. Множеството K содржи $\binom{m+n}{m}$ елементи, па значи $|S_o| = \binom{m+n}{m}$.

б) Во секоја варијација на множеството S_1 нули може да има на почетокот (пред секоја единица), меѓу првата и втората единица, итн. меѓу $(n-1)$ – та и n-та единица и после n-та единица, т.е. на вкупно $(n+1)$ – место. Да ги нумерираме тие места со $1,2,\ldots,n+1$. На секоја варијација од S_1 еднозначно и соодветствува m – комбинација од елементи на множеството $1,2,\ldots,n+1$ која содржи редни броеви на оние места на кои стојат нули, и обратно. Затоа, $|S_1| = \binom{n+1}{m}$

в) Аналогно како под (б) добиваме $|S_2| = \binom{n-1}{m}$.

Пример 8. За секој природен број n важи равенството

(1) $$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$$

Докажете!

Решение. Нека $S = \{1,2,...,n\}$, $P(S)$ е партитивното множество на S и T е множеството од сите n варијации на елементите 0 и 1. Тогаш T е 2^n множество. За $k \in \{1,2,...,n\}$ со A_k, $(A_k \subset P(S))$ да го означиме множеството од сите k – комбинации на множеството S. Имаме,

$$|P(S)| = \sum_{k=0}^{n} |A_k| = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.$$

Дефинираме функција $f: P(S) \to T$ со: за $X = \{j_1, j_2, \ldots, j_m\} \subset S$, нека $f(X)$ е онаа n-варијација од множестото T, која на местата $j_1, j_2, \ldots, j_m$ има единици, а на останатите места нули. Бидејќи f е биекција, добиваме $|P(S)| = |T|$, т.е. важи равенството (1).

4. РАЗБИВАЊЕ НА БРОЕВИ

Дефиниција 8. Разбивање на природен број n на k делови е k-торка $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k)$ природни броеви за кои важи $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_k = n$, $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq ... \geq \alpha_k$. Броевите $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ ги нарекуваме делови на разбивањето α..

За разбивањето $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k)$ ќе ја користиме и ознаката $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_k$. Ако за секој $j \in \{1,2,...,k\}$ во разбивањето $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k)$

на n имаме f_j делови еднакви на j, тогаш разбивањето α го означуваме со $\alpha=\left(1^{f_1},2^{f_2},\ldots\right)$. Во овој случај важат равенствата $f_1+f_2+\ldots+f_n=k$ и $f_1+2f_2+\ldots+nf_n=n$.

Пример 9. (а) $4+2+2+1$, $(4,2,2,1)$ и $\left(1^1,2^2,4^1\right)$ се ознаки за едно исто разбивање на бројот 9 на 4 делови.

(б) Постојат 5 различни разбивања на бројот 4, и тоа: $\alpha_1=\left(4^1\right)$, $\alpha_2=\left(1^1,3^1\right)$, $\alpha_3=\left(1^2,2^1\right)$, $\alpha_4=\left(1^4\right)$ и $\alpha_5=\left(2^2\right)$.

Теорема 1. Нека се $n_1,n_2,\ldots,n_k$ различни природни броеви. Со $F(n_1,n_2,\ldots,n_k;n)$ да го означиме бројот на разбивања на природниот број n на k различни делови, кај кои секој од деловите е еднаков на некој од броевите $n_1,n_2,\ldots,n_k$. Тогаш

(2) $$F(n_1,\ldots,n_k;n)=F(n_1,\ldots,n_{k-1};n-n_k)+F(n_1,\ldots,n_{k-1};n)$$

при што

(3) $$F(n_1,n_2,\ldots,n_j;m)=\begin{cases}0, \text{ако е } m<0\\ 1, \text{ако е } m=0\end{cases}.$$

Доказ. Нека S е множеството разбивања на бројот n на различни делови, при што секој од тие делови е еднаков на некој од броевите $n_1,n_2,\ldots,n_k$. Нека $S_1\subset S$ е множеството на оние разбивања на бројот n кај кои постои дел еднаков на n_k, а $S_2\subset S$ е множеството на оние разбивања кај кои таков дел не постои. Очигледно $|S|=F(n_1,n_2,\ldots,n_k;n)$. На секое разбивање од S_1 еднозначно му соодветствува разбивање на бројот $n-n_k$ на различни делови, при што секој од тие делови е еднаков на некој од броевите $n_1,n_2,\ldots,n_{k-1}$ и обратно. Значи, $|S_1|=F(n_1,\ldots,n_{k-1};n-n_k)$. Бидејќи S_2 е множеството разбивања на бројот n на различни делови, кај кои секој од тие делови е еднаков на некој од броевите $n_1,n_2,\ldots,n_{k-1}$ добиваме $|S_2|=F(n_1,n_2,\ldots,n_{k-1};n)$.

