MATEMATIKA

Razdioba različitih predmeta u različite kutije

Petar Vranjković, Zadar

Često se u kombinatorici susrećemo s pitanjima: Na koliko je načina moguće 10 knjiga razmjestiti na 4 police? Na koliko je načina moguće 6 različitih čokolada podijeliti na troje djece? I slično.

Općenito: Na koliko je načina moguće n predmeta razmjestiti u r kutija?

U svakom slučaju ovo nije trivijalno pitanje, a neki problemi ovog tipa pokazali su se vrlo teški.

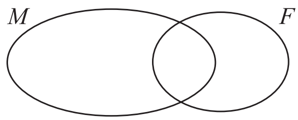
Postavljeno pitanje nije dovoljno jasno ni u pogledu predmeta, niti kutija. Naime, predmeti kao i kutije mogu biti jednaki ili različiti, a i uređaj predmeta, odnosno kutija valja uzeti u obzir. Ne ulazeći dublje, ovdje ćemo razmotriti samo jedan od mogućih problema, onaj iz naslova ovog članka. Valja još naglasiti da model razdiobe predmeta u kutije ima velike primjene u fizici.

U ovome ćemo članku koristiti formulu uključivanja-isključivanja (kratko FU-I), pa se najprije posvetimo tome.

Pretpostavlja se da čitatelji vladaju s temeljnim pojmovima o skupovima. U kombinatorici često treba naći broj elemenata unije nekoliko konačnih skupova. Pođimo od jednostavnih primjera.

Primjer 1. Grupa "matematičara" ima 14 učenika, grupa "fizičara" ima 10 učenika, a 8 učenika su uključeni u obje grupe. Koliko ima učenika koji su uključeni u barem jednu od te dvije grupe?

Rješenje. Ako je M skup "matematičara", a F skup "fizičara", onda je $M \cap F$ skup "matematičara" i "fizičara", pa treba naći broj elemenata skupa $M \cup F$ tj. $k(M \cup F)$. Prikažimo situaciju Euler-Vennovim dijagramom.



Lako je uočiti da u zbroju $k(M) + k(F)$ dva puta brojimo učenike koji su i "matematičari" i "fizičari". Prema tome vrijedi

$$K(M \cup F) = k(M) + k(F) - k(M \cap F)$$

odnosno

$$K(M \cup F) = 14 + 10 - 8 = 16.$$

Dokažimo općenito: Ako su A i B konačni skupovi, onda vrijedi

$$k(A \cup B) = k(A) + k(B) - k(A \cap B). \tag{1}$$

Dokaz.

$$A \cup B = (A \setminus (A \cap B)) \cup B, \quad (A \setminus (A \cap B)) \cap B = \emptyset, \quad A \cap B \subseteq A,$$

$$\begin{aligned} k(A \cup B) &= k\left[(A \setminus (A \cap B)) \cup B\right] = k(A \setminus (A \cap B)) + k(B) \\ &= k(A) - k(A \cap B) + k(B), \end{aligned}$$

što je i trebalo dokazati.

Sada bismo mogli lako odrediti i $k(\overline{A} \cap \overline{B})$, gdje je $\overline{A} = S \setminus A$, a S je univerzalni skup $(A, B \subseteq S)$. Koristeći formulu (1) imamo

$$\begin{aligned} k(\overline{A} \cap \overline{B}) &= k((S \setminus A) \cap (S \setminus B)) = k(S \setminus (A \cup B)) = k(S) - k(A \cup B) \\ &= k(S) - k(A) - k(B) + k(A \cap B), \end{aligned} \tag{2}$$

tj.

$$k(\overline{A} \cap \overline{B}) = k(S) - k(A \cup B).$$

Primjer 2. Koliko ima prirodnih brojeva između 1 i 1 000 koji:

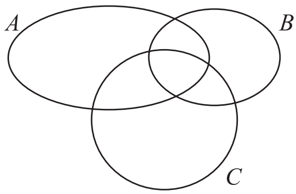
a) su djeljivi barem s jednim od brojeva 2, 3, 5?

b) nisu djeljivi niti s 2, niti s 3, niti s 5?

