УНИВЕРЗИТЕТ „КИРИЛ И МЕТОДИЈ" - СКОПЈЕ

АЛЕКСАНДАР САМАРЏИСКИ

На пријателот
Коста
20.01.93 Ал. Самарџ

ВЕКТОРСКА АЛГЕБРА НИЗ ЗАДАЧИ

СКОПЈЕ, 1991

Одобрено со решение на Ректорот бр. 11-967 од 04.09.1991 година
како УЧЕБНО ПОМАГАЛО

Рецензенти

Проф. д-р Живко Мадевски

Проф. д-р Никола Пандески

Лектура

Наталија Глинска-Ристова

CIP - Каталогизација во публикација
Народна и универзитетска библиотека
"Климент Охридски", Скопје

512/517(076)(075.8)

САМАРЏИСКИ, Александар
Векторска алгебра низ задачи : [учебно помагало] / Александар Самарџиски. - Скопје : Универзитет "Кирил и Методиј", 1992. - 159 стр. : илустр. ; 24 см

а) Векторска алгебра - Вежби

Умножено на офсет техника во Унверзитетската печатница во Скопје

Тираж 2.000 примероци

Збиркава е работена според дел од наставната програма по АНАЛИТИЧКА ГЕОМЕТРИЈА за студентите по математика и информатика на Природно-математичкиот факултет во Скопје и, главно, е наменета за тие студенти. Но, може успешно да им послужи и на студентите од техничките факултети како и на учениците од природно-математичката струка на средното образование.

Задачите се распоредени по глави и параграфи. Во почетокот на секој параграф или таму каде што е потребно дадени се неопходните дефиниции, а потребните својства се формулирани како задачи и повеќето се докажани. Со тоа се овозможува збиркава да се користи самостојно.

Повеќето од задачите се решени, а за оние што не се решени, во вториот дел се дадени одговори и упатства за решавање.

Векторската алгебра, како што е добро познато, е поврзана со аналитичката геометрија. Но, со оваа збирка сакаме посебно да укажеме на големата примена на векторската алгебра во геометријата. Така докажани се многу важните теореми на Чева и Менелај, а потоа и нивната примена. Во многу (потешки) задачи може да се види како се користат векторите, да се даде многу кратко и елегантно решение. Посебно е укажана примената на скаларниот производ како и на поимот плоштина на насочен паралелограм. Затоа, сметаме дека секој кој ја сака математиката, може во оваа збирка да најде материјал со кој ќе ги прошири своите знаења, да се запознае со методите на векторската алгебра и нејзината примена.

Основна литература по која е работена оваа збирка е познатата книга „АНАЛИТИЧНА ГЕОМЕТРИЈА СО ВЕКТОРСКА АЛГЕБРА" од мојот учител и професор Јоже Улчар, кој со своите предавања ми овозможи да навлезам во тајните на геометријата.

Авторот

С О Д Р Ж И Н А

ПРВ ДЕЛ

З А Д А Ч И

Глава I

АФИНИ ОПЕРАЦИИ СО ВЕКТОРИ

1. ДЕФИНИЦИЈА НА ВЕКТОР. ЕДНАКВОСТ НА ВЕКТОРИ

Секој подреден пар точки (A,B) се наречува вектор. Првата точка (точката A) се наречува почеток на векторот, а втората (точката B) крај на векторот. Ако точките A и B се совпаѓаат, тогаш векторот се наречува нулти. Векторите ќе ги означуваме со $\vec{AB}, \vec{CD}, \ldots$ или со $\bar{a}, \bar{b}, \ldots$ Два ненулти вектори $\vec{AB}$ и $\vec{CD}$ се наречуваат колинеарни ако правите AB и CD се меѓусебно паралелни (секоја права е паралелна со себе). Нултиот вектор се смета дека е колинеарен со секој вектор. Должината на отсечката AB се наречува должина на векторот $\vec{AB}$. Значи, нултиот вектор има должина нула. За два колинеарни вектори $\vec{AB}$ и $\vec{CD}$, правите AB и CD се различни, ќе велиме дека се истонасочни (имаат иста насока), ако отсечките AC и BD немаат заедничка точка; ако, пак, векторите $\vec{AB}$ и $\vec{CD}$ лежат на иста права и ако постои вектор $\vec{MN}$ кој има иста насока со $\vec{AB}$ и со $\vec{CD}$, тогаш и за векторите $\vec{AB}$ и $\vec{CD}$ ќе велиме дека се истонасочни. За два колинеарни вектора, што немаат иста насока, ќе велиме дека се спротивнонасочни или дека имаат спротивна насока. За два вектора ќе велиме дека се еднакви, ако тие се колинеарни, имаат иста насока и имаат исти должини. Ако $\bar{a}=\vec{AB}$, тогаш векторот $\vec{BA}$ ќе го викаме спротивен на $\bar{a}$ и ќе го означуваме со $-\bar{a}$.

1. Точките A,B и C се колинеарни ако и само ако векторите $\vec{AB}$ и $\vec{AC}$ се колинеарни. Докажи!

Решение. Нека точките A,B,C се колинеарни; тогаш тие лежат на некоја права p, па, значи, и векторите $\vec{AB}, \vec{AC}$ лежат на правата p, т.е. тие се колинеарни.

Обратно, нека векторите $\vec{AB}$ и $\vec{AC}$ се колинеарни. Тоа значи дека правите AB и AC се паралелни. Но, тие имаат заедничка точка (тоа е точката A), што значи дека тие се совпаѓаат, т.е. точките A,B,C се колинеарни.

2. Какви должини имаат векторите $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BA}$?

3. Ако векторите $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ не лежат на иста права, тогаш тие се еднакви ако и само ако четириаголникот ABDC е паралелограм. Докажи!

4. Ако $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$, тогаш $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$. Докажи!

5. Дали од $\overline{AB}=\overline{CD}$ следува $\overline{AC}=\overline{BD}$?

6. Ако $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{AS}=\overrightarrow{CT}$, тогаш $\overrightarrow{BS}=\overrightarrow{DT}$. Докажи!

7. Ако е даден векторот $\overrightarrow{AB}$ и точката C, тогаш постои единствена точка D, така што $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$. Докажи!

8. На секоја страна од паралелограмот ABCD може да се положат по два вектора. Кои од така формираните осум вектори се колинеарни со иста насока, а кои се колинеарни со спротивна насока?

9. На страните од правилен: а) петаголник, б) шестаголник се положени вектори. Дали меѓу тие вектори може да има еднакви?

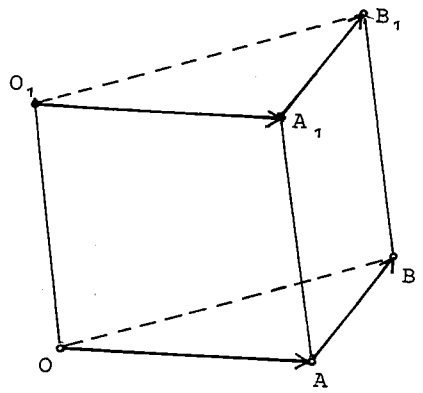
10. Нека $A_1A_2...A_n$ е правилен n-аголник со центар во точката O. Дали меѓу векторите $\overrightarrow{OA_i}$, $i=1,2,...,n$, може да има колинеарни?

2. СОБИРАЊЕ НА ВЕКТОРИ

Нека се дадени два вектора $\overline{a}$ и $\overline{b}$. Ако O е произволна точка и ако $\overrightarrow{OA}=\overline{a}$, $\overrightarrow{AB}=\overline{b}$, тогаш векторот $\overrightarrow{OB}$ ќе го викаме збир на векторите $\overline{a}$ и $\overline{b}$ и ќе пишуваме $\overrightarrow{OB}=\overline{a}+\overline{b}$. Бидејќи збирот на векторите $\overline{a}$ и $\overline{b}$ не зависи од изборот на точката O (задача 11), следува дека на кои било два вектора $\overline{a}$ и $\overline{b}$ се придружува единствен вектор $\overline{a}+\overline{b}$, т.е. во множеството вектори е дефинирана една операција што ќе ја викаме собирање на вектори.

11. Докажи дека збирот $\overline{a}+\overline{b}$ на векторите $\overline{a}$ и $\overline{b}$ не зависи од изборот на точката O.

Решение. Нека O и O_1 се две точки и нека $\overrightarrow{OA}=\overline{a}=\overrightarrow{O_1A_1}$, $\overrightarrow{AB}=\overline{b}=\overrightarrow{A_1B_1}$ (црт. 1). Треба да докажеме дека $\overrightarrow{O_1B_1}=\overrightarrow{OB}$. Од $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{O_1A_1}$ и $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A_1B_1}$, според 4, следува дека $\overrightarrow{OO_1}=\overrightarrow{AA_1}$ и $\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{BB_1}$, што значи дека $\overrightarrow{OO_1}=\overrightarrow{BB_1}$. Користејќи ја пак задачата 4, добиваме дека $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{O_1B_1}$.



Црт. 1

12. Докажи дека за произволни три точки A,B,C важи равенството $\vec{AB}+\vec{BC}=\vec{AC}$ (правило на три точки).

13. Нека $\bar{a}$ и $\bar{b}$ се два неколинеарни вектори и нека ABCD е паралелограм, така што $\vec{AB}=\bar{a}$, $\vec{AD}=\bar{b}$. Да се докаже дека $\vec{AC}=\bar{a}+\bar{b}$ (правило на паралелограм).

Решение. Бидејќи четириаголникот ABCD е паралелограм, следува дека $\vec{BC}=\vec{AD}$, па, според правилото на три точки, имаме

$$\vec{AC} = \vec{AB}+\vec{BC} = \vec{AB}+\vec{AD} = \bar{a} + \bar{b}.$$

14. Докажи дека за секој вектор $\bar{a}$ важат равенствата

$$\bar{a}+\bar{o} = \bar{o}+\bar{a} = \bar{a}. \qquad (1)$$

15. Докажи дека за секој вектор $\bar{a}$ постои единствен вектор $\bar{b}$, така што

$$\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a} = \bar{o}. \qquad (2)$$

16. Ако векторите $\bar{a}$ и $\bar{b}$ се колинеарни, тогаш и векторот $\bar{a}+\bar{b}$ е колинеарен со нив. Докажи!

Решение. Ако $\vec{OA}=\bar{a}$, $\vec{AB}=\bar{b}$, тогаш од колинеарноста на векторите $\bar{a}$ и $\bar{b}$, следува дека точките O,A,B се колинеарни (види 1), а од ова, пак, следува дека векторите $\vec{OB}=\bar{a}+\bar{b}$ и $\vec{OA}=\bar{a}$ се колинеарни.

17. Нека $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се колинеарни вектори со

а) иста насока,

б) спротивни насоки.

Да се одреди насоката и должината на векторот $\bar{a}+\bar{b}$.

18. Дали може должината на векторот $\bar{a}+\bar{b}$ да биде помала од должината на векторот $\bar{a}$ или од должината на векторот $\bar{b}$?

19. Докажи дека за кои било два вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ важат неравенствата

$$a-b \le |\bar{a}+\bar{b}| \le a+b.$$

20. Во кој случај важи равенството:

а) $|\bar{a}+\bar{b}| = a+b$;

б) $|\bar{a}+\bar{b}| = a-b$?

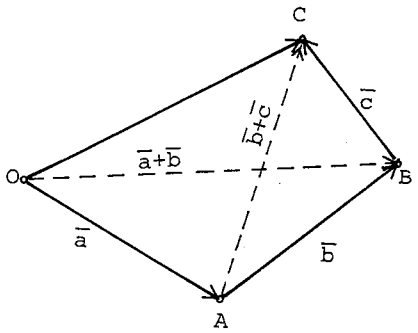
21. Ако $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ се три произволни вектори, тогаш

$$\bar{a}+(\bar{b}+\bar{c}) = (\bar{a}+\bar{b})+\bar{c}, \qquad (3)$$

т.е. за операцијата собирање на вектори важи асоцијативниот закон. Докажи!

Решение. Нека $\bar{a}=\vec{OA}$, $\bar{b}=\vec{AB}$, $\bar{c}=\vec{BC}$. Ќе го конструираме збирот на векторите $(\bar{a}+\bar{b})$ и $\bar{c}$. Имаме (црт. 2) $\bar{a}+\bar{b}=\vec{OB}$ и $\vec{OB}+\vec{BC}=\vec{OC}$. Значи,

$$\vec{OC} = (\bar{a}+\bar{b})+\bar{c}.$$



Црт. 2

Сега, да го конструираме збирот на векторите $\bar{a}$ и $(\bar{b}+\bar{c})$. Според дефиницијата, имаме

$$\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC} = \bar{b} + \bar{c}$$

и

$$\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AC} = \bar{a} + (\bar{b}+\bar{c}).$$

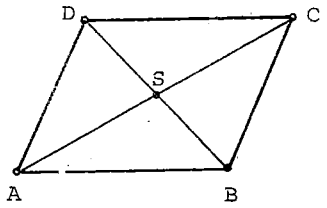
Значи, $(\bar{a}+\bar{b})+\bar{c} = \bar{a}+(\bar{b}+\bar{c})$.

22. Докажи дека за операцијата собирање на вектори важи комутативниот закон, т.е. за кои било два вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ важи равенството

$$\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}. \qquad (4)$$

23. Да се докаже дека четириаголникот ABCD е паралелограм ако и само ако неговите дијагонали се преполовуваат.

Решение. Нека ABCD е паралелограм и $S=AC\cap BD$ пресекот на неговите дијагонали (црт. 3). Ќе докажеме дека S е средина на AC и на BD. За тоа е доволно да докажеме дека $\vec{SA}+\vec{SC}=\bar{o}$ и $\vec{SB}+\vec{SD}=\bar{o}$. Имаме



Црт. 3

$$\vec{SA} + \vec{AB} = \vec{SB}, \quad \vec{SC} + \vec{CD} = \vec{SB},$$

па

$$(\vec{SA}+\vec{AB}) + (\vec{SC}+\vec{CD}) = \vec{SB}+\vec{SD},$$

$$(\vec{SA}+\vec{SC}) + (\vec{AB}+\vec{CD}) = \vec{SB}+\vec{SD}.$$

Бидејќи $\vec{AB}+\vec{CD}=\bar{o}$, следува дека $\vec{SA}+\vec{SC}=\vec{SB}+\vec{SD}$. Векторот $\vec{SA}+\vec{SC}$ е колинеарен со векторот $\vec{AC}$, а векторот $\vec{SB}+\vec{SD}$ е колинеарен со векторот $\vec{BD}$, а векторите $\vec{AC}$ и $\vec{BD}$ не се колинеарни. Значи, равенството $\vec{SA}+\vec{SC}=\vec{SB}+\vec{SD}$ е можно само во случајот $\vec{SA}+\vec{SC}=\vec{SB}+\vec{SD}=\bar{o}$.

Обратно, да претпоставиме дека S е средина на дијагоналите AC и BD на четириаголникот ABCD. Ќе докажеме дека тој четириагол-

ник е паралелограм. За тоа е доволно да докажеме дека $\vec{AB}=\vec{DC}$. Од тоа што S е средина на AC следува дека $\vec{AS}=\vec{SC}$, а од тоа што S е средина на BD следува дека $\vec{SB}=\vec{DS}$, па имаме:

$$\vec{AB} = \vec{AS}+\vec{SB} = \vec{SC}+\vec{DS} = \vec{DS}+\vec{SC} = \vec{DC}.$$

24. Да се докаже дека четириаголникот ABCD е паралелограм ако и само ако за произволна точка O важи равенството $\vec{OA}+\vec{OC}=\vec{OB}+\vec{OD}$.

Решение. За произволен четириаголник ABCD и произволна точка O имаме:

$$\vec{OA}+\vec{OC} = (\vec{OB}+\vec{BA}) + (\vec{OD}+\vec{DC}) = (\vec{OB}+\vec{OD}) + (\vec{BA}+\vec{DC}).$$

Следствено, важи равенството $\vec{OA}+\vec{OC}=\vec{OB}+\vec{OD}$ ако и само ако $\vec{BA}+\vec{DC}=\bar{o}$, т.е. ако и само ако $\vec{AB}=\vec{DC}$. Според 3, важи ова равенство ако и само ако четириаголникот ABCD е паралелограм.

25. Нека ABCD е паралелограм и S пресекот на неговите дијагонали. Да се упростат изразите:

а) $(\vec{BC}+\vec{SA}) + \vec{SC}$; б) $(\vec{AB}+\vec{DS}) + \vec{SA}$;

в) $\vec{DS} + (\vec{SA}+\vec{BC})$; г) $\vec{DS}+\vec{BC} + \vec{SA}+\vec{AB}$.

Решение. а) Бидејќи ABCD е паралелограм, пресекот S на неговите дијагонали е средина на дијагоналата AC, па $\vec{AS}=\vec{SC}$, т.е. $\vec{SA}+\vec{SC}=\bar{o}$. Според асоцијативниот закон, ќе имаме:

$$(\vec{BC}+\vec{SA})+\vec{SC} = \vec{BC}+(\vec{SA}+\vec{SC}) = \vec{BC}+\bar{o} = \vec{BC}.$$

26. Даден е правилен шестаголник ABCDEF. Со помош на векторите $\bar{a}=\vec{AB}$ и $\bar{b}=\vec{AF}$ да се изразат векторите $\vec{BC}, \vec{CD}, \vec{ED}$ и $\vec{FE}$.

27. Да се разложи еден вектор $\bar{a}$ на два ненулти собирока значи да се најдат два ненулти вектора $\bar{p}$ и $\bar{q}$, така што $\bar{a} = \bar{p}+\bar{q}$.

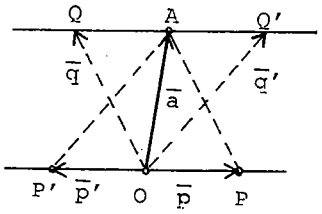
Да се разложи векторот $\bar{a}$ графички на два собирока ако се познати:

а) должината и правецот на едниот собирок;

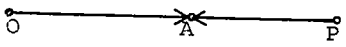
б) должините на двата собирока;

в) правците на двата собирока.

Решение. а) Нека $\overrightarrow{OA}=\bar{a}$ е дадениот вектор и нека едниот собирок има правец паралелен со правата p и има должина m. Ако тој вектор го нанесеме од точката O, тогаш постојат два такви вектори. Тоа се векторите $\bar{p}=\overrightarrow{OP}$ и $\bar{p}'=\overrightarrow{OP'}$ (црт. 4). Ако OPAQ и OP'AQ'



Црт. 4



Црт. 5

се паралелограми, тогаш вториот собирок е $\bar{q}=\overrightarrow{OQ}$, односно $\bar{q}'=\overrightarrow{OQ'}$. Во случајот кога и $\bar{a}$ е колинеарен со правата p, тогаш вториот собирок е векторот $\bar{q}=\overrightarrow{PA}$ (црт. 5).

28. Ако аголот меѓу векторите $\bar{a}$ и $\bar{b}$ не е поголем од правиот, тогаш должината на $\bar{a}+\bar{b}$ не е помала од a или од b. Докажи!

29. Ако должината на векторот $\bar{a}+\bar{b}$ не е поголема од должината на некој од собироците, тогаш аголот меѓу $\bar{a}$ и $\bar{b}$ е поголем од правиот. Докажи!

30. Нека a=b. Докажи дека должината на $\bar{a}+\bar{b}$ не е поголема од a ако и само ако аголот меѓу $\bar{a}$ и $\bar{b}$ не е помал од 120°.

31. Нека векторите $\bar{a}$ и $\bar{b}$ се заемно нормални и нека $|\bar{a}+\bar{b}|=2a$. Да се најдат аглите што векторот $\bar{a}+\bar{b}$ ги зафаќа со векторите $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

32. Да се најде аголот меѓу векторите $\bar{a}$ и $\bar{b}$ ако векторите $\bar{b}$, $\bar{c}=\bar{a}+\bar{b}$ и $\bar{d}=\bar{c}+\bar{b}$ имаат еднакви должини.

33. При кои услови збирот $\bar{a}+\bar{b}$ на векторите $\bar{a}$ и $\bar{b}$ го дели аголот меѓу нив на половина?

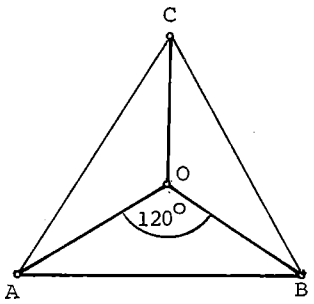
Решение. Според правилото на паралелограм, ако $\bar{a}=\vec{OA}$, $\bar{b}=\vec{OB}$ и ако OACB е паралелограм, тогаш $\bar{a}+\bar{b}=\vec{AC}$. Значи, $\bar{a}+\bar{b}$ лежи на дијагоналата на паралелограмот OACB, а таа го дели на половина аголот кај O ако и само ако тој паралелограм е ромб.

Следствено, збирот $\bar{a}+\bar{b}$ го дели аголот меѓу $\bar{a}$ и $\bar{b}$ на половина ако и само ако векторите $\bar{a}$ и $\bar{b}$ имаат исти должини (a=b).

34. Како се менува збирот на два вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ ако и двата вектора се ротираат за даден насочен агол?

35. Нека ABC е рамностран триаголник со центар O. Да се најде збирот на векторите $\vec{OA}$, $\vec{OB}$ и $\vec{OC}$.

Решение. Да ставиме $\bar{a}=\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}$. Векторите $\vec{OA}$,$\vec{OB}$ и $\vec{OC}$ да ги ротираме околу точката O за агол 120°. Тогаш $\vec{OA}$ поминува во $\vec{OB}$,



Црт. 6

$\vec{OB}$ поминува во $\vec{OC}$ и $\vec{OC}$ поминува во $\vec{OA}$, па векторот $\bar{a}$ поминува во себе. Според 34, и векторот $\bar{a}$ се ротира околу точката O за агол 120°. Тоа е можно само во случајот кога $\bar{a}=\bar{o}$, т.е. $\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}=\bar{o}$.

36. Да се најде збирот на векторите $\vec{OA}_1,\vec{OA}_2,\ldots,\vec{OA}_n$, каде што $A_1A_2\ldots A_n$ е правилен n-аголник со центар O.

Решение. Да ставиме

$$\bar{a} = \vec{OA}_1+\vec{OA}_2+\ldots+\vec{OA}_n.$$

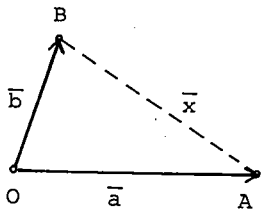
Секој од собироците $\vec{OA}_i$, i=1,2,...,n, да го ротираме околу точката O за насочениот агол $\alpha=\sphericalangle A_1\overrightarrow{OA}_2$. Тогаш $\vec{OA}_1$ поминува во $\vec{OA}_2$, $\vec{OA}_2$ во $\vec{OA}_3,\ldots,\vec{OA}_n$ во $\vec{OA}_1$, па векторот $\bar{a}$ ќе помине во себе. Спо-

ред 34, векторот $\bar{a}$ се ротира за истиот агол $\alpha=\sphericalangle\overrightarrow{A_1OA_2}\neq 0$, па, значи, $\bar{a}=\bar{o}$, т.е. $\overrightarrow{OA}_1+\overrightarrow{OA}_2+\ldots+\overrightarrow{OA}_n=\bar{o}$.

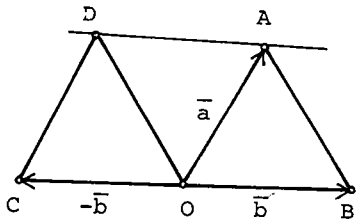
Да забележиме дека во случајот кога $n=2m$ е парен број ќе имаме $\overrightarrow{OA}_1+\overrightarrow{OA}_{m+1}=\bar{o}$, $\overrightarrow{OA}_2+\overrightarrow{OA}_{m+2}=\bar{o},\ldots,\overrightarrow{OA}_m+\overrightarrow{OA}_{2m}=\bar{o}$, па и $\overrightarrow{OA}_1+\overrightarrow{OA}_2+\ldots+\overrightarrow{OA}_{2m}=\bar{o}$.

3. ОДЗЕМАЊЕ НА ВЕКТОРИ

Нека се дадени два ненулти вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$. Да избереме произволна точка O и да ги нанесеме векторите $\overrightarrow{OA}=\bar{a}$ и $\overrightarrow{OB}=\bar{b}$. Тогаш имаме $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}$, па ставајќи $\bar{x}=\overrightarrow{BA}$ (црт. 7), добиваме $\bar{b}+\bar{x}=\bar{a}$. Векторот $\bar{x}$ ќе го викаме разлика на векторите $\bar{a}$ и $\bar{b}$ и ќе го означуваме со $\bar{x}=\bar{a}-\bar{b}$.



Црт. 7



Црт. 8

37. Докажи дека $\bar{a}-\bar{b}=\bar{a}+(-\bar{b})$.

Решение. Да ги нанесеме векторите $\bar{a},\bar{b}$ и $-\bar{b}$ од иста точка O. Ако $\bar{a}=\overrightarrow{OA}$, $\bar{b}=\overrightarrow{OB}$, $-\bar{b}=\overrightarrow{OC}$ (црт. 8), тогаш

$$\overrightarrow{BA}=\bar{a}-\bar{b}.$$

Сега, да го конструираме паралелограмот OADC. Според правилото за паралелограм, имаме

$$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\bar{a}+(-\bar{b}).$$

Но, и четириаголникот OBAD е паралелограм, од што следува дека $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OD}$. Значи,

$$\bar{a}-\bar{b}=\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OD}=\bar{a}+(-\bar{b}).$$

38. Нека ABCD е паралелограм и S пресекот на неговите дијагонали. Со помош на векторите $\bar{a}=\overrightarrow{SA}$ и $\bar{b}=\overrightarrow{SB}$ да се изразат векторите $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{DA}$.

39. Даден е правилен шестаголник ABCDEF. Со помош на векторите $\bar{a}=\overrightarrow{AB}$ и $\bar{b}=\overrightarrow{AF}$ да се изразат векторите $\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DE}$ и $\overrightarrow{EF}$.

40. Разгледувајќи го паралелограмот, конструиран над векторите $\bar{a}$ и $\bar{b}$, да се провери точноста на равенството $(\bar{a}-\bar{b})+\bar{b}=\bar{a}$.

41. Да се докаже дека за кои било два вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ важат неравенствата

$$|a-b| \leq |\bar{a}-\bar{b}| \leq a + b.$$

42. Во кој случај важи равенството:

а) $|\bar{a}-\bar{b}| = a+b$ б) $|\bar{a}-\bar{b}| = a-b$;

в) $|\bar{a}-\bar{b}| = b-a$; г) $|\bar{a}+\bar{b}| = |\bar{a}-\bar{b}|$?

43. Да се најде векторот $\bar{x}$ од равенството:

а) $\bar{a}+\bar{x}-\bar{b} = \bar{a}+\bar{c}$; б) $\bar{a}-\bar{x} = \bar{c}-\bar{b}+\bar{a}$.

4. МНОЖЕЊЕ НА ВЕКТОР СО БРОЈ

Под производ на векторот $\bar{a}$ со реалниот број к ќе го подразбираме векторот $\bar{b}=к\bar{a}$ кој е колинеарен со векторот $\bar{a}$, кој има должина $|к|a$ и кој е истонасочен со векторот $\bar{a}$, ако $к > 0$, а е спротивно насочен од $\bar{a}$, ако $к < 0$. Ако $к = 0$ или $\bar{a}=\bar{o}$, тогаш $к\bar{a}=\bar{o}$.

Ако векторот $\bar{a}\neq\bar{o}$, тогаш векторот $\frac{1}{a}\bar{a}=\bar{a}_o$ е единичен вектор исто насочен со векторот $\bar{a}$; според тоа, $\bar{a}=a\bar{a}_o$. Ако $\bar{a}$ и $\bar{b}$ се два колинеарни вектори и ако $\bar{b}\neq\bar{o}$, тогаш односот $\bar{a}/\bar{b}$ се наречува реалниот број к, така што $\bar{a}=к\bar{b}$.

44. Избери произволен ненулти вектор $\bar{a}$ и конструирај ги векторите: $2\bar{a}$, $-3\bar{a}$, $\frac{3}{2}\bar{a}$, $\sqrt{2}\bar{a}$, $-\sqrt{3}\bar{a}$.

45. Избери два неколинеарни вектори $\bar{a},\bar{b}$ и конструирај ги векторите: $2\bar{a}+\bar{b}$, $\bar{a}-\frac{1}{2}\bar{b}$, $-\frac{3}{2}\bar{a}+\sqrt{2}\bar{b}$.

46. Избери четири вектори $\bar{a},\bar{b},\bar{c},\bar{d}$ и конструирај ги векторите: $2\bar{a}-3\bar{b}-(\bar{c}-2\bar{d})$, $\bar{a}+2(\bar{b}-3\bar{c})$, $\bar{b}-(2\bar{a}+\bar{b})+\bar{c}$.

47. Да се докаже дека множењето на вектор со број ги има следниве својства:

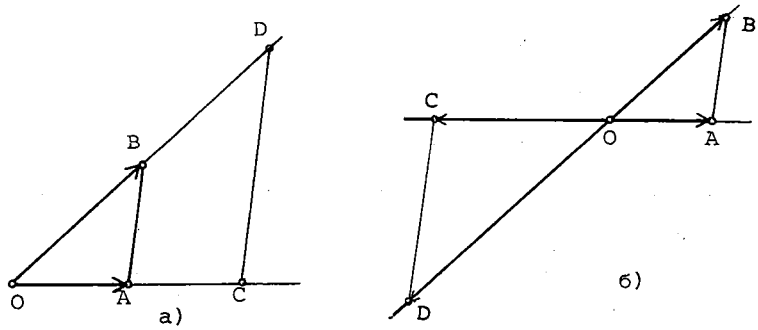
$$1\cdot\bar{a} = \bar{a}, \tag{4}$$

$$k(m\bar{a}) = (km)\bar{a}, \tag{5}$$

$$(k+m)\bar{a} = k\bar{a}+m\bar{a}, \tag{6}$$

$$k(\bar{a}+\bar{b}) = k\bar{a}+k\bar{b}. \tag{7}$$

Решение. Ќе го докажеме само равенството (7). За таа цел, нека $\bar{a}=\overrightarrow{OA}$, $\bar{b}=\overrightarrow{AB}$; тогаш $\overrightarrow{OB}=\bar{a}+\bar{b}$. Го конструираме триаголникот OCD сличен со триаголникот OAB, така што $\overrightarrow{OC}=k\overrightarrow{OA}$ (за $k > 0$, црт. 9 а), а за $k < 0$, црт. 9 б)). Од сличноста на триаголниците OAB и OCD



Црт. 9

следува дека $\overrightarrow{OC}=k\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OD}=k\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{CD}=k\overrightarrow{AB}$. Но, $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CD}$, т.е. $k\overrightarrow{OB}=k\overrightarrow{OA}+k\overrightarrow{AB}$. Значи,

$$k(\bar{a}+\bar{b}) = k\bar{a}+k\bar{b}.$$

48. Да се докаже дека за кои било реални броеви x,y и кои било вектори $\bar{a},\bar{b}$ важат равенствата:

а) $(x-y)\bar{a} = x\bar{a}-y\bar{a}$; б) $x(\bar{a}-\bar{b}) = x\bar{a}-y\bar{b}$.

49. Да се упрости изразот:

а) $3(\bar{a}-2\bar{b})-2(3\bar{a}-\bar{b})+4(\bar{a}+\bar{b})$;

б) $2(\bar{a}-3\bar{b}+2\bar{c})+4\bar{b}-2(\bar{a}-\bar{b}+3\bar{c})$.

50. Да се реши векторската равенка по непознатиот вектор $\overline{x}$:

а) $2\overline{x}-\overline{a}+\overline{b} = 2(\overline{a}+\overline{b})+\overline{x}$;

б) $3\overline{a}-\overline{b}-2\overline{x} = \overline{c}-3\overline{x}+2\overline{a}$;

в) $2(\overline{a}-\overline{x})+3\overline{b}+\overline{a}-\overline{x} = 3(\overline{a}+\overline{b}-\overline{x})$;

г) $\overline{a}-\overline{x}+3\overline{b} = 2\overline{b}-(\overline{a}+\overline{x})$.

Решение. а) При решавањето на векторски равенки, важат сите формални правила што важат за решавање на обични линеарни равенки и системи линеарни равенки.

Додавајќи го векторот $-\overline{x}+\overline{a}-\overline{b}$ на двете страни од дадената равенка, добиваме

$$2\overline{x}-\overline{a}+\overline{b}-\overline{x}+\overline{a}-\overline{b} = 2(\overline{a}+\overline{b})+\overline{x}-\overline{x}+\overline{a}-\overline{b},$$

од каде што добиваме

$$\overline{x} = 2(\overline{a}+\overline{b})+\overline{a}-\overline{b} = 3\overline{a}+\overline{b}.$$

51. Да се реши системот векторски равенки (по непознатите $\overline{x}$ и $\overline{y}$):

а) $2\overline{x}+3\overline{y} = \overline{a}+\overline{b}$, $\overline{x}+2\overline{y} = \overline{a}-\overline{b}$;

б) $2\overline{x}-\overline{a}-\overline{b}-\overline{y} = \overline{a}+\overline{x}+\overline{y}$, $\overline{a}+\overline{x}-\overline{b} = \overline{b}-\overline{x}-\overline{y}$;

в) $2\overline{x}-\overline{y} = \overline{b}-2\overline{a}$, $4\overline{x}-2\overline{y} = 2\overline{a}$;

г) $\overline{a}+2(\overline{x}-\overline{y}) = 4\overline{y}+\overline{a}$, $3(\overline{y}-\overline{b}) = \overline{x}-3\overline{b}$.

52. Да се конструираат векторите $\overline{x}$ и $\overline{y}$ ако:

а) $\overline{x}+\overline{y} = \overline{a}$, $\overline{x}-\overline{y} = \overline{b}$;

б) $2\overline{x}-\overline{y} = \overline{a}+\overline{b}$, $\overline{x}+\overline{y} = 2\overline{a}-\overline{b}$;

в) $\sqrt{2}\overline{x}+\overline{a} = \overline{b}-\overline{y}$, $\overline{x}-\overline{a} = \overline{y}+\overline{b}$,

каде што $\overline{a}$ и $\overline{b}$ се два дадени вектори.

53. Со помош на векторите $\overline{u}=\overline{a}-\overline{b}$ и $\overline{v}=2\overline{a}+\overline{b}$ да се изразат векторите

а) $4\overline{a}-3\overline{b}$; б) $2\overline{b}-\overline{a}$; в) $\frac{1}{2}\overline{a}+\frac{2}{3}\overline{b}$.

54. Три ненулти вектори може да формираат триаголник ако и само ако $\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}=\overline{o}$. Докажи!

Решение. Да претпоставиме дека векторите $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ формираат триаголник, т.е. постои триаголник ABC, така што $\bar{a}=\vec{BC}$, $\bar{b}=\vec{CA}$, $\bar{c}=\vec{AB}$. Тогаш имаме:

$$\bar{a}+\bar{b}+\bar{c} = \vec{BC}+\vec{CA}+\vec{AB} = (\vec{BC}+\vec{CA})+\vec{AB} = \vec{BA}+\vec{AB} = \bar{o}.$$

Обратно, да претпоставиме дека $\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}=\bar{o}$. Нека A е произволна точка и нека B е точката, така што $\vec{AB}=\bar{c}$, а C онаа точка, така што $\vec{BC}=\bar{a}$ (направи цртеж). Тогаш за векторот $\vec{CA}$ ќе имаме:

$$\vec{CA} = \vec{CB}+\vec{BA} = -\vec{BC}-\vec{AB} = -\bar{a}-\bar{c} = -(\bar{a}+\bar{c}).$$

Од $\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}=\bar{o}$ следува дека $\bar{b}=-(\bar{a}+\bar{c})$, па, значи, $\bar{b}=\vec{CA}$, т.е. векторите $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ го формираат триаголникот ABC.

