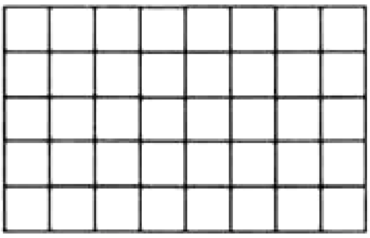
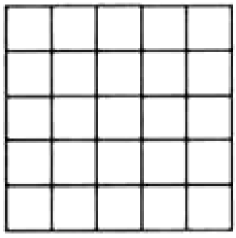
КВАДРИРАЊЕ ПРАВОУГАОНИКА

Ратко Тошић, Нови Сад

Јасно је да се сваки правоугаоник са дужинама страница m и n, где су m и n природни бројеви, може поделити на mn јединичних квадрата (На слици 1 је представљен случај $m = 5$, $n = 8$). На тај начин, уствари, и долазимо до формуле за површину правоугаоника са датим дужинама страница. У специјалном случају, за квадрат странице n, његова површина једнака је n^2, јер се он може поделити на n^2 једнаких квадрата (На слици 2 је представљен случај за $n = 5$). Како се јединица дужине може изабрати произвољно, можемо рећи и да се сваки квадрат може поделити (разбити) на n^2 једнаких квадрата, за сваки природан број n.

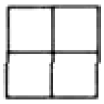


Слика 1

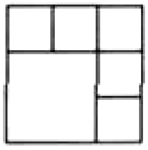


Слика 2

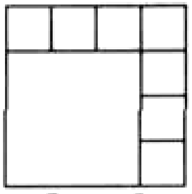
Испитаћемо сада за које природне бројеве n можемо да поделимо дати квадрат на n мањих квадрата, ако они не морају бити сви једнаки по величини. Лако се види да n не може бити мање од 4, јер свако теме датог квадрата мора да припада неком мањем квадрату. Исто тако, може се показати да је $n \neq 5$; предлажемо читаоцу да се сам позабави тим проблемом.



Слика 3



Слика 4



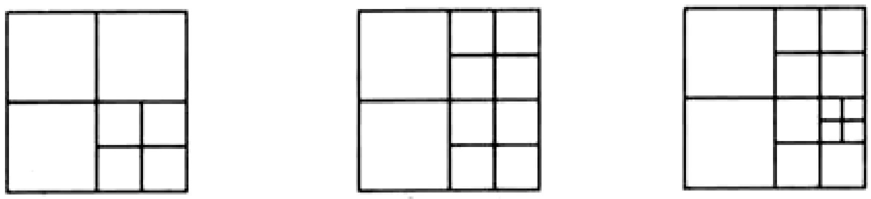
Слика 5

На сликама 3, 4 и 5 дати су примери поделе квадрата на 4, 6 и 8 мањих квадрата.

Задатак 1. Показати да се квадрат може поделити на n квадрата за сваки природан број $n \geq 6$.

Решење. Ако је квадрат већ подељен на n квадрата на било који начин, тада дељењем једног од квадрата на четири мања једнака квадрата, повећавамо број квадрата поделе за 3 (уместо једног квадрата добијамо четири нова). Тако, на пример, полазећи од поделе на 4 квадрата (слика 3) добијамо поделе квадрата на 7, 10, 13 ... квадрата (слика 6), тј. на n квадрата, за произвољан природан број n облика

$3k + 1$. На исти начин, од поделе на слици 4 добијамо решење за сваки број n облика $3k$, а на основу поделе на слици 5, добијамо решење за сваки број облика $3k + 2$.

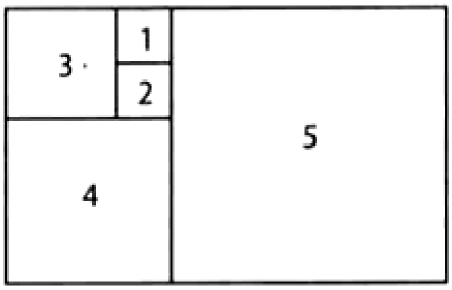


Слика 6

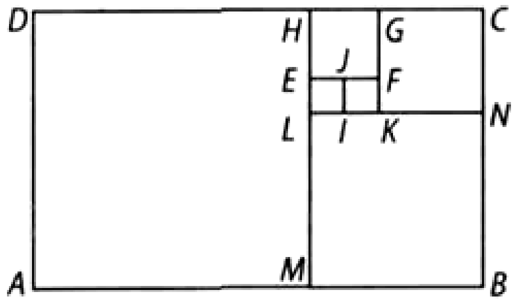
Наведимо још неколико задатака о квадрирању правоугаоника.