Rješenje.

a) Neka su A, B, C skupovi prirodnih brojeva između 1 i 1 000 koji su djeljivi redom s 2, 3, 5. Treba odrediti $k(A \cup B \cup C)$.

Evo dijagrama.



Nije teško uočiti da su u zbroju $k(A) + k(B) + k(C)$ dva puta uračunati brojevi koji se nalaze u presjeku točno dva od tri skupa A, B, C, a tri puta brojevi koji se nalaze u presjeku tri skupa. Prema tome mora vrijediti

$$k(A \cup B \cup C) = k(A) + k(B) + k(C) - k(A \cap B) - k(A \cap C) - k(B \cap C) + k(A \cap B \cap C). \tag{3}$$

Kako naći kardinalne brojeve skupova na desnoj strani te formule?

Ovdje ćemo koristiti očitu činjenicu da za $k, n \in \mathbf{N}$, $k \leqslant n$ u skupu $\{1, 2, \ldots, n\}$ ima točno $\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$ brojeva djeljivih s k.

Prema tome imamo:

$$k(A) = \left\lfloor \frac{1\,000}{2} \right\rfloor = 500, \quad k(B) = \left\lfloor \frac{1\,000}{3} \right\rfloor = 333, \quad k(C) = \left\lfloor \frac{1\,000}{5} \right\rfloor = 200$$

$$k(A \cap B) = \left\lfloor \frac{1\,000}{6} \right\rfloor = 166, \quad k(A \cap C) = \left\lfloor \frac{1\,000}{10} \right\rfloor = 100,$$

$$k(B \cap C) = \left\lfloor \frac{1\,000}{15} \right\rfloor = 66, \quad k(A \cap B \cap C) = \left\lfloor \frac{1\,000}{30} \right\rfloor = 33.$$

Na temelju toga dobivamo

$$k(A \cup B \cup C) = 734.$$

b) Najprije imamo

$$k(S) = k(A \cup B \cup C) + k(\overline{A \cup B \cup C}),$$

pa prema jednoj De Morganovoj formuli izlazi

$$k(S) = k(A \cup B \cup C) + k(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}),$$

odnosno

$$k(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) = k(S) - k(A \cup B \cup C).$$

Prema toj formuli u našem primjeru je

$$k(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) = 1\,000 - 734 = 266.$$

Dokažimo općenito: Ako su A, B, C konačni skupovi, onda vrijedi

$$k(A \cup B \cup C) = k(A) + k(B) + k(C) - k(A \cap B) - k(A \cap C) - k(B \cap C) + k(A \cap B \cap C).$$

Dokaz.

$$\begin{aligned} k(A \cup B \cup C) &= k\,[A \cup (B \cup C)] = k(A) + k(B \cup C) - k\,[A \cap (B \cup C)] \\ &= k(A) + k(B) + k(C) - k(B \cap C) - k\,[(A \cap B) \cup (A \cap C)] \\ &= k(A) + k(B) + k(C) - k(B \cap C) - k(A \cap B) - k(A \cap C) \\ &\quad + k\,[(A \cap B) \cap (A \cap C)] \\ &= k(A) + k(B) + k(C) - k(A \cap B) - k(A \cap C) \\ &\quad - k(B \cap C) + k(A \cap B \cap C). \end{aligned}$$

Navedeni primjeri (kao i poopćenja) su posebni slučajevi FU-I.

Poučak 1. (FU-I) Neka je S konačan skup, a $A_1, A_2, \ldots, A_n \subseteq S$, onda vrijedi:

$$\begin{aligned} k(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) &= k(A_1) + k(A_2) + \ldots + k(A_n) - k(A_1 \cap A_2) - k(A_1 \cap A_3) \\ &\quad - \ldots - k(A_{n-1} \cap A_n) + k(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + k(A_1 \cap A_2 \cap A_4) \\ &\quad + \ldots + k(A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n) - \ldots + (-1)^{n-1} k(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n). \end{aligned} \tag{4}$$

FU-I se može zapisati u ekvivalentnom obliku koji iskazujemo kao sljedeći poučak.