55. Да се формулира и докаже обопштувањето од претходната задача за n ненулти вектори и n-аголник.

56. Дадени се векторите $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ коишто се пар по пар неколинеарни. Во кој случај векторите:

а) $\bar{a}-\bar{b},\bar{b}-\bar{c},\bar{c}-\bar{a}$; б) $\bar{a}+\bar{b},\bar{b}+\bar{c},\bar{c}+\bar{a}$,

формираат триаголник.

57. Дадени се векторите $\bar{a}=\bar{p}-3\bar{q}$, $\bar{b}=\bar{q}-2\bar{p}$. Да се најде вектор $\bar{c}$, така што $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ да формираат триаголник.

58. Дадени се три пар по пар неколинеарни вектори $\bar{p},\bar{q}$ и $\bar{r}$. Да се провери дали векторите $\bar{a},\bar{b},\bar{c},\bar{d}$ формираат четириаголник:

а) $\bar{a} = \bar{p}-\bar{q}-\bar{r}$, $\bar{b} = \bar{q}-\bar{r}-\bar{p}$, $\bar{c} = \bar{r}-\bar{p}-\bar{q}$, $\bar{d} = \bar{p}+\bar{q}+\bar{r}$;

б) $\bar{a} = \bar{p}+\bar{q}-\bar{r}$, $\bar{b} = \bar{q}+\bar{r}-\bar{p}$, $\bar{c} = \bar{r}+\bar{p}-\bar{q}$, $\bar{d} = \bar{p}+\bar{q}+\bar{r}$.

59. Дадени се векторите $\bar{a}=\bar{p}+\bar{q}-\bar{r}$, $\bar{b}=\bar{p}-2\bar{q}-\bar{r}$, $\bar{c}=-\bar{p}-\bar{q}+3\bar{r}$. Да се најде вектор $\bar{d}$, така што векторите $\bar{a},\bar{b},\bar{c},\bar{d}$ да формираат четириаголник.

60. Векторите $\bar{a}$ и $\bar{b}$ не се колинеарни. Да се најде вектор $\bar{x}$ кој лежи на симетралата на аголот меѓу векторите $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

Решение. Според 33, збирот $\bar{a}+\bar{b}$ на векторите $\bar{a}$ и $\bar{b}$ лежи на симетралата на аголот меѓу векторите $\bar{a}$ и $\bar{b}$ ако и само ако a=b.

Значи, треба да најдеме два вектора, со иста должина, колинеарни со $\bar{a}$ и $\bar{b}$ соодветно и да го земеме нивниот збир. Векторите $b\bar{a}$ и $a\bar{b}$ имаат должина ab, па

$$\bar{x} = b\bar{a} + a\bar{b}.$$

61. Даден е паралелограмот ABCD и точката O. Со помош на векторите $\bar{p}=\vec{OA}$, $\bar{q}=\vec{OB}$ и $\bar{r}=\vec{OC}$, да се изразат векторите $\vec{OD}$ и $\vec{OS}$, каде што S е пресекот на дијагоналите на паралелограмот.

62. Даден е ромбот ABCD. Да се изразат векторите $\vec{AB}$, $\vec{BC}$, $\vec{CD}$ и $\vec{DA}$ со помош на векторите $\bar{a}=\vec{AC}$ и $\bar{b}=\vec{BD}$.

63. Нека A_1, B_1, C_1 се средините соодветно на страните BC, CA и AB на триаголникот ABC. Да се најде збирот на векторите $\vec{AA_1}$, $\vec{BB_1}$ и $\vec{CC_1}$.

Решение. Имаме (направи цртеж):

$$\vec{AA_1} = \vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{BC},\quad \vec{BB_1} = \vec{BC} + \frac{1}{2}\vec{CA},\quad \vec{CC_1} = \vec{CA} + \frac{1}{2}\vec{AB},$$

па

$$\vec{AA_1}+\vec{BB_1}+\vec{CC_1} = \frac{3}{2}(\vec{AB}+\vec{BC}+\vec{CA}) = \bar{o}.$$

64. Нека точките A, B, C и D се колинеарни, а M и N се средини на отсечките AB и CD соодветно. Докажи дека

$$2\vec{MN} = \vec{AC}+\vec{BD} = \vec{AD}+\vec{BC}.$$

Решение. Бидејќи M е средина на отсечката AB, а N средина на отсечката CD, ќе имаме $2\vec{MB}=\vec{AB}$, $2\vec{CN}=\vec{CD}$, па:

$$2\vec{MN} = 2(\vec{MB}+\vec{BC}+\vec{CN}) = 2\vec{MB}+2\vec{BC}+2\vec{CN} =$$

$$= \vec{AB}+2\vec{BC}+\vec{CD} = (\vec{AB}+\vec{BC})+(\vec{BC}+\vec{CD}) = \vec{AC}+\vec{CD},$$

$$2\vec{MN} = \vec{AB}+2\vec{BC}+\vec{CD} = (\vec{AB}+\vec{BC}+\vec{CD})+\vec{BC} = \vec{AD}+\vec{BC}.$$

65. Нека AB е дијаметар на една кружница со центар O и нека S е произволна точка. Докажи дека $\vec{SA}+\vec{SB}=2\vec{SO}$.

66. Тетивите A_1A_2 и B_1B_2 од кружницата (O,r) се заемно нормални и се сечат во точката S. Докажи дека $\vec{SA_1}+\vec{SA_2}+\vec{SB_1}+\vec{SB_2}=2\vec{SO}$.

Решение. Нека A и B се средини соодветно на тетивите A_1A_2 и B_1B_2 (направи цртеж). Тогаш $\vec{AA_1}+\vec{AA_2}=\bar{o}$, $\vec{BB_1}+\vec{BB_2}=\bar{o}$, па

$$\vec{SA}_1+\vec{SA}_2+\vec{SB}_1+\vec{SB}_2 = (\vec{SA}+\vec{AA}_1)+(\vec{SA}+\vec{AA}_2)+(\vec{SB}+\vec{BB}_1)+(\vec{SB}+\vec{BB}_2) =$$
$$= 2(\vec{SA}+\vec{SB})+(\vec{AA}_1+\vec{AA}_2)+(\vec{BB}_1+\vec{BB}_2) =$$
$$= 2(\vec{SA}+\vec{SB}) = 2\vec{SO}.$$

5. ДЕЛЕЊЕ НА ОТСЕЧКА ВО ДАДЕН ОДНОС

Ако точките A,B и C се колинеарни и ако важи $\vec{AC}:\vec{CB}=\lambda$, тогаш велиме дека точката C ја дели отсечката AB во однос λ.

67. За векторите $\vec{AC}$ и $\vec{AB}$ важи $\vec{AC}=\lambda\vec{AB}$. Пресметај ги односите $\vec{CB}:\vec{AB}$ и $\vec{AC}:\vec{CB}$.

Решение. Имаме:

$$\vec{CB} = \vec{CA}+\vec{AB} = -\vec{AC}+\vec{AB} = -\lambda\vec{AB}+\vec{AB} = (1-\lambda)\vec{AB},$$

од каде што добиваме $\vec{CB}:\vec{AB} = 1-\lambda$.

Користејќи го ова добиваме дека $\vec{AC}:\vec{CB} = \lambda:(1-\lambda)$.

68. Нека точката C ја дели отсечката AB во однос m:n. Пресметај ги односите $\vec{AC}:\vec{AB}$ и $\vec{CB}:\vec{AB}$.

Решение. Од тоа што точката C ја дели отсечката AB во однос m:n следува дека $\vec{AC}:\vec{CB}=m:n$. Ако $\vec{AC}:\vec{AB}=\lambda$, т.е. $\vec{AC}=\lambda\vec{AB}$, тогаш, според претходната задача, имаме

$$\frac{\lambda}{1-\lambda} = \frac{m}{n},$$

од каде што добиваме $\lambda = \frac{m}{m+n}$. Значи, $\vec{AC}:\vec{CB} = m:(m+n)$.

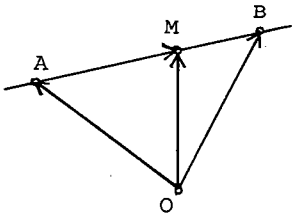
Бидејќи $1-\lambda = 1-\frac{m}{m+n} = \frac{n}{m+n}$, добиваме дека $\vec{CB}:\vec{AB}=n:(m+n)$.

69. Нека точката M ја дели отсечката AB во однос $\lambda\neq-1$ и нека O е произволна точка. Докажи дека

$$\vec{OM} = \frac{\vec{OA}+\lambda\vec{OB}}{1+\lambda}. \qquad (8)$$

Решение. Од тоа што точката M ја дели отсечката AB во однос λ, следува дека $\vec{AM}=\lambda\vec{MB}$. За векторот $\vec{OM}$ имаме

$$\vec{OM} = \vec{OA}+\vec{AM} = \vec{OA}+\lambda\vec{MB} =$$
$$= \vec{OA}+\lambda(\vec{OB}-\vec{OM}) = \vec{OA}+\lambda\vec{OB}-\lambda\vec{OM},$$



Црт. 10

т.е. $(1+\lambda)\vec{OM} = \vec{OA}+\lambda\vec{OB}$. Но, $\lambda\neq-1$, т.е. $1+\lambda\neq0$, па важи равенството (8).

Ако $\lambda=m:n$, тогаш

$$\vec{OM} = \frac{n\vec{OA}+m\vec{OB}}{m+n}. \qquad (9)$$

Специјално, ако M е средина на отсечката AB, тогаш $\lambda=1$, па

$$\vec{OM} = \frac{\vec{OA}+\vec{OB}}{2}. \qquad (10)$$

70. Точките M_1 и M_2 ја делат отсечката AB на три еднакви делови. Да се изразат векторите $\vec{OM}_1$ и $\vec{OM}_2$ со помош на векторите $\bar{a}=\vec{OA}$ и $\bar{b}=\vec{OB}$, каде што O е произволна точка.

Решение. Точката M_1 ја дели отсечката AB во однос 1:2, а M_2 ја дели во однос 2:1. Според претходната задача имаме:

$$\vec{OM}_1 = \frac{2\vec{OA}+\vec{OB}}{3}, \qquad \vec{OM}_2 = \frac{\vec{OA}+2\vec{OB}}{3}.$$

71. Точките M_1 и M_2 ја делат отсечката AB на три еднакви дела. Да се изрази векторот $\vec{OB}$ со помош на векторите: а) $\vec{OA}$ и $\vec{OM}_1$, б) $\vec{OA}$ и $\vec{OM}_2$, каде што O е произволна точка.

72. Точките M_1, M_2 и M_3 ја делат отсечката AB на четири еднакви делови. Да се изразат векторите $\vec{OM}_1, \vec{OM}_2$ и $\vec{OM}_3$ со помош на векторите $\bar{a}=\vec{OA}$ и $\bar{b}=\vec{OB}$, каде што O е произволна точка.

73. Нека M и N се средините на страните AD и BC од четириаголникот ABCD. Да се изрази векторот $\vec{MN}$ со помош на векторите $\vec{AB}$ и $\vec{DC}$.

Решение. Имаме:

$$\vec{MN} = \frac{1}{2}(\vec{MB}+\vec{MC}) = \frac{1}{2}(\vec{MA}+\vec{AB}+\vec{MD}+\vec{DC}) =$$
$$= \frac{1}{2}(\vec{AB}+\vec{DC}+\vec{MA}+\vec{MD}) = \frac{1}{2}(\vec{AB}+\vec{DC}).$$

74. Нека ABCD е трапез со основи AB и CD, така што $\overline{AB}=k\overline{CD}$. Ако $S=AC\cap BD$, $P=AD\cap BC$, да се изразат векторите $\vec{OD}$, $\vec{OS}$ и $\vec{OP}$ со помош на векторите $\vec{OA}$, $\vec{OB}$ и $\vec{OC}$, каде што O е произволна точка.

6. ЛИНЕАРНА ЗАВИСНОСТ НА ВЕКТОРИ

За векторите $\bar{a}_1,\bar{a}_2,\ldots,\bar{a}_n$ велиме дека се линеарно зависни ако постојат реални броеви $x_1,x_2,\ldots,x_n$, од кои барем еден е различен од нула, така што важи равенството

$$x_1\bar{a}_1 + x_2\bar{a}_2 +\ldots+ x_n\bar{a}_n = \bar{o}.$$

Ако, пак, равенството $x_1\bar{a}_1+x_2\bar{a}_2+x_n\bar{a}_n=\bar{o}$ е исполнето само за $x_1=x_2=\ldots=x_n=0$, тогаш за векторите $\bar{a}_1,\bar{a}_2,\ldots,\bar{a}_n$ ќе велиме дека се линеарно независни.

75. Два вектора се линеарно зависни ако и само ако тие се колинеарни. Докажи!

Решение. Да претпоставиме дека векторите $\bar{a}$ и $\bar{b}$ се линеарно зависни. Тогаш постојат реални броеви x и y, од кои барем еден е различен од нула, така што важи

$$x\bar{a} + y\bar{b} = \bar{o}.$$

Можеме да претпоставиме дека $y\neq 0$. Тогаш имаме

$$\bar{b} = -\frac{x}{y}\bar{a},$$

т.е. векторите $\bar{a}$ и $\bar{b}$ се колинеарни.

Обратно, да претпоставиме дека векторите $\bar{a}$ и $\bar{b}$ се колинеарни. Тогаш постои реален број k, така што $\bar{a}=k\bar{b}$. Ова равенство може да го напишеме во обликот

$$1\cdot\bar{a} - k\bar{b} = \bar{o},$$

од каде што следува дека векторите $\bar{a}$ и $\bar{b}$ се линеарно зависни.

76. Три вектора се линеарно зависни ако и само ако тие се компланарни. Докажи!

Решение. Да претпоставиме дека векторите $\bar{a},\bar{b}$ и $\bar{c}$ се линеарно зависни. Тоа значи дека постојат реални броеви x,y и z, од кои барем еден е различен од нула, така што важи равенството

$$x\bar{y} + y\bar{b} + z\bar{c} = \bar{o}.$$

Можеме да претпоставиме дека $z\neq 0$. Тогаш

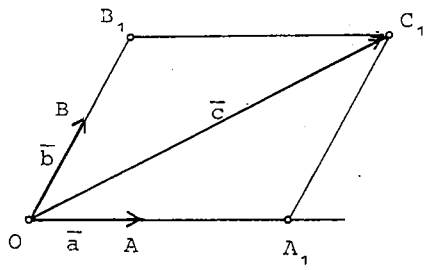
$$\bar{c} = -\frac{x}{z}\bar{a} - \frac{y}{z}\bar{b},$$

што значи дека векторите $\bar{a},\bar{b}$ и $\bar{c}$ се компланарни.

Обратно, да претпоставиме дека векторите $\bar{a},\bar{b}$ и $\bar{c}$ се компланарни. Ако два од овие вектори се колинеарни, на пример $\bar{a}$ и $\bar{b}$, тогаш $\bar{a}=k\bar{b}$ за некој реален број к, па ќе имаме

$$1\cdot\bar{a} - k\bar{b} + 0\cdot\bar{c} = \bar{o},$$

т.е. векторите $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ се линеарно зависни. Затоа, нека кои било два од векторите $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ не се колинеарни. Да ги нанесеме од иста точка O, така што $\vec{OA}=\bar{a}$, $\vec{OB}=\bar{b}$, $\vec{OC}=\bar{c}$ (црт. 11). Низ точката C да повлечеме прави паралелни со правите OB и OA и нивните пресечни точки со OA и OB да ги означиме соодветно со A_1 и B_1. Тогаш



Црт. 11

имаме $\vec{OC}=\vec{OA}_1+\vec{OB}_1$. Векторите $\vec{OA}_1$ и $\vec{OB}_1$ се колинеарни соодветно со векторите $\bar{a}$ и $\bar{b}$, па $\vec{OA}_1=x\bar{a}$, $\vec{OB}_1=y\bar{b}$ за некои реални броеви x,y. Значи,

$$\bar{c} = \vec{OC} = \vec{OA}_1+\vec{OB}_1 = x\bar{a}+y\bar{b},$$

од каде што добиваме

$$x\bar{a}+y\bar{b}+(-1)\bar{c} = \bar{o},$$

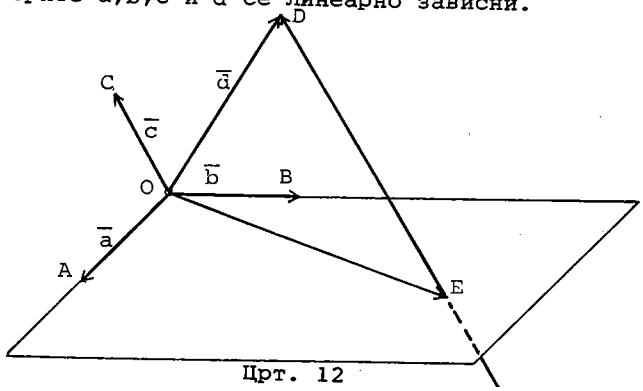
т.е. векторите $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ се линеарно зависни.

77. Докажи дека кои било четири вектори се линеарно зависни.

Решение. Нека $\bar{a},\bar{b},\bar{c},\bar{d}$ се кои било четири вектори. Ако некои три од нив се компланарни, на пример $\bar{a},\bar{b}$ и $\bar{c}$, тогаш $\bar{c}=x\bar{a}+y\bar{b}$ за некои реални броеви x,y, па ќе имаме

$$x\bar{a}+y\bar{b}+(-1)\bar{c}+0\cdot\bar{d} = \bar{o},$$

т.е. векторите $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ и $\bar{d}$ се линеарно зависни.



Црт. 12

Затоа, да претпоставиме дека кои било три од векторите $\bar{a},\bar{b},\bar{c},\bar{d}$ не се компланарни. Да ги нанесеме од иста точка O, така што $\bar{a}=\vec{OA}$, $\bar{b}=\vec{OB}$, $\bar{c}=\vec{OC}$, $\bar{d}=\vec{OD}$ (црт. 12). Низ точката D да повлечеме права паралелна со правата OC којашто ја прободува рамнината AOB во точката E. Тогаш векторите $\bar{a}=\vec{OA}$, $\bar{b}=\vec{OB}$ и $\vec{OE}$ се компланарни, па

$$\vec{OE} = x\bar{a}+y\bar{b}$$

за некои реални броеви x,y. Векторот, пак, $\vec{ED}$ е колинеарен со векторот $\bar{c}$, па

$$\vec{ED} = z\bar{c}$$

за некој реален број z. Сега, имаме

$$\bar{d} = \vec{OD} = \vec{OE}+\vec{ED} = x\bar{a}+y\bar{b}+z\bar{c},$$

од каде што добиваме

$$x\bar{a}+y\bar{b}+z\bar{c}+(-1)\bar{d} = \bar{o},$$

т.е. векторите $\bar{a},\bar{b},\bar{c},\bar{d}$ се линеарно зависни.

78. Нека векторите $\bar{a}$ и $\bar{b}$ се линеарно независни. Докажи дека векторите

$$\bar{p} = x_1\bar{a}+y_1\bar{b}, \qquad \bar{q} = x_2\bar{a}+y_2\bar{b}$$

се линеарно зависни ако и само ако

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Решение. Треба да провериме во кој случај постојат реални броеви λ и μ, од кои барем еден е различен од нула, така што важи $\lambda\bar{p}+\mu\bar{q}=\bar{o}$. Равенството $\lambda\bar{p}+\mu\bar{q}=\bar{o}$ може да го напишеме во обликот

$$(x_1\lambda+x_2\mu)\bar{a}+(y_1\lambda+y_2\mu)\bar{b} = \bar{o}$$

Но, векторите $\bar{a}$ и $\bar{b}$ се линеарно независни, па

$$x_1\lambda + x_2\mu = 0$$
$$y_1\lambda + y_2\mu = 0.$$

Ова е еден хомоген линеарен систем со две непознати (λ и μ). Тој има нетривијални решенија (барем еден од λ и μ е различен од нула) ако и само ако детерминантата на системот е нула, т.е. ако и само ако

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = 0.$$

79. Нека векторите $\bar{a}$ и $\bar{b}$ се линеарно независни. Дали векторите $\bar{p}$ и $\bar{q}$ се линеарно зависни или независни, ако:

а) $\bar{p} = 2\bar{a}+6\bar{b}$, $\bar{q} = \bar{0}$;

б) $\bar{p} = -\bar{a}+4\bar{b}$, $\bar{q} = 6\bar{a}-24\bar{b}$?

80. Нека векторите $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ се линеарно независни. Докажи дека векторите

$$\bar{p} = x_1\bar{a} + y_1\bar{b} + z_1\bar{c},$$
$$\bar{q} = x_2\bar{a} + y_2\bar{b} + z_2\bar{c},$$
$$\bar{r} = x_3\bar{a} + y_3\bar{b} + z_3\bar{c}$$

се линеарно зависни ако и само ако

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

81. Нека векторите $\bar{a},\bar{b}$ и $\bar{c}$ се линеарно независни. Да се провери дали дадените вектори се линеарно зависни или независни:

а) $\bar{p} = \bar{a}-2\bar{b}+\frac{1}{3}\bar{c}$, $\bar{q} = \frac{2}{3}\bar{a}-3\bar{b}+\frac{1}{2}\bar{c}$;

б) $\bar{p} = 4\bar{a}-\bar{b}+7\bar{c}$, $\bar{q}=-\bar{a}+2\bar{c}$;

в) $\bar{p}=3\bar{a}+2\bar{b}-\bar{c}$, $\bar{q}=7\bar{a}+2\bar{b}-3\bar{c}$, $\bar{r}=10\bar{a}+4\bar{b}-4\bar{c}$;

г) $\bar{p}=-\bar{a}+2\bar{b}+2\bar{c}$, $\bar{q}=2\bar{a}-\bar{b}+2\bar{c}$, $\bar{r}=2\bar{a}+2\bar{b}-\bar{c}$?

Решение. а) Имаме $\bar{p}=\frac{1}{3}(3\bar{a}-6\bar{b}+\bar{c})$, $\bar{q} = \frac{1}{2}(3\bar{a}-6\bar{b}+\bar{c})$, па $3\bar{p}=2\bar{q}$, т.е. векторите $\bar{p}$ и $\bar{q}$ се линеарно зависни.

в) Имаме

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & 10 \\ 2 & 2 & 4 \\ -1 & -3 & -4 \end{vmatrix} = -24-23-60+20+36+56 = -112+112 = 0,$$

па, според 80, векторите $\bar{p},\bar{q}$ и $\bar{r}$ се линеарно зависни.

82. За кои било вектори $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ и кои било реални броеви x,y,z, векторите $\bar{p}=x\bar{a}-y\bar{b}$, $\bar{q}=z\bar{b}-x\bar{c}$, $\bar{r}=y\bar{c}-z\bar{a}$ се компланарни. Докажи!

Решение. Ако векторите $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ се компланарни, тогаш јасно е дека и векторите $\bar{p},\bar{q},\bar{r}$ се компланарни. Затоа, да претпоставиме дека векторите $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ не се компланарни, т.е. дека се линеарно независни. Тогаш имаме:

$$\begin{vmatrix} x & 0 & -z \\ -y & z & 0 \\ 0 & -x & y \end{vmatrix} = xyz - xyz = 0,$$

па, според 80, векторите $\bar{p},\bar{q}$ и $\bar{r}$ се линеарно зависни, т.е. компланарни.

83. Ако векторите $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ се компланарни тогаш и векторите $\bar{a}+\bar{b}$, $\bar{b}+\bar{c}$ и $\bar{c}+\bar{a}$ се компланарни. Докажи! Дали важи и обратното?

7. РАВЕНСТВОТО $x\bar{a} = y\bar{b}$

84. За кои вредности на x,y важи равенството $x\bar{a}=y\bar{a}$?

85. За кои вектори $\bar{a}$ и $\bar{b}$ важи равенството $x\bar{a}=x\bar{b}$?

86. Нека векторите $\bar{a}$ и $\bar{b}$ не се колинеарни. Докажи дека од равенството $x\bar{a}+y\bar{b}=\bar{o}$ следува $x=y=0$.

Решение. Бидејќи векторите $\bar{a}$ и $\bar{b}$ не се колинеарни, според 75, следува дека тие се линеарно независни, па $x=y=0$.

87. Нека векторите $\bar{a}$ и $\bar{b}$ не се колинеарни. Да се определат x,y ако:

а) $(2x-y)\bar{a}+(x+2y-5)\bar{b} = \bar{o}$;

б) $(3x+y)(\bar{a}+\bar{b})-(y+5)\bar{b} = (x-1)\bar{a}-(x+2y)\bar{b}$;

в) $(x-2y)(\bar{a}-\bar{b})+(5y-2x)(\bar{a}+\bar{b}) = \bar{a}+(3-2y)\bar{b}$.

Решение. а) Бидејќи векторите $\bar{a}$ и $\bar{b}$ не се колинеарни, од равенството следува $2x-y=0$ и $x+2y-5=0$, од каде што добиваме $x=1$, $y=2$.

88. Во триаголникот ABC е повлечена симетралата $s_a=AA_2$ на аголот α. Да се изрази векторот $\bar{s}_a$ со помош на векторите $\bar{b}=\vec{AC}$ и $\bar{c}=\vec{AB}$.

Решение. Според 60, векторот $c\bar{b}+b\bar{c}$ е колинеарен со векторот $\bar{s}_a$, па постои реален број x, така што

$$\bar{s}_a = x(c\bar{b}+b\bar{c}). \tag{11}$$

Од друга страна (направи цртеж), имаме $\bar{s}_a=\vec{AA_2}=\vec{AB}+\vec{BA_2}=\bar{c}+\vec{AA_2}$. Векторот $\vec{AA_2}$ е колинеарен со векторот $\vec{BC}=\bar{b}-\bar{c}$, па постои реален број y, така што $\vec{AA_2}=y(\bar{b}-\bar{c})$. Значи, имаме

$$\bar{s}_a = \bar{c}+y(\bar{b}-\bar{c}) = y\bar{b}+(1-y)\bar{c}. \tag{12}$$

Од (11) и (12) добиваме

$$(cx-y)\bar{b}+(bx+y-1)\bar{c} = \bar{o}.$$

Векторите $\bar{b}$ и $\bar{c}$ не се колинеарни, па, според 86, следува $cx-y=0$ и $bx+y-1=0$, од каде што добиваме

$$x = \frac{1}{b+c}.$$

Заменувајќи во (11), добиваме

$$\bar{s}_a = \frac{1}{b+c}(c\bar{b}+b\bar{c}).$$

89. Нека V е центарот на впишаната кружница во триаголникот ABC. Да се изрази векторот $\vec{AV}$ со помош на векторите $\bar{b}=\vec{AC}$ и $\bar{c}=\vec{AB}$.

Решение. Според 60, имаме

$$\vec{AV} = x(c\bar{b}+b\bar{c}), \quad \vec{BV} = y(-a\bar{c}+c(\bar{b}-\bar{c})).$$

Заменувајќи во равенството $\vec{AV}+\vec{VB}=\vec{AB}$, добиваме

$$(cx-cy)\bar{b}+(bx+ay+cy-1)\bar{c} = \bar{o}.$$

Векторите $\bar{b}$ и $\bar{c}$ не се колинеарни, па, според 86, следува дека $cx-cy=0$ и $bx+ay+cy-1=0$, од каде што добиваме

$$x = \frac{1}{a+b+c}.$$

Значи,

$$\vec{AV} = \frac{1}{a+b+c}(c\bar{b}+b\bar{c}).$$

90. Нека A_λ и B_μ ги делат страните BC и CA од триаголникот ABC во однос λ и μ соодветно и нека $P=AA_\lambda \cap BB_\mu$. Да се изрази векторот $\vec{AP}$ со помош на векторите $\bar{b}=\vec{AC}$ и $\bar{c}=\vec{AB}$.

Решение. Векторот $\vec{AP}$ е колинеарен со векторот $\vec{AB}+\lambda\vec{AC}=\bar{c}+\lambda\bar{b}$, а векторот $\vec{BP}$ е колинеарен со векторот $\vec{BC}+\mu\vec{BA}=\vec{AC}-\vec{AB}-\mu\vec{AB}=\bar{b}-(1+\mu)\bar{c}$. Значи,

$$\vec{AP} = x(\bar{c}+\lambda\bar{b}), \quad \vec{BP} = y(\bar{b}-(1+\mu)\bar{c}),$$

за некои реални броеви x,y. Заменувајќи во равенството $\vec{AP}+\vec{PB}=\vec{AB}$, добиваме

$$(\lambda x-y)\bar{b}+(x+(1+\mu)y-1)\bar{c} = \bar{o}.$$

Векторите $\bar{b}$ и $\bar{c}$ не се колинеарни, па, според 86, следува $\lambda x-y=0$ и $x+(1+\mu)y-1=0$, од каде што добиваме

$$x = \frac{1}{1+\lambda+\lambda\mu}.$$

Значи,

$$\vec{AP} = \frac{1}{1+\lambda+\lambda\mu}(\bar{c}+\lambda\bar{b}).$$

91. Нека A_λ, B_μ и C_ν ги делат страните BC,CA и AB од триаголникот ABC во однос λ,μ и ν соодветно и нека $P=AA_\lambda \cap BB_\mu$, $Q=BB_\mu \cap CC_\nu$. Да се изрази векторот $\vec{PQ}$ со помош на векторите $\bar{b}=\vec{AC}$ и $\bar{c}=\vec{AB}$.

Решение. Според претходната задача, имаме:

$$\vec{BP} = \frac{\lambda}{1+\lambda+\lambda\mu}(\bar{b}-(1+\mu)\bar{c}), \quad \vec{BQ} = \frac{1}{1+\mu+\mu\nu}(\bar{b}-(1+\mu)\bar{c}),$$

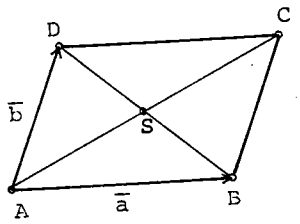
па

$$\vec{PQ} = \vec{BQ}-\vec{BP} = \frac{1-\lambda\mu\nu}{(1+\lambda+\lambda\mu)(1+\mu+\mu\nu)}(\bar{b}-(1+\mu)\bar{c}).$$

8. ПРИМЕНА ВО ГЕОМЕТРИЈАТА

92. Да се докаже дека дијагоналите во секој паралелограм се преполовуваат.

Решение. Нека ABCD е паралелограм и $S=AC\cap BD$ е пресекот на неговите дијагонали (црт. 13). Ќе докажеме дека неговите дијагонали се преполовуваат.



Црт. 13

Да ставиме $\vec{AB}=\bar{a}$, $\vec{AD}=\bar{b}$. Векторот $\vec{AS}$ е колинеарен со векторот $\vec{AC}=\bar{a}+\bar{b}$, па $\vec{AS}=\lambda(\bar{a}+\bar{b})$ за некој реален број λ. Слично, $\vec{BS}=\mu\vec{BD}=$ $=\mu(\bar{b}-\bar{a})$ за некој реален број μ. Ќе докажеме дека $\lambda=\mu=\frac{1}{2}$.

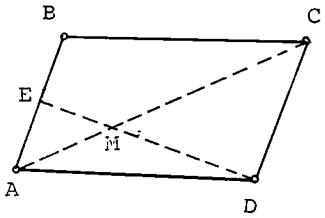
Имаме $\vec{AS}+\vec{SB} = \vec{AB}$, т.е.

$$(\lambda+\mu-1)\bar{a} + (\lambda-\mu)\bar{b} = \bar{o}.$$

Векторите $\overline{a}$ и $\overline{b}$ не се колинеарни, па $\lambda+\mu-1=0$ и $\lambda-\mu=0$, од каде што добиваме $\lambda=\mu=\frac{1}{2}$. Значи, S е средина на дијагоналите AC и BD.

93. Нека E е средина на страната AB од паралелограмот ABCD и нека $M=AC\cap DE$. Да се најдат односите $\overline{AM}:\overline{MC}$ и $\overline{DM}:\overline{ME}$.

Решение. Нека $\vec{AB}=\overline{a}$, $\vec{AD}=\overline{b}$ (црт. 14). Векторите $\vec{AM}$ и $\vec{AC}$ се колинеарни, па постои реален број x, така што $\vec{AM}=x\vec{AC}$. Бидејќи



Црт. 14

$\vec{AC}=\overline{a}+\overline{b}$, ќе имаме $\vec{AM}=x(\overline{a}+\overline{b})$. Слично, за некој реален број y ќе биде $\vec{DM}=y\vec{DE}=y(-\overline{b}+\frac{1}{2}\overline{a})$. Бидејќи $\vec{AD}+\vec{DM}=\vec{AM}$, добиваме

$$\overline{b}+y(-\overline{b}+\frac{1}{2}\overline{a}) = x(\overline{a}+\overline{b}),$$

т.е.

$$(x-\frac{1}{2}y)\overline{a}+(x+y-1)\overline{b} = \overline{o}. \qquad (13)$$

Векторите $\overline{a}$ и $\overline{b}$ не се колинеарни, па од (13) следува $x-\frac{1}{2}y = 0$ и $x+y-1=0$, од каде што добиваме $x=\frac{1}{3}$, $y=\frac{2}{3}$.

Значи, имаме $\vec{AM}=\frac{1}{3}\vec{AC}=\frac{1}{3}(\vec{AM}+\vec{MC})$, т.е. $2\vec{AM}=\vec{MC}$, од каде што следува дека $\overline{AM}:\overline{MC}=1:2$. Слично, од $\vec{DM}=\frac{2}{3}\vec{DE}$, добиваме дека $\overline{DM}:\overline{ME}=2:1$.

94. На страната AD од паралелограмот ABCD избрана е точка E, така што $\overline{AE}:\overline{AD}=k$. Ако $P=AC\cap BE$, да се најдат односите $\overline{AP}:\overline{AC}$ и $\overline{BP}:\overline{BE}$.

95. Нека E е средина на страната AB, а F средина на страната BC од паралелограмот ABCD и нека $S=AF\cap DE$, $T=EF\cap BD$. Да се најдат односите $\overline{ES}:\overline{SD}$, $\overline{AS}:\overline{SF}$, $\overline{BT}:\overline{TD}$ и $\overline{ET}:\overline{TF}$.

96. Нека точките E и F ги делат страните AB и BC од паралелограмот ABCD во односи λ и μ соодветно и нека $S=AF\cap DE$, $T=EF\cap BD$. Да се најдат односите $\overline{ES}:\overline{SD}$, $\overline{AS}:\overline{SF}$, $\overline{BT}:\overline{TD}$ и $\overline{ET}:\overline{TF}$.

97. Докажи дека средните линии во произволен четириаголник се преполовуваат.

Решение. Нека средните линии на четириаголникот ABCD се MN и PQ и нека S е средина на MN. Тогаш, за произволна точка O, имаме:

$$\vec{OS} = \frac{1}{2}(\vec{OM}+\vec{ON}) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}(\vec{OA}+\vec{OD}) + \frac{1}{2}(\vec{OB}+\vec{OC})) =$$
$$= \frac{1}{2}(\frac{1}{2}(\vec{OA}+\vec{OB}) + \frac{1}{2}(\vec{OD}+\vec{OC})) = \frac{1}{2}(\vec{OP}+\vec{OQ}),$$

од каде што следува дека S е средина и на средната линија PQ.

98. Нека S_1 и S_2 се средините на дијагоналите AC и BD од четириаголникот ABCD, а T пресекот на средните линии. Докажи дека T е средина и на отсечката S_1S_2.

Решение. Нека S е средината на отсечката S_1S_2. Тогаш, за произволна точка O, имаме:

$$2\vec{OS} = \vec{OS_1}+\vec{OS_2} = \frac{1}{2}(\vec{OA}+\vec{OC}) + \frac{1}{2}(\vec{OB}+\vec{OD}) =$$
$$= \frac{1}{2}(\vec{OA}+\vec{OD}) + \frac{1}{2}(\vec{OB}+\vec{OC}) = \vec{OM}+\vec{ON}.$$

Значи, S е средина на средната линија MN. Но средните линии, според 97, се преполовуваат, па S=T.