Задатак 2. (Окружно такмичење 2009. године, 4. разред) На слици 7 су бројевима од 1 до 5 означени квадрати који формирају правоугаоник. Израчунај обим правоугаоника ако је површина квадрата означеног бројем 1 једнака 4cm^2.

Решење. Ако је површина најмањег квадрата 4cm^2, онда је његова страница 2cm. Страница квадрата 3 је два пута већа од странице квадрата 1 и износи 4cm. Дужина странице квадрата 4 једнака је збиру дужина страница квадрата 3 и 2 и износи 6cm. Даље, добијамо да је дужина странице квадрата 5 једнака 10cm, а дужине страница правоугаоника су 10cm и 16cm. Следи да је обим правоугаоника 52cm.



Слика 7



Слика 8

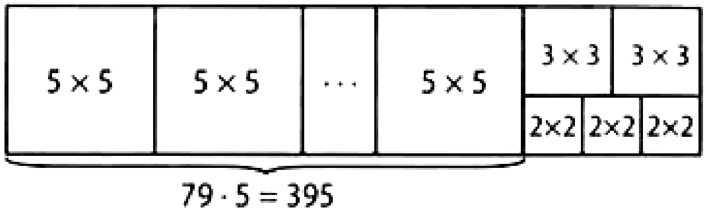
Задатак 3. (Општинско такмичење 2007. године, 5. разред) Правоугаоник *ABCD* подељен је на шест квадрата као на слици 8. Одреди површину тог правоугаоника ако је обим квадрата *EFGH* једнак 8cm.

Решење. Уз ознаке темена квадрата као на слици 8, дужина странице квадрата *EFGH* је 2cm, па даље налазимо да су дужине страница квадрата *LIJE*, *KNCG*, *MBNL* и *AMHD* редом 1cm, 3cm, 5cm и 8cm. Према томе, дужине страница правоугаоника су 13cm и 8cm, па је његова површина 104cm^2.

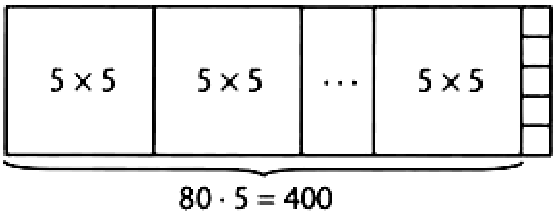
Задатак 4. (Окружно такмичење 2005. године, 7. разред) Од квадрата са страницама целобројне дужине треба сложити правоугаоник површине 2005. Колико је најмање квадрата потребно?

Решење. Како је $2005 = 5 \cdot 401$, где су 5 и 401 прости бројеви, то постоје само два правоугаоника са страницама целобројне дужине и површине 2005: 1×2005 и 5×401. Први се може саставити само од 2005 јединичних квадрата. Мање квадрата ће бити употребљено у другом случају. Тада је довољно 84 квадрата: 78 квадрата 5 × 5, 2 квадрата 3 × 3 и 3 квадрата 2 × 2 (слика 9).

У решавању последњег задатка, ученици обично брзоплето закључе да је најбоље узети што више највећих квадрата (5 × 5), што, међутим, доводи до погрешног решења. Наиме, у том случају потребно је 80 квадрата 5 × 5 и пет јединичних квадрата, што је укупно 85 квадрата (слика 10).



Слика 9



Слика 10

Задатак 5. (Молдавска олимпијада 1997. године, 8. разред) Квадрат је исечен на 25 мањих квадрата. Само један од мањих квадрата има страницу дужине различите од 1 (сви остали имају страницу дужине 1). Одредити површину полазног квадрата.