Но, $S=S_1\cup S_2$ и како $S_1\cap S_2=\varnothing$, од лема 2 добиваме $|S|=|S_1|+|S_2|$ т.е. важи (2).

Последица 1. Ако $n_i=i$, за $i=1,\ldots,k$, $F_k(n)=F(1,2,\ldots,k;n)$, $F_k(0)=1$, тогаш

(4) $$F_k(n)=F_{k-1}(n-k)+F_{k-1}(n)$$

Пример 10. а) $F_2(1)=1$, $F_2(2)=1$, $F_2(3)=1$, $F_2(n)=0$ за $n\geq 4$.

б) $F_3(1)=1$, $F_3(2)=1$, $F_3(3)=2$, $F_3(4)=1$, $F_3(5)=1$, $F_3(6)=1$ и $F_3(n)=0$, $n\geq 7$.

в) $F_4(1)=1$, $F_4(2)=1$, $F_4(3)=2$, $F_4(4)=2$, $F_4(5)=2$, $F_4(6)=2$, $F_4(7)=2$, $F_4(8)=1$, $F_4(9)=1$, $F_4(10)=1$, $F_4(n)=0$ за $n \ge 11$.

г) $F_5(8)=F_4(3)+F_4(8)=2+1=3$.

Теорема 2. Нека $n_1, n_2, \ldots, n_k$ се различни природни броеви. Со $G(n_1,\ldots,n_k;n)$ да го означиме бројот на разбивањата на природниот број n, кај кои секој од деловите е еднаков на некој од броевите $n_1, n_2, \ldots, n_k$. Тогаш важи релацијата

(5) $$G(n_1,n_2,\ldots,n_{k-1},n_k;n)=G(n_1,\ldots,n_{k-1},n_k;n-n_k)+G(n_1,\ldots,n_{k-1};n)$$

и притоа $G(n_1,n_2,\ldots,n_j;m)=\begin{cases}0, \text{ако е } m<0\\ 1, \text{ако е } m=0\end{cases}$.

Доказ. Нека S е множеството разбивања на бројот n кај кои секој од деловите е еднаков на некој од броевите $n_1, n_2, \ldots, n_k$. Нека S_1 е множеството на оние разбивања од S кај кои постои дел еднаков на n_k, а S_2 е множеството разбивања од S кај кои таков дел не постои. Јасно,

$|S|=G(n_1,\ldots,n_{k-1},n_k;n)$ $\quad |S_1|=G(n_1,\ldots,n_{k-1},n_k;n-n_k)$ $\quad |S_2|=G(n_1,\ldots,n_{k-1};n)$

Сега тврдењето на теоремата следува од $|S|=|S_1|+|S_2|$.

Последица 2. Нека $n_i=i$, за $i=1,\ldots,k$, $G_k(n)=G(1,2,\ldots,k;n)$, $G_k(0)=1, G_k(n)=0$ за $n<0$. Тогаш важат равенствата

(6) $$G_k(n)=G_{k-1}(n)+G_k(n-k)$$

(7) $$G_k(n)=G_{k-1}(n)+G_{k-1}(n-k)+G_{k-1}(n-2k)+\ldots$$

5. ПОДРЕДЕНО РАЗБИВАЊЕ НА БРОЕВИ

Дефиниција 9. Подредено разбивање на природниот број n на k делови е решение на равенката $x_1+x_2+\ldots+x_k=n$ во множеството природни броеви, т.е. k-торка $(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)$, каде $\alpha_1,\ldots,\alpha_k$ се природни броеви чиј збир е еднаков на n.

Подреденото разбивање $(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)$ ќе го означуваме со

$$\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_k.$$

Пример 11. Сите подредени разбивања на бројот 7 на три дела се (5,1,1), (1,5,1), (1,1,5), (4,2,1), (2,4,1), (4,2,1,), (2,1,4), (1,4,2), (1,2,4), (3,3,1), (3,1,3) и (1,3,3).

Теорема 3. Нека $\alpha=(1^{f_1},2^{f_2},\ldots,n^{f_n})$ е разбивање на бројот n. Тогаш постојат $\dfrac{(f_1+f_2+\ldots+f_n)!}{f_1!f_2!\ldots f_n!}$ подредени разбивања на бројот n, кај кои за секој број $j\in\{1,2,3,\ldots,n\}$ има точно f_j делови еднакви на j.

Доказ. Секое подредено разбивање на бројот n со наведеното својство очигледно е $(f_1+f_2+...+f_n)-$ варијација на елементите $1,2,\dots,n$ која има тип $(f_1,f_2,...,f_n)$. Сега тврдењето следува од лема 8.