99. Четириаголникот ABCD е паралелограм ако и само ако средните линии минуваат низ пресекот на дијагоналите. Докажи!

100. Да се докаже дека средините на страните на секој четириаголник се темиња на паралелограм.

Решение. Нека ABCD е произволен четириаголник (направи цртеж) и нека P,Q,R и S се средините на неговите страни AB,BC,CD и DA соодветно. За да докажеме дека четириаголникот PQRS е паралелограм, доволно е да докажеме дека $\vec{PQ}=\vec{SR}$.

Имаме:

$$\vec{PQ} = \vec{PB}+\vec{BQ} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{BC} = \frac{1}{2}\vec{AC} =$$
$$= \frac{1}{2}(\vec{AD}+\vec{DC}) = \frac{1}{2}\vec{AD} + \frac{1}{2}\vec{DC} = \vec{SD}+\vec{DR} = \vec{SR},$$

што требаше да се докаже.

101. Нека S е пресекот на дијагоналите на четириаголникот ABCD. Докажи дека четириаголникот ABCD е паралелограм ако и само ако постои четириаголник чии страни се еднакви и паралелни со отсечките SA,SB,SC и SD.

102. Нека P,Q,R и S ги разделуваат страните BC,CD,DA и AB од четириаголникот ABCD во еден ист однос. Докажи дека постои четириаголник чии страни се паралелни и еднакви со отсечките AP,BQ,CR и DS.

Решение. Прво, имаме $\vec{BP}=\lambda\vec{BC}$, $\vec{CQ}=\lambda\vec{CD}$, $\vec{DR}=\lambda\vec{DA}$ и $\vec{AS}=\lambda\vec{AB}$. Понатаму:

$$\vec{AP} = \vec{AB} + \vec{BP} = \vec{AB} + \lambda\vec{BC},$$

$$\vec{BQ} = \vec{BC} + \vec{CQ} = \vec{BC} + \lambda\vec{CD},$$

$$\vec{CR} = \vec{CD} + \vec{DR} = \vec{CD} + \lambda\vec{DA},$$

$$\vec{DS} = \vec{DA} + \vec{AS} = \vec{DA} + \lambda\vec{AB},$$

па

$$\vec{AP}+\vec{BQ}+\vec{CR}+\vec{DS} = (1+\lambda)(\vec{AB}+\vec{BC}+\vec{CD}+\vec{DA}) = \bar{o},$$

од каде што следува тврдењето.

103. Нека S_1 и S_2 се средини на дијагоналите од трапезот ABCD. Докажи дека $\overline{S_1S_2}$ е полуразликата од основите.

Решение. Нека ABCD е трапез со основи AB и CD и нека S_1 и S_2 се средини на дијагоналите AC и BD соодветно. Тогаш имаме:

$$\vec{S_1S_2} = \vec{S_1A}+\vec{AB}+\vec{BS_2} = \frac{1}{2}\vec{CA}+\vec{AB}+\frac{1}{2}\vec{BD} =$$

$$= \vec{AB} + \frac{1}{2}(\vec{CA}+\vec{BD}) = \vec{AB} + \frac{1}{2}(\vec{CB}+\vec{BA}+\vec{BC}+\vec{CD}) =$$

$$= \vec{AB} + \frac{1}{2}(-\vec{AB}+\vec{CD}) = \frac{1}{2}(\vec{AB}+\vec{CD}).$$

Векторите $\vec{AB}$ и $\vec{CD}$ се спротивно насочени, па

$$\overline{S_1S_2} = \frac{1}{2}|\overline{AB}-\overline{CD}|.$$

104. (Теорема за трапез) Четириаголникот ABCD е трапез со основи AB и CD ако и само ако точките $S=AC\cap BD$, $P=AD\cap BC$, средината M на AB и средината N на CD се колинеарни. Докажи!

Решение. Нека четириаголникот ABCD е трапез со основи AB и CD. Според 74, за O=P, имаме $\vec{PB}=k\vec{PC}$ и

$$\vec{PS} = \frac{1}{k+1}(\vec{PA}+k\vec{PC}) = \frac{1}{k+1}(\vec{PA}+\vec{PB}) = \frac{2}{k+1}\vec{PM},$$

од каде што следува дека точките P,S и M се колинеарни. Слично, за точките P,S и N.

не

Обратно, да претпоставиме дека точките P,S,M и N се колинеарни. Низ точката N да повлечеме права p (направи цртеж) паралелна со правата AB. Ако $C_1=PB\cap p$, $D_1=PA\cap p$, тогаш четириаголникот ABC_1D_1 е трапез со основи AB и C_1D_1. Според претходното, правата PS ќе минува и низ средината на основата C_1D_1, па, значи, N е средина и на C_1D_1. Но, N е средина на CD, па тоа е можно само ако $C_1=C$ и $D_1=D$, т.е. четириаголникот ABCD е трапез со основи AB и CD.

105. Нека страните AC и BC од триаголникот ABC се поделени со точките M и N во еден ист однос m:n. Докажи дека правата MN е паралелна со правата AB и да се најде должината на отсечката MN ако $\overline{AB}=c$.

Решение. Според 68, имаме

$$\vec{MC} = \frac{n}{m+n}\vec{AC}, \qquad \vec{NC} = \frac{n}{m+n}\vec{BC},$$

па

$$\vec{MN} = \vec{MC}+\vec{CN} = \frac{n}{m+n}(\vec{AC}+\vec{CB}) = \frac{n}{m+n}\vec{AB},$$

од каде што следува дека MN ∥ AB и дека

$$\overline{MN} = \frac{n}{m+n}c.$$

106. Нека точките M и N се од страните AC и BC на триаголникот ABC, така што правата MN е паралелна со правата AB. Докажи дека точките M и N ги делат страните AC и BC во еден ист однос.

Решение. Од тоа што правите MN и AB се меѓусебно паралелни, следува дека векторите $\vec{MN}$ и $\vec{AB}$ се колинеарни, па постои реален број λ, така што $\vec{MN}=\lambda\vec{AB}$. Нека точката M ја дели страната AC во однос m:n, а точката N ја дели страната BC во однос p:q. Тогаш имаме:

$$\vec{MN} = \vec{MC}+\vec{CN} = \frac{n}{m+n}\vec{AC} + \frac{q}{p+q}\vec{CB}.$$

Значи,

$$\lambda\vec{AB} = \frac{n}{m+n}\vec{AC} + \frac{q}{p+q}\vec{CB},$$

$$\lambda(\vec{AC}+\vec{CB}) = \frac{n}{m+n}\vec{AC} + \frac{q}{p+q}\vec{CB},$$

$$(\lambda - \frac{n}{m+n})\vec{AC} + (\lambda - \frac{q}{p+q})\vec{CB} = \bar{o}.$$

Но, векторите $\vec{AC}$ и $\vec{CB}$ не се колинеарни, па

$$\lambda = \frac{n}{m+n} \text{ и } \lambda = \frac{q}{p+q}.$$

Од

$$\frac{n}{m+n} = \frac{q}{p+q}$$

добиваме $m:n=p:q$, т.е. точките M и N ги делат страните AC и BC во еден ист однос.

107. (Теорема на Чева) Нека A',B' и C' се точки од страните (или нивните продолженија) BC,CA и AB на триаголникот ABC. Да се најде потребен и доволен услов за правите AA',BB' и CC' да минуваат низ една иста точка.

Решение. Нека λ,μ и ν се односите во кои точките A',B' и C' ги делат страните BC,CA и AB соодветно и нека $P=AA'\cap BB'$, $Q=BB'\cap CC'$. Правите AA',BB' и CC' минуваат низ една иста точка ако и само ако $P=Q$, т.е. $\vec{PQ}=\bar{o}$. Но, според 91,

$$\vec{PQ} = \frac{1-\lambda\mu\nu}{(1+\lambda-\lambda\mu)(1+\mu+\mu\nu)}(\vec{AC}-(1+\mu)\vec{AB}),$$

па $\vec{PQ}=\bar{o}$ ако и само ако

$$\lambda\mu\nu = 1, \tag{14}$$

што претставува бараниот услов.

Условот (14) може да се напише и во обликот

$$\frac{\vec{AC'}}{\vec{C'B}}\cdot\frac{\vec{BA'}}{\vec{A'C}}\cdot\frac{\vec{CB'}}{\vec{B'A}} = 1. \tag{15}$$

108. Нека A',B' и C' се точки од страните (или нивните продолженија) BC,CA и AB на триаголникот ABC, така што правите AA', BB' и CC' минуваат низ една иста точка P. Да се најдат односите во кои точката P ги дели отсечките AA',BB' и CC'.

Решение. Нека λ, μ и ν се односите во кои точките A', B' и C' ги делат страните BC, CA и AB и нека $P=AA'\cap BB'$. Тогаш, според 90, имаме

$$\vec{AP} = \frac{1}{1+\lambda+\lambda\mu}(\vec{AB}+\lambda\vec{AC}).$$

Но,

$$\vec{AA'} = \frac{1}{1+\lambda}(\vec{AB}+\lambda\vec{AC}),$$

па

$$\vec{AP} = \frac{1+\lambda}{1+\lambda+\lambda\mu}\vec{AA'} = \frac{1+\lambda}{1+\lambda+\mu}(\vec{AP}+\vec{PA'}),$$

од каде што добиваме

$$\lambda\mu\vec{AP} = (1+\lambda)\vec{PA'}.$$

Правите AA', BB' и CC' минуваат низ иста точка, т.е. $\lambda\mu\nu=1$, па $\vec{AP}=\nu(1+\lambda)\vec{PA'}$. Следствено, точката P ја дели отсечката AA' во однос $\nu(1+\lambda)$.

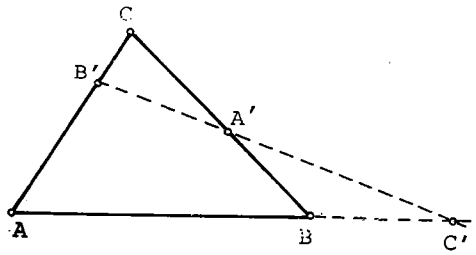
Слично, добиваме дека точката P ја дели отсечката BB' во однос $\lambda(1+\mu)$ и дека P ја дели отсечката CC' во однос $\mu(1+\nu)$.

109. (Теорема на Менелај) Нека A', B' и C' се точки од страните (или нивните продолженија) BC, CA и AB на триаголникот ABC. Докажи дека точките A', B', C' се колинеарни ако и само ако важи равенството

$$\frac{\vec{AC'}}{\vec{C'B}}\cdot\frac{\vec{BA'}}{\vec{A'C}}\cdot\frac{\vec{CB'}}{\vec{B'A}} = -1.$$

Решение. Нека λ, μ и ν се односите во кои точките A', B' и C' ги делат страните BC, CA и AB. Тогаш имаме

$$\vec{AC'} = \frac{\nu}{1+\nu}\vec{AB},\quad \vec{BA'} = \frac{\lambda}{1+\lambda}\vec{BC},\quad \vec{CB'} = \frac{\mu}{1+\mu}\vec{CA}.$$



Црт. 15

Да претпоставиме дека точките A',B' и C' се колинеарни (црт. 14). Тогаш векторите $\overrightarrow{B'A'}$ и $\overrightarrow{B'C'}$ се колинеарни, па постои реален број x, така што $\overrightarrow{B'C'}=x\overrightarrow{B'A'}$. Бидејќи:

$$\overrightarrow{B'A'} = \overrightarrow{B'C}+\overrightarrow{CA'} = -\frac{\mu}{1+\mu}\overrightarrow{CA} - \frac{1}{1+\lambda}\overrightarrow{BC} = \frac{\lambda\mu-1}{(1+\lambda)(1+\mu)}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{1+\lambda}\overrightarrow{AB},$$

$$\overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{B'A}+\overrightarrow{AC'} = \frac{1}{1+\mu}\overrightarrow{CA} + \frac{\nu}{1+\nu}\overrightarrow{AB} = -\frac{1}{1+\mu}\overrightarrow{AC} + \frac{\nu}{1+\nu}\overrightarrow{AB},$$

добиваме

$$x\left(\frac{\lambda\mu-1}{(1+\lambda)(1+\mu)}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{1+\lambda}\overrightarrow{AB}\right) = -\frac{1}{1+\mu}\overrightarrow{AC} + \frac{\nu}{1+\nu}\overrightarrow{AB},$$

т.е.

$$\left(\frac{x}{1+\lambda} - \frac{\nu}{1+\nu}\right)\overrightarrow{AB} + \left(\frac{x(\lambda\mu-1)}{(1+\lambda)(1+\mu)} + \frac{1}{1+\mu}\right)\overrightarrow{AC} = \overline{o}.$$

Векторите $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ не се колинеарни, па имаме

$$\frac{x}{1+\lambda} - \frac{\nu}{1+\nu} = 0, \qquad \frac{x(\lambda\mu-1)}{(1+\lambda)(1+\mu)} + \frac{1}{1+\mu} = 0.$$

Со елиминација на x од овие две равенства добиваме

$$\lambda\mu\nu = -1,$$

т.е.

$$\frac{\overrightarrow{AC'}}{\overrightarrow{C'B}}\cdot\frac{\overrightarrow{BA'}}{\overrightarrow{A'C}}\cdot\frac{\overrightarrow{CB'}}{\overrightarrow{B'A}} = -1.$$

Обратното го оставаме на читателот.

110. Да се докаже дека тежишните линии во секој триаголник се сечат во една иста точка T (тежиште на триаголникот).

Решение. Средините A_1,B_1 и C_1 на страните BC,CA и AB од триаголникот ABC ги делат во однос 1, па $\lambda\mu\nu=1$. Според 107, правите AA_1, BB_1 и CC_1 минуваат низ иста точка T. Според 108, пак, имаме

$$\overrightarrow{AT} = 2\overrightarrow{TA_1},\ \overrightarrow{BT} = 2\overrightarrow{TB_1},\ \overrightarrow{CT} = 2\overrightarrow{TC_1},$$

што значи дека тежиштето T ги дели тежишните линии AA_1,BB_1 и CC_1 во однос 2:1.

Може да се даде и директен доказ, не користејќи ја теоремата на Чева. Тоа го оставаме на читателот.

111. Докажи дека постои триаголник чии страни се паралелни и еднакви со тежишните линии на триаголникот ABC.

112. Нека T е тежиштето на триаголникот ABC. Докажи дека постои триаголник чии страни се еднакви и паралелни со отсечките AT,BT и CT.

113. Нека AA_2 е симетралата на аголот α од триаголникот ABC. Да се најде односот во кој точката A_2 ја дели страната BC.

Решение. За векторот $\vec{AA}_2$, според 88, имаме

$$\vec{AA}_2 = \frac{1}{b+c}(b\vec{AB}+c\vec{AC}),$$

од каде што следува дека точката A_2 ја дели страната BC во однос c:b.

114. Да се докаже дека симетралите на аглите во секој триаголник минуваат низ една иста точка V (центар на впишаната кружница во триаголникот ABC).

Решение. Нека AA_2,BB_2 и CC_2 се симетралите на аглите α,β и γ во триаголникот ABC. Според 113, точките A_2,B_2 и C_2 ги делат страните BC,CA и AB во однос λ=c:b, μ=a:c и ν=b:a. Имаме

$$\lambda\mu\nu = \frac{c}{b}\cdot\frac{a}{c}\cdot\frac{b}{a} = 1,$$

па, според 107, правите AA_2,BB_2 и CC_2 минуваат низ иста точка.

115. Да се најдат односите во кои центарот V на впишаната кружница во триаголникот ABC ги дели симетралите AA_2,BB_2 и CC_2 на аглите α,β и γ соодветно.

Решение. Ако λ=c:b, μ=a:c, ν=b:a, тогаш, според 108, точката V ги дели симетралите AA_2,BB_2 и CC_2 во односи:

$$\nu(1+\lambda) = (b+c):a,$$

$$\lambda(1+\mu) = (c+a):b,$$

$$\mu(1+\nu) = (a+b):c.$$

116. Дали постои триаголник чии страни се еднакви и паралелни со симетралите на аглите во триаголникот ABC?

Решение. Ако AA_2,BB_2 и CC_2 се симетралите на аглите во триаголникот ABC, тогаш, според 88, имаме:

$$\vec{AA_2} = \frac{1}{b+c}(b\vec{AB}+c\vec{AC}),$$
$$\vec{BB_2} = \frac{1}{c+a}(c\vec{BC}+a\vec{BA}),$$
$$\vec{CC_2} = \frac{1}{a+b}(a\vec{CA}+b\vec{CB}),$$

па

$$\vec{AA_2}+\vec{BB_2}+\vec{CC_2} = \frac{b-a}{b+c}\vec{AB} + \frac{c-b}{c+a}\vec{BC} + \frac{a-c}{a+b}\vec{CA}.$$

За да постои таков триаголник треба да биде $\vec{AA_2}+\vec{BB_2}+\vec{CC_2}=\vec{o}$. Ова равенство важи само во случајот кога

$$\frac{b-a}{b+c} = \frac{c-b}{c+a} = \frac{b-c}{b+a},$$

од каде што следува $a=b=c$.

Следствено, таков триаголник постои ако и само ако триаголникот ABC е рамностран.

117. Дали постои триаголник чии страни се паралелни и еднакви со отсечките AV,BV и CV, каде што V е центарот на впишаната кружница во триаголникот ABC?

118. Нека AA_1 е тежишна линија, а BB_2 симетралата на аголот β во триаголникот ABC и нека $P=AA_1 \cap BB_2$. Да се најдат односите во кои точката P ги дели отсечките AA_1 и BB_2.

Решение. Точката A_1 ја дели страната BC во однос $\lambda=1$, а точката B_2 ја дели страната CA во однос $\mu=a:c$. Според 90, имаме

$$\vec{AP} = \frac{1}{1+\lambda+\lambda\mu}(\vec{AB}+\lambda\vec{AC}) = \frac{c}{2c+a}(\vec{AB}+\vec{AC}) =$$
$$= \frac{2c}{2c+a}\vec{AA_1} = \frac{2c}{2c+a}(\vec{AP}+\vec{PA_1}),$$

од каде што добиваме

$$\vec{AP}:\vec{PA_1} = 2c:a,$$

т.е. точката P ја дели тежишната линија AA_1 во однос $2c:a$.

Слично, користејќи ја 90, добиваме

$$\vec{BP}:\vec{PB_2} = (c+a):c,$$

т.е. точката T ја дели симетралата BB_2 во однос $(c+a):c$.

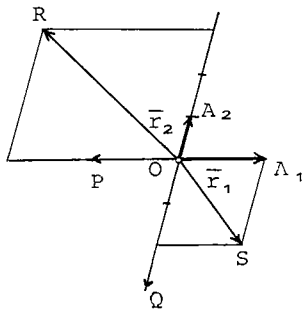
119. Нека A_1, B_1, C_1 се средини на страните BC, CA, AB од триаголникот ABC и нека T е неговото тежиште. Ако A_2, B_2, C_2 се средини на отсечките AT, BT, CT, тогаш триаголниците $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ се складни. Докажи!

9. ОПРЕДЕЛУВАЊЕ ПОЛОЖБАТА НА ТОЧКА СО ВЕКТОР

Да избереме една точка O. Секоја точка P го определува векторот $\vec{OP}$ и обратно секој вектор, нанесен од точката O, ја определува крајната точка. Векторот $\vec{OP}$ ќе го викаме радиусвектор на точката P, а точката O - почеток на радиусвекторите.

120. Дадени се точките $A_1(\bar{r}_1)$ и $A_2(\bar{r}_2)$. Да се определат точките $P(-\bar{r}_1)$, $Q(-3\bar{r}_2)$, $R(-2\bar{r}_1+3\bar{r}_2)$ и $S(\bar{r}_1-2\bar{r}_2)$.

Решение. Од точката O (црт. 15) ги нанесуваме векторите $-\bar{r}_1$, $-3\bar{r}_2$, $-2\bar{r}_1+3\bar{r}_2$ и $\bar{r}_1-2\bar{r}_2$. Крајните точки на овие вектори ги определуваат соодветно точките P, Q, R и S.



Црт. 16

121. Дадени се три последователни темиња $A(\bar{r}_1)$, $B(\bar{r}_2)$ и $C(\bar{r}_3)$ на паралелограмот ABCD. Да се определи радиусвекторот на четвртото теме D и радиусвекторот на пресекот од дијагоналите.

Решение. Имаме:

$$\vec{OD} = \vec{OA}+\vec{AD} = \vec{OA}+\vec{BC} = \vec{OA}+\vec{OC}-\vec{OB}.$$

Значи, за радиусвекторот $\bar{r}_4$ на темето D имаме

$$\bar{r}_4 = \bar{r}_1+\bar{r}_3-\bar{r}_2.$$

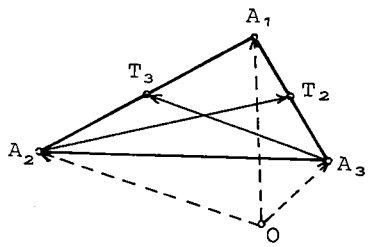
Слично, радиусвекторот $\bar{r}$ на пресекот S од дијагоналите е

$$\bar{r} = \frac{1}{2}(\bar{r}_1+\bar{r}_3).$$

122. Дадени се три последователни темиња $A(\bar{r}_1)$, $B(\bar{r}_2)$ и $C(\bar{r}_3)$ на трапезот ABCD и, притоа, основата AB е x пати поголема од основата CD. Да се најдат радиусвекторите на: четвртото теме D, пресекот E од дијагоналите и пресекот F од краците.

123. Да се конструира триаголникот $A_1A_2A_3$ ако е познато темето A_1 како и должините и правците на тежишните линии t_2 и t_3.

Решение. Според условот на задачата, можеме да сметаме дека се познати векторите $\bar{t}_2=\overrightarrow{A_2T_2}$ и $\bar{t}_3=\overrightarrow{A_3T_3}$, како и радиусвекторот $\bar{r}_1$ и темето A_1 (црт. 16). За да го конструираме триаголникот $A_1A_2A_3$, доволно е да ги најдеме радиусвекторите $\bar{r}_2$ и $\bar{r}_3$ на темињата A_2 и A_3.



Црт. 17

Имаме:

$$\bar{r}_2 = \overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{A_1A_2} = \bar{r}_1+\overrightarrow{A_1A_2},$$
$$\bar{r}_3 = \overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{A_1A_3} = \bar{r}_1+\overrightarrow{A_1A_3}.$$

Бидејќи

$$\bar{t}_2 = \overrightarrow{A_2A_3}+\frac{1}{2}\overrightarrow{A_3A_1}, \qquad \bar{t}_3 = \frac{1}{2}(\overrightarrow{A_3A_1}+\overrightarrow{A_3A_2}),$$

добиваме

$$\overrightarrow{A_2A_3} = \frac{2}{3}(\bar{t}_2-\bar{t}_3), \qquad \overrightarrow{A_3A_1} = \frac{2}{3}(\bar{t}_2+2\bar{t}_3).$$

Значи,

$$\bar{r}_2 = \bar{r}_1+\overrightarrow{A_1A_3}+\overrightarrow{A_3A_2} = \bar{r}_1 -\frac{4}{3}\bar{t}_2 -\frac{2}{3}\bar{t}_3,$$
$$\bar{r}_3 = \bar{r}_1 - \frac{2}{3}\bar{t}_2 -\frac{4}{3}\bar{t}_3.$$

За ефективна конструкција, почетокот на радиусвекторите избери го темето A_1. Тогаш $\overline{r}_1=\overline{o}$, па

$$\overline{r}_2 = -(\tfrac{4}{3}\overline{t}_2 + \tfrac{2}{3}\overline{t}_3), \quad \overline{r}_3 = -(\tfrac{2}{3}\overline{t}_2 + \tfrac{3}{4}\overline{t}_3).$$

124. Дадени се точките $A(\overline{r}_1)$ и $B(\overline{r}_2)$. Да се најде радиусвекторот $\overline{r}$ на точката M кој отсечката AB ја дели во однос $\lambda\neq-1$.

Решение. Според 69, имаме

$$\overline{r} = \frac{1}{1+\lambda}(\overline{r}_1+\lambda\overline{r}_2) \tag{16}$$

Ако $\lambda=m:n$, тогаш

$$\overline{r} = \frac{n\overline{r}_1+m\overline{r}_2}{m+n}. \tag{17}$$

Специјално, ако M е средината на отсечката AB, тогаш

$$\overline{r} = \frac{1}{2}(\overline{r}_1+\overline{r}_2).$$

125. Дадени се темињата $A(\overline{r}_1)$, $B(\overline{r}_2)$ и $C(\overline{r}_3)$ на триаголникот ABC. Да се определи радиусвекторот $\overline{r}$ на тежиштето T на триаголникот ABC.

Решение. Според 110, тежиштето T ги дели тежишните линии AA_1, BB_1 и CC_1 во однос 2:1. Ако A_1 има радиусвектор $\overline{r}'$, тогаш, според претходната задача, имаме $\overline{r}' = \frac{1}{2}(\overline{r}_2+\overline{r}_3)$, па

$$\overline{r} = \frac{1}{3}(\overline{r}_1+2\overline{r}') = \frac{1}{3}(\overline{r}_1+\overline{r}_2+\overline{r}_3). \tag{18}$$

126. Нека A′,B′ и C′ ги разделуваат страните BC,CA и AB од триаголникот ABC во еден ист однос λ. Докажи дека тежиштата на триаголниците ABC и A′B′C′ се совпаѓаат.

Решение. Ако $A(\overline{r}_1)$, $B(\overline{r}_2)$ и $C(\overline{r}_3)$, тогаш $A'(\frac{1}{1+\lambda}(\overline{r}_2+\lambda\overline{r}_3))$, $B'(\frac{1}{1+\lambda}(\overline{r}_3+\lambda\overline{r}_1))$, $C'(\frac{1}{1+\lambda}(\overline{r}_1+\lambda\overline{r}_2))$. Ако $T(\overline{r})$ и $T'(\overline{r}')$ се тежиштата на триаголниците ABC и A′B′C′, тогаш:

$$\overline{r}' = \frac{1}{3}\left(\frac{\overline{r}_2+\lambda\overline{r}_3}{1+\lambda} + \frac{\overline{r}_3+\lambda\overline{r}_1}{1+\lambda} + \frac{\overline{r}_1+\lambda\overline{r}_2}{1+\lambda}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}(\overline{r}_1+\overline{r}_2+\overline{r}_3) = \overline{r},$$

што значи T′=T.

127. Нека A_1, B_1 и C_1 се средини на страните BC, CA и AB од триаголникот ABC, T е неговото тежиште и нека A_2, B_2 и C_2 се средините на отсечките AT, BT и CT соодветно. Докажи дека триаголниците $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ имаат заедничко тежиште што се совпаѓа со T.

128. Нека ABC е триаголник и нека M е точка, така што $\vec{MA}+\vec{MB}+\vec{MC}=\bar{o}$. Докажи дека M е тежиштето T на триаголникот ABC.

Решение. Нека O е почеток на радиусвекторите; тогаш имаме

$$\vec{MA} = \vec{MO}+\vec{OA}, \quad \vec{MB} = \vec{MO}+\vec{OB}, \quad \vec{MC} = \vec{MO}+\vec{OC},$$

па, ако замениме во равенството $\vec{MA}+\vec{MB}+\vec{MC}=\bar{o}$, добиваме

$$\vec{OM} = \frac{1}{3}(\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}) = \vec{OT},$$

што значи M = T.

129. Нека A, B, C се три колинеарни точки. Дали постои точка M, така што

$$\vec{MA}+\vec{MB}+\vec{MC} = \bar{o}?$$

130. Нека A, B, C се три колинеарни точки. Дали постои точка M, така што

$$\vec{MA}+2\vec{MB}+3\vec{MC} = \bar{o}?$$

131. Нека ABC и A'B'C' се два триаголника со тежишта T и T' соодветно. Докажи дека

$$\vec{AA'}+\vec{BB'}+\vec{CC'} = 3\vec{TT'}.$$

132. Нека ABCD е паралелограм, S пресекот на неговите дијагонали и O произволна точка. Докажи дека

$$\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}+\vec{OD} = 4\vec{OS}.$$

133. Нека ABCD и A'B'C'D' се паралелограми, а S и S' пресеците на нивните дијагонали. Докажи дека

$$\vec{AA'}+\vec{BB'}+\vec{CC'}+\vec{DD'} = 4\vec{SS'}.$$

134. Нека $A_1, A_2, \ldots, A_n$ се кои било n точки. Докажи дека постои единствена точка M со својството

$$\vec{MA}_1+\vec{MA}_2+\ldots+\vec{MA}_n = \bar{o}.$$

Точката M се вика центроид на системот точки $A_1,A_2,\ldots,A_n$.

Решение. Нека O е произволна точка и нека M е точката определена со равенството

$$\vec{OM} = \frac{1}{n}(\vec{OA}_1+\vec{OA}_2+\ldots+\vec{OA}_n). \tag{19}$$

Тогаш имаме:

$$\begin{aligned}\vec{MA}_1+\vec{MA}_2+\ldots+\vec{MA}_n &= (\vec{MO}+\vec{OA}_1)+(\vec{MO}+\vec{OA}_2)+\ldots+(\vec{MO}+\vec{OA}_n) = \\ &= n\vec{MO}+(\vec{OA}_1+\vec{OA}_2+\ldots+\vec{OA}_n) = \\ &= n\vec{MO}+n\vec{OM} = n(\vec{MO}+\vec{OM}) = \bar{o}.\end{aligned}$$

Значи, постои барем една точка со бараното својство.

Нека, сега, M′ е точка за која важи равенството

$$\vec{M'A}_1+\vec{M'A}_2+\ldots+\vec{M'A}_n = \bar{o}. \tag{20}$$

Тогаш за произволна точка O ќе имаме:

$$\vec{M'A}_i = \vec{M'O}+\vec{OA}_i,\ i=1,2,\ldots,n,$$

па, заменувајќи во (20), добиваме

$$n\vec{M'O}+(\vec{OA}_1+\vec{OA}_2+\ldots+\vec{OA}_n) = \bar{o},$$

т.е.

$$\vec{OM'} = \frac{1}{n}(\vec{OA}_1+\vec{OA}_2+\ldots+\vec{OA}_n). \tag{21}$$

Од (19) и (21) следува M′=M, т.е. постои единствена таква точка M.

135. Што претставува центроидот за една точка?

136. Да се најде центроидот на две точки A и B.

137. Да се најде центроидот на три точки A,B и C.

138. Што претставува центроидот на темињата A,B,C,D од паралелограмот ABCD?

139. Што претставува центроидот за темињата $A_1,A_2,\ldots,A_n$ на правилниот n-аголник $A_1A_2\ldots A_n$?

140. Нека M_1 е центроидот на системот $A_1,A_2,\ldots,A_n$, а M_2 центроидот на системот $B_1,B_2,\ldots,B_n$. Докажи дека:

$$\vec{A_1B_1}+\vec{A_2B_2}+\ldots+\vec{A_nB_n} = n\vec{M_1M_2}.$$

Решение. Ако O е произволна точка, тогаш имаме:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{A_iB_i} = (\vec{OB_1}-\vec{OA_1})+(\vec{OB_2}-\vec{OA_2})+\ldots+(\vec{OB_n}-\vec{OA_n}) =$$
$$= (\vec{OB_1}+\vec{OB_2}+\ldots+\vec{OB_n})-(\vec{OA_1}+\vec{OA_2}+\ldots+\vec{OA_n}) =$$
$$= n\vec{OM_2}-n\vec{OM_1} = n(\vec{OM_2}-\vec{OM_1}) = n\vec{M_1M_2}.$$

141. Нека M_1 е центроидот на системот $A_1,A_2,\ldots,A_n$, M_2 центроидот на системот $B_1,B_2,\ldots,B_m$, а M центроидот на системот $A_1,A_2,\ldots,A_n$, $B_1,B_2,\ldots,B_m$. Докажи дека точките M_1,M_2 и M се колинеарни и, притоа, $n\vec{MM_1}+m\vec{MM_2}=\bar{o}$.

Решение. Бидејќи M е центроид на системот $A_1,A_2,\ldots,A_n$, $B_1,B_2,\ldots,B_m$, за произволна точка O ќе имаме

$$(m+n)\vec{OM} = (\vec{OA_1}+\vec{OA_2}+\ldots+\vec{OA_n})+(\vec{OB_1}+\vec{OB_2}+\ldots+\vec{OB_m}) =$$
$$= n\vec{OM_1}+m\vec{OM_2},$$

од каде што добиваме

$$\vec{OM} = \frac{n\vec{OM_1}+m\vec{OM_2}}{m+n}.$$

Од ова, пак, следува дека точките M,M_1 и M_2 се колинеарни и дека точката M ја дели отсечката M_1M_2 во однос m:n. Ставајќи O=M, добиваме $n\vec{MM_1}+m\vec{MM_2}=\bar{o}$.

142. Нека $A_1A_2\ldots A_n$ и $B_1B_2\ldots B_n$ се два произволни n-аголника и нека $\sigma(k)=i_k$, $k=1,2,\ldots,n$, е произволна пермутација на множеството $\{1,2,\ldots,n\}$. Докажи дека

$$\vec{A_1B_1}+\vec{A_2B_2}+\ldots+\vec{A_nB_n} = \vec{A_1B_{i_1}}+\vec{A_2B_{i_2}}+\ldots+\vec{A_nB_{i_n}}$$

143. Трите отсечки што ги сврзуваат средините на спротивните рабови на еден тетраедар се сечат во една иста точка. Докажи!

Решение. Нека ABCD е даден тетраедар и нека радиусвекторите на A,B,C и D се $\bar{r}_1,\bar{r}_2,\bar{r}_3$ и $\bar{r}_4$ соодветно. Ако $M(\bar{r}_m)$ и $N(\bar{r}_n)$ се средини на спротивните рабови AB и CD, тогаш

$$\bar{r}_m = \frac{1}{2}(\bar{r}_1+\bar{r}_2), \quad \bar{r}_n = \frac{1}{2}(\bar{r}_3+\bar{r}_4).$$

Ако, пак, $P(\bar{r}_p)$, $Q(\bar{r}_q)$, $S(\bar{r}_s)$ и $T(\bar{r}_t)$ се средините на рабовите AC,BD,AD и BC соодветно, тогаш

$$\bar{r}_p = \frac{1}{2}(\bar{r}_1+\bar{r}_3), \quad \bar{r}_q = \frac{1}{2}(\bar{r}_2+\bar{r}_4),$$
$$\bar{r}_s = \frac{1}{2}(\bar{r}_1+\bar{r}_4), \quad \bar{r}_t = \frac{1}{2}(\bar{r}_2+\bar{r}_3).$$

Следствено, имаме

$$\bar{r}_m+\bar{r}_n = \bar{r}_p+\bar{r}_q = \bar{r}_s+\bar{r}_t = \frac{1}{2}(\bar{r}_1+\bar{r}_2+\bar{r}_3+\bar{r}_4),$$

што значи MN,PQ и ST минуваат низ една иста точка, којашто е средина на сите три отсечки.

144. Отсечките што ги сврзуваат темињата со тежиштата на спротивните ѕидови на еден тетраедар се сечат во една иста точка. Докажи!

145. Секој n-аголник (n-непарен број) е еднозначно определен со средините на своите страни. Докажи!