Poučak 2. Za podskupove $A_1, A_2, \ldots, A_n \subseteq S$ i $\overline{A_1} = S \setminus A_1$, $\overline{A_2} = S \setminus A_2, \ldots,$ $\overline{A_n} = S \setminus A_n \subseteq S$ vrijedi

$$\begin{aligned} k(\overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \ldots \cup \overline{A_n}) &= k(S) - k(A_1) - k(A_2) - \ldots - k(A_n) + k(A_1 \cap A_2) + k(A_1 \cap A_3) \\ &\quad + \ldots + k(A_{n-1} \cap A_n) - k(A_1 \cap A_2 \cap A_3) - k(A_1 \cap A_2 \cap A_4) \\ &\quad - \ldots - k(A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n) + \ldots + (-1)^n k(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n). \end{aligned} \tag{5}$$

Iz De Morganovih formula slijedi da su **P1** i **P2** ekvivalentni:

1. $(\overline{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n}) = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_n}$
(Komplement unije jednak je presjeku komplementa.)

2. $(\overline{A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n}) = \overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \ldots \cup \overline{A_n}$
(Komplement presjeka jednak je uniji komplemenata.)

Dokazi poučaka **P1** i **P2** mogu se provesti i matematičkom indukcijom po n. No taj se dokaz može provesti i jednostavnim kombinatornim rasuđivanjem.

Sada ćemo navesti poseban slučaj FU-I.

Neka su $A_1, A_2, \ldots, A_n \subseteq S$, za koje vrijede ovi uvjeti:

$$k(S) = N, \quad k(A_1) = k(A_2) = \ldots = k(A_n) = N_1,$$
$$k(A_1 \cap A_2) = k(A_1 \cap A_3) = \ldots = k(A_{n-1} \cap A_n) = N_2,$$
$$k(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = k(A_1 \cap A_2 \cap A_4) = \ldots = k(A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n) = N_3,$$
$$\vdots$$
$$k(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = N_n, \quad k(S \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n)) = N_0.$$

Primijenimo li **P1** dobit ćemo:

1. $$k(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \binom{n}{1} \cdot N_1 - \binom{n}{2} \cdot N_2 + \binom{n}{3} \cdot N_3 - \ldots + (-1)^{n-1} \cdot \binom{n}{n} \cdot N_n. \tag{6}$$

2. $$N_0 = N - \binom{n}{1} \cdot N_1 + \binom{n}{2} \cdot N_2 - \binom{n}{3} \cdot N_3 + \ldots + (-1)^n \cdot \binom{n}{n} \cdot N_n. \tag{7}$$

Vratimo se sada na naš temeljni problem, kojeg ćemo ilustrirati jednim jednostavnim primjerom.

Primjer 3.

a) Na koliko se načina može 5 različitih knjiga razmjestiti na 3 police p_1, p_2, p_3, pri čemu neke police mogu ostati i prazne?

b) Koliko ima tih razdioba ako na polici p_1 treba smjestiti 2 knjige, na p_2 jednu knjigu i na p_3 2 knjige?

Rješenje.

a) Ako uzmemo jednu knjigu, onda je možemo staviti na jednu od 3 police, a to se može uraditi na 3 načina. Drugu knjigu možemo opet staviti na 3 načina, treću knjigu možemo staviti također na 3 načina, četvrtu opet na 3 načina i najzad petu knjigu opet na 3 načina. Prema načelu umnoška, ukupan broj razdioba iznosi

$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^5 = 243.$$

b) U ovom slučaju nije važno kako su knjige razmještene na svakoj polici nego samo izbor knjiga za pojedine police. Dakle, dvije knjige za policu p_1 možemo izabrati na $\binom{5}{2}$ načina. Za policu p_2 jednu knjigu, od preostale 3 knjige, možemo izabrati na $\binom{3}{1}$ načina, a za policu p_3 dvije knjige od preostale dvije možemo izabrati na $\binom{2}{2}$ načina. Prema načelu umnoška broj traženih razdioba je

$$\binom{5}{2} \cdot \binom{3}{1} \cdot \binom{2}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2!} \cdot \frac{3}{1!} \cdot \frac{1 \cdot 2}{2!} = \frac{5!}{1! \cdot 2! \cdot 2!} = 15.$$