Теорема 4. а) Бројот на подредените разбивања на бројот n на k делови е еднаков на $\binom{n-1}{k-1}$.

б) Бројот на сите подредени разбивања на бројот n е еднаков на 2^{n-1}.

Доказ. а) Нека A е множеството од сите $(n+k-1)$-варијации на елементите 0 и 1, кое ги има следните три својства:

(i) точно n членови на варијацијата се еднакви на 1,

(ii) нема две соседни нули, и

(iii) првиот и последниот член на варијацијата се еднакви на единици.

Множеството A ги содржи сите $(n+k-1)$-варијации кои содржат $k-$ серии од единици одделени со нули (серија од единици е низа од неколку последователни единици во варијацијата). Меѓу множеството од сите подредени разбивања на бројот n и множеството A очигледно постои биекција. Според пример 7.в добиваме $|A|=\binom{n-1}{k-1}$.

б) Користејќи го резултатот под (а) и пример 8 добиваме дека бројот на сите подредени разбивања на бројот n е еднаков на

$$\binom{n-1}{0}+\binom{n-1}{1}+...+\binom{n-1}{n-1}=2^{n-1}.$$

Пример 12. Нека $n,k\in N$. Колку решенија има равенката

(8) $$x_1+x_2+...+x_k=n$$

(а) Во множеството N?

(б) Во множеството $N_o=N\cup\{0\}$?

Решение. а) Според дефиниција 9 и теорема 4 а) бројот на решенијата во множеството N е $\binom{n-1}{k-1}$.

б) Нека S_1 е множеството решенија на равенката (8) во множеството N_o и нека S_2 е множеството од $(n+k-1)$-варијации на елементите 0 и 1 во кои се појавуваат точно k-1 единици. Меѓу множествата S_1 и S_2 постои биекција, па како секоја варијација од S_2 е одредена со распоредот на единиците, добиваме $|S_1|=|S_2|=\binom{n+k-1}{k-1}$.

Пример 13. Нека $n,k\in N$. Колку решенија, во множеството N_o има неравенката

$$x_1+x_2+...+x_k \le n\,?$$

Решение. Меѓу множеството решенија на неравенката $x_1+x_2+...+x_k \le n$, во N_o, и множеството решенија на равенката $x_1+x_2+...+x_k + x_{k+1} = n$ во N_o постои биекција. Според пример 12.б) добиваме дека бараниот број решенија е $\binom{n+k}{k}$.

Теорема 5. Нека $n_1, n_2, \dots, n_k$ се различни природни броеви. Со $H(n_1, n_2, ..., n_k; n)$ да го означиме бројот на подредените разбивања на природниот број n, кај кои секој од деловите е еднаков на некој од броевите $n_1, n_2, \dots, n_k$. Тогаш важи равенството

$$H(n_1,...,n_k;n) = \sum_{j=1}^{n} H(n_1,...,n_k;n-n_j), \tag{9}$$

при што по дефиниција $H(n_1,n_2,...,n_k;m) = \begin{cases} 0, \text{ако } m<0 \\ 1, \text{ако } m=0 \end{cases}$.

Доказ. Нека S е множеството од сите подредени разбивања на бројот n, кај кои секој од деловите е еднаков на некој од броевите $n_1, n_2, \dots, n_k$ и нека S_j е множеството од оние разбивања $(\alpha_1, \alpha_2, ...) \in S$, кај кои $\alpha_1 = n_j$. Множеството S е унија од сите дисјунктни множества $S_1, S_2, \dots, S_k$, па затоа

$$H(n_1,n_2,...,n_k;n) = |S| = \sum_{j=1}^{n} |S_j| = \sum_{j=1}^{n} H(n_1,n_2,...,n_k;n-n_j).$$

Пример 14. Да го одредиме бројот $H(1,2,3,4;10)$. Со $H(n)$ да го означиме бројот $H(1,2,3,4;n)$. Јасно, $H(1)=1$, $H(2)=2$, $H(3)=4$, $H(4)=8$, па според теорема 5

$$H(n) = H(n-1) + H(n-2) + H(n-3) + H(n-4).$$

Значи,

$$H(5)=15,\ H(6)=29,\ H(7)=56,\ H(8)=108,\ H(9)=208 \text{ и } H(10)=401.$$

Пример 15. На колку начини на коверт можат да се залепат марки во вкупна вредност од 60 денари, ако имаме доволен број марки од 5, 10,15 и 20 денари? (Две низи марки се разликуваат ако содржат исти марки во различен распоред).