Решение. Нека n=2m+1, нека се дадени точките $S_1(\bar{r}_1), S_2(\bar{r}_2), \ldots, S_n(\bar{r}_n)$ и нека $A_1A_2\ldots A_n$ е n-аголник, така што S_1 е средина на страната A_1A_2, S_2 на страната $A_2A_3, \ldots,$ S_n на страната A_nA_1. Ако $A_1(\bar{r}_1'), A_2(\bar{r}_2'), \ldots, A_n(\bar{r}_n')$, тогаш

$$\begin{aligned}
\bar{r}_1' + \bar{r}_2' &= 2\bar{r}_1,\\
\bar{r}_2' + \bar{r}_3' &= 2\bar{r}_2,\\
&\vdots\\
\bar{r}_{n-1}' + \bar{r}_n' &= 2\bar{r}_{n-1},\\
\bar{r}_n' + \bar{r}_1' &= 2\bar{r}_n.
\end{aligned}$$

Секоја втора равенка да ја помножиме со -1, а потоа да ги собереме сите равенки; тогаш добиваме

$$\bar{r}_1' = \bar{r}_1-\bar{r}_2+\bar{r}_3 -\ldots- \bar{r}_{n-1} + \bar{r}_n.$$

Значи, темето A_1 со радиусвекторот $\bar{r}_1'$ е еднозначно определено, па постои единствен таков n-аголник.

Да забележиме дека во случајот кога n=2m е парен број, таков n-аголник постои ако и само ако

$$\bar{r}_1-\bar{r}_2+\ldots+\bar{r}_{n-1}-\bar{r}_n = \bar{o}$$

и, притоа, постојат бесконечно многу такви n-аголници, зашто секоја точка од рамнината може да се избере за прво теме.

146. Да се конструира триаголник ABC ако се познати средините A_1, B_1 и C_1 на неговите страни BC, CA и AB.

147. Дадени се точките $T_1(\bar{r}_1)$, $T_2(\bar{r}_2)$ и $T_3(\bar{r}_3)$ кои страните A_2A_3, A_3A_1 и A_1A_2 од триаголникот $A_1A_2A_3$ ги делат во еден ист однос. Да се најдат радиусвекторите на темињата.

Решение. Нека темињата A_1, A_2 и A_3 имаат соодветно радиусвектори $\bar{r}_1', \bar{r}_2'$ и $\bar{r}_3'$. Тогаш, според 124, имаме:

$$(n+m)\bar{r}_1 = n\bar{r}_2'+m\bar{r}_3', \quad (n+m)\bar{r}_2 = n\bar{r}_3'+m\bar{r}_2', \quad (n+m)\bar{r}_3 = n\bar{r}_1'+m\bar{r}_2',$$

од каде што добиваме

$$\bar{r}_1' = \frac{m^2\bar{r}_2+n^2\bar{r}_3-mn\bar{r}_1}{m^2+n^2-mn},$$

$$\bar{r}_2' = \frac{m^2\bar{r}_3+n^2\bar{r}_1-mn\bar{r}_2}{m^2+n^2-mn},$$

$$\bar{r}_3' = \frac{m^2\bar{r}_1+n^2\bar{r}_2-mn\bar{r}_3}{m^2+n^2-mn}.$$

148. Дадена е точката $A_0(\bar{r}_0)$ и векторот $\bar{a}$. Докажи дека равенката

$$\bar{r} = \bar{r}_0 + \lambda\bar{a}. \tag{22}$$

може да се смета за равенка на правата што минува низ точката A_0 и е паралелна со векторот $\bar{a}$.

Решение. Нека $M(\bar{r})$ е произволна точка на правата p што минува низ точката $A_0(\bar{r}_0)$ и е паралелна со векторот $\bar{a}$. Тогаш векторот $\overrightarrow{A_0M}$ е колинеарен со векторот $\bar{a}$, па постои реален број λ, така што $\overrightarrow{A_0M}=\lambda\bar{a}$. Но, $\overrightarrow{A_0M}=\bar{r}-\bar{r}_0$, па

$$\bar{r} = \bar{r}_0 + \lambda\bar{a}.$$

Значи, на секоја точка $M(\bar{r})$ од правата p одговара реален број λ, така што важи (22).

Обратно, за секој реален број λ, точката со радиусвекторот $\bar{r}_0+\lambda\bar{a}$ лежи на правата p, т.е. равенката (22) може да се смета за равенка на правата p.

149. Да се најде равенката на правата p што минува низ точките $A_1(\bar{r}_1)$ и $A_2(\bar{r}_2)$.

Решение. Правата p е паралелна со векторот $\vec{A_1A_2}=\bar{r}_2-\bar{r}_1$, па, според претходната задача, равенката на правата p е

$$\bar{r} = \bar{r}_1 + \lambda(\bar{r}_2-\bar{r}_1). \tag{23}$$

150. Нека равенката на правата p што минува низ точките $A_1(\bar{r}_1)$ и $A_2(\bar{r}_2)$ е напишана во обликот (23). За кои вредности на λ се добиваат точките од отсечката A_1A_2?

Решение. Од (23) добиваме $\bar{r}-\bar{r}_1=\lambda(\bar{r}_2-\bar{r}_1)$, т.е. $\vec{A_1M}=\lambda\vec{A_1A_2}$ за произволна точка $M(\bar{r})$ од правата p. Од $\vec{AM}=\lambda\vec{A_1A_2}$ следува дека точката M е меѓу A_1,A_2 ако $0<\lambda<1$, $M=A_1$ за $\lambda=0$, а $M=A_2$ за $\lambda=1$.

Според тоа, точката M е од отсечката A_1A_2 ако и само ако $0\le\lambda\le 1$.

151. Две темиња на еден триаголник се фиксни, а третото се движи по една права. Да се најде геометриското место на тежиштата на триаголниците.

Решение. За триаголникот ABC нека се дадени темињата $A(\bar{r}_1)$ и $B(\bar{r}_2)$, а темето C нека се движи по правата

$$\bar{r} = \bar{r}_0 + \lambda\bar{a}$$

Тогаш за радиусвекторот $\bar{r}_t$ на тежиштето T на триаголникот ABC ќе имаме

$$\bar{r}_t = \frac{1}{3}(\bar{r}_1+\bar{r}_2+\bar{r}_0+\lambda\bar{a}) =$$
$$= \frac{1}{3}(\bar{r}_1+\bar{r}_2+\bar{r}_0) + \frac{\lambda}{3}\bar{a} = \frac{1}{3}(\bar{r}_1+\bar{r}_2+\bar{r}_0)+\mu\bar{a}.$$

Значи, геометриското место на тежиштата е права којашто минува низ точката $T_0(\frac{\bar{r}_1+\bar{r}_2+\bar{r}_0}{3})$ и е паралелна со векторот $\bar{a}$, т.е. бараното геометриско место е права паралелна со правата по која се движи темето C.

152. Две темиња на еден паралелограм се фиксни, а третото се движи по една права. Да се најде геометриското место на четвртото теме.

153. Дадени се точките $P_i(\bar{r}_0+\lambda_i\bar{a})$, $i=1,2,3,4$ од правата p што минува низ точката $A_0(\bar{r}_0)$ и е паралелна со векторот $\bar{a}$. Да се најде онаа точка $P(\bar{r})$ која отсечките P_1P_2 и P_3P_4 ги дели во еден ист однос λ.

Решение. Според 124, за радиусвекторот $\bar{r}$ на точката P имаме:

$$\bar{r} = \frac{\bar{r}_0+\lambda_1\bar{a}+\lambda(\bar{r}_0+\lambda_2\bar{a})}{1+\lambda},$$

$$\bar{r} = \frac{\bar{r}_0+\lambda_3\bar{a}+\lambda(\bar{r}_0+\lambda_4\bar{a})}{1+\lambda},$$

па, значи,

$$\bar{r}_0+\lambda_1\bar{a}+\lambda(\bar{r}_0+\lambda_2\bar{a}) = \bar{r}_0+\lambda_3\bar{a}+\lambda(\bar{r}_0+\lambda_4\bar{a}),$$

од каде што добиваме

$$\lambda = \frac{\lambda_3-\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_4}$$

Следствено, точката P има радиусвектор

$$\bar{r} = \bar{r}_0 + \frac{\lambda_3-\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_4}\bar{a}.$$

154. Дадени се точките $P_0(\bar{r}_0)$, $P_1(\bar{r}_0+\bar{a})$, $P_2(\bar{r}_0+\lambda\bar{a})$, $P_3(\bar{r}_0+\mu\bar{a})$ од правата p што минува низ точката $P_0(\bar{r}_0)$ и е паралелна со векторот $\bar{a}$. Каков услов задоволуваат λ и μ ако равенството

$$\overrightarrow{P_0P_2}:\overrightarrow{P_2P_1} = -\overrightarrow{P_0P_3}:\overrightarrow{P_3P_1}? \qquad (24)$$

(За парот точки P_0,P_1 ќе велиме дека хармониски го раздвојува парот точки P_2,P_3.)

Решение. Имаме $\overrightarrow{P_0P_2}:\overrightarrow{P_2P_1}=\lambda:(1-\lambda)$, $\overrightarrow{P_0P_3}:\overrightarrow{P_3P_1}=\mu:(1-\mu)$, па равенството (24) се сведува на равенството

$$\frac{\lambda}{1-\lambda} = -\frac{\mu}{1-\mu},$$

$$2\lambda\mu = \lambda+\mu,$$

т.е.

$$\frac{2}{\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}} = 1.$$

Значи, хармониската средина на λ и μ е 1.

155. Парот точки $M_1(\bar{r}_1+\lambda_1\bar{a})$, $M_2(\bar{r}_1+\lambda_2\bar{a})$ хармониски го раздвојува парот точки $M_3(\bar{r}_1+\lambda_3\bar{a})$, $M_4(\bar{r}_1+\lambda_4\bar{a})$. Докажи дека $\lambda_2-\lambda_1$ е хармониска средина од $\lambda_3-\lambda_1$ и $\lambda_4-\lambda_1$ и дека $\lambda_4-\lambda_3$ е хармониска средина на $\lambda_1-\lambda_3$ и $\lambda_2-\lambda_3$.

Решение. Ќе докажеме само дека $\lambda_2-\lambda_1$ е хармониска средина на $\lambda_3-\lambda_1$ и $\lambda_4-\lambda_1$.

Да ставиме $\bar{r}_1+\lambda_1\bar{a}=\bar{r}_0$. Тогаш $M_1(\bar{r}_0)$, $M_1(\bar{r}_0+(\lambda_2-\lambda_1)\bar{a})$, $M_2(\bar{r}_0+(\lambda_3-\lambda_1)\bar{a})$, $M_4(\bar{r}_0+(\lambda_4-\lambda_1)\bar{a})$. Ако $\lambda_2-\lambda_1 = x$, $\lambda_3-\lambda_1 = y$, $\lambda_4-\lambda_1=z$, тогаш $\overrightarrow{M_1M_3}:\overrightarrow{M_3M_2}=y:(x-y)$, $\overrightarrow{M_1M_4}:\overrightarrow{M_4M_2}=z:(x-z)$ и ако парот точки M_1,M_2 хармониски го раздвојува парот точки M_3,M_4, тогаш имаме:

$$\frac{y}{x-y} = \frac{z}{x-z},$$

$$2yz = x(y+z),$$

$$x = \frac{2}{\frac{1}{y}+\frac{1}{z}},$$

т.е.

$$\lambda_2-\lambda_1 = \frac{2}{\frac{1}{\lambda_3-\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_4-\lambda_1}},$$

што требаше да се докаже.

156. Докажи дека точките $A_1(\bar{r}_1)$, $A_2(\bar{r}_2)$, $A_3(\bar{r}_3)$ се колинеарни ако и само ако постојат реални броеви x_1,x_2,x_3, од кои барем еден е различен од нула, така што

$$x_1+x_2+x_3 = 0 \text{ и } x_1\bar{r}_1+x_2\bar{r}_2+x_3\bar{r}_3 = \bar{o}. \qquad (25)$$

Решение. Да претпоставиме дека точките A_1,A_2,A_3 се колинеарни. Тоа значи дека векторите $\overrightarrow{A_1A_2}=\bar{r}_2-\bar{r}_1$ и $\overrightarrow{A_1A_3}=\bar{r}_3-\bar{r}_1$ се колинеарни, па постои реален број λ, така што

$$\bar{r}_3-\bar{r}_1 = \lambda(\bar{r}_2-\bar{r}_1),$$

т.е.

$$(\lambda-1)\bar{r}_1-\lambda\bar{r}_2+\bar{r}_3 = \bar{o}.$$

Земајќи $x_1=\lambda-1$, $x_2=-\lambda$, $x_3=1$ задоволени се условите (25).

Обратно, да претпоставиме дека постојат реални броеви x_1, x_2,x_3, од кои барем еден е различен од нула, така што се задово-

лени условите (25). Можеме да претпоставиме дека $x_3\neq 0$. Од $x_1+x_2+x_3=0$ добиваме $x_1=-(x_2+x_3)$, па равенството $x_1\bar{r}_1+x_2\bar{r}_2+x_3\bar{r}_3=\bar{o}$ може да се напише во обликот

$$x_3(\bar{r}_3-\bar{r}_1) = -x_2(\bar{r}_2-\bar{r}_1),$$

т.е.

$$\bar{r}_3-\bar{r}_1 = -\frac{x_2}{x_3}(\bar{r}_2-\bar{r}_1).$$

Значи, векторите $\bar{r}_3-\bar{r}_1=\overrightarrow{A_1A_3}$ и $\bar{r}_2-\bar{r}_1=\overrightarrow{A_1A_2}$ се колинеарни, па и точките A_1,A_2,A_3 се колинеарни.

157. Дадени се точките $A_1(\bar{r}_1)$, $A_2(\bar{r}_2)$ и $P(\bar{r})$. Докажи дека точката P лежи на правата A_1A_2 ако и само ако постојат реални броеви x_1,x_2, така што

$$x_1+x_2 = 1, \quad \bar{r} = x_1\bar{r}_1+x_2\bar{r}_2. \tag{26}$$

Решение. Нека точката P лежи на правата A_1A_2. Тогаш векторите $\overrightarrow{A_1A_2}=\bar{r}_2-\bar{r}_1$ и $\overrightarrow{A_1P}=\bar{r}-\bar{r}_1$ се колинеарни, па постои реален број λ, така што

$$\bar{r}-\bar{r}_1 = \lambda(\bar{r}_2-\bar{r}_1),$$

т.е.

$$\bar{r} = (1-\lambda)\bar{r}_1+\lambda\bar{r}_2.$$

Ставајќи $x_1=1-\lambda$, $x_2=\lambda$, имаме $x_1+x_2=1$ и $\bar{r}=x_1\bar{r}_1+x_2\bar{r}_2$, т.е. важат равенствата (26).

Обратно, да претпоставиме дека постојат реални броеви x_1,x_2, така што важат равенствата (26). Тогаш имаме $x_1=1-x_2$ и

$$\bar{r} = (1-x_2)\bar{r}_1+x_2\bar{r}_2,$$

$$\bar{r}-\bar{r}_1 = x_2(\bar{r}_2-\bar{r}_1),$$

па векторите $\bar{r}-\bar{r}_1=\overrightarrow{A_1P}$ и $\bar{r}_2-\bar{r}_1=\overrightarrow{A_1A_2}$ се колинеарни, т.е. точката P лежи на правата A_1A_2.

158. Докажи дека точките $A_1(\bar{r}_1)$, $A_2(\bar{r}_2)$, $A_3(\bar{r}_3)$ и $A_4(\bar{r}_4)$ се компланарни ако и само ако постојат реални броеви x_1,x_2,x_3 и x_4, од кои барем еден е различен од нула, така што

$$x_1+x_2+x_3+x_4 = 0, \quad x_1\bar{r}_1+x_2\bar{r}_2+x_3\bar{r}_3+x_4\bar{r}_4 = \bar{o}.$$

159. Нека точките $A_1(\overline{r}_1)$, $A_2(\overline{r}_2)$, $A_3(\overline{r}_3)$ не се колинеарни. Докажи дека точката $P(\overline{r})$ лежи во рамнината $A_1A_2A_3$ ако и само ако постојат реални броеви x_1, x_2, x_3, така што

$$x_1+x_2+x_3 = 1, \quad \overline{r} = x_1\overline{r}_1+x_2\overline{r}_2+x_3\overline{r}_3.$$

160. Нека точките $A_1(\overline{r}_1)$, $A_2(\overline{r}_2)$ и $A_3(\overline{r}_3)$ не се колинеарни. Докажи дека равенката

$$\overline{r} = \overline{r}_1+\lambda(\overline{r}_2-\overline{r}_1)+\mu(\overline{r}_3-\overline{r}_1)$$

може да се смета за равенка на рамнината што минува низ точките A_1, A_2 и A_3.

Глава II

КООРДИНАТИ НА ВЕКТОРИ И ТОЧКИ

1. КООРДИНАТИ НА ВЕКТОРИ И ТОЧКИ НА ПРАВА

Нека p е дадена права. Со V_p ќе го означиме множеството од сите вектори што се колинеарни со правата p. Ако фиксираме еден ненулти вектор $\bar{e}$ од множеството V_p, тогаш за секој вектор $\bar{a}$ од V_p постои еднозначно определен реален број x, така што

$$\bar{a} = x\bar{e}. \qquad (1)$$

Ако, пак, y е даден реален број, тогаш векторот $\bar{b}=y\bar{e}$ припаѓа на множеството V_p и е еднозначно определен. Значи, добиваме една биекција од множеството V_p во множеството $\mathbb{R}$ на реалните броеви.

Векторот $\bar{e}$ ќе го викаме <u>координатен</u> вектор. Бројот x, што го определува векторот $\bar{a}$ со равенството (1), ќе го викаме <u>афина координата</u> на векторот $\bar{a}$ во однос на координатниот вектор $\bar{e}$. Тоа ќе го означуваме симболично со

$$\bar{a} = (x)_{(\bar{e})}, \qquad (2)$$

или кратко со $\bar{a}=(x)$, ако координатниот вектор $\bar{e}$ е фиксиран.

<u>1</u>. Да се конструираат векторите $\bar{a}=(2)$, $\bar{b}=(-3)$, $\bar{c}=(\sqrt{2})$ и $\bar{d}=(-\sqrt{3})$.

<u>2</u>. Дадени се векторите $\bar{a}=(x)$ и $\bar{b}=(y)$. Да се најдат координатите на векторите $\bar{a}+\bar{b}$ и $\bar{a}-\bar{b}$.

<u>Решение</u>. Од $\bar{a}=(x)$, $\bar{b}=(y)$, следува дека $\bar{a}=x\bar{e}$, $\bar{b}=y\bar{e}$, па

$$\bar{a}+\bar{b} = x\bar{e}+y\bar{e} = (x+y)\bar{e},$$

што значи дека векторот $\bar{a}+\bar{b}$ има координата x+y, т.е. $\bar{a}+\bar{b}=(x+y)$.

Слично, добиваме дека $\bar{a}-\bar{b}=(x-y)$.

3. Даден е векторот $\bar{a}=(x)$ и реалниот број λ. Да се најде координатата на векторот $\lambda\bar{a}$.

Решение. Имаме $\bar{a}=x\bar{e}$, па

$$\lambda\bar{a} = \lambda(x\bar{e}) = (\lambda x)\bar{e},$$

што значи дека векторот $\lambda\bar{a}$ има координата λx, т.е. $\lambda\bar{a}=(\lambda x)$.

4. Дадени се векторите $\bar{a}=(5)$, $\bar{b}=(-2)$ и $\bar{c}=(3)$. Да се најде координатата на векторот:

а) $\bar{a} + 2\bar{b}$; б) $-2\bar{b} + 2\bar{c}$;

в) $4\bar{a} - 6\bar{b} + \bar{c}$; г) $2\bar{a} + 2\bar{b} - 2\bar{c}$.

Решение. а) Векторот $2\bar{b}$ има координата -4, т.е. $2\bar{b}=(-4)$, па $\bar{a}+2\bar{b}=(5-4)=(1)=\bar{e}$.

5. Да се најде векторот $\bar{r}$ од равенството:

а) $3(5)-5\bar{r}=5(2)$; б) $4(2)+2\bar{r} = \frac{(4)}{(-2)}(-2)$.

6. Дадени се векторите $\bar{a}=(5)$, $\bar{b}=(4)$. Да се најдат x и y, така што $x\bar{a}+y\bar{b}=\bar{o}$.

Афините координати на векторите од множеството V_p ќе ги искористиме за определување положбата на точките од правата p. За таа цел, на правата p избираме една точка 0 - координатен почеток и еден ненулти вектор $\bar{e}$ од множеството V_p - координатен вектор. Избраната двојка елементи (точката 0 и векторот $\bar{e}$) ќе ја викаме афин координатен систем на правата p и ќе го означуваме со $(0;\bar{e})$. Ако M е произволна точка од правата p и ако радиусвекторот $\bar{r}=\vec{OM}$ на точката M има афина координата x во однос на координатниот вектор $\bar{e}$, тогаш ќе велиме дека точката M има афина координата x во однос на афиниот координатен систем $(0;\bar{e})$. Тоа ќе го означуваме симболично со $M(x)_{(0;\bar{e})}$ или само со $M(x)$ ако координатниот почеток 0 и координатниот вектор $\bar{e}$ се фиксирани. Значи,

$$M(x)_{(0;\bar{e})} \Longleftrightarrow \vec{OM} = x\bar{e}. \qquad (3)$$

7. На правата p да се најдат точките $A(2)$, $B(-3)$, $C(\sqrt{2})$ и $D(-\sqrt{3})$.

8. Дадени се точките A(a) и B(b). Да се најде координатата на векторот $\vec{AB}$.

Решение. Имаме

$$\vec{AB} = \vec{OB}-\vec{OA} = b\bar{e}-a\bar{e} = (b-a)\bar{e},$$

па, значи, векторот $\vec{AB}$ има координата b-a, т.е. $\vec{AB}=(b-a)$.

9. Да се најде координатата на векторот $\vec{AB}$:

а) A(2), B(5); б) A(-1), B(3);
в) A(4), B(1); г) A(0), B(4).

10. Нека точката C(x) ја дели отсечката AB /$A(x_1)$,$B(x_2)$/ во однос $\lambda\neq-1$. Докажи дека

$$x = \frac{1}{1+\lambda}(x_1+\lambda x_2).$$

11. Да се најде координатата x на точката M, која отсечката AB /A(2),B(6)/ ја дели во однос:

а) $\lambda = \frac{1}{3}$; б) $\lambda = \frac{3}{2}$; в) $\lambda = -\frac{1}{2}$; г) $\lambda = 0$.

12. Да се најде координатата x на средината M од отсечката AB:
а) A(3), B(7); б) A(-5), B(3).

13. Ако A,B и C се три различни точки, тогаш бројот

$$\frac{\vec{AC}}{\vec{CB}}$$

се наречува прост однос на точките A,B и C и се означува со (ABC). Ако (ABC)=λ, тогаш точката C ја дели отсечката AB во однос λ. Докажи!

14. Ако A(a), B(b) и C(c), тогаш

$$(ABC) = \frac{c-a}{b-c}.$$

Докажи!

15. Да се најде простиот однос (ABC):

а) A(2), B(7), C(5); б) A(-1), B(0), C(3);
в) A(1), B(-2), C(4); г) A(2), B(5), C(7).

16. Нека (ABC)=λ. Да се најдат простите односи (ACB), (BAC), (BCA), (CAB) и (CBA).

Решение. Имаме:

$$(ACB) = \frac{\vec{AB}}{\vec{BC}} = \frac{\vec{AC}+\vec{CB}}{-\vec{CB}} = -\frac{\vec{AC}}{\vec{CB}} - 1 = -(\lambda+1).$$

Слично, добиваме дека: $(BAC) = \frac{1}{\lambda}$, $(BCA) = -\frac{1+\lambda}{\lambda}$, $(CAB) = -\frac{1}{1+\lambda}$, $(CBA) = -\frac{\lambda}{1+\lambda}$.

17. Дадени се точките A(1), B(2), C(-3). Да се најдат сите шест прости односи од точките A,B и C.

18. Ако O(o), E(1) и M(x), тогаш x=1-(MEO). Докажи!

19. Нека (ABP)=λ, (ABQ)=μ. Најди (PQA) и (PQB)!

Решение. Нека точките A,B,P и Q имаат соодветно координати a,b,p и q. Од (ABP)=λ и (ABQ)=μ следува дека точките P и Q ја делат отсечката AB во односи λ и μ соодветно. Според 10, имаме

$$(1+\lambda)p = a+\lambda b, \quad (1+\mu)q = a+\mu b,$$

од каде што добиваме

$$a = \frac{1}{\lambda-\mu}[-\mu(1+\lambda)p+\lambda(1+\mu)q],$$
$$b = \frac{1}{\lambda-\mu}[(1+\lambda)p-(1+\mu)q],$$

што значи дека точката A ја дели отсечката PQ во однос $-\frac{\lambda(1+\mu)}{\mu(1+\lambda)}$, а точката B ја дели отсечката PQ во однос $-\frac{1+\mu}{1+\lambda}$. Следствено,

$$(PQA) = -\frac{\lambda(1+\mu)}{\mu(1+\lambda)}, \qquad (PQB) = -\frac{1+\mu}{1+\lambda}.$$

20. Нека (ABP)=λ, (ABQ)=μ, (ABR)=ν. Најди (PRQ)!

Решение. На ист начин како во претходната задача, добиваме дека точката Q ја дели отсечката PR во однос $\frac{(1+\nu)(\lambda-\mu)}{(1+\lambda)(\mu-\nu)}$, па

$$(PRQ) = \frac{(1+\nu)(\lambda-\mu)}{(1+\lambda)(\mu-\nu)}.$$

21. Нека (ABP)=λ, (ABQ)=μ, а R е средина на отсечката PQ. Најди (ABR)!

Нека A,B,C,D се четири различни точки од правата p. Бројот (ABC):(ABD) се наречува двоен однос на точките A,B,C,D и се означува со (ABCD). Значи

$$(ABCD) = (ABC):(ABD). \qquad (4)$$

Ако точките A,B,C и D имаат координати a,b,c и d соодветно, тогаш

$$(ABCD) = \frac{c-a}{b-c} : \frac{d-a}{b-d}$$

Ако (ABCD)=-1, тогаш велиме дека парот C,D хармониски го раздвојува парот A,B.

22. Да се најде двојниот однос на точките A,B,C,D:

а) A(0), B(1), C(2), D(-2);
б) A(2), B(-6), C(0), D(5);
в) A(-1), B(6), C(-4), D(-5);
г) A(0), B(2), C(1), D(-2).

23. Да се најде точката D(d) ако е A(1), B(2), C(4) и (ABCD)=-1.

24. Докажи дека двојниот однос на точките A,B,C и D не зависи од изборот на координатниот систем.

Решение. Нека $(O;\bar{e})$ и $(O';\bar{e}')$ се два координатни системи на правата p и нека координатите на точките A,B,C и D во однос на коодринатниот систем $(O;\bar{e})$ се a,b,c и d соодветно, а во однос на координатниот систем $(O';\bar{e}')$ се a',b',c' и d' соодветно. Треба да докажеме дека

$$\frac{c-a}{b-c}:\frac{d-a}{b-d} = \frac{c'-a'}{b'-c'}:\frac{d'-a'}{b'-d'}. \qquad (5)$$

За таа цел, претходно да видиме каква врска постои меѓу координатите x и x' на точката M во однос на координатните системи $(O;\bar{e})$ и $(O';\bar{e}')$ соодветно. Нека $O'(\alpha)$ и $\bar{e}'=(\beta)$; тогаш имаме

$$\vec{O'M} = x'\bar{e}'.$$

Бидејќи

$$\vec{OM} = \vec{OO'}+\vec{O'M} = \alpha\bar{e}+x'\bar{e}' = \alpha\bar{e}+\beta x'\bar{e},$$

добиваме

$$x\bar{e} = (\beta x'+\alpha)\bar{e},$$

т.е.

$$x = \beta x' + \alpha, \qquad (6)$$

што претставува врската меѓу старата координата x и новата координата x′ на точката M.

Сега, имаме

$$c-a = \beta(c'-a'), \quad b-c = \beta(b'-c'),$$
$$d-a = \beta(d'-a'), \quad b-d = \beta(b'-d'),$$

па, значи, важи равенството (5).

25. Докажи дека:

а) $(ABCD)+(ACBD) = (ABCD)+(DBCA) = 1$;

б) $(ABCD)(ABDC) = (ABCD)(BACD) = 1$.

Решение. а) Бидејќи, според 24, двојниот однос не зависи од изборот на координатниот систем, можеме да претпоставиме дека A(0), B(1), C(x), D(y). Тогаш имаме:

$$(ABCD)+(ACBD) = \frac{x}{1-x}:\frac{y}{1-y} + \frac{1}{x-1}:\frac{y}{x-y} =$$
$$= \frac{x(1-y)}{y(1-x)} + \frac{x-y}{y(x-1)} =$$
$$= \frac{x-xy-x+y}{y(1-x)} = \frac{y(1-x)}{y(1-x)} = 1.$$

Слично, и второто равенство.

б) Имаме:

$$(ABCD)(ABDC) = ((ABC):(ABD))((ABD):(ABC)) = 1,$$

а слично и второто равенство.

26. Колку различни двојни односи може да се формираат од точките A,B,C,D?

Решение. Нека $(ABCD)=k$. Според претходната задача, имаме:

$$(ACBD) = (DBCA) = 1-k, \quad (ABDC) = (BACD) = \frac{1}{k},$$
$$(ACDB) = \frac{1}{1-k}, \quad (ADBC) = 1-\frac{1}{k} = \frac{k-1}{k},$$
$$(ADCB) = 1-\frac{1}{1-k} = \frac{k}{k-1}.$$

Користејќи ги овие равенства, добиваме

$$(ABCD) = (DCBA) = (BADC) = (CDAB) = k,$$

$$(ACBD) = (DBCA) = (CADB) = (BDAC) = 1-k,$$

$$(ABDC) = (CDBA) = (BACD) = (DCAB) = \frac{1}{k},$$

$$(ACDB) = (BDCA) = (CABD) = (DBAC) = \frac{1}{1-k},$$

$$(ADBC) = (CBDA) = (DACB) = (BCAD) = \frac{k-1}{k},$$

$$(ADCB) = (BCDA) = (DABC) = (CBAD) = \frac{k}{k-1}.$$

Следствено, од точките A,B,C,D може да се формираат шест (6) различни двојни односи.

27. Ако парот C,D хармониски го раздвојува парот A,B, тогаш и парот A,B хармониски го раздвојува парот C,D. Докажи!

Решение. Според претходната задача, имаме $(A\hat{B}CD)=(CDAB)$, што значи дека ако $(ABCD)=-1$, тогаш и $(CDAB)=-1$.

28. Нека A(0), B(1), C(x), D(y) и нека (ABCD)=-1. Каков услов задоволуваат x и y?

Решение. Имаме:

$$(ABCD) = \frac{x(1-y)}{y(1-x)} = -1,$$

од каде што добиваме

$$\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} = 1,$$

т.е. хармониската средина на x и y е 1.

29. Нека A(a), B(b), C(c), D(d) и нека (ABCD)=-1. Докажи дека b-a е хармониска средина на c-a и d-a.

30. Нека O е средина на отсечката AB и нека (ABCD)=-1. Докажи дека $\overline{OA}^2=\overline{OC}\cdot\overline{OD}$.

2. КООРДИНАТИ НА ВЕКТОРИ И ТОЧКИ ВО РАМНИНА

Нека Σ е дадена рамнина. Со V_Σ ќе го означиме множеството од сите вектори што се компланарни со рамнината Σ. Ако $\overline{e}_1$ и $\overline{e}_2$ се два неколинеарни вектори од множеството V_Σ, тогаш за секој вектор $\overline{a}$ од V_Σ постојат еднозначно определени реални броеви x_1, x_2, така што

$$\bar{a} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2. \tag{7}$$

Ако, пак, y_1, y_2 се дадени реални броеви, тогаш векторот $\bar{b}=y_1\bar{e}_1+$ $+y_2\bar{e}_2$ припаѓа на множеството V_Σ и е еднозначно определен. Значи, добиваме една биекција од множеството V_Σ во множеството $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$.

Векторите $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ ќе ги викаме координатни вектори, а броевите x_1, x_2, што го определуваат векторот $\bar{a}$ со равенството (7), ќе ги викаме афини координати на векторот $\bar{a}$ во однос на координатните вектори $\bar{e}_1, \bar{e}_2$. Тоа ќе го означуваме симболично со

$$\bar{a} = (x_1, x_2)_{(\bar{e}_1, \bar{e}_2)}, \tag{8}$$

или кратко со $\bar{a}=(x_1, x_2)$, ако координатните вектори се фиксирани.

31. Да се нанесат на цртеж векторите:

а) $\bar{a}=(1,2)$, $\bar{b}=(1,-2)$; б) $\bar{a}=(1,3)$, $\bar{b}=(-1,3)$;
в) $\bar{a}=(3,0)$, $\bar{b}=(0,-3)$; г) $\bar{a}=(2,-3)$, $\bar{b}=(-2,3)$.

32. Дадени се векторите $\bar{a}=(a_1, a_2)$ и $\bar{b}=(b_1, b_2)$. Најди ги координатите на векторите $\bar{a}+\bar{b}$ и $\bar{a}-\bar{b}$.

Решение. Од $\bar{a}=(a_1, a_2)$ и $\bar{b}=(b_1, b_2)$ следува дека $\bar{a}=a_1\bar{e}_1+a_2\bar{e}_2$ и $\bar{b}=b_1\bar{e}_1+b_2\bar{e}_2$, па

$$\bar{a}+\bar{b} = (a_1\bar{e}_1+a_2\bar{e}_2) + (b_1\bar{e}_1+b_2\bar{e}_2) =$$
$$= (a_1+b_1)\bar{e}_1 + (a_2+b_2)\bar{e}_2,$$

од каде, пак, следува дека $\bar{a}+\bar{b}=(a_1+b_1, a_2+b_2)$. Слично, добиваме дека $\bar{a}-\bar{b}=(a_1-b_1, a_2-b_2)$.

33. Даден е векторот $\bar{a}=(a_1, a_2)$ и реалниот број λ. Најди ги координатите на векторот $\lambda\bar{a}$.

Решение. Од $\bar{a}=(a_1, a_2)$ следува дека $\bar{a}=a_1\bar{e}_1+a_2\bar{e}_2$. Сега, имаме:

$$\lambda\bar{a} = \lambda(a_1\bar{e}_1+a_2\bar{e}_2) = \lambda(a_1\bar{e}_1)+\lambda(a_2\bar{e}_2) =$$
$$= (\lambda a_1)\bar{e}_1 + (\lambda a_2)\bar{e}_2,$$

од каде што следува дека $\lambda\bar{a}=(\lambda a_1, \lambda a_2)$.

34. Дадени се векторите $\bar{a}=(4,2)$, $\bar{b}=(-2,3)$, $\bar{c}=(-4,-1)$, $\bar{d}=(-12,1)$. Најди ги координатите на векторите: $\bar{a}+\bar{b}$, $2\bar{a}-3\bar{b}+\bar{c}$, $3\bar{a}-2\bar{b}+\bar{c}+\bar{d}$.

35. Најди го векторот $\bar{r}$ од равенството:

а) $3(5,-1)-5\bar{r} = 2(1,-8)$;

б) $4(2,-3)+2\bar{r} = \frac{(4,-6)}{(-2,3)}(-2,4)$.

36. Дадени се векторите $\bar{a}=(5,3)$, $\bar{b}=(2,0)$, $\bar{c}=(4,2)$. Најди ги x, y и z, така што $x\bar{a}+y\bar{b}+z\bar{c}=\bar{o}$.

Решение. Имаме:

$$x(5,3)+y(2,0)+z(4,2) = (0,0),$$
$$(5x+2y+4z,3x+2z) = (0,0),$$

т.е.

$$5x + 2y + 4z = 0,$$
$$3x + 2z = 0.$$

Ова е хомоген систем од две линеарни равенки со три непознати, па имаме

$$x:y:z = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix},$$

т.е. едно решение на овој систем е $x=4$, $y=2$, $z=-6$. Секое друго решение е пропорционално со ова.