Решење. Нека је x дужина странице датог квадрата (назовимо га X), а $y \neq 1$ дужина странице малог квадрата (назовимо га Y). Узимајући у обзир површине свих квадрата који се помињу у формулацији задатка, важи:

$$x^2 - y^2 = 24. \qquad (1)$$

Квадрат X има бар једну страницу која нема заједничких тачака са квадратом Y; та страница је покривена само малим квадратима са страницом дужине 1. Дакле, x је природан број.

Имајући то у виду, закључујемо да је y природан број.

Тражимо сада решење једначине (1) у скупу природних бројева. Једначина се може написати у облику

$$(x - y)(x + y) = 24.$$

Како бројеви x и y морају бити исте парности и

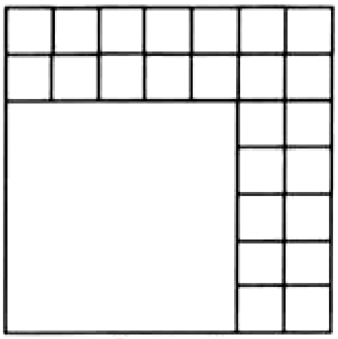
$$0 < x - y < x + y$$

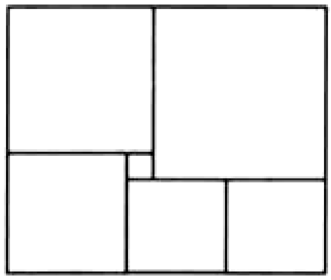
могућа су следећа два случаја:

а) $\begin{matrix} x - y = 2 \\ x + y = 12, \end{matrix}$ одакле је $2x = 14$, $x = 7$, $y = 5$;

б) $\begin{matrix} x - y = 4 \\ x + y = 6, \end{matrix}$ одакле је $x = 5$, $y = 1$.

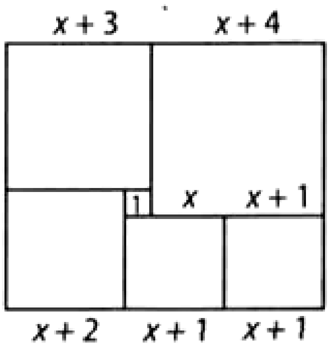
У другом случају долазимо до контрадикције са условом да је $y \neq 1$. Према томе, површина датог квадрата је $x^2 = 49$ и једна могућа подела квадрата изгледа као на слици 11.


Слика 11

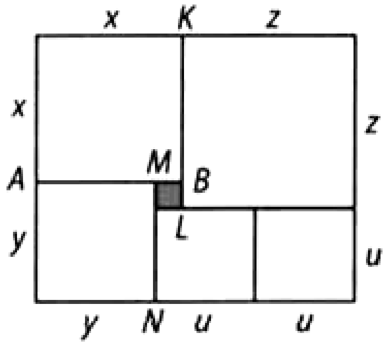

Слика 12

Задатак 6. (Окружно такмичење 2000. године, 5. разред) Правоугаоник на слици 12 састављен је од 6 квадрата. Израчунати обим и површину правоугаоника ако је страница најмањег квадрата 1cm.

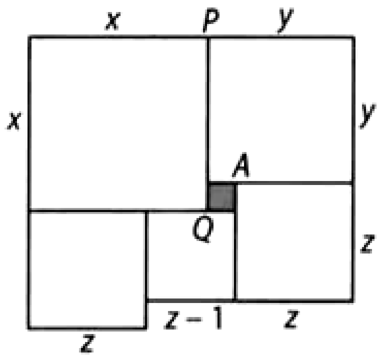
Решење 1. Ако пођемо од дужи чију смо дужину означили са x, онда странице квадрата добијамо у зависности од x, као на слици 13. Страница највећег квадрата има дужину $x + 4$, односно $2x + 1$, одакле је $x + 4 = 2x + 1$, тј. $x = 3$. Тада су странице правоугаоника 13cm и 11cm, па је његов обим 48cm, а површина 143cm^2.