Решение. Бараниот број е еднаков на бројот $H(5,10,15,20;60)$, дефиниран во теорема 5. Забележуваме дека

$$H(5,10,15,20;60) = H(1,2,3,4;12) = H(12).$$

Во пример 14 докажавме

$$H(7)=56, H(8)=108, H(9)=208, H(10)=401 \text{ и}$$
$$H(n) = H(n-1) + H(n-2) + H(n-3) + H(n-4).$$

Според тоа, $H(11) = 773$ и $H(12) = 1490$.

На крајот од оваа статија ви предлагаме самостојно да решите неколку задачи.

1. Нека $n, k \in N$ и нека $c_1, c_2, \ldots, c_k$ се цели броеви такви што $n \geq \sum_{i=1}^{n} c_i$. Одредете колку решенија во множеството цели броеви има равенката $x_1 + x_2 + \ldots + x_k = n$ такви што $x_1 \geq c_1, x_2 \geq c_2, \ldots, x_k \geq c_k$.

2. Нека $n, k \in N$ и $k \geq 2$. Колку решенија $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ има равенката $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 2n$, во множеството N_o, такви што $x_1 > x_k$?

Решение. Бројот на сите решенија на равенката $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 2n$ во множеството N_o е еднаков на

$$\binom{2n+k-1}{k-1}.$$

Бројот на решенија за кои $x_1 = x_k = j$, каде $j \in \{0,1,2,3,\ldots,n\}$, $x_2, x_3, \ldots, x_k \in N_o$ е еднаков на

$$\binom{2n-2j+k-3}{k-3}.$$

Затоа бараниот број е:

$$\frac{1}{2}\left[\binom{2n+k-1}{k-1} - \sum_{j=0}^{n}\binom{2n-2j+k-3}{k-3}\right].$$

3. Колку n-цифрени броеви постојат, такви што збирот на нивните цифри е 11?

Решение. Нека S е множеството решенија на равенката

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 11 \text{ во } N_o.$$

Нека A, B и C се множествата решенија за кои соодветно важат условите: $x_1 = 0$, еден од броевите $x_1, x_2, \ldots, x_n$ е еднаков на 11, и еден од броевите $x_1, x_2, \ldots, x_n$ е еднаков на 10, соодветно. Тогаш,

$$|S| = \binom{n+10}{11},\ |A| = \binom{n+9}{11},\ |B| = n,\ |C| = n(n-1),\ |A \cap B| = n-1,\ |B \cap C| = 0,$$

$$|C \cap A| = (n-1)(n-2).$$

Бараниот број е еднаков на

$$|S \setminus (A \cup B \cup C)| = |S| - |A| - |B| - |C| + |A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C| - |A \cap B \cap C| =$$

$$= \binom{n+10}{11} - \binom{n+9}{11} - n - n(n-1) + (n-1) + 0 + (n-1)(n-2) + 0 = \binom{n+9}{10} - 2n + 1$$

4. Колку триаголници има со периметар 300, чии должини на страните се цели броеви?

Решение. Бројот на тројките (x,y,z) природни броеви за кои

$$x_1 + x_2 + x_3 = 300, x_1 < x_2 + x_3, \ x_2 < x_1 + x_3, \ x_3 < x_1 + x_2$$

е еднаков на бројот на тројките (x,y,z) природни броеви за кои важи $z = 300 - x - y$, $x < 150$, $y < 150$, $x + y > 150$, а тој број е еднаков на $1 + 2 + 3 + ... + 148 = 11026$, (тоа е бројот на целобројните точки (x,y) во рамнината за кои важи $x < 150$, $y < 150$, $x + y > 150$). Нека се A и B соодветно броевите на разностраните и рамнокраките (нерамнострани) триаголници со периметар 300, чии страни имаат целобројни должини. Тогаш

$$11026 = 6x + 3y + 1 = 6(A + B + 1) - 3(B + 1) - 2,$$

а бараниот број е $A + B + 1 = \frac{11026}{6} + \frac{B+1}{2} + \frac{1}{3}$. Да го одредиме бројот $B + 1$. Тоа е бројот на парови природни броеви (x,y) за кои важи $2x + y = 300$, $2x > y$, т.е. бројот на природни броеви за кои важи $75 < x < 150$, т.е. $B + 1 = 74$. Затоа, $A + B + 1 = 1875$.

5. Докажете дека бројот на сите раз-бивања на бројот n е еднаков на бројот на сите разбивања на бројот $2n$ на n делови.

ЛИТЕРАТУРА

1. *D.Veljan,* "Kombinatorika s teorijom grafova", Školska knjiga, Zagreb, 1989
2. *Biggs N.,* "Discrete Mathematics", Claredon Press, Oxford, 1989
3. *Д.Димоски, К.Тренчевски, Р. Малчески, Б.Јосифоски*, "Практикум по елементарна математика", Просветно дело, Скопје, 1993,

Статијата прв пат е објавена во списанието СИГМА на СММ