37. Да се изрази векторот $\bar{c}$ како линеарна комбинација на векторите $\bar{a}$ и $\bar{b}$, ако:

а) $\bar{a}=(4,-2)$, $\bar{b}=(3,5)$, $\bar{c}=(1,-7)$;

б) $\bar{a}=(5,4)$, $\bar{b}=(-3,0)$, $\bar{c}=(19,8)$;

в) $\bar{a}=(-6,2)$, $\bar{b}=(4,7)$, $\bar{c}=(9,-3)$;

г) $\bar{a}=(\frac{1}{2},2)$, $\bar{b}=(1,4)$, $\bar{c}=(3,0)$.

Решение. а) Треба да ги определиме реалните броеви x,y, така што важи

$$\bar{c} = x\bar{a} + y\bar{b}.$$

Имаме:

$$(1,-7) = x(4,-2) + y(3,5),$$
$$(1,-7) = (4x+3y,-2x+5y),$$

т.е.

$$4x + 3y = 1,$$
$$-2x + 5y = -7,$$

од каде што добиваме $x=1$, $y=-1$. Значи, $\bar{c}=\bar{a}-\bar{b}$.

г) Бидејќи $\bar{b}=2\bar{a}$, векторите $\bar{a}$ и $\bar{b}$ се колинеарни. Векторот $\bar{c}$ не е колинеарен со $\bar{a}$ и $\bar{b}$, па не постојат реални броеви x и y, така што $\bar{c}=x\bar{a}+y\bar{b}$.

38. Векторите $\bar{a}=(a_1,a_2)$ и $\bar{b}=(b_1,b_2)$ се колинеарни ако и само ако

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0. \qquad (9)$$

Докажи!

Решение. Нека векторите $\bar{a}$ и $\bar{b}$ се колинеарни. Тоа значи дека постои реален број x, така што $\bar{b}=x\bar{a}$,

$$a_1x - b_1 = 0,$$
$$a_2x - b_2 = 0.$$

Овие две равенки може да ги сметаме како хомоген систем од две линеарни равенки по непознатите x и $y=-1$. Значи, тој има нетривијално решение, па неговата детерминанта е нула, т.е. важи условот (9).

Обратно, нека важи условот (9). Тоа значи дека системот

$$a_1x + b_1y = 0,$$
$$a_2x + b_2y = 0,$$

има нетривијално решение, т.е. постојат реални броеви x,y, од кои барем едниот е различен од нула, така што $x\bar{a}+y\bar{b}=\bar{o}$. Ако $y\neq 0$, тогаш

$$\bar{b} = -\frac{x}{y}\bar{a},$$

што значи дека векторите $\bar{a}$ и $\bar{b}$ се колинеарни.

39. Дадени се векторите $\bar{a}=(3,2)$, $\bar{b}=(1,-3)$ и $\bar{c}=(-1,3)$. За кои вредности на x векторите $\bar{p}=\bar{a}+x\bar{b}$ и $\bar{q}=\bar{a}+3\bar{c}$ се колинеарни.

Решение. Имаме $\bar{p}=(3+x,2-3x)$, $\bar{q}=(0,-9)$, па, според претходната задача, векторите $\bar{p}$ и $\bar{q}$ се колинеарни ако

$$\begin{vmatrix} 3+x & 2-3x \\ 0 & -9 \end{vmatrix} = 0,$$

од каде што добиваме $x=-3$. Значи, векторите $\bar{p}$ и $\bar{q}$ се колинеарни за $x=-3$.

40. Дадени се векторите $\bar{a}=(-2,3)$ и $\bar{b}=(1,4)$. За кои вредности на x векторите $\bar{p}$ и $\bar{q}$ се колинеарни, ако:

а) $\bar{p} = \bar{a}+x\bar{b}$, $\bar{q} = \bar{a}-x\bar{b}$;

б) $\bar{p} = x\bar{a}+\bar{b}$, $\bar{q}=\bar{a}+x\bar{b}$;

в) $\bar{p} = x\bar{a}+\bar{b}$, $\bar{q} = \bar{a}$?

Афините координати на векторите од множеството V_Σ ќе го искористиме за определување положбата на точките од рамнината Σ. За таа цел, во рамнината Σ избираме една точка O - координатен почеток и два неколинеарни вектори $\bar{e}_1,\bar{e}_2$ од множеството V_Σ - координатни вектори. Избраната тројка елементи (точката O и векторите $\bar{e}_1,\bar{e}_2$) ќе ја викаме афин координатен систем во рамнината Σ и ќе го означуваме со $(O;\bar{e}_1,\bar{e}_2)$. Ако M е произволна точка од рамнината Σ и ако радиусвекторот $\bar{r}=\overrightarrow{OM}$ на точката M има афини координати x_1,x_2 во однос на координатните вектори $\bar{e}_1,\bar{e}_2$, тогаш ќе велиме дека точката M има афини координати x_1,x_2 во однос на афиниот координатен систем $(O;\bar{e}_1,\bar{e}_2)$. Тоа ќе го означуваме симболично со $M(x_1,x_2)_{(O;\bar{e}_1,\bar{e}_2)}$ или, само, со $M(x_1,x_2)$, ако координатниот почеток O и координатните вектори $\bar{e}_1,\bar{e}_2$ се фиксирани. Значи,

$$M(x_1,x_2)_{(O;\bar{e}_1,\bar{e}_2)} \Longleftrightarrow \overrightarrow{OM} = x_1\bar{e}_1+x_2\bar{e}_2. \qquad (10)$$

Ако $|\bar{e}_1|=|\bar{e}_2|$, тогаш афиниот координатен систем $(O;\bar{e}_1,\bar{e}_2)$ ќе го викаме Декартов а ако $|\bar{e}_1|=|\bar{e}_2|$ и $\bar{e}_1 \perp \bar{e}_2$, тогаш $(O;\bar{e}_1,\bar{e}_2)$ ќе го викаме правоаголен Декартов координатен систем.

41. Во рамнината Σ избери афин координатен систем $(O;\bar{e}_1,\bar{e}_2)$, а потоа нанеси ги точките A(2,3), B(0,4), C(-2,1), D(-3,0) и E(-3,-5).

42. Најди ги координатите на темињата од паралелограмот ABCD во однос на афиниот координатен систем $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})$.

43. Во рамнината Σ даден е правилниот шестаголник ABCDEF. Најди ги координатите на неговите темиња во однос на афиниот координатен систем $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AF})$.

44. Во трапезот ABCD основата AB е трипати поголема од основата CD. Најди ги координатите на темињата A,B,C,D, на пресекот $S=AC\cap BD$ од дијагоналите и на пресекот $T=AD\cap BC$ од краците во однос на афиниот координатен систем $(A;\vec{AB},\vec{AD})$.

45. Дадена е точката $A(a_1,a_2)$. Најди ги координатите на точката B која е симетрична со точката A во однос на:

а) координатниот почеток;

б) x_1-оската;

в) x_2-оската;

46. Дадени се точките $A(a_1,a_2)$ и $B(b_1,b_2)$. Најди ги координатите на векторот $\vec{AB}$.

Решение. Прво, имаме

$$\vec{OA} = a_1\bar{e}_1+a_2\bar{e}_2, \qquad \vec{OB} = b_1\bar{e}_1+b_2\bar{e}_2,$$

а потоа

$$\vec{AB} = \vec{OB}-\vec{OA} = (b_1\bar{e}_1+b_2\bar{e}_2)-(a_1\bar{e}_1+a_2\bar{e}_2) = (b_1-a_1)\bar{e}_1+(b_2-a_2)\bar{e}_2.$$

Значи, $\vec{AB}=(b_1-a_1,b_2-a_2)$.

47. Најди ги координатите на векторот $\vec{AB}$, ако:

а) $A(3,1)$, $B(5,0)$; б) $A(-1,3)$, $B(-2,1)$;

в) $A(0,4)$, $B(3,0)$; г) $A(3,1)$, $B(-1,-3)$.

48. Најди ги координатите на точката B ако $\vec{AB}=\bar{a}$ и ако:

а) $A(0,0)$, $\bar{a}=(2,1)$; б) $A(1,-5)$, $\bar{a}=(-1,3)$;

в) $A(-2,-7)$, $\bar{a}=(2,5)$; г) $A(2,3)$, $\bar{a}=(-2,-3)$.

49. Провери дали четириаголникот ABCD е паралелограм, ако:

а) $A(1,-3)$, $B(8,0)$, $C(4,8)$, $D(-3,5)$;

б) $A(1,1)$, $B(2,3)$, $C(5,0)$, $D(7,-5)$.

Решение. а) Четириаголникот ABCD е паралелограм ако и само ако $\vec{AB}=\vec{DC}$. Имаме:

$$\vec{AB} = (8-1,0+3) = (7,3),$$
$$\vec{DC} = (4+3,8-5) = (7,3),$$

што значи дека четириаголникот ABCD е паралелограм.

50. Најди ги координатите на точката D, така што четириаголникот ABCD е паралелограм, ако:

а) A(2,3), B(1,4), C(0,-2);

б) A(-2,-1), B(3,0), C(1,-2);

в) A(1,2), B(3,4), C(2,3).

Решение. а) Имаме $\vec{AB}=(-1,1)$. Ако $D(d_1,d_2)$, тогаш треба да биде $\vec{DC}=\vec{AB}$, т.е. $(-d_1,-2-d_2)=(-1,1)$, од каде што добиваме $d_1=1$, $d_2=-3$. Значи, D(1,-3).

51. Точките $A(a_1,a_2)$, $B(b_1,b_2)$ и $C(c_1,c_2)$ се колинеарни ако и само ако е исполнет условот

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (11)$$

Докажи!

Решение. Точките $A(a_1,a_2)$, $B(b_1,b_2)$ и $C(c_1,c_2)$ се колинеарни ако и само ако векторите $\vec{AB}=(b_1-a_1,b_2-a_2)$ и $\vec{AC}=(c_1-a_1,c_2-a_2)$ се колинеарни. Според 38, векторите $\vec{AB}$ и $\vec{AC}$ се колинеарни ако и само ако

$$\begin{vmatrix} b_1-a_1 & b_2-a_2 \\ c_1-a_1 & c_2-a_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Бидејќи

$$\begin{vmatrix} b_1-a_1 & b_2-a_2 \\ c_1-a_1 & c_2-a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ b_1-a_1 & b_2-a_2 & 1 \\ c_1-a_1 & c_2-a_2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix},$$

следува дека точките A,B и C се колинеарни ако и само ако е исполнет условот (11).

52. Провери дали точките A,B и C се колинеарни, ако:

а) A(4,2), B(3, 2), C(0,2);
б) A(3,5), B(-1,-3), C(1,1);
в) A(1,2), B(2,1), C(3,0).

Решение. а) Имаме

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 8+6-8-6 = 0,$$

што значи дека точките A,B и C се колинеарни.

53. На x_1 и x_2-оската да се најдат соодветно точки C и D, коишто се колинеарни со точките A(1,2) и B(2,1).

Решение. Од тоа што точката C лежи на x_1-оската, следува дека нејзината втора координата е нула, т.е. $C(c_1,0)$. Ако C лежи на правата AB, тогаш

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ c_1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

од каде што добиваме $c_1=3$. Значи, C(3,0). Слично, добиваме дека D(0,3).

54. Дадени се точките A(4,6), B(1,-1), C(2,4), D(1,5). Најди ги координатите на точката $M=AB \cap CD$.

Решение. Нека $M(x_1,x_2)$. Од тоа што M е колинеарна со A и B и со C и D, следува дека:

$$\begin{vmatrix} 4 & 6 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ x_1 & x_2 & 1 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ x_1 & x_2 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

т.е. $7x_1-3x_2=0$, $x_1+x_2=0$, од каде што добиваме $x_1 = \frac{14}{5}$, $x_2 = \frac{16}{5}$. Значи, $M(\frac{14}{5},\frac{16}{5})$.

55. Дадени се три последователни темиња A(3,1), B(1,4) и C(-2,-3) на трапезот ABCD. Знаејќи дека основата CD е петпати поголема од основата AB, да се најдат координатите на темето D.

Решение. Од условот на задачата, добиваме дека $\vec{DC}=5\vec{AB}$. Имаме $\vec{AB}=(-2,3)$, $\vec{DC}=(-2-d_1,-3-d_2)$, па $-2-d_1=-10$, $-3-d_2=15$, од каде што добиваме $d_1=8$, $d_2=-18$. Значи, $D(8,-18)$.

56. Дадени се точките $A(1,2)$ и $S(5,6)$. Ако σ_S е централната симетрија со центар во точката S, најди ги координатите на точката $A'=\sigma_S(A)$.

Решение. Имаме

$$A' = \sigma_S(A) \iff \vec{AS} = \vec{SA'}.$$

Ако $A'(x_1,x_2)$, тогаш $\vec{SA'}=(x_1-5,x_2-6)$. Бидејќи $\vec{AS}=(4,4)$, добиваме $x_1-5=4$, $x_2-6=4$, т.е. $x_1=9$, $x_2=10$. Значи $A'(9,10)$.

57. Ако $A(a_1,a_2)$ и $S(s_1,s_2)$, тогаш $A'(2s_1-x_1,2s_2-x_2)$, каде што $A'=\sigma_S(A)$. Докажи!

58. Да се најдат темињата на триаголникот $A'B'C'$ што е симетричен со триаголникот ABC во однос на точката S, ако:

а) $A(0,3)$, $B(2,-4)$, $C(-2,-1)$, $S(0,0)$;

б) $A(3,0)$, $B(-2,-2)$, $C(3,1)$, $S=A$.

59. Даден е векторот $\bar{a}=(4,1)$ и точката $A(-1,-2)$. Ако $\tau_{\bar{a}}$ е транслацијата за векторот $\bar{a}$, најди ги координатите на точката $A'=\tau_{\bar{a}}(A)$.

Решение. Имаме

$$A' = \tau_{\bar{a}}(A) \iff \vec{AA'} = \bar{a}.$$

Ако $A'(x_1,x_2)$, тогаш $\vec{AA'}=(x_1+1,x_2+2)$, па од равенството $\vec{AA'}=\bar{a}$, добиваме $x_1=3$, $x_2=-1$. Значи, $A'(3,-1)$.

60. Ако $\bar{a}=(a_1,a_2)$ и $B(b_1,b_2)$, тогаш $B'(a_1+b_1,a_2+b_2)$, каде што $B'=\tau_{\bar{a}}(B)$. Докажи!

61. Ако точката $M(x_1,x_2)$ ја дели отсечката AB $/A(a_1,a_2)$, $B(b_1,b_2)/$ во однос $\lambda\neq-1$, тогаш

$$x_1 = \frac{1}{1+\lambda}(a_1+\lambda b_1), \quad x_2 = \frac{1}{1+\lambda}(a_2+\lambda b_2). \tag{12}$$

Докажи!

62. Најди ја точката $M(x_1,x_2)$ која отсечката AB /A(2,3), B(-5,1)/ ја дели во однос: а) $\lambda=2$, б) $\lambda = -\frac{1}{2}$.

63. Најди ја средината $M(x_1,x_2)$ на отсечката AB, ако:

а) A(-4,7), B(2,3); б) A(-1,2), B(1,-2);
в) A(0,0), B(4,4); г) A(2,-3), B(-2,-3).

64. Дадени се средините $A_1(1,2)$, $B_1(0,3)$ и $C_1(2,2)$ на страните BC,CA и AB на триаголникот ABC. Најди ги темињата A,B и C.

65. Дадени се темињата A(1,-2) и B(-4,6) на паралелограмот ABCD и пресекот S(3,1) од неговите дијагонали. Најди ги темињата C и D.

66. Точките C(1,1) и D(2,4) ја делат отсечката AB на три еднакви дела. Најди ги точките A и B.

67. Ако $T(x_1,x_2)$ е тежиштето на триаголникот ABC /$A(a_1,a_2)$, $B(b_1,b_2)$, $C(c_1,c_2)$/, тогаш

$$x_1 = \frac{1}{3}(a_1+b_1+c_1), \quad x_2 = \frac{1}{3}(a_2+b_2+c_2). \tag{13}$$

Докажи!

68. Најди го тежиштето $T(x_1,x_2)$ на триаголникот ABC, ако:

а) A(0,0), B(0,3), C(6,0);
б) A(0,0), B(2,5), C(-2,4);
в) A(1,3), B(3,1), C(-4,-4).

69. Дадени се темињата A(4,1), B(3,-2) и тежиштето T(0,2) на триаголникот ABC. Најди го темето C.

70. Најди ги координатите на темињата и тежиштето T на триаголникот ABC во однос на афиниот координатен систем $(A;\vec{AB},\vec{AC})$.

3. КООРДИНАТИ НА ВЕКТОРИ И ТОЧКИ ВО ПРОСТОР

Со V ќе го означиме множеството од сите вектори во просторот. Ако $\bar{e}_1,\bar{e}_2$ и $\bar{e}_3$ се три некомпланарни вектори од V, тогаш за секој вектор $\bar{a}$ од V постојат еднозначно определени реални броеви x_1,x_2,x_3, така што

$$\bar{a} = x_1\bar{e}_1+x_2\bar{e}_2+x_3\bar{e}_3. \tag{14}$$

Ако, пак, y_1, y_2, y_3 се дадени реални броеви, тогаш векторот $\bar{b}=y_1\bar{e}_1+y_2\bar{e}_2+y_3\bar{e}_3$ е еднозначно определен. Значи, добиваме една биекција од множеството V во множеството $\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}$.

Векторите $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ ќе ги викаме <u>координатни</u> вектори, а броевите x_1, x_2, x_3, што го определуваат векторот $\bar{a}$ со равенството (14) ќе ги викаме <u>афини координати</u> на векторот $\bar{a}$ во однос на координатните вектори $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$. Тоа ќе го означуваме симболично со

$$\bar{a} = (x_1, x_2, x_3)_{(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)}, \qquad (15)$$

или кратко со $\bar{a}=(x_1, x_2, x_3)$, ако координатните вектори се фиксирани.

<u>71</u>. Дадени се векторите: $\bar{a}_1=(1,-6,3)$, $\bar{a}_2=(0,-4,5)$, $\bar{a}_3=(2,0,0)$, $\bar{a}_4=(5,0,6)$, $\bar{a}_5=(-3,1,0)$, $\bar{a}_6=(0,0,-2)$, $\bar{a}_7=(6,0,1)$, $\bar{a}_8=(0,5,0)$, $\bar{a}_9=(2,-3,6)$. Кои од овие вектори се:

а) колинеарни со $\bar{e}_1$;
б) колинеарни со $\bar{e}_2$;
в) колинеарни со $\bar{e}_3$;
г) компланарни со $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$;
д) компланарни со $\bar{e}_2$ и $\bar{e}_3$;
ѓ) компланарни со $\bar{e}_3$ и $\bar{e}_1$?

<u>72</u>. Дадени се векторите $\bar{a}=(a_1, a_2, a_3)$ и $\bar{b}=(b_1, b_2, b_3)$. Најди ги координатите на векторите $\bar{a}+\bar{b}$ и $\bar{a}-\bar{b}$.

<u>Решение</u>. Од $\bar{a}=(a_1, a_2, a_3)$ и $\bar{b}=(b_1, b_2, b_3)$ следува дека $\bar{a}=a_1\bar{e}_1+a_2\bar{e}_2+a_3\bar{e}_3$ и $\bar{b}=b_1\bar{e}_1+b_2\bar{e}_2+b_3\bar{e}_3$, па

$$\bar{a}+\bar{b} = (a_1\bar{e}_1+a_2\bar{e}_2+a_3\bar{e}_3) + (b_1\bar{e}_1+b_2\bar{e}_2+b_3\bar{e}_3) =$$
$$= (a_1+b_1)\bar{e}_1 + (a_2+b_2)\bar{e}_2 + (a_3+b_3)\bar{e}_3,$$

од каде, пак, следува дека $\bar{a}+\bar{b}=(a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3)$. Слично, добиваме дека $\bar{a}-\bar{b}=(a_1-b_1, a_2-b_2, a_3-b_3)$.

<u>73</u>. Даден е векторот $\bar{a}=(a_1, a_2, a_3)$ и реалниот број λ. Најди ги координатите на векторот $\lambda\bar{a}$.

Решение. Од $\overline{a}=(a_1,a_2,a_3)$ следува дека $a=a_1\overline{e}_1+a_2\overline{e}_2+a_3\overline{e}_3$. Сега, имаме

$$\lambda\overline{a} = \lambda(a_1\overline{e}_1+a_2\overline{e}_2+a_3\overline{e}_3) = \lambda(a_1\overline{e}_1)+\lambda(a_2\overline{e}_2)+\lambda(a_3\overline{e}_3) =$$
$$= (\lambda a_1)\overline{e}_1 + (\lambda a_2)\overline{e}_2 + (\lambda a_3)\overline{e}_3,$$

од каде што следува дека $\lambda\overline{a}=(\lambda a_1,\lambda a_2,\lambda a_3)$.

74. Дадени се векторите $\overline{a}=(2,3,-1)$, $\overline{b}=(0,1,4)$, $\overline{c}=(1,0,-3)$. Најди ги координатите на векторите: $2\overline{a}$, $2\overline{a}-\overline{b}$, $\overline{a}-2\overline{b}-2\overline{c}$, $\overline{a}+2\overline{b}+3\overline{c}$, $\overline{a}-\overline{b}-\overline{c}$.

75. Да се изрази векторот $\overline{d}$ како линеарна комбинација на векторите $\overline{a},\overline{b}$ и $\overline{c}$:

а) $\overline{a}=(1,2,5)$, $\overline{b}=(-1,6,3)$, $\overline{c}=(0,0,2)$, $\overline{d}=(2,4,2)$;
б) $\overline{a}=(1,3,0)$, $\overline{b}=(5,10,0)$, $\overline{c}=(4,-2,6)$, $\overline{d}=(10,11,6)$;
в) $\overline{a}=(1,3,5)$, $\overline{b}=(0,5,4)$, $\overline{c}=(7,-8,4)$, $\overline{d}=(-5,19,10)$.

Решение. а) Треба да ги определиме реалните броеви x,y,z, така што

$$\overline{d} = x\overline{a} + y\overline{b} + z\overline{c}.$$

Имаме:

$$(2,4,2) = x(1,2,5) + y(-1,6,3) + z(0,0,2),$$
$$(2,4,2) = (x-y,2x+6y,5x+3y+2z),$$

т.е.

$$x-y = 2,$$
$$2x+6y = 4,$$
$$5x+3y+2z = 2.$$

Со решавање на овој систем равенки, добиваме $x=2$, $y=0$, $z=-4$. Значи,

$$\overline{d} = 2\overline{a} + 0\cdot\overline{b} - 4\overline{c}.$$

76. Дали векторите $\overline{a}$ и $\overline{b}$ се колинеарни:

а) $\overline{a} = (\frac{3}{2},3,-6)$, $\overline{b}=(-6,-12,24)$:
б) $\overline{a} = (-\frac{1}{3},\frac{5}{4},-2)$, $\overline{b}=(\frac{1}{5},-\frac{3}{4},\frac{6}{5})$;
в) $\overline{a}=(1,2,4)$, $\overline{b}=(2,4,-3)$?

Решение. За векторите $\bar{a}=(a_1,a_2,a_3)$ и $\bar{b}=(b_1,b_2,b_3)$ да се колинеарни, треба да постојат реални броеви x и y, од кои барем еден е различен од нула, така што важи

$$x\bar{a} + y\bar{b} = \bar{o}.$$

а) Имаме

$$\frac{3}{2}x - 6y = 0,$$
$$3x - 12y = 0,$$
$$-6x + 2y = 0,$$

од каде што добиваме x=4y. Ставајќи y=1, добиваме x=4, т.е. $\bar{b}=-4\bar{a}$. Значи, векторите $\bar{a}$ и $\bar{b}$ се колинеарни.

77. Докажи дека векторите $\bar{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\bar{b}=(b_1,b_2,b_3)$, $\bar{c}=(c_1,c_2,c_3)$ се компланарни ако и само ако

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0. \qquad (16)$$

Решение. Да претпоставиме дека векторите $\bar{a},\bar{b}$ и $\bar{c}$ се компланарни. Тоа значи дека постојат реални броеви x,y и z, од кои барем еден е различен од нула, така што важи

$$x\bar{a} + y\bar{b} + z\bar{c} = \bar{o}.$$

т.е. системот равенки

$$a_1x + b_1y + c_1z = 0,$$
$$a_2x + b_2y + c_2z = 0,$$
$$a_3x + b_3y + c_3z = 0,$$

има нетривијално решение. Значи, важи условот (16).

Обратното го оставаме на читателот.

78. Дали векторите $\bar{a},\bar{b}$ и $\bar{c}$ се компланарни:

а) $\bar{a}=(-3,0,2)$, $\bar{b}=(2,1,-4)$, $\bar{c}=(11,-2,-2)$;
б) $\bar{a}=(1,0,7)$, $\bar{b}=(-1,2,4)$, $\bar{c}=(3,2,1)$;
в) $\bar{a}=(5,-1,4)$, $\bar{b}=(3,-5,2)$, $\bar{c}=(-1,-13,-2)$?

Решение. а) Имаме:

$$\begin{vmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -4 \\ 11 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 6-8-22+24 = 0,$$

што значи дека векторите $\bar{a}, \bar{b}$ и $\bar{c}$ се компланарни.

79. Најди ги реалните броеви x,y и z, така што векторите $x\bar{a}$, $y\bar{b}$ и $z\bar{c}$ да формираат триаголник, ако $\bar{a}=(6,4,2)$, $\bar{b}=(-9,6,3)$, $\bar{c}=(-3,6,3)$.

80. Дадени се векторите $\bar{a}=(1,5,3)$, $\bar{b}=(6,-4,-2)$, $\bar{c}=(0,-5,7)$, $\bar{d}=(-20,27,-35)$. Најди ги реалните броеви x,y,z, така што векторите $x\bar{a}$, $y\bar{b}$, $z\bar{c}$ и $\bar{d}$ да формираат четириаголник.

Афините координати на векторите од множеството V ќе ги искористиме за определување положбата на точките од просторот. За таа цел, во просторот избираме една точка 0 - координатен почеток и три некомпланарни вектори $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ - координатни вектори. Избраната четворка елементи (точката 0 и векторите $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$) ќе ја викаме афин координатен систем во просторот и ќе го означуваме со $(0;\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3)$. Ако M е произволна точка од просторот и ако радиусвекторот $\bar{r}=\overrightarrow{0M}$ на точката M има афини координати x_1, x_2, x_3 во однос на координатните вектори $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$, тогаш ќе велиме дека точката M има афини координати x_1, x_2, x_3 во однос на афиниот координатен систем $(0;\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3)$. Тоа ќе го означуваме симболично со $M(x_1,x_2,x_3)_{(0;\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3)}$ или, само, со $M(x_1,x_2,x_3)$ ако афиниот координатен систем $(0;\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3)$ е фиксиран. Значи

$$M(x_1,x_2,x_3)_{(0;\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3)} \Longleftrightarrow \overrightarrow{0M} = x_1\bar{e}_1+x_2\bar{e}_2+x_3\bar{e}_3. \qquad (17)$$

Ако $|\bar{e}_1|=|\bar{e}_2|=|\bar{e}_3|=1$ и ако $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ се пар по пар заемно нормални, тогаш афиниот координатен систем $(0;\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3)$ ќе го викаме правоаголен Декартов координатен систем.

81. Во просторот избери афин координатен систем $(0;\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3)$, а потоа нанеси ги точките A(2,3,0), B(0,4,1), C(-2,1,3), D(-3,0,0), E(0,-2,0) и F(0,0,4).

82. Најди ги координатите на темињата на паралелопипедот $ABCDA_1B_1C_1D_1$ во однос на афиниот координатен систем $(A;\vec{AB},\vec{AD},\vec{AA_1})$.

83. Најди ги координатите на темињата на тетраедарот ABCD во однос на афиниот координатен систем $(A;\vec{AB},\vec{AC},\vec{AD})$.

84. Дадена е точката $A(a_1,a_2,a_3)$. Најди ги координатите на точката B која е симетрична со точката A во однос на:

а) координатниот почеток;

б) x_1x_2-рамнината;

в) x_2x_3-рамнината;

г) x_3x_1-рамнината.

85. Дадени се точките $A(a_1,a_2,a_3)$ и $B(b_1,b_2,b_3)$. Најди ги координатите на векторот $\vec{AB}$.

Решение. Имаме:

$$\vec{OA} = a_1\bar{e}_1 + a_2\bar{e}_2 + a_3\bar{e}_3, \quad \vec{OB} = b_1\bar{e}_1 + b_2\bar{e}_2 + b_3\bar{e}_3,$$

а потоа

$$\vec{AB} = \vec{OB}-\vec{OA} = (b_1-a_1)\bar{e}_1 + (b_2-a_2)\bar{e}_2 + (b_3-a_3)\bar{e}_3.$$

Значи, $\vec{AB}=(b_1-a_1,b_2-a_2,b_3-a_3)$.

86. Најди ги координатите на векторот $\vec{AB}$, ако:

а) $A(1,0,0)$, $B(3,2,1)$; б) $A(\frac{1}{2},2,\frac{1}{3})$, $B(\frac{2}{3},1,-\frac{2}{3})$;

в) $A(0,0,0)$, $B(5,4,3)$; г) $A(1,2,3)$, $B(1,2,4)$.

87. Најди ги координатите на точката B, така што $\vec{AB}=\bar{a}$, ако:

а) $A(1,1,1)$, $\bar{a}=(2,\frac{1}{2},3)$; б) $A(\frac{1}{2},3,0)$, $\bar{a}=(3,4,5)$;

в) $A(0,0,0)$, $\bar{a}=(2,4,1)$; г) $A(1,2,3)$, $\bar{a}=(2,3,1)$.

88. Дадени се векторите $\vec{AB}=(1,3,-1)$, $\vec{BC}=(5,-2,2)$, $\vec{CD}=(\frac{1}{2},0,-1)$. Ако $A(2,3,0)$, најди ги координатите на точката D.

89. Провери дали четириаголникот ABCD /$A(1,-3,-2)$, $B(8,0,-4)$, $C(4,8,-3)$, $D(-3,5,-1)$/ е паралелограм.

Решение. Четириаголникот ABCD е паралелограм ако и само ако $\vec{AB}=\vec{DC}$. Имаме

$$\vec{AB} = (8-1,0+3,-4+2) = (7,3,-2),$$
$$\vec{DC} = (4+3,8-5,-3+1) = (7,3,-2),$$

што значи дека четириаголникот ABCD е паралелограм.

90. Дадени се темињата A(2,5,4), B(0,1,0) и C(4,1,3) на паралелограмот ABCD. Најди ги координатите на темето D.

91. Провери дали точките A(3,2,-1), B(2,4,2) и C(0,8,8) се колинеарни.

Решение. Точките A,B и C се колинеарни ако и само ако векторите $\vec{AB}$ и $\vec{AC}$ се колинеарни. Имаме $\vec{AB}=(-1,2,3)$, $\vec{AC}=(-3,6,9)$, па $\vec{AC}=3\vec{AB}$. Значи, векторите $\vec{AB}$ и $\vec{AC}$ се колинеарни, па и точките A,B и C се колинеарни.

92. Докажи дека точките $A(a_1,a_2,a_3)$, $B(b_1,b_2,b_3)$, $C(c_1,c_2,c_3)$ и $D(d_1,d_2,d_3)$ се компланарни ако и само ако

$$\begin{vmatrix} b_1-a_1 & b_2-a_2 & b_3-a_3 \\ c_1-a_1 & c_2-a_2 & c_3-a_3 \\ d_1-a_1 & d_2-a_2 & d_3-a_3 \end{vmatrix} = 0. \qquad (18)$$

Решение. Точките A,B,C и D се компланарни ако и само ако векторите $\vec{AB}$,$\vec{AC}$ и $\vec{AD}$ се компланарни, а, според 77, ако и само ако важи условот (18).

93. Провери дали точките A,B,C и D се компланарни:

а) A(2,3,1), B(3,1,4), C(2,1,5), D(0,0,9);
б) A(2,1,0), B(1,3,5), C(6,3,4), D(0,-7,8);
в) A(3,5,-1), B(7,5,3), C(9,-1,5), D(5,3,-3).

94. Каква е заемната положба на правите AB /A(6,0,1), B(-1,3,2)/ и CD /C(5,1,-3), D(6,1,3)/?

Решение. На правата AB лежи векторот $\vec{AB}=(-7,3,1)$, а на правата CD лежи векторот $\vec{CD}=(1,0,6)$. Векторите $\vec{AB}$ и $\vec{CD}$ не се колинеарни, па, значи, правите AB и CD не се паралелни.

Следствено, правите AB и CD се или разминувачки или се сечат. За да го провериме тоа, доволно е да провериме дали векторите $\vec{AB}$,$\vec{CD}$ и $\vec{AC}$ се компланарни. Имаме $\vec{AC}=(-1,1,-4)$, па

$$\begin{vmatrix} -7 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 6 \\ -1 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -18+1+42+12 = 37 \neq 0.$$

Според 77, следува дека векторите $\vec{AB}$,$\vec{CD}$ и $\vec{AC}$ не се компланарни, што значи дека правите AB и CD се разминувачки.

95. Докажи дека правите AB /A(5,1,3), B(6,2,7)/ и CD /C(4,1,4), D(5,0,-2)/ се сечат и да се најде пресечната точка M.

Решение. Имаме $\vec{AB}=(1,1,4)$, $\vec{CD}=(1,-1,-6)$, па, значи, правите AB и CD не се паралелни. Понатаму, $\vec{AC}=(-1,0,1)$ и

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & -6 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1+6-4-1 = 0,$$

што значи дека векторите $\vec{AB}$,$\vec{CD}$ и $\vec{AC}$ се компланарни. Следствено, правите AB и CD се сечат.

Нека $M(x_1,x_2,x_3)$ е пресечната точка на правите AB и CD. Од тоа што точката M лежи на правата AB, следува дека векторите $\vec{AB}=(1,1,4)$ и $\vec{AM}=(x_1-5,x_2-1,x_3-3)$ се колинеарни, па постои реален број λ, така што $\vec{AM}=\lambda\vec{AB}$, т.е.

$$x_1 = 5+\lambda, \quad x_2 = 1+\lambda, \quad x_3 = 3+4\lambda.$$

Слично, од тоа што точката M лежи на правата CD, добиваме дека

$$x_1 = 4+\mu, \quad x_2 = 1-\mu, \quad x_3 = 4-6\mu,$$

за некој реален број μ. Решавајќи го системот равенки

$$5+\lambda = 4+\mu,$$
$$1+\lambda = 1-\mu,$$

добиваме $\lambda = -\frac{1}{2}$, $\mu = \frac{1}{2}$. Значи, $M(\frac{9}{2},\frac{1}{2},1)$.

96. Докажи дека точките C,D и E не се колинеарни, а потоа испитај ја заемната положба на правата AB и рамнината CDE:

а) A(1,0,-1), B(6,2,4), C(5,0,-3), D(5,2,1), E(-1,0,3);
б) A(1,2,-1), B(-5,3,3), C(5,1,1), D(0,1,4), E(4,2,2);
в) A(5,4,2), B(9,8,3), C(1,0,1), D(2,3,3), E(4,1,0).

Решение. а) Имаме $\vec{CD}=(0,2,4)$, $\vec{CE}=(-6,0,6)$, што значи дека векторите $\vec{CD}$ и $\vec{CE}$ не се колинеарни, па и точките C,D и E не се колинеарни.

Понатаму имаме $\vec{AB}=(5,2,5)$ и

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \\ -6 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 60-48+60 = 72 \neq 0.$$

Тоа значи дека векторите $\vec{AB}$,$\vec{CD}$ и $\vec{CE}$ не се компланарни, т.е. правата AB не е паралелна со рамнината CDE. Следствено, правата AB ја прободува рамнината CDE.