Poopćenje.

a) Broj razdioba n različitih predmeta u r različitih kutija (ima kutija bez predmeta) iznosi

$$r^n. \tag{8}$$

b) Broj razdioba n različitih predmeta u r različitih kutija ako u prvoj kutiji mora biti točno n_1 predmeta, u drugoj točno n_2 predmeta, ... , u r-toj kutiji točno n_r predmeta, pri čemu vrijedi $n_1 + n_2 + \ldots + n_r = n$ iznosi

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_r!} \tag{9}$$

Dokaz.

a) Budući da su kutije različite, svakoj od njih pridijelimo ime. Predmete složimo u jedan niz i svakom od njih pridružimo jedno od r različitih imena kojima smo označili kutije. Broj takvih pridruživanja (razdioba) jest

$$r \cdot r \cdot \ldots \cdot r = r^n.$$

b) Među n različitih predmeta n_1 predmeta za prvu kutiju možemo izabrati na $\binom{n}{n_1}$ načina. Među preostalih $n - n_1$ predmeta, n_2 predmeta za drugu kutiju možemo izabrati na $\binom{n-n_1}{n_2}$ načina, itd. Prema načelu umnoška, ukupan broj razdioba iznosi

$$\binom{n}{n_1} \cdot \binom{n-n_1}{n_2} \cdot \ldots \cdot \binom{n_{r-1}+n_r}{n_{r-1}} \cdot \binom{n_r}{n_r}.$$

Ako svaki od binomnih koeficijenata ovog umnoška napišemo prema definiciji onda imamo:

$$\frac{n!}{n_1!(n-n_1)!} \cdot \frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!} \cdot \ldots \cdot \frac{(n_{r-1}-n_r)!}{n_{r-1}! \cdot n_r!} \cdot \frac{n_r!}{n_r! \cdot 0!}.$$

Nakon skraćivanja i sređivanja dobijemo konačan oblik

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_r!}.$$

Razdioba može biti i složenija kao u primjeru 4.

Primjer 4. Na koliko se načina može 3 različite knjige razmjestiti na 2 police p_1 i p_2 tako da na svakoj polici bude smještena barem jedna knjiga?

Rješenje. Najprije zadovoljimo uvjet, a to znači da na svaku policu stavimo po jednu knjigu. To se može uraditi na više načina budući da su knjige različite. Za policu p_1 jednu knjigu možemo izabrati na 3 načina, a za policu p_2 na dva načina. To znači da je prema načelu umnoška ukupan broj izbora jednak $3 \cdot 2 = 6$.

Ali kada na svaku policu stavimo po jednu knjigu, onda treća preostala knjiga može ići na policu p_1 ili p_2 što znači da se može razmjestiti na dva načina. Dakle ukupan broj razdioba iznosi $(3 \cdot 2) \cdot 2 = 12$. Međutim, broj svih mogućih razdioba 3 različite knjige na 2 različite police iznosi, prema formuli (8), $2^3 = 8 < 12$. To je paradoks. Točnije, napravljena je pogreška. Gdje? Neke su se razdiobe brojale više puta. Otkrijmo to!

Najprije ćemo složiti sve moguće razdiobe. Radi jednostavnosti označimo knjige s k_1, k_2 i k_3. Onda

p_1	$k_1,\ k_2,\ k_3$	$k_1,\ k_2$	$k_1,\ k_3$	$k_2,\ k_3$	k_1	k_2	k_3	
p_1		k_3	k_2	k_1	$k_2,\ k_3$	$k_1,\ k_3$	$k_1,\ k_2$	$k_1,\ k_2,\ k_3$

Sada lako možemo pročitati i rješenje: 6. Pogledajmo sada razdiobu iz koje je proizišla pogreška.