Слика 13



Слика 14



Слика 15

Решење 2. Уз ознаке као на слици 14 је $MN = y = u + 1$, $AB = x = y + 1$, $KL = z = x + 1$. Заменом $y = u + 1$ у другој једначини добијамо да је $x = u + 2$. Заменом $x = u + 2$ у трећој једначини добијамо да је $z = u + 3$. Из једнакости наспрамних страница датог правоугаоника следи $x + z = y + 2u$.

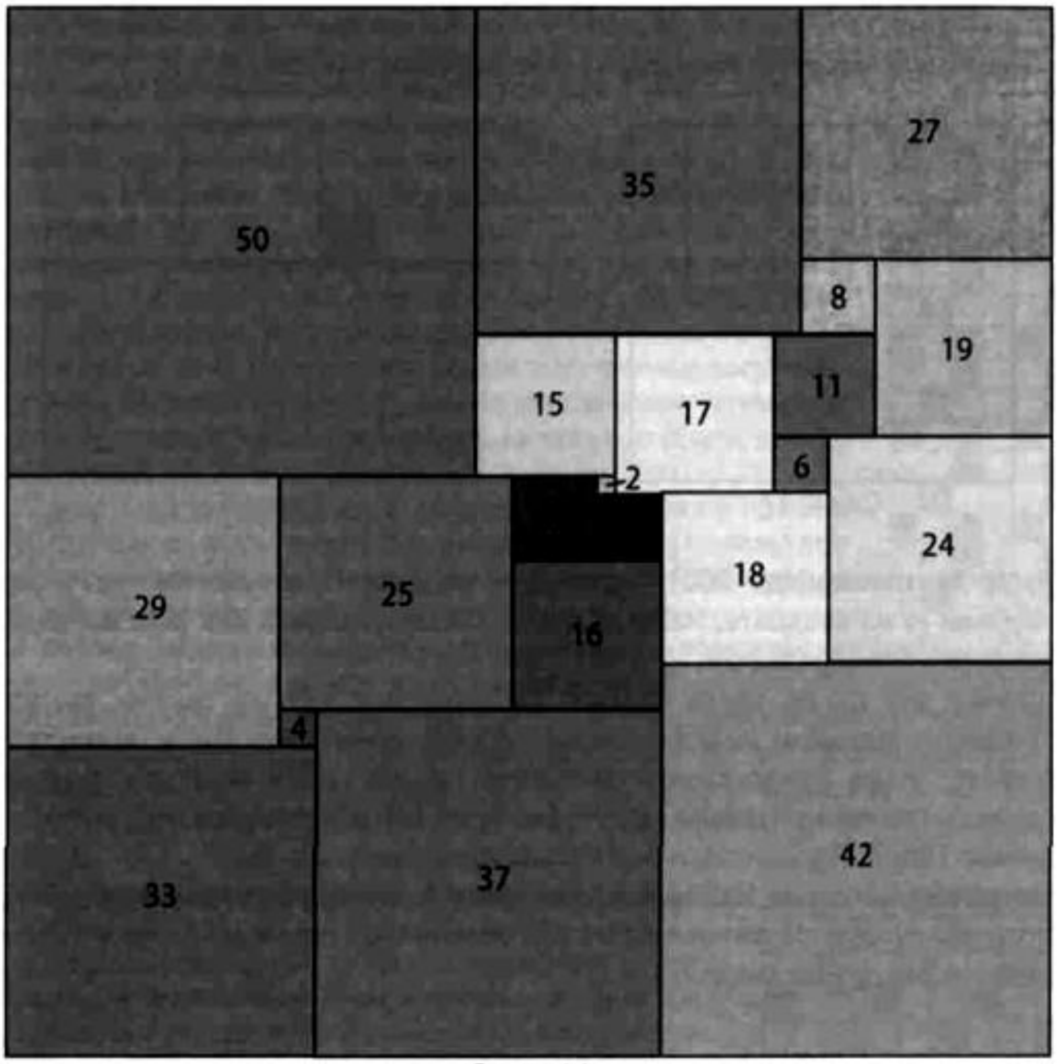
Знајући x, y, z добијамо $(u + 2) + (u + 3) = (u + 1) + 2u$ одакле је $u = 4$. Сада налазимо да је $x = 6$, $y = 5$, $z = 7$.