Да го најдеме прободот на правата AB со рамнината CDE. Нека $M(x_1,x_2,x_3)$ е произволна точка од правата AB. Како во претходната задача, добиваме дека

$$x_1 = 1+5\lambda, \quad x_2 = 2\lambda, \quad x_3 = -1+5\lambda,$$

за некој реален број λ. За точката M да лежи во рамнината CDE, потребно е векторите $\vec{CM}=(5\lambda-4,2\lambda,5\lambda+2)$, $\vec{CD}=(0,2,4)$ и $\vec{CE}=(-6,0,6)$ да се компланарни, т.е.

$$\begin{vmatrix} 5\lambda-4 & 2\lambda & 5\lambda+2 \\ 0 & 2 & 4 \\ -6 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 0,$$

од каде што добиваме $\lambda = \frac{1}{3}$. Значи, $x_1 = \frac{8}{3}$, $x_2 = \frac{2}{3}$, $x_3 = \frac{2}{3}$, т.е. $M(\frac{8}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3})$.

97. Ако точката $M(x_1,x_2,x_3)$ ја дели отсечката AB $/A(a_1,a_2,a_3)$, $B(b_1,b_2,b_3)/$ во однос $\lambda\neq-1$, тогаш

$$x_1 = \frac{1}{1+\lambda}(a_1+\lambda b_1), \quad x_2 = \frac{1}{1+\lambda}(a_2+\lambda b_2), \quad x_3 = \frac{1}{1+\lambda}(a_3+\lambda b_3). \qquad (19)$$

Докажи!

98. Да се најде средината $M(x_1,x_2,x_3)$ на отсечката AB:

а) $A(3,6,0)$, $B(1,4,2)$; б) $A(-1,0,1)$, $B(1,0,-1)$.

99. Дадени се точките $A(2,6,3)$ и $M(6,2,0)$. Најди ги координатите на точката B, така што M е средина на отсечката AB.

100. Ако $T(x_1,x_2,x_3)$ е тежиштето на триаголникот ABC $/A(a_1,a_2,a_3)$, $B(b_1,b_2,b_3)$, $C(c_1,c_2,c_3)/$, тогаш

$$x_i = \frac{1}{3}(a_i+b_i+c_i),\ i=1,2,3. \qquad (20)$$

Докажи!

101. Најди ги координатите на тежиштето T од триаголникот ABC $/A(2,0,3)$, $B(5,-1,3)$, $C(1,2,0)/$.

102. Дадени се точките $A(2,6,1)$, $B(0,3,4)$ и $T(2,-1,3)$. Најди ги координатите на точката C, така што T е тежиште на триаголникот ABC.

103. Дадени се точките $T_1(6,0,3)$, $T_2(-1,2,4)$, $T_3(5,0,-7)$ и $T_4(6,2,-3)$. Најди ги координатите на точките A,B,C и D, така што точките T_1,T_2,T_3 и T_4 се тежишта на триаголниците BCD, CDA, DAB и ABC соодветно.

104. Правата AB $/A(7,-4,6)$, $B(3,-2,-4)/$ ги прободува координатните рамнини x_2x_3, x_3x_1 и x_1x_2 соодветно во точките A_1,A_2 и A_3.

а) Најди ја средината на отсечката A_2A_3;

б) Да се најде односот $\overrightarrow{A_1A_2}:\overrightarrow{A_2A_3}$.

Решение. Да ја најдеме, прво, точката A_1. Од тоа што точката A_1 лежи во x_2x_3-рамнината, следува дека првата координата и е нула, т.е. $A_1(0,x_2,x_3)$. Точката A_1 лежи на правата AB, што значи дека векторите $\overrightarrow{AA_1}=(-7,x_2+4,x_3-6)$ и $\overrightarrow{AB}=(-4,2,-10)$ се колинеарни, па постои реален број λ, така што $\overrightarrow{AA_1}=\lambda\overrightarrow{AB}$, т.е.

$$-7 = -4\lambda, \quad x_2+4 = 2\lambda, \quad x_3-6 = -10\lambda.$$

Значи, $\lambda = \frac{7}{4}$, а потоа $x_2 = -\frac{1}{2}$, $x_3 = -\frac{23}{2}$, т.е. $A_1(0,-\frac{1}{2},-\frac{23}{2})$.

Слично, добиваме дека $A_2(-1,0,-14)$, $A_3(\frac{23}{5},-\frac{14}{5},0)$.

а) Средината на отсечката A_2A_3 е точката $M(\frac{9}{5},-\frac{7}{5},-7)$.

б) Имаме:

$$\vec{A_1A_2} = (-1,\frac{1}{2},-\frac{5}{2}) = \frac{1}{2}(-2,1,-5),$$
$$\vec{A_2A_3} = (\frac{28}{5},-\frac{14}{5},14) = -\frac{14}{5}(-2,1,-5),$$

па $\vec{A_1A_2}:\vec{A_2A_3} = -5:28$.

105. Правата AB /A(2,-1,7), B(4,5,2)/ ги прободува координатните рамнини x_2x_3, x_3x_1 и x_1x_2 соодветно во точките A_1,A_2 и A_3. Најди го односот во кој точката A_i, $i=1,2$, ја дели отсечката AB.

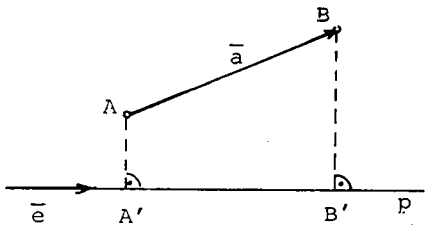
Глава III

СКАЛАРЕН ПРОИЗВОД

1. ПРОЕКЦИЈА НА ВЕКТОР ВРЗ ОСКА

Нека p е права и $\bar{e}$ единичен вектор паралелен со правата p. Со насоката на векторот $\bar{e}$ ја насочуваме и правата p; насоката на векторот $\bar{e}$ ја избираме за позитивна насока на правата p и, во тој случај, правата ќе ја викаме оска.

Нека p е дадена оска со единичен вектор $\bar{e}$ и нека $\bar{a}=\vec{AB}$ е произволен вектор (црт. 1). Да ги означиме со A′ и B′ ортогоналните проекции (понатаму само проекции) на точките A и B врз пра-



Црт. 1

вата p. Векторот $\vec{A'B'}$ е колинеарен со векторот $\bar{e}$, па постои реален број x, така што

$$\vec{A'B'} = x\vec{e}. \qquad (1)$$

Бројот x во равенството (1) ќе го викаме проекција на векторот $\bar{a}=\vec{AB}$ врз оската p и ќе ја означуваме со

$$x = \text{пр}_p\bar{a}. \qquad (2)$$

Проекцијата x на векторот $\bar{a}=\vec{AB}$ врз оската p е, всушност, должината на отсечката A′B′, земена со знак плус ако векторите $\vec{A'B'}$ и $\bar{e}$ се исто насочени, а со знак минус во спротивниот случај.

Ако $\bar{v}$ е ненулти вектор паралелен со правата p, тогаш правата p можеме да ја разгледуваме како оска со единичен вектор $\bar{e} = \frac{1}{v}\bar{v}$. Под <u>проекција на векторот</u> $\bar{a}$ <u>врз векторот</u> $\bar{v}$ ќе ја подразбираме проекцијата на векторот $\bar{a}$ врз оската p и ќе ја означуваме со $\text{пр}_{\bar{v}}\bar{a}$; значи,

$$\text{пр}_{\bar{v}}\bar{a} = \text{пр}_p\bar{a}. \tag{3}$$

<u>1</u>. Во кој случај $\text{пр}_p\bar{a} = 0$?

<u>2</u>. Ако $\bar{a}=\bar{b}$, тогаш $\text{пр}_p\bar{a} = \text{пр}_p\bar{b}$. Докажи!

<u>3</u>. Дали од $\text{пр}_p\bar{a} = \text{пр}_p\bar{b}$ следува $\bar{a} = \bar{b}$?

<u>4</u>. Нека векторот $\vec{AB}$ не е нулти и не е нормален на оската p и нека точката M ја дели отсечката AB во однос m:n. Докажи дека проекцијата M′ на точката M врз правата p ја дели проекцијата A′B′ на отсечката AB во однос m:n.

<u>5</u>. Докажи дека за произволен вектор $\bar{a}$ важи неравенството $|\text{пр}_p\bar{a}| \le a$. Во кој случај важи равенство?

<u>6</u>. Нека векторот $\bar{a}$ е паралелен со оската p. Да се пресмета $\text{пр}_p\bar{a}$ ако:

а) векторите $\bar{a}$ и $\bar{e}$ се исто насочени;

б) векторите $\bar{a}$ и $\bar{e}$ се спротивно насочени.

<u>7</u>. За кој било ненулти вектор $\bar{a}$ важи $\text{пр}_{\bar{a}}\bar{a} = a$. Докажи!

<u>8</u>. Нека p и q се две непаралелни оски. Докажи дека

$$\text{пр}_p\bar{a} = \text{пр}_p\bar{b},\ \text{пр}_q\bar{a} = \text{пр}_q\bar{b} \Longrightarrow \bar{a} = \bar{b}.$$

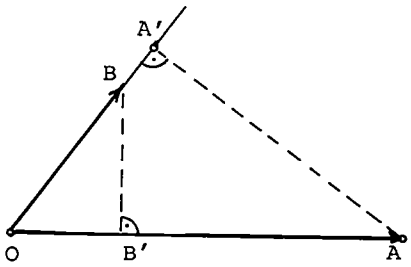
<u>9</u>. Да се докаже дека $\text{пр}_{\bar{b}}\bar{a} = a\cos\langle\bar{a},\bar{b}\rangle$.

<u>10</u>. Нека $\bar{a}$ и $\bar{b}$ се два ненулти вектори. Докажи дека

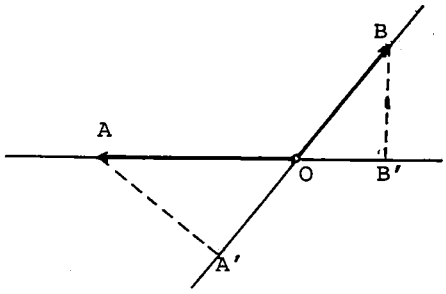
$$a\text{пр}_{\bar{a}}\bar{b} = b\text{пр}_{\bar{b}}\bar{a}. \tag{4}$$

<u>Решение</u>. Ако $\bar{a} \perp \bar{b}$, тогаш $\text{пр}_{\bar{b}}\bar{a} = \text{пр}_{\bar{a}}\bar{b} = 0$, па, значи, важи равенството (4); ако векторите $\bar{a}$ и $\bar{b}$ се колинеарни со иста насока, тогаш $\text{пр}_{\bar{b}}\bar{a} = a$, $\text{пр}_{\bar{a}}\bar{b} = b$, а ако се колинеарни со спротивна насока, тогаш $\text{пр}_{\bar{b}}\bar{a} = -a$, $\text{пр}_{\bar{a}}\bar{b} = -b$, па имаме $a\text{пр}_{\bar{a}}\bar{b} = \pm ab = b\text{пр}_{\bar{b}}\bar{a}$.

Затоа, да претпоставиме дека векторите $\bar{a}$, $\bar{b}$ не се колинеарни и дека не се заемно нормални. Да ги нанесеме од иста точка O, т.е. $\vec{OA}=\bar{a}$, $\vec{OB}=\bar{b}$. Двата можни случаи се прикажани на црт. 2 и црт. 3.



Црт. 2



Црт. 3

Триаголниците OA'A и OB'B се правоаголни со еднакви остри агли кај темето O, па, значи, тие се слични. Од тоа следува дека $\overline{OA'}:\overline{OB'}=\overline{OA}:\overline{OB}$, $\overline{OA}\cdot\overline{OB'}=\overline{OB}\cdot\overline{OA'}$, т.е.

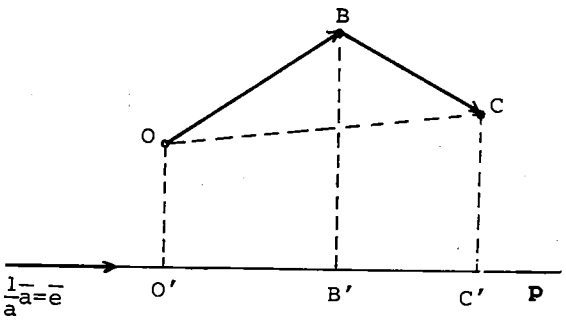
$$a\,|\text{пр}_{\bar{a}}\bar{b}| = b\,|\text{пр}_{\bar{b}}\bar{a}|.$$

Но, броевите $\text{пр}_{\bar{b}}\bar{a}$ и $\text{пр}_{\bar{a}}\bar{b}$ се со ист знак (во случајот како на црт. 2 и двата се позитивни, а како на црт. 3 и двата се негативни), што значи дека важи равенството (4).

Да забележиме дека тврдењето следува и директно од задачата 8, а и од задачата 9.

11. Да се докаже дека

$$\text{пр}_{\bar{a}}(\bar{b}+\bar{c}) = \text{пр}_{\bar{a}}\bar{b} + \text{пр}_{\bar{a}}\bar{c}. \qquad (5)$$



Црт. 4

Решение. Да избереме произволна точка O и да ги нанесеме векторите $\overrightarrow{OB}=\bar{b}$ и $\overrightarrow{BC}=\bar{c}$ (црт. 4). Тогаш имаме $\overrightarrow{O'B'}=(\text{пр}_{\bar{a}}\bar{b})\bar{e}$, $\overrightarrow{B'C'}=(\text{пр}_{\bar{a}}\bar{c})\bar{e}$ и $\overrightarrow{O'C'}=[\text{пр}_{\bar{a}}(\bar{b}+\bar{c})]\bar{e}$. Бидејќи $\overrightarrow{O'C'}=\overrightarrow{O'B'}+\overrightarrow{B'C'}=$ $=(\text{пр}_{\bar{a}}\bar{b})\bar{e}+(\text{пр}_{\bar{a}}\bar{c})\bar{e}=(\text{пр}_{\bar{a}}\bar{b}+\text{пр}_{\bar{a}}\bar{c})\bar{e}$, следува дека важи равенството (5).

12. Дали важи равенството $\text{пр}_{(\bar{b}+\bar{c})}\bar{a} = \text{пр}_{\bar{b}}\bar{a} + \text{пр}_{\bar{c}}\bar{a}$?

13. Да се докаже дека за произволен реален број λ важи равенството:

$$\text{пр}_{\bar{b}}\lambda\bar{a} = \lambda\text{пр}_{\bar{b}}\bar{a}.$$

14. Нека $\text{пр}_{\bar{a}}\bar{b}=-3$, $\text{пр}_{\bar{a}}\bar{c}=4$. Пресметај $\text{пр}_{\bar{a}}3\bar{b}$, $\text{пр}_{\bar{a}}(\bar{b}-\bar{c})$, $\text{пр}_{\bar{a}}(3\bar{b}-\frac{1}{2}\bar{c})$.

2. ДЕФИНИЦИЈА И СВОЈСТВА НА СКАЛАРЕН ПРОИЗВОД

Нека $\bar{a}$ и $\bar{b}$ се ненулти вектори и нека ϕ е аголот меѓу $\bar{a}$ и $\bar{b}$. Бројот $ab\cos\phi$ се нарекува скаларен производ на векторите $\bar{a}$ и $\bar{b}$ и се означува $\bar{a}\bar{b}$; значи,

$$\bar{a}\bar{b} = ab\cos\phi. \tag{6}$$

Ако, пак, $\bar{a}=\bar{o}$ или $\bar{b}=\bar{o}$, тогаш по дефиниција сметаме дека $\bar{a}\bar{b}=0$.

15. Ако $\bar{a}$ и $\bar{b}$ се ненулти вектори, тогаш

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = a\text{пр}_{\bar{a}}\bar{b} = b\text{пр}_{\bar{b}}\bar{a}. \tag{7}$$

Докажи!

16. Ако $\bar{a}$ и $\bar{b}$ се ненулти вектори, тогаш $\bar{a}\bar{b}=0$ ако и само ако $\bar{a}$ и $\bar{b}$ се заемно нормални. Докажи!

17. За скаларното множење на два вектора важи комутативниот закон, т.е. за кои било два вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ важи равенството

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = \bar{b}\cdot\bar{a}. \tag{8}$$

Докажи!

18. Дали за скаларното множење важи асоцијативниот закон, т.е. дали важи равенството $(\bar{a}\bar{b})\bar{c} = \bar{a}(\bar{b}\bar{c})$?

19. За кои било вектори $\bar{a},\bar{b}$ и кој било реален број λ важат равенствата

$$\lambda(\bar{a}\bar{b}) = (\lambda\bar{a})\bar{b} = \bar{a}(\lambda\bar{b}). \tag{9}$$

Докажи!

20. Да се докаже дека важат дистрибутивните закони за скаларното множење во однос на собирањето на вектори, т.е. дека за кои било вектори $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ важат равенствата

$$\bar{a}(\bar{b}+\bar{c}) = \bar{a}\bar{b}+\bar{a}\bar{c}, \quad (\bar{a}+\bar{b})\bar{c} = \bar{a}\bar{c}+\bar{b}\bar{c}. \tag{10}$$

21. За кој било вектор $\bar{a}$ важи

$$\bar{a}\bar{a} = a^2 \geq 0, \text{ т.е. } a = \sqrt{\bar{a}\bar{a}}; \tag{11}$$

притоа, $a^2=0$ ако и само ако $\bar{a}=\bar{0}$. Докажи!

22. Дали од $\bar{a}\bar{b}=\bar{a}\bar{c}$ следува $\bar{b} = \bar{c}$?

23. Да се докаже дека: ако за секој вектор $\bar{x}$ важи $\bar{x}\bar{a}=\bar{x}\bar{b}$, тогаш $\bar{a} = \bar{b}$.

Решение. Од $\bar{x}\bar{a}=\bar{x}\bar{b}$ следува дека

$$\bar{x}(\bar{a}-\bar{b}) = 0,$$

коешто равенство треба да важи за секој вектор $\bar{x}$, т.е. векторот $\bar{a}-\bar{b}$ треба да е нормален на секој вектор $\bar{x}$. Тоа е можно само ако $\bar{a}-\bar{b}=\bar{0}$, т.е. само ако $\bar{a}=\bar{b}$.

24. Векторите $\bar{a}$ и $\bar{b}$ се колинеарни и, притоа, a=2, b=3. Да се пресмета нивниот скаларен производ ако:

а) тие се исто насочени;

б) тие се спротивно насочени.

Решение. Ако векторите $\bar{a}$ и $\bar{b}$ се исто насочени, тогаш $\text{пр}_{\bar{a}}\bar{b}=b$ (види 6), па $\bar{a}\bar{b}=a\text{пр}_{\bar{a}}\bar{b}=ab$; ако, пак, се спротивно насочени, тогаш $\text{пр}_{\bar{a}}\bar{b}=-b$, па $\bar{a}\bar{b}=a\text{пр}_{\bar{a}}\bar{b}=-ab$.

25. Во кој случај важи равенството:

а) $\bar{a}\bar{b} = ab$; б) $\bar{a}\bar{b} = -ab$?

26. Да се пресмета $\bar{a}\bar{b}$ ако $a=3\bar{p}+4\bar{q}$, $\bar{b}=12\bar{p}-5\bar{q}$, p=2, q=3, $\langle\bar{p},\bar{q}\rangle = 60^{\circ}$.

Решение. Користејќи ги дистрибутивните закони и комутативниот закон, имаме:

$$\bar{a}\bar{b} = (3\bar{p}+4\bar{q})(12\bar{p}-5\bar{q}) = 36\bar{p}\bar{p}-15\bar{p}\bar{q}+48\bar{q}\bar{p}-2\bar{q}\bar{q} =$$
$$= 36p^2+33\bar{p}\bar{q}-2q^2 = 36\cdot 2^2+33\cdot 2\cdot 3\cdot\cos 60^\circ-2\cdot 3^2 =$$
$$= 36\cdot 4+33\cdot 6\cdot\frac{1}{2}-2\cdot 9 = 144+99-18 = 225.$$

27. Дадени се векторите $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ при што a=1, b=2, c=3, $\langle\bar{a},\bar{b}\rangle = \langle\bar{b},\bar{c}\rangle = 90^\circ$, $\langle\bar{c},\bar{a}\rangle = 45^\circ$. Да се најде должината на векторот $\bar{p}$ ако:

а) $\bar{p}=\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}$; б) $\bar{p}=2\bar{a}-\bar{b}+3\bar{c}$; в) $\bar{p}=\bar{a}+2\bar{b}-4\bar{c}$.

Решение. а) Според задачата 21, имаме:

$$p^2 = \bar{p}\cdot\bar{p} = (\bar{a}+\bar{b}+\bar{c})(\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}) = (\bar{a}+\bar{b}+\bar{c})^2 =$$
$$= \bar{a}^2+\bar{b}^2+\bar{c}^2 + 2\bar{a}\bar{b}+2\bar{a}\bar{c}+2\bar{b}\bar{c} =$$
$$= 1+4+9+2\cdot 0+2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+2\cdot 0 = 14+\sqrt{2},$$

па, значи, $p = \sqrt{14+\sqrt{2}}$.

28. Дадени се векторите $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ при што a=2, b=c=1, $\langle\bar{a},\bar{b}\rangle = 90^\circ$, $\langle\bar{b},\bar{c}\rangle = \langle\bar{c},\bar{a}\rangle = 60^\circ$. Да се најде аголот меѓу векторите $\bar{p}$ и $\bar{q}$ ако:

а) $\bar{p} = \frac{1}{2}\bar{a}+\bar{b}$, $\bar{q} = \bar{c}$; б) $\bar{p} = \bar{a}+\bar{b}+\bar{c}$, $\bar{q} = \bar{a}-3\bar{b}$;
в) $\bar{p} = \bar{a}+\bar{b}$, $\bar{q} = \bar{b}-\bar{c}$; г) $\bar{p} = \bar{b}+\bar{c}$, $\bar{q} = -\bar{a}+\bar{b}$.

Решение. а) Бидејќи $\bar{p}\bar{q}=pq\cos\langle\bar{p},\bar{q}\rangle$, при условот $pq\neq 0$, имаме

$$\cos\langle\bar{p},\bar{q}\rangle = \frac{\bar{p}\bar{q}}{pq}. \tag{12}$$

Значи, да го најдеме аголот меѓу $\bar{p}$ и $\bar{q}$, треба да ги најдеме $\bar{p}\bar{q}$, p и q. Имаме:

$$\bar{p}\bar{q} = (\frac{1}{2}\bar{a}+\bar{b})\bar{c} = \frac{1}{2}\bar{a}\bar{c} + \bar{b}\bar{c} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1,$$
$$p^2 = (\frac{1}{2}\bar{a}+\bar{b})^2 = \frac{1}{4}a^2+b^2 = 2, \quad p = \sqrt{2}, \quad q = 1,$$

па

$$\cos\langle\bar{p},\bar{q}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Според тоа, $\langle\bar{p},\bar{q}\rangle = 45^\circ$.

29. Каков агол зафаќаат единичните вектори $\bar{a}$ и $\bar{b}$, ако векторите $\bar{p}=\bar{a}+2\bar{b}$ и $\bar{q}=5\bar{a}-4\bar{b}$ се заемно нормални?

30. Ако $(2\bar{a}-\bar{b}) \perp (\bar{a}+\bar{b})$ и $(\bar{a}-2\bar{b}) \perp (2\bar{a}+\bar{b})$, да се најде аголот меѓу $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

31. Дадени се векторите $\bar{a}$ и $\bar{b}$. Да се докаже дека векторите $\bar{p}=x\bar{a}+3\bar{b}$ и $\bar{q}=(\bar{a}\bar{b})\bar{a}-a^2\bar{b}$ се заемно нормални за секој реален број x ако и само ако векторите $\bar{a}$ и $\bar{b}$ се колинеарни.

32. Да се докаже дека векторите $\bar{a}(\bar{b}\bar{c})-\bar{b}(\bar{c}\bar{a})$ и $\bar{c}$ се заемно нормални.

33. Нека векторите $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ се линеарно независни. Да се најде векторот $\bar{p}$ што е нормален на сите три вектори.

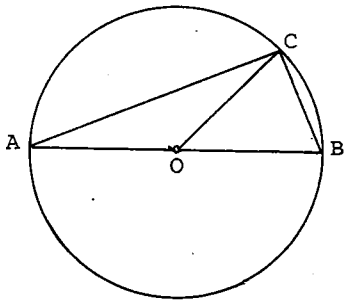
34. Да се пресмета $\vec{AB}\cdot\vec{BC}+\vec{BC}\cdot\vec{CA}+\vec{CA}\cdot\vec{AB}$, каде што ABC е рамностран триаголник со страна a.

Решение. Бидејќи триаголникот ABC е рамностран, следува дека $\langle\vec{AB},\vec{BC}\rangle = \langle\vec{BC},\vec{CA}\rangle = \langle\vec{CA},\vec{AB}\rangle = 120^\circ$, па $\vec{AB}\cdot\vec{BC}+\vec{BC}\cdot\vec{CA}+\vec{CA}\cdot\vec{AB} = -\frac{3a}{2}$.

35. Да се најде аголот меѓу векторите $\bar{a}+\bar{b}$ и $\bar{a}-\bar{b}$, ако $\bar{a}$ и $\bar{b}$ не се колинеарни и ако a=b. Да се даде геометриско толкување.

3. ПРИМЕНА ВО ГЕОМЕТРИЈАТА

36. Да се докаже теоремата на Талес: Секој периферискиагол над дијаметар е прав.



Црт. 5

Решение. Нека $k(O,r)$ е дадена кружница, AB еден нејзин дијаметар и C произволна точка од кружницата (црт. 5). Тогаш имаме $\vec{CA} = \vec{CO}+\vec{OA}$, $\vec{CB} = \vec{CO}+\vec{OB} = \vec{CO}-\vec{OA}$, па

$$\vec{CA}\cdot\vec{CB} = (\vec{CO}+\vec{OA})(\vec{CO}-\vec{OA}) = \overline{CO}^2-\overline{OA}^2 = r^2-r^2 = 0,$$

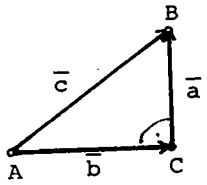
што значи дека векторите $\vec{CA}$ и $\vec{CB}$ се заемно нормални, т.е. $\sphericalangle ACB=90^\circ$.

37. Да се докаже Питагоровата теорема: Збирот од квадратите на катетите е еднаков со квадратот на хипотенузата.

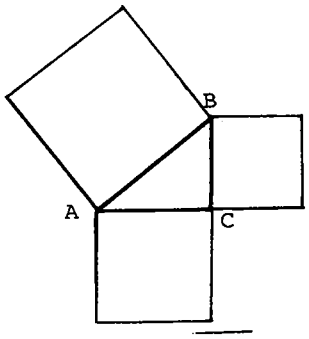
Решение. Нека ΔABC е правоаголен со прав агол кај темето C и нека $\bar{a}=\vec{CB}$, $\bar{b}=\vec{AC}$, $\vec{AB}=\bar{c}$ (црт. 6). Тогаш имаме $\bar{c}=\bar{a}+\bar{b}$, па

$$c^2 = \bar{c}\bar{c} = (\bar{a}+\bar{b})^2 = a^2+b^2+2\bar{a}\bar{b} = a^2+b^2,$$

зашто $\bar{a}\bar{b} = 0$.



Црт. 6



Црт. 7

38. Даден е правоаголен триаголник ABC со катети $a=\overline{CB}$, $b=\overline{CA}$ и хипотенуза $c=\overline{AB}$. Ако CC′ е висината спуштена од темето на правиот агол, да се изрази векторот $\vec{CC'}$ со помош на векторите $\vec{CA}$ и $\vec{CB}$.

39. Да се најде должината на висината $h=CC'$ во правоаголниот триаголник ABC, спуштена од темето C на правиот агол, ако се познати катетите a,b и хипотенузата c на триаголникот.

40. Да се докажат Евклидовите теореми. Нека ABC е правоаголен триаголник и $CC'=h$ е висината спуштена од темето C на правиот агол. Да ги означиме со p и q ортогоналните проекции

од катетите a и b врз хипотенузата c. Тогаш:

а) $h^2=pq$, т.е. висината h е геометриска средина од p и q;
б) $a^2=pc$, $b^2=qc$, т.е. секоја од катетите е геометриска средина од хипотенузата и ортогоналната проекција од катетата врз хипотенузата.

41. Да се пресмета аголот ϕ меѓу тежишните линии повлечени од темињата на острите агли во еден рамнокрак правоаголен триаголник.

42. Нека T е тежиштето на триаголникот ABC и нека O е произволна точка. Да се докаже равенството

$$\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CA}^2 = 3(\overline{OA}^2+\overline{OB}^2+\overline{OC}^2)-9\overline{OT}^2. \qquad (13)$$

Решение. Имаме $\vec{AB} = \vec{OB}-\vec{OA}$, $\vec{BC} = \vec{OC}-\vec{OB}$, $\vec{CA} = \vec{OA}-\vec{OC}$, па:

$$\overline{AB}^2 = \overline{OB}^2 + \overline{OA}^2 - 2\vec{OA}\cdot\vec{OB},$$
$$\overline{BC}^2 = \overline{OC}^2 + \overline{OB}^2 - 2\vec{OB}\cdot\vec{OC},$$
$$\overline{CA}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OC}^2 - 2\vec{OA}\cdot\vec{OC}.$$

Собирајќи ги овие равенства, добиваме:

$$\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CA}^2 = 2(\overline{OA}^2+\overline{OB}^2+\overline{OC}^2)-2(\vec{OA}\cdot\vec{OB}+\vec{OB}\cdot\vec{OC}+\vec{OC}\cdot\vec{OA}) =$$
$$= 3(\overline{OA}^2+\overline{OB}^2+\overline{OC}^2)-(\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC})^2.$$

Но, $\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC} = 3\vec{OT}$ (I.125), па, значи, точно е равенството (13).

43. Да се докаже дека за кој било триаголник ABC важи равенството

$$3(a^2+b^2+c^2) = 4(t_a^2+t_b^2+t_c^2).$$

44. За триаголникот ABC познати се неговите страни a,b и c. Да се најдат должините на тежишните линии.

Решение. Да ја најдеме тежишната линија $t_a=\overline{AA_1}$. За векторот $\bar{t}_a=\vec{AA_1}$ имаме

$$\bar{t}_a = \vec{AA_1} = \frac{1}{2}(\vec{AB}+\vec{AC}),$$

па

$$t_a^2 = \frac{1}{4}(\vec{AB}+\vec{AC})^2 = \frac{1}{4}(\overline{AB}^2+\overline{AC}^2+2\vec{AB}\cdot\vec{AC}).$$

Бидејќи $\vec{AB}-\vec{AC} = \vec{CB}$, ќе имаме

$$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-2\vec{AB}\cdot\vec{AC} = \overline{CB}^2,$$

т.е.

$$2\vec{AB}\cdot\vec{AC} = b^2+c^2-a^2.$$

Следствено,

$$t_a^2 = \frac{1}{4}(b^2+c^2+b^2+c^2-a^2) = \frac{1}{4}(2b^2+2c^2-a^2).$$

Слично, добиваме

$$t_b^2 = \frac{1}{4}(2c^2+2a^2-b^2), \qquad t_c^2 = \frac{1}{4}(2a^2+2b^2-c^2).$$

45. За триаголникот ABC дадени се страните a,b и c. Да се најдат аглите што тежишните линии ги зафаќаат со страните на триаголникот.

Решение. Ќе ги најдеме само аглите што тежишната линија AA_1 ги зафаќа со страните AB и AC. Имаме $\vec{AA_1} = \frac{1}{2}(\vec{AB}+\vec{AC})$, па

$$\vec{AA_1}\cdot\vec{AB} = \frac{1}{2}(c^2+\vec{AB}\cdot\vec{AC}) = \frac{1}{2}\left[c^2+\frac{1}{2}(b^2+c^2-a^2)\right] =$$
$$= \frac{1}{4}(b^2+3c^2-a^2),$$

па

$$t_a c \cos\langle\vec{AA_1},\vec{AB}\rangle = \frac{1}{4}(b^2+3c^2-a^2),$$

т.е.

$$\cos\langle\vec{AA_1},\vec{AB}\rangle = \frac{b^2+3c^2-a^2}{2c\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}}.$$

На сличен начин, добиваме:

$$\cos\langle\vec{AA_1},\vec{AC}\rangle = \frac{3b^2+c^2-a^2}{2b\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}}.$$

46. За триаголникот ABC се познати страните a,b и c. Да се најде симетралата s_a на аголот α.

Решение. Според I.88, за векторот $\bar{s}_a=\vec{AA_2}$ имаме:

$$\bar{s}_a = \frac{1}{b+c}(c\vec{AC}+b\vec{AB}),$$

па

$$s_a^2 = \frac{1}{(b+c)^2}(c^2b^2+b^2c^2+2bc\vec{AB}\cdot\vec{AC}) =$$
$$= \frac{1}{(b+c)^2}(2b^2c^2+bc(b^2+c^2-a^2)) =$$
$$= \frac{1}{(b+c)^2}(bc((b+c)^2-a^2)).$$

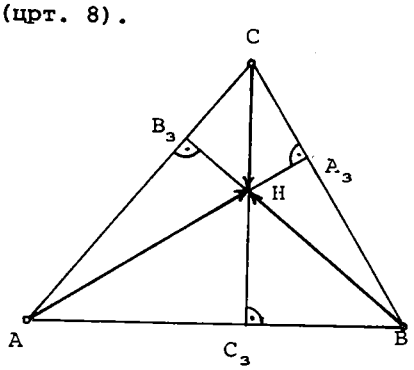
47. Нека V е центарот на впишаната кружница во триаголникот ABC. Да се докаже дека

$$\overline{AV}^2 = \frac{1}{(a+b+c)^2}\{bc[(b+c)^2-a^2]\}.$$

48. За триаголникот ABC се познати страните a,b и c. Да се најде аголот ϕ што го зафаќаат симетралите s_a и s_b на аглите α и β соодветно.

50. Да се докаже дека висините во секој триаголник се сечат во една иста точка.

Решение. Нека $AA_з$, $BB_з$ и $CC_з$ се висините во триаголникот ABC и нека $H=AA_з \cap BB_з$ (црт. 8).



Црт. 8

Тогаш имаме $\vec{AH}\vec{BC} = 0$ и $\vec{BH}\vec{AC} = 0$. За да докажеме дека и висината $CC_з$ минува низ точката H, доволно е да докажеме дека $\vec{CH}\vec{AB} = 0$. Од една страна имаме $\vec{CH} = \vec{CA}+\vec{AH}$, па

$$\vec{BC}\cdot\vec{CH} = \vec{BC}\cdot\vec{CA} + \vec{BC}\cdot\vec{AH} = \vec{BC}\cdot\vec{CA};$$

од друга страна, пак, имаме $\vec{CH} = \vec{CB}+\vec{BH}$, па

$$\vec{CA}\cdot\vec{CH} = \vec{CA}\cdot\vec{CB} + \vec{CA}\cdot\vec{BH} = \vec{CA}\cdot\vec{CB}.$$

Собирајќи ги двете равенства, добиваме

$$(\vec{BC}+\vec{CA})\vec{CH} = (\vec{BC}+\vec{CB})\vec{CA} = 0,$$

т.е. $\vec{CH}\cdot\vec{AB} = 0$, што требаше да се докаже.

51. Нека $AA_з$ е висина во триаголникот ABC со страни a,b и c. Да се изрази векторот $\vec{AA_з}$ со помош на векторите $\vec{AB}$ и $\vec{AC}$.