p_1	1. razdioba	k_1	k_1	k_1	k_1	k_2	k_2	k_2	k_2	k_3	k_3	k_3	k_3
	2. razdioba	k_3		k_2		k_3		k_1		k_2		k_1	
p_2	1. razdioba	k_2	k_2	k_3	k_3	k_1	k_1	k_3	k_3	k_1	k_1	k_2	k_2
	2. razdioba		k_3		k_2		k_3		k_1		k_2		k_1

To je "onih" 12 izračunatih razdioba. No sada možemo uočiti da su neke razdiobe jednake, točnije da smo svaku razdiobu brojili 2 puta. Npr. na policu p_1 smo stavili knjigu k_1, na p_2 knjigu k_2, a zatim na p_1 knjigu k_3. To je isto kao da smo na policu p_1 stavili knjigu k_3, na p_2 knjigu k_2 a zatim na p_1 knjigu k_1. Itd.

Time je jasno da tako izvršena razdioba nije dobra. U ovome primjeru smo se još mogli "spasiti" tako da ukupan broj razdioba podijelimo s 2. Naravno da to ne dolazi u obzir ako bismo imali razdiobu više od tri knjige na više od dvije police. Ovo samo ukazuje na činjenicu da ovaj problem treba riješiti općenito. Pa riješimo ga!

Neka je S skup svih razdioba n različitih predmeta u r različitih kutija. Nadalje, neka je A skup svih onih razdioba u kojima svaka kutija sadrži barem jedan predmet. Onda je $\overline{A}$ skup svih onih razdioba u kojima barem jedna kutija ne sadrži niti jedan predmet. Prema tome vrijedi:

$$S = A \cup \overline{A}, \quad A \cap \overline{A} = \emptyset$$

odnosno

$$k(S) = k(A) + k(\overline{A}),$$

pa je

$$k(A) = k(S) - k(\overline{A}).$$

Prema formuli (8) imamo

$$k(S) = r^n.$$

Valja još naći $k(\overline{A})$.

Najprije jedna kutija (bilo koja) ne sadrži niti jedan predmet. Tu kutiju možemo izabrati na $\binom{r}{1}$ načina. Tada n različitih predmeta treba razmjestiti u $r-1$ kutija. Prema (8) takvih razdioba ima $(r-1)^n$. Najzad, ukupan broj razdioba u kojima jedna kutija ne sadrži niti jedan predmet iznosi $\binom{r}{1} \cdot (r-1)^n$.

Sada dvije kutije (bilo koje) ne sadrže niti jedan predmet. Te dvije kutije možemo izabrati na $\binom{r}{2}$ načina. Onda n različitih predmeta treba razmjestiti u $r-2$ kutije, a to možemo uraditi na $(r-2)^n$ načina. Ukupan broj razdioba u kojima dvije kutije ne sadrže niti jedan predmet iznosi $\binom{r}{2} \cdot (r-2)^n$, itd. Na kraju, $r-1$ kutija ne sadrži niti jedan predmet. Tih $r-1$ kutija možemo izabrati na $\binom{r}{r-1}$ načina. Tada n različitih predmeta treba razmjestiti u $r-(r-1)=1$ kutiju što se može uraditi na 1^n načina, pa ukupan broj razdioba u kojima $r-1$ kutija ne sadrži niti jedan predmet iznosi $\binom{r}{r-1} \cdot 1^n$.

Primjenom FU-I imamo

$$k(A) = r^n - \binom{r}{1}(r-1)^n + \binom{r}{2}(r-2)^n - \binom{r}{3}(r-3)^n + \ldots + (-1)^r\binom{r}{r-1} \cdot 1^n. \quad (10)$$

Sada primjer 4. možemo riješiti pomoću formule (10). Dakle, $n=3$, $r=2$, pa je

$$k(A) = 2^3 - \binom{2}{1} \cdot 1^3 = 8 - 2 = 6,$$

a to smo dobili pomoću tablice.

Zadatak. Na koliko načina 5 različitih knjiga možemo razmjestiti na 3 police ako na svaku policu treba smjestiti barem jednu knjigu?

Rješenje. Sada je $n=5$, $r=3$, pa prema (10) izlazi

$$k(A) = 3^5 - \binom{3}{1}(3-1)^5 + \binom{3}{2}(3-2)^5 = 150.$$