Задатак 7. Фигура на слици 15 састављена је од квадрата. Одредити дужину доњег левог квадрата, ако је страница осенченог квадрата 1cm.

Решење. Према ознакама на слици 15 је $y = z + 1$, $x = y + 1$. Такође, према слици (горња и доња страница фигуре) је $x + y = 3z - 1$. Замењујући у последњој једначини

$z = y - 1$, а затим $y = x - 1$, добијамо једначину $x + (x - 1) = 3(x - 1) - 4$, чије је решење $x = 6$. Даље добијамо да је $y = 5$, $z = 4$.

Савршено квадрирање квадрата (правоугаоника) реда n је разбијање квадрата (правоугаоника) на n мањих квадрата међу којима нема подударних. Савршено квадрирање квадрата (правоугаоника) је *сложено* ако неки прави подскуп квадрата, који чини разбијање, образује правоугаоник (који може бити и квадрат). У противном, за савршено квадрирање кажемо да је *просто*.



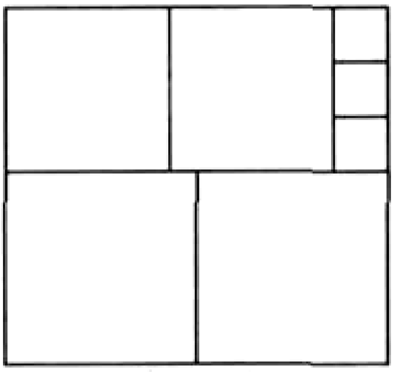
Слика 16

На слици 16 представљено је просто савршено квадрирање квадрата најмањег могућег реда, $n = 21$, и то је једино просто савршено квадрирање квадрата реда 21. Открио га је холандски математичар Дуијвестијн, 1978. године, уз помоћ рачунара. Претходно је Дуијвестијн доказао, 1962. године, да не постоји просто савршено квадрирање квадрата реда мањег од 21.

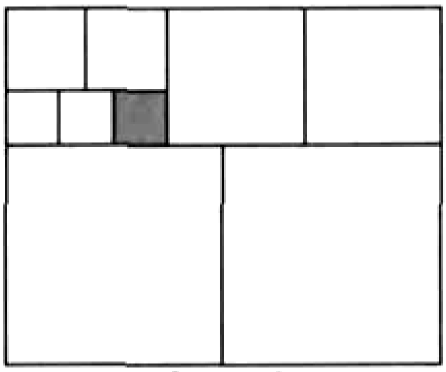
Опширније о савршеном квадрирању биће речи у посебном чланку.

ЗАДАЦИ ЗА САМОСТАЛНИ РАД

1. (Окружно такмичење 2009. године, 5. разред) Правоугаоник је подељен на осам квадрата (слика 17). Израчунај површину правоугаоника ако је обим најмањег квадрата 2cm.
2. (Бугарска олимпијада 2002. године, 4. разред) Од правоугаоног листа хартије дужине 26cm и ширине 7cm Стојан је одсекао највећи могући квадрат, чије 3 странице леже на ивицама листа. Исти поступак понављао је са правоугаоним остатком листа све док није исекао лист на квадрате. На колико је квадрата исечен лист? Колики је збир обима свих исечених квадрата?



Слика 17



Слика 18

3. (Бугарска олимпијада 2001. године, 4. разред) Правоугаоник на слици 18 подељен је на квадрате. Нађи површину правоугаоника ако је обим најмањег (осенченог) квадрата 8cm.
4. Аутомат зна да од листа картона правоугаоног облика одсече квадрат са страницом једнаком мањој страници правоугаоника. Стојан је, користећи тај аутомат, један правоугаоник разрезао на два већа квадрата (међусобно једнака), три мања (такође међусобно једнака) и пет најмањих са страницом дужине 10mm. Одреди странице Стојановог правоугаоника.
5. Квадрат је исечен на 1000 мањих квадрата. Само један од мањих квадрата има страницу дужине различите од 1 (сви остали имају страницу дужине 1). Одреди површину полазног квадрата.

Статијата прв пат е објавена во списанието Математички лист на ДМ на Србија