Решение. Векторите $\vec{BA_3}$ и $\vec{BC}$ (црт. 8) се колинеарни, па постои реален број λ, така што $\vec{BA_3}=\lambda\vec{BC}$. Множејќи го равенството $\vec{AA_3}=\vec{AB}+\lambda\vec{BC}$ скаларно со $\vec{BC}$, добиваме

$$0 = \vec{AB}\cdot\vec{BC} + \lambda a^2. \tag{14}$$

Од равенството $\vec{AB}+\vec{BC} = \vec{AC}$ добиваме

$$c^2 + a^2 + 2\vec{AB}\cdot\vec{BC} = b^2,$$

т.е. $\vec{AB}\cdot\vec{BC} = \frac{1}{2}(b^2-c^2-a^2)$. Заменувајќи во (14), добиваме

$$\lambda = \frac{1}{2a^2}(c^2+a^2-b^2),$$

па,

$$\vec{AA_3} = \vec{AB} + \frac{1}{2a^2}(c^2+a^2-b^2)\vec{BC} =$$

$$= \vec{AB} + \frac{1}{2a^2}(c^2+a^2-b^2)(\vec{AC}-\vec{AB}) =$$

$$= \frac{1}{2a^2}[(a^2+b^2-c^2)\vec{AB} + (c^2+a^2-b^2)\vec{AC}].$$

52. Ако AA_3 е висина во триаголникот ABC, тогаш

$$\overline{AA_3} = \frac{2}{a}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

каде што $2s=a+b+c$. Докажи!

53. Нека H е ортоцентарот на триаголникот ABC. Да се докаже дека:

а) $\vec{AH} = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-a^4-b^4-c^4}[(a^2+b^2-c^2)\vec{AB}+(c^2+a^2-b^2)\vec{AC}]$;

б) $\overline{AH} = \dfrac{4a(b^2+c^2-a^2)}{2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-a^4-b^4-c^4}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.

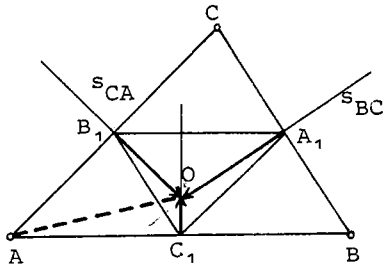
54. Да се докаже дека симетралите на страните во секој триаголник минуваат низ една иста точка.

Решение. Нека A_1, B_1 и C_1 се средините на страните BC, CA и AB на триаголникот ABC, нека s_{BC} и s_{CA} се симетралите на страните BC и CA соодветно и нека $O=s_{BC}\cap s_{CA}$ (црт. 9). За да докажеме дека и симетралата s_{AB} на страната AB минува низ точката O доволно е да докажеме дека $\vec{C_1O}\cdot\vec{AB}=0$. Имаме $\vec{A_1O}\cdot\vec{BC}=0$ и $\vec{B_1O}\cdot\vec{CA}=0$. Од една страна $\vec{C_1O} = \vec{C_1A_1}+\vec{A_1O} = \frac{1}{2}\vec{AC} + \vec{A_1O}$, па

$$\vec{C_1O}\cdot\vec{BC} = \frac{1}{2}(\vec{AC}+\vec{A_1O})\vec{BC} = \frac{1}{2}\vec{AC}\cdot\vec{BC},$$

а од друга страна $\vec{C_1O} = \vec{C_1B_1}+\vec{B_1O} = \frac{1}{2}\vec{BC}+\vec{B_1O}$, па

$$\vec{C_1O}\cdot\vec{AC} = \frac{1}{2}(\vec{BC}+\vec{B_1O})\vec{AC} = \frac{1}{2}\vec{BC}\cdot\vec{AC}.$$



Црт. 9

На крајот, имаме

$$\vec{AB}\cdot\vec{C_1O} = (\vec{AC}+\vec{CB})\vec{C_1O} = \vec{AC}\cdot\vec{C_1O}+\vec{CB}\cdot\vec{C_1O} =$$
$$= \vec{AC}\cdot\vec{C_1O}-\vec{BC}\cdot\vec{C_1O} = \frac{1}{2}\vec{AC}\vec{BC} - \frac{1}{2}\vec{AC}\vec{BC} = 0,$$

што требаше да докажеме.

Да забележиме дека точката O е ортоцентар на триаголникот $A_1B_1C_1$.

55. Нека O е центарот на опишаната кружница околу триаголникот ABC. Да се изрази векторот $\vec{AO}$ со помош на векторите $\vec{AB}$ и $\vec{AC}$.

Решение. Користејќи го тоа што точката O е ортоцентар на триаголникот $A_1B_1C_1$ (црт. 9) и задачата 52, имаме: → Херонова формула

$$\vec{AO} = \vec{AC_1}+\vec{C_1O} =$$
$$= \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{\overline{C_1A_1}^2+\overline{B_1C_1}^2-\overline{A_1B_1}^2}{2(\overline{A_1B_1}^2\overline{B_1C_1}^2+\overline{B_1C_1}^2\overline{C_1A_1}^2+\overline{C_1A_1}^2\overline{A_1B_1}^2)-\overline{A_1B_1}^4-\overline{B_1C_1}^4-\overline{C_1A_1}^4}\cdot$$
$$\cdot\left[(\overline{A_1B_1}^2+\overline{B_1C_1}^2-\overline{C_1A_1}^2)\vec{C_1A_1}+(\overline{A_1B_1}^2+\overline{C_1A_1}^2-\overline{B_1C_1}^2)\vec{C_1B_1}\right] =$$
$$= \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{a^2+b^2-c^2}{2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-a^4-b^4-c^4}\left[\frac{1}{2}(c^2+a^2-b^2)\vec{AC}+\frac{1}{2}(c^2+b^2-a^2)\vec{BC}\right] =$$
$$=\ldots= \frac{1}{2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-a^4-b^4-c^4}\left[b^2(c^2+a^2-b^2)\vec{AB}+c^2(a^2+b^2-c^2)\vec{AC}\right].$$

56. Нека O е центарот на опишаната кружница околу триаголникот ABC и нека $A_4=AO\cap BC$. Да се изрази векторот $\vec{AA_4}$ со помош на векторите $\vec{AB}$ и $\vec{AC}$.

57. Нека O е центарот на опишаната кружница околу триаголникот ABC и нека $A_4=AO\cap BC$. Да се докаже дека:

а) $\overline{AO} = \dfrac{abc}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$;

б) $\overline{AA_4} = \dfrac{2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-a^4-b^4-c^4}{b^2(c^2+a^2-b^2)+c^2(a^2+b^2-c^2)}\cdot\dfrac{abc}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$,

каде што $2s=a+b+c$.

58. Да се докаже дека тежиштето T, ортоцентарот H и центарот O на опишаната кружница за кој било триаголник ABC се колинеарни. (Правата на која лежат овие точки се вика Ојлерова права.)

Решение. За да докажеме дека точките T, H и O се колинеарни, доволно е да докажеме дека векторите $\vec{TH}$ и $\vec{TO}$ се колинеарни. Користејќи дека $\vec{TH}=\vec{AH}-\vec{AT}$, $\vec{TO}=\vec{AO}-\vec{AT}$ и $\vec{AT} = \frac{2}{3}\vec{AA_1}$, а потоа задачите 44, 53 и 55, добиваме дека $\vec{TH}=-2\vec{TO}$, од каде што следува дека точките T, H и O се колинеарни и дека точката T ја дели отсечката HO во однос 2:1.

59. Нека точката A_λ ја дели страната BC на триаголникот ABC во однос λ. Да се најде должината на отсечката AA_λ.

60. Нека точките A_λ, B_λ и C_λ ги делат страните BC, CA и AB на триаголникот ABC во однос $\lambda\neq-1$ и нека $P=AA_\lambda\cap BB_\lambda$, $Q=BB_\lambda\cap CC_\lambda$, $R=CC_\lambda\cap AA_\lambda$. Да се најдат:

а) страните на триаголникот PQR,

б) должината на отсечката AP.

61. Даден е правоаголникот ABCD и точката M. Да се докаже дека:

а) $\vec{MA}\cdot\vec{MC} = \vec{MB}\cdot\vec{MD}$;

б) $\overline{MA}^2 + \overline{MC}^2 = \overline{MB}^2 + \overline{MD}^2$.

Решение. а) Векторите $\vec{AB}$ и $\vec{AD}$ се заемно нормални, па $\vec{AB}\cdot\vec{AD}=0$, т.е. $(\vec{MB}-\vec{MA})(\vec{MD}-\vec{MA})=0$, од каде што добиваме

$$\vec{MB}\cdot\vec{MD} = \vec{MA}(\vec{MB}+\vec{MD}-\vec{MA}). \qquad (15)$$

Собирајќи ги, пак, равенствата $\vec{MA} = \vec{MB}-\vec{AB}$ и $\vec{MC} = \vec{MD}+\vec{AB}$, добиваме

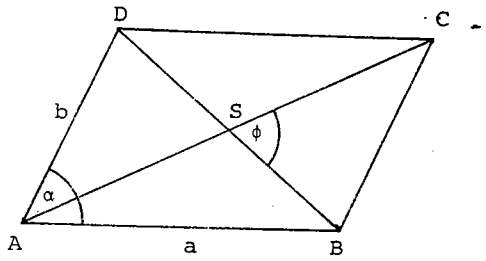
$$\vec{MC} = \vec{MB} + \vec{MD} - \vec{MA}. \qquad (16)$$

Од (15) и (16) следува дека $\vec{MA}\cdot\vec{MC} = \vec{MB}\cdot\vec{MD}$.

[Уп. б) Квадрирај го равенството $\vec{MA}+\vec{MC}=\vec{MB}+\vec{MD}$ и искористи го равенството под а).]

62. Да се пресмета аголот ϕ меѓу дијагоналите на паралелограмот со страни a,b и остар агол α.

Решение. Имаме $\vec{SC} = \frac{1}{2}(\vec{AB}+\vec{AD})$, $\vec{SB} = \frac{1}{2}(\vec{AB}-\vec{AD})$,



Црт. 10

па

$$\vec{SC}\cdot\vec{SB} = \frac{1}{4}(a^2-b^2),$$

$$\overline{SC}^2 = \frac{1}{4}(a^2+b^2+2ab\cos\alpha),$$

$$\overline{SB}^2 = \frac{1}{4}(a^2+b^2-2ab\cos\alpha).$$

Значи

$$\cos\phi = \frac{\vec{SC}\cdot\vec{SB}}{\overline{SC}\cdot\overline{SB}} = \frac{a^2-b^2}{\sqrt{(a^2+b^2)^2-4a^2b^2\cos^2\alpha}}.$$

63. Да се најде аголот ϕ меѓу дијагоналите на правоаголникот со страни a и b.

64. Да се докаже дека дијагоналите во ромбот се заемно нормални.

Решение. Бидејќи страните на ромбот се еднакви, ставајќи во 62 a=b, добиваме $\cos\phi=0$, т.е. $\phi=90^\circ$.

65. Разликата од квадратите на страните на паралелограмот е еднаква на производот од едната дијагонала и проекцијата од другата дијагонала врз неа. Докажи!

Решение. Нека страните на паралелограмот ABCD се $a=\overline{AB}$ и $b=\overline{AD}$, а дијагоналите $d_1=\overline{AC}$ и $d_2=\overline{BD}$. Треба да докажеме дека

$$a^2-b^2=d_1(\text{пр}_{d_1}d_2) = d_2(\text{пр}_{d_2}d_1).$$

Ако $\bar{a}=\vec{AB}$, $\bar{b}=\vec{AD}$, $\bar{d}_1=\vec{AC}$, $\bar{d}_2=\vec{DB}$, доволно е да докажеме дека

$$a^2 - b^2 = \bar{d}_1\bar{d}_2.$$

Имаме $\bar{a}=\frac{1}{2}(\bar{d}_1+\bar{d}_2)$, $\bar{b} = \frac{1}{2}(\bar{d}_1-\bar{d}_2)$, $a^2 = \frac{1}{4}(\bar{d}_1^2+\bar{d}_2^2+2\bar{d}_1\bar{d}_2)$, $b^2 = \frac{1}{4}(\bar{d}_1^2+\bar{d}_2^2-2\bar{d}_1\bar{d}_2)$, па $a^2-b^2=\bar{d}_1\bar{d}_2$, што требаше да се докаже.

66. Ако a,b се страните, а d_1, d_2 дијагоналите на еден паралелограм, тогаш

$$d_1^2-d_2^2 = 4a(\text{пр}_{\bar{a}}\bar{b}) = 4b(\text{пр}_{\bar{b}}\bar{a}).$$

Докажи!

67. Ако a,b се основите, c,d краците, а e,f дијагоналите на трапезот ABCD, тогаш

$$e^2+f^2 = c^2+d^2+2ab.$$

Докажи!

Решение. Да ставиме $\bar{a}=\vec{AB}$, $\bar{c}=\vec{BC}$, $\bar{b}=\vec{DC}$, $\bar{d}=\vec{DA}$, $\bar{e}=\vec{AC}$ и $\bar{f}=\vec{DB}$ (направи цртеж); тогаш $\bar{e}=\bar{a}+\bar{c}$, $\bar{f}=\bar{a}+\bar{d}$, па

$$e^2+f^2 = 2a^2+c^2+d^2+\bar{a}(\bar{c}+\bar{d}).$$

Бидејќи $\bar{c}+\bar{d}=\bar{b}-\bar{a}$ и $\bar{a}\bar{b}=ab$, добиваме:

$$e^2+f^2 = 2a^2+c^2+d^2+2\bar{a}(\bar{b}-\bar{a}) =$$
$$= 2a^2+c^2+d^2+2\bar{a}\bar{b}-2a^2 = c^2+d^2+2ab.$$

68. Дијагоналите AC и BD на четириаголникот ABCD се заемно нормални ако и само ако

$$\overline{AB}^2 + \overline{CD}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BC}^2. \qquad (17)$$

Докажи!

Решение. Имаме $\vec{AC} = \vec{AB}+\vec{BC}$, $\vec{BD} = \vec{BC}+\vec{CD}$, па

$$\vec{AC}\vec{BD} = (\vec{AB}+\vec{BC})(\vec{BC}+\vec{CD}) =$$

$$= \vec{AB}\cdot\vec{BC} + \vec{AB}\cdot\vec{CD} + \vec{BC}\cdot\vec{CD} + \overline{BC}^2.$$

Бидејќи $\vec{AB}+\vec{BC}+\vec{CD} = \vec{AD}$, добиваме

$$2(\vec{AB}\cdot\vec{BC}+\vec{AB}\cdot\vec{CD}+\vec{BC}\cdot\vec{CD}) = \overline{AD}^2-\overline{AB}^2-\overline{BC}^2-\overline{CD}^2,$$

па

$$2\vec{AC}\vec{BD} = (\overline{AD}^2+\overline{BC}^2)-(\overline{AB}^2+\overline{CD}^2).$$

Дијагоналите AC и BD се заемно нормални ако и само ако $\vec{AC}\vec{BD}=0$, т.е. ако и само ако важи равенството (17).

69. Да се докаже дека за кои било точки A,B,C,D важи равенството

$$\vec{AB}\cdot\vec{CD} + \vec{BC}\cdot\vec{AD} + \vec{CA}\cdot\vec{BD} = 0. \qquad (18)$$

Решение. Нека O е произволна точка; тогаш за левата страна L на равенството (18) имаме:

$$L = (\vec{OB}-\vec{OA})(\vec{OD}-\vec{OC})+(\vec{OC}-\vec{OB})(\vec{OD}-\vec{OA})+(\vec{OA}-\vec{OC})(\vec{OD}-\vec{OB}) =$$

$$= \vec{OB}\cdot\vec{OD} - \vec{OB}\cdot\vec{OC} - \vec{OA}\cdot\vec{OD} + \vec{OA}\cdot\vec{OC} +$$

$$+ \vec{OC}\cdot\vec{OD} - \vec{OC}\cdot\vec{OA} - \vec{OB}\cdot\vec{OD} + \vec{OB}\cdot\vec{OA} +$$

$$+ \vec{OA}\cdot\vec{OD} - \vec{OA}\cdot\vec{OB} - \vec{OC}\cdot\vec{OD} + \vec{OC}\cdot\vec{OB} = 0.$$

70. Дијагоналите на еден четириаголник се заемно нормални ако и само ако неговите средни линии се еднакви. Докажи!

Решение. Нека M и N се средини на страните AD и BC соодветно, а P и Q средини на страните AB и CD соодветно. Треба да докажеме дека $\overline{MN}=\overline{PQ}$ ако и само ако $AC \perp BD$.

Според I.73, имаме

$$2\vec{MN} = \vec{AB} + \vec{DC}, \qquad 2\vec{PQ} = \vec{AD} + \vec{BC},$$

па

$$4(\overline{MN}^2-\overline{PQ}^2) = (\overline{AB}^2+\overline{CD}^2)-(\overline{AD}^2+\overline{BC}^2)+2(\vec{AB}\vec{DC}-\vec{AD}\vec{BC}) =$$

$$= (\overline{AB}^2+\overline{CD}^2)-(\overline{AD}^2+\overline{BC}^2)-2(\vec{AB}\vec{CD}+\vec{AD}\vec{BC}).$$

Според претходната задача, имаме $\vec{AB}\vec{CD}+\vec{AD}\vec{BC}=\vec{AC}\vec{BD}$, па, значи

$$4(\overline{MN}^2-\overline{PQ}^2) = (\overline{AB}^2+\overline{CD}^2)-(\overline{AD}^2+\overline{BC}^2)-2\vec{AC}\cdot\vec{BD},$$

од каде што следува тврдењето.

71. Средните линии на еден четириаголник се заемно нормални ако и само ако неговите дијагонали се еднакви. Докажи!

72. Ако две спротивни страни на еден четириаголник се еднакви, тогаш тие зафаќаат еднакви агли со средната линија на другите две страни. Докажи!

Решение. Нека за четириаголникот ABCD страните AB и CD се еднакви и нека M и N се средините на страните AD и BC соодветно. За да докажеме дека аголот меѓу AB и MN е еднаков со аголот меѓу MN и CD, доволно е да докажеме дека $\vec{MN}\cdot\vec{AB}=\vec{MN}\cdot\vec{DC}$, т.е. дека $\vec{MN}(\vec{AB}-\vec{DC})=0$. Бидејќи $2\vec{MN}=\vec{AB}+\vec{DC}$, имаме:

$$\vec{MN}(\vec{AB}-\vec{DC}) = \frac{1}{2}(\vec{AB}+\vec{DC})(\vec{AB}-\vec{DC}) = \frac{1}{2}(\overline{AB}^2-\overline{DC}^2) = 0.$$

73. Ако две спротивни страни на еден четириаголник се еднакви и не паралелни, тогаш тој е рамнокрак трапез. Докажи!

74. Да се пресмета аголот меѓу два спротивни раба на еден тетраедар на кој му се познати сите рабови.

Решение. Нека спротивните рабови на тетраедарот ABCD се a и c, b и d, e и f. Како во 68, може да се добие дека

$$2\bar{e}\bar{f} = (b^2+d^2) - (a^2+c^2),$$

па за аголот ϕ меѓу рабовите e и f ќе имаме

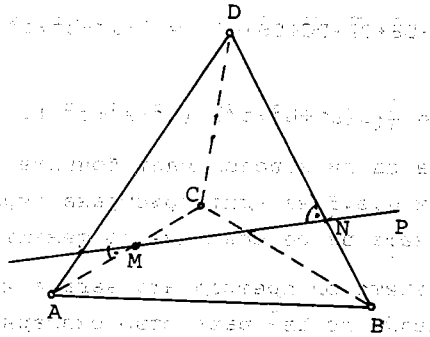
$$\cos\phi = \frac{(b^2+d^2)-(a^2+c^2)}{2ef}.$$

75. Ако два пара спротивни рабови на еден тетраедар се заемно нормални, тогаш е заемно нормален и третиот пар спротивни рабови.

76. Да се докаже дека спротивните рабови на правилен тетраедар се заемно нормални.

77. Една права сече два спротивни раба на правилен тетраедар под прав агол. Да се најдат пресечните точки M и N, а потоа да се најде должината на отсечката MN.

Решение. Нека правата p ги сече спротивните рабови AC и BD во точките M и N и е нормална на нив (црт. 11).



Црт. 11

Тогаш

$$\vec{MN} = \vec{MA}+\vec{AB}+\vec{BN} = \lambda\vec{CA}+\vec{AB}+\mu\vec{BD}. \qquad (19)$$

Според 76, спротивните рабови AC и BD се заемно нормални, па $\vec{AC}\vec{BD}=0$. Множејќи го равенството (19) скаларно со $\vec{AC}$, добиваме

$$-\lambda\vec{AC}^2 + \vec{AB}\cdot\vec{AC} = 0, \text{ т.е. } \lambda = \frac{1}{2}.$$

Слично, $\mu = \frac{1}{2}$. Значи, точките M и N се средини на рабовите AC и BD соодветно.

Квадрирајќи го равенството

$$\vec{MN} = \frac{1}{2}\vec{CA} + \vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{BD},$$

добиваме $MN = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, каде што a е работ на тетраедарот.

78. Да се пресмета должината на отсечката чии крајни точки се врвот на една тристрана пирамида и тежиштето на основата. Познати се бочните рабови a,b,c и основните рабови d,e,f.

Решение. Нека ABCD е тетраедарот со бочни рабови $a=\overline{AD}$, $b=\overline{BD}$, $c=\overline{CD}$ и основни рабови $d=\overline{AB}$, $e=\overline{BC}$, $f=\overline{CA}$ и нека T е тежиштето на основата ABC. Тогаш $\vec{DT} = \frac{1}{3}(\vec{DA}+\vec{DB}+\vec{DC})$, па

$$\overline{DT}^2 = \frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2-2(\vec{DA}\cdot\vec{DB}+\vec{DA}\cdot\vec{DC}+\vec{DB}\cdot\vec{DC})).$$

Понатаму имаме

$$\vec{AB} = \vec{DB}-\vec{DA},\ \vec{BC} = \vec{DC}-\vec{DB},\ \vec{CA} = \vec{DA}-\vec{DC},$$

па

$$d^2 = b^2+a^2-2\vec{DB}\cdot\vec{DA},\ e^2 = c^2+b^2-2\vec{DC}\cdot\vec{DB},\ f^2 = a^2+c^2-2\vec{DA}\cdot\vec{DC}.$$

Собирајќи ги овие равенства, добиваме

$$2(\vec{DA}\cdot\vec{DB}+\vec{DA}\cdot\vec{DC}+\vec{DB}\cdot\vec{DC}) = 2(a^2+b^2+c^2)-(d^2+e^2+f^2).$$

Следствено,

$$\overline{DT}^2 = \frac{1}{9}[3(a^2+b^2+c^2)-(d^2+e^2+f^2)].$$

79. Кои услови треба да ги задоволуваат бочните рабови a,b,c и основните рабови d,e,f на една тристрана пирамида, за подножјето на висината да се совпадне со тежиштето на основата?

Решение. Со ознаките од претходната задача имаме $\vec{DT} = \frac{1}{3}(\vec{DA}+\vec{DB}+\vec{DC})$. Множејќи го ова равенство скаларно со $\vec{AB}$, а потоа со $\vec{BC}$, ги добиваме равенствата:

$$b^2-a^2 + \vec{DB}\cdot\vec{DC} - \vec{DA}\cdot\vec{DC} = 0,$$

$$c^2-b^2 + \vec{DA}\cdot\vec{DC} - \vec{DA}\cdot\vec{DB} = 0.$$

Од равенствата, пак,

$$d^2 = b^2+a^2-2\vec{DB}\cdot\vec{DA},\ e^2 = c^2+b^2-2\vec{DC}\cdot\vec{DB},\ f^2 = a^2+c^2-2\vec{DA}\cdot\vec{DC},$$

(види претходната задача), добиваме

$$\vec{DB}\cdot\vec{DC} - \vec{DA}\cdot\vec{DC} = \frac{1}{2}(f^2-e^2-a^2+b^2),$$

$$\vec{DA}\cdot\vec{DC} - \vec{DA}\cdot\vec{DB} = \frac{1}{2}(d^2-e^2-b^2+c^2).$$

Следствено,

$$3(a^2-b^2) = f^2-e^2,\ 3(c^2-a^2) = e^2-d^2,\ 3(b^2-c^2) = d^2-f^2,$$

што претставуваат бараните услови.

80. Да се пресмета висината на тристрана пирамида на која бочните рабови се a,b,c и тие се пар по пар заемно нормални.

Решение. Нека ABCD е тристраната пирамида и нека $\bar{a}=\vec{DA}$, $\bar{b}=\vec{DB}$, $\bar{c}=\vec{DC}$, а $\bar{h}=\vec{DD'}$ е векторот положен на висината DD'. Од условот на адачата имаме $\bar{a}\bar{b}=\bar{b}\bar{c}=\bar{c}\bar{a}=0$. За векторот $\bar{h}$ имаме

$$\bar{h} = \bar{a} + \lambda(\bar{b}-\bar{a}) + \mu(\bar{c}-\bar{a}) \tag{20}$$

за некои реални броеви λ и μ. Множејќи го ова равенство скаларно прво со $\bar{b}-\bar{a}$, а потоа со $\bar{c}-\bar{a}$, добиваме

$$(a^2+b^2)\lambda + a^2\mu = a^2,$$

$$a^2\lambda + (c^2+a^2)\mu = a^2,$$

од каде што добиваме

$$\lambda = \frac{c^2a^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}, \quad \mu = \frac{a^2b^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}.$$

Заменувајќи ги овие вредности на λ и μ во (20), добиваме

$$\bar{h} = \frac{1}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}(b^2c^2\bar{a}+c^2a^2\bar{b}+a^2b^2\bar{c}),$$

па

$$h^2 = \frac{a^2b^2c^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}.$$

81. Бочните рабови a,b,c на една тристрана пирамида се заемно нормални. Да се најдат аглите α,β и γ што висината на пирамидата ги зафаќа со бочните рабови a,b и c соодветно.

82. Бочните рабови a,b,c на една тристрана пирамида се заемно нормални. Да се најде радиусот на сферата опишана околу пирамидата.

83. Да се пресмета должината d на просторната дијагонала OD на паралелопипедот што го определуваат векторите $\bar{a}=\vec{OA}$, $\bar{b}=\vec{OB}$ и $\bar{c}=\vec{OC}$.

Решение. Нека $\langle\bar{a},\bar{b}\rangle=\gamma$, $\langle\bar{b},\bar{c}\rangle=\alpha$ и $\langle\bar{c},\bar{a}\rangle=\beta$. Имаме $\vec{OD} = \bar{a}+\bar{b}+\bar{c}$, па

$$d^2 = \overline{OD}^2 = (\bar{a}+\bar{b}+\bar{c})^2 = a^2+b^2+c^2+2ab\cos\gamma+2ac\cos\beta+2bc\cos\alpha.$$

Специјално, ако $\alpha=\beta=\gamma=90^\circ$, тогаш

$$d^2 = a^2+b^2+c^2,$$

а ако и a=b=c, тогаш $d=a\sqrt{3}$ (просторна дијагонала на коцка со раб a).

84. Ако просторните дијагонали на еден паралелопипед се еднакви, тогаш паралелопипедот е правоаголен. Докажи!

Решение. На три соседни раба на паралелопипедот нека се положени векторите $\bar{a},\bar{b}$ и $\bar{c}$; тогаш векторите положени на неговите просторни дијагонали (при добар избор) ќе бидат

$$\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}, \quad -\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}, \quad \bar{a}-\bar{b}+\bar{c}, \quad \bar{a}+\bar{b}-\bar{c},$$

па нивните должини ќе бидат:

$$a^2+b^2+c^2 + 2(\bar{a}\bar{b}+\bar{b}\bar{c}+\bar{c}\bar{a}),$$

$$a^2+b^2+c^2 + 2(-\bar{a}\bar{b}+\bar{b}\bar{c}-\bar{c}\bar{a}),$$

$$a^2+b^2+c^2 + 2(-\bar{a}\bar{b}-\bar{b}\bar{c}+\bar{c}\bar{a}),$$

$$a^2+b^2+c^2 + 2(\bar{a}\bar{b}-\bar{b}\bar{c}-\bar{c}\bar{a}).$$

Бидејќи просторните дијагонали се еднакви, добиваме дека $\bar{a}\bar{b}=\bar{b}\bar{c}=\bar{c}\bar{a}=0$, т.е. паралелопипедот е правоаголен.

85. Какви агли зафаќаат две по две просторни дијагонали на еден правоаголен паралелопипед?

4. КООРДИНАТНА ФОРМА НА СКАЛАРЕН ПРОИЗВОД

Ако координатниот систем $(0;\bar{e}_1,\bar{e}_2)$ е декартов и ако $\bar{a}=(a_1,a_2)$, $b=(b_1,b_2)$, тогаш

$$\bar{a}\bar{b} = a_1b_1 + a_2b_2. \qquad (21)$$

86. Да се најде скаларниот производ на векторите:

а) $\bar{a}=(1,2)$, $\bar{b}=(2,1)$; б) $\bar{a}=(\frac{1}{2},2)$, $\bar{b}=(\frac{1}{3},3)$;

в) $\bar{a}=(1,1)$, $\bar{b}=(0,1)$; г) $\bar{a}=(-1,-4)$, $\bar{b}=(-4,1)$.

Решение. а) Според (1), имаме $\bar{a}\bar{b} = 1\cdot2+2\cdot1 = 4$.

87. Да се најде должината на векторот $\bar{a}$:

а) $\bar{a} = (3,4)$; б) $\bar{a} = (-6,8)$;

в) $\bar{a} = (5,-12)$; г) $\bar{a} = (-\frac{1}{3},-\frac{1}{4})$.

Решение. а) За должината на векторот $\bar{a}=(a_1,a_2)$, според (1), ќе имаме

$$a = \sqrt{\bar{a}\bar{a}} = \sqrt{a_1^2+a_2^2}. \qquad (22)$$

Значи, $a = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$.

88. Да се најде аголот меѓу векторите $\bar{a}$ и $\bar{b}$:

а) $\bar{a} = (2,2)$, $\bar{b} = (6,0)$; б) $\bar{a} = (-2,3)$, $\bar{b} = (-3,-2)$;

в) $\bar{a} = (\frac{\sqrt{3}}{3},1)$, $\bar{b} = (3,\sqrt{3})$; г) $\bar{a} = (\frac{1}{2},3)$, $\bar{b} = (3,18)$.

Решение. а) Ако се дадени векторите $\bar{a}=(a_1,a_2)$ и $\bar{b}=(b_1,b_2)$, тогаш од дефиницијата на скаларен производ следува дека

$$\cos\langle\bar{a},\bar{b}\rangle = \frac{\bar{a}\bar{b}}{ab} = \frac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2}}. \qquad (23)$$

Во нашиов случај имаме:

$$\cos\langle\bar{a},\bar{b}\rangle = \frac{2\cdot 6+2\cdot 0}{\sqrt{2^2+2^2}\cdot\sqrt{6^2+0^2}} = \frac{12}{6\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Значи, $\langle\bar{a},\bar{b}\rangle = 45^\circ$.

89. Да се најде аголот што со x_1-оската го зафаќа векторот:

$\bar{a} = (2,3)$; $\bar{b} = (-2,5)$; $\bar{c} = (-5,1)$.

90. Аголот меѓу векторите $\bar{a}=(a_1,a_2)$ и $\bar{b}=(b_1,b_2)$ е остар, прав, тап ако и само ако

$$a_1b_1+a_2b_2 > 0,\ a_1b_1+a_2b_2 = 0,\ a_1b_1+a_2b_2 < 0.$$

Докажи!

91. Дадени се векторите $\bar{a}=(3,-2)$, $\bar{b}=(-5,1)$ и $\bar{c}=(0,4)$. Да се пресмета:

а) $3\bar{a}^2-4\bar{a}\bar{b}+5\bar{b}^2-6\bar{b}\bar{c}-2\bar{c}^2$; б) $2(\bar{a}\bar{b})\bar{c}-3\bar{b}^2\bar{a}+(\bar{a}\bar{c})\bar{b}$.

92. Дадени се векторите $\bar{a}=(5,2)$ и $\bar{b}=(7,-3)$. Да се најде вектор $\bar{c}$ што ги задоволува условите:

$$\bar{a}\cdot\bar{c} = 7,\quad \bar{b}\cdot\bar{c} = 4.$$

Решение. Нека $\bar{c}=(c_1,c_2)$; тогаш имаме

$$5c_1 + 2c_2 = 7,\qquad 7c_1 - 3c_2 = 4,$$

од каде што добиваме $c_1=1$, $c_2=1$. Значи, бараниот вектор е $\bar{c}=(1,1)$.

93. Даден е векторот $\bar{a}=(8,-6)$. Да се најде единичен вектор $\bar{e}$ кој е колинеарен со $\bar{a}$ и има:

а) иста насока со $\bar{a}$;

б) спротивна насока со $\bar{a}$.

94. Да се најде растојанието меѓу точките A и B:

а) A(2,3), B(3,1); б) A(-2,5), B(2,5);

в) A(-2,0), B(-7,12); г) A(1,3), B(1,-5).

Решение. а) Растојанието меѓу точките $A(a_1,a_2)$ и $B(b_1,b_2)$ е, всушност, должината на векторот $\vec{AB}$. Бидејќи $\vec{AB}=(b_1-a_1,b_2-a_2)$, според (2), имаме:

$$\overline{AB} = \sqrt{(a_2-a_1)^2+(b_2-b_1)^2}. \qquad (24)$$

Во нашиов случај, имаме:

$$\overline{AB} = \sqrt{(3-2)^2+(1-3)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}.$$

95. Да се најде аголот меѓу правите AB и CD ако:

а) $A(3,1)$, $B(3,5)$, $C(1,2)$, $D(0,1)$;

б) $A(5,-2)$, $B(0,-1)$, $C(-1,2)$, $D(0,0)$.

Решение. а) Аголот меѓу правите AB и CD е, всушност, аголот меѓу векторите $\vec{AB}$ и $\vec{CD}$ или меѓу векторите $\vec{AB}$ и $\vec{DC}$, во зависност дали $\vec{AB}\vec{CD}>0$ или $\vec{AB}\vec{DC}>0$. Значи, ако ϕ е аголот меѓу правите AB и CD, тогаш

$$\cos\phi = \frac{|\vec{AB}\vec{CD}|}{\overline{AB}\,\overline{CD}}. \qquad (25)$$

Во нашиов случај имаме $\vec{AB}=(0,4)$, $\vec{CD}=(-1,-1)$, $\vec{AB}\vec{CD}=-4$, $\overline{AB}=4$, $\overline{CD}=\sqrt{2}$, па $\cos\phi = \frac{4}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, т.е. аголот ϕ меѓу правите AB и CD е 45°.

96. Да се испита дали триаголникот ABC е правоаголен, остроаголен или тапоаголен, ако:

а) $A(1,1)$, $B(2,4)$, $C(8,3)$; б) $A(1,2)$, $B(2,3)$, $C(\frac{5}{2},\frac{5}{2})$;

в) $A(2,1)$, $B(-1,3)$, $C(2,5)$; г) $A(2,0)$, $B(0,3)$, $C(2,3)$.

Решение. а) Според 6, доволно е да ги пресметаме скаларните производи $\vec{AB}\vec{AC}$, $\vec{BA}\vec{BC}$ и $\vec{CA}\vec{CB}$. Имаме $\vec{AB}=(1,3)$, $\vec{BC}=(6,-1)$, $\vec{CA}=(-7,-2)$, па

$$\vec{AB}\vec{AC} = 13>0,\ \vec{BA}\vec{BC} = -3<0,\ \vec{CA}\vec{CB} = 40>0,$$

што значи дека триаголникот е тапоаголен со тап агол кај темето B.

97. Дадени се темињата $A(-3,2)$ и $B(1,4)$ на рамностраниот триаголник ABC. Да се најдат координатите на темето C.

Решение. Нека $C(c_1,c_2)$. Имаме:

$$\overline{AB}^2 = 20,\ \overline{AC}^2 = c_1^2+6c_1+c_2^2-4c_2+13,\ \overline{BC}^2 = c_1^2-2c_1+c_2^2-8c_2^2+17.$$

Од $\overline{AC}=\overline{BC}$ и $\overline{AC}=\overline{AB}$ добиваме:

$$2c_1+c_2 = 1, \qquad c_1^2+c_2^2+6c_1-4c_2-7 = 0.$$

Решавајќи го овој систем равенки по c_1 и c_2, добиваме $c_1=-1\pm\sqrt{3}$, $c_2=3\mp2\sqrt{3}$. Значи, ако $C_1(-1+\sqrt{3},3-2\sqrt{3})$, $C_2(-1-\sqrt{3},3+2\sqrt{3})$, тогаш триаголниците ABC_1 и ABC_2 се рамностранi.

98. Дадени се точките $A(1,\sqrt{3})$ и $B(\frac{5}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$. На x_1-оската и x_2-оската да се најдат точки C_1 и C_2, така што триаголниците ABC_1 и ABC_2 да се рамностранi.

99. Да се најде радиусот на кружницата со центар $S(-2,3)$, којашто минува низ точката $A(2,-1)$.

100. Точките $A(-1,4)$ и $C(7,2)$ се спротивни темиња на квадратот ABCD. Да се најдат темињата B и D.

Решение. Центарот на квадратот ќе биде точката $S(3,3)$ (средината на дијагоналата AC). Доволно е да го најдеме само темето $B(b_1,b_2)$, зашто темето D лесно се наоѓа од условот точката S да е средина на отсечката BD. Триаголникот ASB е правоаголен и рамнокрак со прав агол кај темето S, па, значи, $\vec{SA}\cdot\vec{SB}=0$ и $|\vec{SA}|=|\vec{SB}|$. Бидејќи $\vec{SA}=(-4,1)$, $\vec{SB}=(b_1-3,b_2-3)$, за b_1 и b_2 го добиваме следниов систем равенки:

$$4b_1-b_2-9 = 0,$$
$$b_1^2+b_2^2-6b_1-6b_2+1 = 0.$$

Решавајќи го овој систем, имаме $b_1=2$, $b_2=-1$ и $b_1=4$, $b_2=7$.

Следствено, темето B е точката $(2,-1)$ или точката $(4,7)$, а темето D точката $(4,7)$ или точката $(2,-1)$.

101. Даден е центарот $S(-1,2)$ и темето $A(1,4)$ на правилниот шестаголник ABCDEF. Да се најдат другите темиња.

102. Да се најдат тежишните линии на триаголникот ABC /$A(5,-4)$, $B(-1,2)$, $C(5,1)$/.

Решение. Да ја најдеме тежишната линија $t_a=\overline{AA_1}$. Бидејќи A_1 е средина на страната BC, ќе имаме $A_1(2,\frac{3}{2})$, па

$$t_a = \overline{AA_1} = \sqrt{(2-5)^2+(\frac{3}{2}+4)^2} = \frac{\sqrt{157}}{2}.$$

Слично, $t_b = \frac{\sqrt{193}}{2}$, $t_c = \sqrt{13}$.

103. Да се најде центарот $S(p,q)$ на опишаната кружница околу триаголникот ABC /$A(9,2)$, $B(0,2)$, $C(-15,-10)$/.

Решение. Ако A_1 и C_1 се средините на страните BC и AB соодветно, тогаш векторите $\vec{SA_1}$ и $\vec{BC}$, односно $\vec{SC_1}$ и $\vec{AB}$ се заемно нормални, па имаме

$$\vec{SA_1}\vec{BC} = 0, \qquad \vec{SC_1}\vec{AB} = 0.$$

Имаме $A_1(-\frac{15}{2},-4)$, $C_1(\frac{9}{2},2)$, $\vec{SA_1}=(-\frac{15}{2}-p,-4-q)$, $\vec{SC_1}=(\frac{9}{2}-p,2-q)$, $\vec{BC}=(-15,-12)$, $\vec{AB}=(-9,0)$, па

$$15(\frac{15}{2}+p)+12(4+q) = 0, \qquad -9(\frac{9}{2}-p) = 0,$$

од каде што добиваме $p = \frac{9}{2}$, $q = -4$. Значи, центарот на опишаната кружница околу триаголникот ABC е точката $S(\frac{9}{2},-4)$.

104. Да се најде ортоцентарот $H(p,q)$ на триаголникот ABC /$A(2,1)$, $B(-1,3)$, $C(0,1)$/.

Решение. Ортоцентарот H е пресек на висините во триаголникот ABC, па, значи, векторите $\vec{CH}$ и $\vec{AB}$ односно $\vec{BH}$ и $\vec{CA}$ се заемно нормални, т.е.

$$\vec{CH}\vec{AB} = 0, \qquad \vec{BH}\vec{CA} = 0.$$

Имаме $\vec{AB}=(-3,2)$, $\vec{CA}=(2,0)$, $\vec{BH}=(p+1,q-3)$, $\vec{CH}=(p,q-1)$, па

$$-3p+2(q-1) = 0, \qquad 2(p+1) = 0,$$

од каде што добиваме $p=-1$, $q = -\frac{1}{2}$. Значи, $H(-1,-\frac{1}{2})$.

105. Да се најде ортогоналната проекција M' од точката $M(2,0)$ врз правата AB /$A(0,1)$, $B(5,5)$/.

Решение. Нека $M'(x,y)$; тогаш векторите $\vec{AB}$ и $\vec{AM'}$ се колинеарни, па постои реален број t, така што $\vec{AM'}=t\vec{AB}$, т.е.

$$x = 5t, \quad y = 1+4t.$$

Векторите $\vec{MM'}$ и $\vec{AB}$ се заемно нормални, па $\vec{MM'}\vec{AB}=0$. Бидејќи $\vec{MM'}=(5t-2,1+4t)$, $\vec{AB}=(5,4)$, ќе имаме

$$5(5t-2) + 4(1+4t) = 0,$$

од каде што добиваме $t = \frac{6}{41}$. Следствено, $M'(\frac{30}{41},\frac{65}{41})$.

106. Да се најде растојанието од точката P(2,0) до правата AB /A(1,1), B(2,4)/.

107. Да се најде симетричната точка M_1 од точката M(0,2) во однос на правата AB /A(1,0), B(4,4)/.

108. Да се најдат висините во триаголникот ABC /A(-2,4), B(0,-3), C(1,7)/.

109. На правата AB /A(-1,-4), B(4,8)/ да се најде точка M која е на растојание 4 од точката A.

Решение. Од тоа што точката M(x,y) лежи на правата AB, следува дека $\vec{AM}=t\vec{AB}$, за некој реален број t, т.е. M(-1+5t,-4+12t). Од $\overline{AM}=4$, пак, добиваме

$$(-1+5t+1)^2+(-4+12t+4)^2 = 16,$$

од каде што $t = \pm\frac{4}{13}$. Следствено, на правата AB постојат две точки кои се на растојание 4 од точката A и тие се $M_1(\frac{7}{13},-\frac{4}{13})$ и $M_2(-\frac{33}{13},-\frac{100}{13})$.

110. На правата AB /A(4,2), B(0,-1)/ да се најде точка M која е на растојание 5 од точката C(-4,-4).

111. Дадени се точките A(-2,-1), B(-3,-1), C(-3,0). Да се најде точка M од која отсечките AB и BC се гледаат под прав агол.

112. Да се најдат симетралите на аглите на триаголникот ABC /A(4,1), B(7,5), C(-4,7)/.

Решение. Ќе ја најдеме само симетралата $s_a=\overline{AA_2}$ на аголот α. Знаеме дека точката A_2 ја дели страната BC во однос $\overline{AC}:\overline{AB}$ (види I.113). Имаме $\overline{AC}=10$, $\overline{AB}=5$, па координатите на точката A_2, ќе бидат

$$\frac{10\cdot 7+5\cdot(-4)}{10+5} = \frac{10}{3}, \qquad \frac{10\cdot 5+5\cdot 7}{10+15} = \frac{17}{3},$$

т.е. $A_2(\frac{10}{3},\frac{17}{3})$. На крајот, имаме

$$s_a = \overline{AA_2} = \sqrt{(\frac{10}{3}-4)^2+(\frac{17}{3}-1)^2} = \frac{2}{3}\sqrt{65}.$$

113. Да се најде центарот $V(p,q)$ на впишаната кружница во триаголникот ABC /$A(1,0)$, $B(0,1)$, $C(4,4)$/.

Решение. Според I.89, за векторот $\vec{AV}$ имаме:

$$\vec{AV} = \frac{1}{\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}}(\overline{AC}\vec{AB} + \overline{AB}\vec{AC}).$$

Бидејќи $\overline{AB}=\sqrt{2}$, $\overline{BC}=5$, $\overline{CA}=5$, $\vec{AB}=(-1,1)$, $\vec{AC}=(4,3)$, добиваме дека

$$\vec{AV} = \left(\frac{-58+45\sqrt{2}}{98}, \frac{44+25\sqrt{2}}{98}\right).$$

Но, $\vec{AV}=(p-1,q)$, па

$$p = \frac{40+45\sqrt{2}}{98}, \quad q = \frac{44+25\sqrt{2}}{98}.$$

На оваа задача можеме да дадеме и друго решение, користејќи ја задачата 21. Имено, ако V' и V'' се ортогоналните проекции од V врз правите AB и BC, тогаш $\overline{VV'} = \overline{VV''}$.

114. Даден е триаголникот ABC /$A(a_1,a_2)$, $B(b_1,b_2)$, $C(c_1,c_2)$/. Да се докаже дека

$$P_{ABC} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix}. \tag{26}$$

Решение. За плоштината $P=P_{ABC}$ имаме:

$$2P = \overline{AB}h_a = \overline{AB}\cdot\overline{AC}\sin\alpha,$$

па

$$\begin{aligned} 4P^2 &= \overline{AB}^2\overline{AC}^2\sin^2\alpha = \overline{AB}^2\overline{AC}^2(1-\cos^2\alpha) = \\ &= \overline{AB}^2\overline{AC}^2-\overline{AB}^2\overline{AC}^2\cos^2\alpha = \overline{AB}^2\overline{AC}^2-(\vec{AB}\vec{AC})^2 = \\ &= [(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2][(c_1-a_1)^2+(c_2-a_2)^2]- \\ &- [(b_1-a_1)(c_1-a_1)+(b_2-a_2)(c_2-a_2)]^2 = \\ &=\ldots= \begin{vmatrix} b_1-a_1 & b_2-a_2 \\ c_1-a_1 & c_2-a_2 \end{vmatrix}^2. \end{aligned}$$

Бо,

$$\begin{vmatrix} b_1-a_1 & b_2-a_2 \\ c_1-a_1 & c_2-a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ b_1-a_1 & b_2-a_2 & 1 \\ c_1-a_1 & c_2-a_2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix},$$

што значи дека важи формулата (6).

115. Да се најде плоштината на триаголникот ABC ако:

а) A(4,2), B(9,4), C(7,6); б) A(2,1), B(3,4), C(1,6);
в) A(5,4), B(11,0), C(0,3); г) A(-1,3), B(2,-5), C(-2,7).

116. Да се најде плоштината на четириаголникот ABCD /A(-2,0), B(0,-1), C(2,0), D(3,2)/.

117. Дадени се точките A(5,1) и B(-2,2). На x_1-оската и x_2-оската да се најдат соодветно точки C_1 и C_2, така што $P_{ABC_1}=P_{ABC_2}=5$.

118. Дадени се темињата A(1,-3) и B(3,1) на триаголникот ABC. Да се најде темето C, ако $P_{ABC}=3$, а тежиштето T е на x_1-оската.

* * *

119. Дадени се векторите $\bar{a}=(a_1,a_2,a_3)$ и $\bar{b}=(b_1,b_2,b_3)$. Да се докаже дека

$$\bar{a}\bar{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3. \qquad (27)$$

Решение. Координатните вектори $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ и $\bar{e}_3$ се единични и заемно нормални, па $\bar{e}_1\bar{e}_1=\bar{e}_2\bar{e}_2=\bar{e}_3\bar{e}_3=1$, $\bar{e}_1\bar{e}_2=\bar{e}_2\bar{e}_3=\bar{e}_3\bar{e}_1=0$. Користејќи го ова и $\bar{a}=a_1\bar{e}_1+a_2\bar{e}_2+a_3\bar{e}_3$, $\bar{b}=b_1\bar{e}_1+b_2\bar{e}_2+b_3\bar{e}_3$, го добиваме равенството (7).

120. Да се најде скаларниот производ на векторите $\bar{a}$ и $\bar{b}$:

а) $\bar{a}=(1,2,3)$, $\bar{b}=(-5,-2,3)$; б) $\bar{a}=(3,2,1)$, $\bar{b}=(-1,-2,3)$;
в) $\bar{a}=(1,0,0)$, $\bar{b}=(4,5,6)$; г) $\bar{a}=(1,1,0)$, $\bar{b}=(1,-1,2)$.

Решение. а) Според (7), имаме:

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = 1\cdot(-5)+2\cdot(-2)+3\cdot 3 = -5-4+9 = 0.$$

121. Да се најдат должините на векторите $\bar{a}=(1,4,8)$, $\bar{b}=(1,-2,2)$, $\bar{c}=(3,0,4)$, $\bar{d}=(0,6,-8)$.

Решение. За должината на векторот $\bar{a}=(a_1,a_2,a_3)$, според (7), ќе имаме

$$a = \sqrt{\bar{a}\cdot\bar{a}} = \sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}. \qquad (28)$$

Во нашиов случај имаме

$$a = \sqrt{1^2+4^2+8^2} = \sqrt{1+16+64} = \sqrt{81} = 9.$$

Слично, b=3, c=5, d=10.

122. Дадени се векторите $\bar{a}=(-4,3,0)$, $\bar{b}=(5,-8,10)$, $\bar{c}=(5,-6,1)$. Да се пресмета изразот:

а) $2\bar{a}^2-4\bar{a}\bar{c}-3\bar{c}^2$; б) $-5\bar{a}^2+2\bar{b}^2+\bar{c}^2$;

в) $\bar{a}\bar{b}+\bar{b}\bar{c}+\bar{a}\bar{c}$; г) $(\bar{a}+\bar{b}-\bar{c})^2$.

Решение. а) $2\bar{a}^2-4\bar{a}\bar{c}-3\bar{c}^2 = 2((-4)^2+3^2+0^2)-4((-4)\cdot 5+3\cdot(-6)+0\cdot 1)-$ $-3(5^2+(-6)^2+1^2) = 50+152-186 = 16$.

123. Дадени се векторите $\bar{a}=(2,1,3)$, $\bar{b}=(4,-3,0)$, $\bar{c}=(2,1,2)$. Да се најдат координатите на векторите:

$$(\bar{a}\bar{b})\bar{c},\quad \bar{a}(\bar{b}\bar{c}),\quad \bar{a}^2\bar{b}+\bar{b}^2\bar{c}+\bar{c}^2\bar{a}.$$

124. Да се најде аголот меѓу векторите $\bar{a}$ и $\bar{b}$:

а) $\bar{a}=(-8,4,1)$, $\bar{b}=(-2,-3,-4)$; б) $\bar{a}=(1,-2,-2)$, $\bar{b}=(2,1,2)$;

в) $\bar{a}=(3,0,4)$, $\bar{b}=(0,3,4)$; в) $\bar{a}=(-1,1,0)$, $\bar{b}=(1,1,4)$.

Решение. а) Ако $\bar{a}=(a_1,a_2,a_3)$ и $\bar{b}=(b_1,b_2,b_3)$ се два ненулти вектори, тогаш, според дефиницијата на скаларен производ, имаме

$$\cos\langle\bar{a},\bar{b}\rangle=\frac{\bar{a}\bar{b}}{ab}=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}. \qquad (29)$$

Во нашиов случај имаме:

$$\cos\langle\bar{a},\bar{b}\rangle=\frac{(-8)\cdot(-2)+4\cdot(-3)+1\cdot(-4)}{\sqrt{(-8)^2+4^2+1^2}\cdot\sqrt{(-2)^2+(-3)^2+(-4)^2}}=0,$$

што значи дека $\langle\bar{a},\bar{b}\rangle=90^\circ$, т.е. векторите $\bar{a}$ и $\bar{b}$ се заемно нормални.

125. Какви агли зафаќа векторот $\bar{a}=(6,-2,9)$ со координатните оски?

126. Да се најде векторот $\bar{x}$, кој има должина 4, а со x_1 и x_2-оската зафаќа агли од 60°.

127. Дадени се векторите $\bar{a}=(2,2,2)$ и $\bar{b}=(0,1,0)$. Да се најде единичен вектор $\bar{x}$ кој е нормален на векторот $\bar{a}$, а со векторот $\bar{b}$ зафаќа агол од 60°.

128. Во x_1x_2-рамнината да се најде вектор $\bar{x}$ со должина $\sqrt{10}$ и е нормален на векторот $\bar{a}=(1,-3,2)$.

129. Векторот $\bar{a}$ лежи во x_1x_3-рамнината и зафаќа со x_3-оската агол од 45°, а векторот $\bar{b}$ лежи во x_2x_3-рамнината и со x_3-оската зафаќа агол од 45°. Да се најде аголот меѓу векторите $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

130. Векторот $\bar{a}=(2,-3,4)$ е разложен во компоненти по правците на векторите $\bar{a}_1=(-1,2,2)$, $\bar{a}_2=(3,-2,6)$, $\bar{a}_3=(4,3,-1)$. Да се најдат должините на компонентите.

Решение. Според условот на задачата, треба да најдеме такви вектори $\bar{b}_1=x_1\bar{a}_1$, $\bar{b}_2=x_2\bar{a}_2$ и $\bar{b}_3=x_3\bar{a}_3$, за да биде $\bar{a}=\bar{b}_1+\bar{b}_2+\bar{b}_3$. Од равенството $x_1\bar{a}_1+x_2\bar{a}_2+x_3\bar{a}_3=\bar{a}$ го добиваме системот равенки

$$\begin{aligned} -x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 2, \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= -3, \\ 2x_1 + 6x_2 - x_3 &= 4, \end{aligned}$$

од каде што добиваме $x_1 = -\frac{45}{104}$, $x_2 = \frac{81}{104}$, $x_3 = -\frac{5}{26}$. Значи,

$$\bar{b}_1 = -\frac{45}{104}(-1,2,2),\ \bar{b}_2 = \frac{81}{104}(3,-2,6),\ \bar{b}_3 = -\frac{5}{26}(4,3,-1),$$

па

$$b_1 = \frac{135}{104},\quad b_2 = \frac{567}{104},\quad b_3 = \frac{5\sqrt{26}}{26}.$$

131. Дадени се векторите $\bar{a}=(1,1,1)$, $\bar{b}=(2,-1,1)$ и $\bar{c}=(3,5,-2)$. Да се најде вектор $\bar{x}$ што ги задоволува равенствата:

$$\bar{a}\bar{x} = 3,\quad \bar{b}\bar{x} = 0,\quad \bar{c}\bar{x} = 6.$$

132. Да се најде растојанието меѓу точките A и B:

а) $A(1,2,-3)$, $B(0,4,-5)$; б) $A(5,3,4)$, $B(5,0,0)$;
в) $A(-3,4,-5)$, $B(0,2,1)$; в) $A(0,0,0)$, $B(-8,4,-1)$.

Решение. а) Растојанието меѓу точките $A(a_1,a_2,a_3)$ и $B(b_1,b_2,b_3)$ е, всушност, должината на векторот $\vec{AB}=(b_1-a_1,b_2-a_2,b_3-a_3)$, па

$$\overline{AB} = \sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2}. \qquad (30)$$

Во нашиов случај имаме

$$\overline{AB} = \sqrt{(0-1)^2+(4-2)^2+(-5+3)^2} = \sqrt{1+4+4} = 3.$$

133. На x_3-оската да се најде точка M еднакво оддалечена од точките $A(3,5,-2)$ и $B(-4,1,7)$.

134. На x_1-оската да се најде точка M еднакво оддалечена од координатниот почеток и од точката $A(18,-6,0)$.

135. Да се пресмета аголот меѓу правите кои координатниот почеток го сврзуваат со точките $A(-4,4,2)$ и $B(2,1,2)$.

136. Да се најде вектор $\overline{x}$ кој е нормален на x_3-оската и на правата AB /$A(1,-1,4)$, $B(-3,2,4)$/.

137. Да се докаже дека четириаголникот $ABCD$ /$A(6,3,1)$, $B(8,5,2)$, $C(10,4,0)$, $D(8,2,-1)$/ е квадрат.

Решение. Имаме $\overrightarrow{AB}=(2,2,1)$, $\overrightarrow{DC}=(2,2,1)$, што значи дека четириаголникот $ABCD$ е паралелограм. Понатаму, $\overrightarrow{AD}=(2,-1,-2)$, $\overline{AB}=3$, $\overline{AD}=3$ и $\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AD}=2\cdot 2+2\cdot(-1)+1\cdot(-2)=4-2-2=0$. Следствено, четириаголникот $ABCD$ е квадрат.

138. Дадени се точките $A(-2,-1,2)$, $B(-3,0,2)$ и $C(-3,-1,3)$. Да се најде точка M од која отсечките AB, BC и CA се гледаат под прав агол.

139. Да се пресмета периметарот на триаголникот ABC /$A(1,2,-1)$, $B(3,1,2)$, $C(-1,0,1)$/.

140. Да се пресмета тежишната линија t_a и симетралата s_a на триаголникот ABC /$A(1,2,3)$, $B(3,4,4)$, $C(-2,2,-1)$/.

141. Да се најдат аглите на триаголникот ABC /$A(1,2,-4)$, $B(-1,4,3)$, $C(3,4,-3)$/.

142. Една рамнина е паралелна со векторите $\overline{a}=(1,1,0)$ и $\overline{b}=(0,1,1)$. Да се најде вектор $\overline{c}=(c_1,c_2,c_3)$ што е нормален на таа рамнина.

Решение. Векторот $\overline{c}$ е нормален на векторите $\overline{a}$ и $\overline{b}$, па $\overline{a}\overline{c}=0$ и $\overline{b}\overline{c}=0$, т.е. $c_1+c_2=0$ и $c_2+c_3=0$. Значи, $c_1=-c_2$, $c_3=-c_2$ и, притоа, $c_2\neq 0$. Можеме да земеме дека $c_2=1$, па еден вектор нормален на рамнината е $\overline{c}=(-1,1,-1)$.

143. Дадени се точките $A(2,2,3)$, $B(-1,2,-2)$ и $C(3,1,1)$. Да се докаже дека овие точки не се колинеарни и да се најде еден вектор $\overline{c}$ што е нормален на рамнината ABC.

144. Да се докаже дека точките $A(-5,0,0)$, $B(0,5,0)$ и $C(-1,2,-1)$ не се колинеарни, а потоа да се најде ортогоналната проекција M' од точката $M(2,3,4)$ врз рамнината ABC.

Решение. Имаме $\vec{AB}=(5,5,0)$, $\vec{AC}=(4,2,-1)$, што значи дека векторите $\vec{AB}$ и $\vec{AC}$ не се колинеарни, па, значи, и точките A,B,C не се колинеарни.

За да ја најдеме ортогоналната проекција $M'(x_1,x_2,x_3)$ на точката M врз рамнината ABC, прво, ќе најдеме еден вектор $\bar{c}$ што е нормален на рамнината ABC. Векторот $\bar{c}=(c_1,c_2,c_3)$ е нормален на векторите $\vec{AB}=(5,5,0)$ и $\vec{AC}=(4,2,-1)$, па $\bar{c}\vec{AB}=0$ и $\bar{c}\vec{AC}=0$, т.е.

$$5c_1+5c_2 = 0 \quad \text{и} \quad 4c_1+2c_2-c_3 = 0,$$

од каде што добиваме $c_2=-c_1$, $c_3=2c_1$. Но, $c_1\neq 0$, па еден вектор $\bar{n}$ нормален на рамнината ABC е $\bar{n}=(1,-1,2)$.

Векторот $\vec{MM'}$ е нормален на рамнината ABC, па, значи, е колинеарен со векторот $\bar{n}$, т.е. $\vec{MM'}=\lambda(1,-1,2)=(\lambda,-\lambda,2\lambda)$ за некој $\lambda\neq 0$. Бидејќи $\vec{MM'}=(x_1-2,x_2-3,x_3-4)$, добиваме дека $M'(2+\lambda,3-\lambda,4+2\lambda)$. Ќе го определиме параметарот λ, така што точката M' да лежи во рамнината ABC, а за тоа е потребно векторите $\vec{MM'}$ и $\vec{AM'}$ да бидат заемно нормални, т.е. да важи условот

$$\vec{AM'}\cdot\vec{MM'} = 0.$$

Значи, имаме

$$\lambda(7+\lambda)-\lambda(3-\lambda)+2\lambda(4+2\lambda) = 0,$$

$$6\lambda(2+\lambda) = 0.$$

Бидејќи $\lambda\neq 0$, ќе имаме $\lambda=-2$, па $M'(0,5,0)$.

145. Да се докаже дека точките $A(0,-3,0)$, $B(1,-3,1)$ и $C(0,0,\frac{3}{2})$ не се колинеарни, а потоа да се најде растојанието од точката $M(3,5,4)$ до рамнината ABC.

146. Да се најде симетричната точка M_1 на точката $M(-3,6,-13)$ во однос на рамнината што минува низ точките $A(0,23,0)$, $B(-10,0,-1)$ и $C(-1,3,-6)$.

147. Да се докаже дека точките:

а) $A(1,2,-1)$, $B(2,2,2)$, $C(3,3,-4)$, $D(5,1,-4)$;

б) $A(1,1,2)$, $B(2,1,-2)$, $C(-1,-2,-3)$, $D(3,3,3)$,

не лежат во иста рамнина, а потоа да се најде висината на тетраедарот ABCD, спуштена од темето D.

148. Една права p минува низ точката A(2,0,0) и е паралелна со векторот $\bar{a}=(3,2,1)$. Да се најде ортогоналната проекција $M'(x_1,x_2,x_3)$ од точката M(1,0,1) врз правата p.

Решение. Векторот $\vec{AM'}$ е колинеарен со векторот $\bar{a}$, па $\vec{AM'}=\lambda\bar{a}$ за некој реален број λ. Бидејќи $\vec{AM'}=(x_1-2,x_2,x_3)$, добиваме дека $M'(2+3\lambda,2\lambda,\lambda)$. Ќе го определиме параметарот λ, така што векторите $\bar{a}$ и $\vec{MM'}$ да се заемно нормални, т.е. да важи $\bar{a}\vec{MM'}=0$. Имаме $\vec{MM'}=(1+3\lambda,2\lambda,\lambda-1)$, па $3(1+\lambda)+2\lambda+\lambda-1=0$, од каде што $\lambda=-\frac{1}{7}$ и, на крајот, $M'(\frac{11}{7},-\frac{2}{7},-\frac{1}{7})$.

149. Да се најде ортогоналната проекција M' од точката M(4,1,1) врз правата AB /A(4,0,0), B(0,-8,12)/.

150. Да се најде растојанието од точката M(3,5,4) до правата што минува низ точката A(2,1,0) и е паралелна со векторот $\bar{a}=(-1,2,2)$.

151. Да се најде растојанието од точката M(2,3,4) до правата AB /A(1,0,-1), B(4,2,0)/.

152. Правата p минува низ точката A(4,2,0) и е паралелна со векторот $\bar{a}=(1,3,2)$. Да се најде симетричната точка M_1 на точката M(2,3,4) во однос на правата p.

153. Да се најде точката M_1 што е симетрична со точката M(4,1,-3) во однос на правата AB /A(5,4,6), B(3,-2,2)/.

154. Да се најдат висините во триаголникот ABC /A(1,-2,-4), B(3,1,-3), C(5,1,-7)/.

155. Да се најде ортоцентарот H и центарот O на опишаната кружница на триаголникот ABC /A(1,0,0), B(0,2,0), C(0,0,3)/.

Решение. Да го најдеме, прво ортоцентарот H(p,q,r) на триаголникот ABC. Векторите $\vec{CH}$ и $\vec{AB}$ односно $\vec{BH}$ и $\vec{CA}$ се заемно нормални, па, значи,

$$\vec{CH}\vec{AB} = 0, \quad \vec{BH}\vec{CA} = 0.$$

Имаме $\vec{CH}=(p,q,r-3)$, $\vec{BH}=(p,q-2,r)$, $\vec{AB}=(-1,2,0)$, $\vec{CA}=(1,0,-3)$, па добиваме

$$-p + 2q = 0, \qquad p - 3r = 0,$$

од каде што добиваме $q = \frac{p}{2}$, $r = \frac{p}{3}$ и, притоа, $p \neq 0$. Значи, $H(p, \frac{p}{2}, \frac{p}{3})$. Останува уште да го определиме p. Бидејќи точката H треба да лежи во рамнината на триаголникот ABC, следува дека векторите $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ и $\vec{AH}$ се линеарно зависни, од каде што добиваме

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ p-1 & \frac{p}{2} & \frac{p}{3} \end{vmatrix} = 0,$$

т.е. $p = \frac{3}{10}$. Следствено, $H(\frac{3}{10}, \frac{3}{20}, \frac{1}{10})$.

Слично, го добиваме и центарот O на опишаната кружница околу триаголникот ABC, користејќи дека векторите $\vec{OA_1}$ и $\vec{BC}$ се заемно нормални, векторите $\vec{OB_1}$ и $\vec{AC}$ се заемно нормални, а векторите $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ и $\vec{AO}$ се линеарно зависни; $O(\frac{1}{4}, \frac{11}{20}, \frac{27}{20})$.

156. Бочните рабови a, b, c на една тристрана пирамида се заемно нормални. Да се пресмета должината на отсечката со крајни точки врвот на пирамидата и тежиштето на основата.

Решение. Нека $ABCD$ е пирамидата и нека $a = \overline{DA}$, $b = \overline{DB}$, $c = \overline{DC}$. Избираме правоаголен Декартов координатен систем со почеток во точката D и координатни оски DA, DB и DC. Тогаш $A(a,0,0)$, $B(0,b,0)$, $C(0,0,c)$, а тежиштето на основата ABC е $T(\frac{a}{3}, \frac{b}{3}, \frac{c}{3})$. Според тоа,

$$\overline{DT}^2 = \frac{1}{9}(a^2+b^2+c^2).$$

157. Да се пресмета висината на тристрана пирамида на која бочните рабови се a, b, c и се заемно нормални.

Решение. Избираме координатен систем како во претходната задача. Нека D' е ортогоналната проекција од $D(0,0,0)$ врз рамнината ABC. Еден вектор $\bar{n}$ нормален на рамнината ABC го наоѓаме од условите $\bar{n}\vec{AB}=0$ и $\bar{n}\vec{AC}=0$, $\bar{n}=(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c})$, па $D'(\frac{\lambda}{a}, \frac{\lambda}{b}, \frac{\lambda}{c})$ за некој реален број $\lambda \neq 0$. Ќе го определиме параметарот λ, така што векторите $\vec{AB}$ и $\vec{DD'}$ да се заемно нормални, т.е. $\vec{AB} \cdot \vec{DD'} = 0$. Од ова равенство добиваме

$$\lambda = \frac{a^2b^2c^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2},$$

па (види и задача III.80)

$$h^2 = \overline{DD'}^2 = \frac{a^2b^2c^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}.$$

158. Правата p минува низ точката A(2,1,0) и е паралелна со векторот $\bar{a}=(-1,2,2)$, а правата q минува низ точката B(5,4,3) и е паралелна со векторот $\bar{b}=(3,2,1)$. Да се најде растојанието меѓу правите p и q.

Решение. Ако правите p и q се разминувачки, тогаш постои единствена права n која ги сече правите p и q под прав агол (заедничка нормала на p и q). Ако n ги сече p и q во точките P и Q соодветно, тогаш $\overline{PQ}$ е најкусото растојание меѓу p и q.

Да провериме, прво, дали правите p и q се разминувачки. Тие ќе бидат разминувачки, ако не лежат во иста рамнина, т.е. векторите $\vec{AB}=(6,2,1)$, $\bar{a}$ и $\bar{b}$ не се компланарни. Бидејќи

$$\begin{vmatrix} 6 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 12+12-2-6-24+2 = -6 \neq 0,$$

следува дека векторите $\vec{AB}$, $\bar{a}$ и $\bar{b}$ не се компланарни, па правите p и q се разминувачки.

Да ги најдеме, сега точките P и Q. Од тоа што P лежи на правата p, следува дека $P(2-\lambda,1+2\lambda,2\lambda)$ за некој реален број λ, а, пак, $Q(5+3\mu,4+2\mu,3+\mu)$ за некој реален број μ. Ќе ги определиме параметрите λ и μ од условите векторот $\vec{PQ}$ да е нормален на векторите $\bar{a}$ и $\bar{b}$, т.е.

$$\vec{PQ}\bar{a} = 0, \qquad \vec{PQ}\bar{b} = 0.$$

Имаме $\vec{PQ}=(3+\lambda+3\mu,3-2\lambda+2\mu,3-2\lambda+\mu)$, па, значи,

$$\begin{cases} -(3+\lambda+3\mu)+2(3-2\lambda+2\mu)+2(3-2\lambda+\mu) = 0, \\ 3(3+\lambda+3\mu)+2(3-2\lambda+2\mu)+(3-2\lambda+\mu) = 0, \end{cases}$$

т.е.

$$\begin{cases} 3\lambda - \mu = 3, \\ 3\lambda - 14\mu = 18, \end{cases}$$

од каде што добиваме $\lambda = \frac{8}{3}$, $\mu = -\frac{15}{3}$. Следствено $P(\frac{18}{13},\frac{29}{13},\frac{16}{13})$, $Q(\frac{20}{13},\frac{22}{13},\frac{24}{13})$.

На крајот, растојанието меѓу правите p и q ќе биде

$$\overline{PQ} = \sqrt{(\frac{20}{13}-\frac{18}{13})^2+(\frac{22}{13}-\frac{29}{13})^2+(\frac{24}{13}-\frac{16}{13})^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{4}{169}+\frac{49}{169}+\frac{64}{169}} = \frac{3\sqrt{13}}{13}.$$

159. Да се докаже дека правите AB и CD се разминувачки, а потоа да се најде растојанието меѓу нив:

а) A(2,1,0), B(-1,7,6), C(1,1,1), D(2,3,4);

б) A(1,7,3), B(-3,5,-5), C(6,-1,-2), D(3,1,-3).

160. Дадена е коцката $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Да се најде растојанието меѓу дијагоналите AC и BD_1.

Глава IV

ВЕКТОРСКИ ПРОИЗВОД

1. ДЕФИНИЦИЈА И СВОЈСТВА НА ВЕКТОРСКИ ПРОИЗВОД. МЕШАН ПРОИЗВОД

За подредената тројка $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ ќе велиме дека е десна тројка вектори ако се распоредени како палецот, показалецот и средниот прст на десната рака, а лева тројка вектори ако се распоредени како палецот, показалецот и средниот прст на левата рака. Од три некомпланарни вектори може да ги формираме следниве шест тројки:

$$\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}, \quad \bar{b}\ \bar{c}\ \bar{a}, \quad \bar{c}\ \bar{a}\ \bar{b},$$

$$\bar{b}\ \bar{a}\ \bar{c}, \quad \bar{a}\ \bar{c}\ \bar{b}, \quad \bar{c}\ \bar{b}\ \bar{a}.$$

Првите три тројки образуваат иста тројка вектори, а вторите три спротивната тројка вектори.

На векторите $\bar{a},\bar{b}$ им придружуваме трет вектор $\bar{c}$ со следниве својства:

(1) $|\bar{c}|=|\bar{a}|\,|\bar{b}|\sin\langle\bar{a},\bar{b}\rangle$,

(2) $\bar{c}$ е нормален на $\bar{a}$ и на $\bar{b}$,

(3) $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ образуваат десна тројка вектори.

Векторот $\bar{c}$ ќе го викаме векторски производ на векторите $\bar{a}$ и $\bar{b}$ и ќе го означуваме со $[\bar{a},\bar{b}]$ (или со $\bar{a}\times\bar{b}$).

Секоја тројка некомпланарни вектори $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$, нанесени од иста точка, определуваат еден паралелопипед. Волуменот на тој паралелопипед ќе го означуваме со $V(\bar{a},\bar{b},\bar{c})$ и, притоа, ќе сметаме дека $V(\bar{a},\bar{b},\bar{c})>0$ ако $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ формираат десна тројка вектори, а $V(\bar{a},\bar{b},\bar{c})<0$ ако $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ формираат лева тројка вектори. Ако, пак, $\bar{a},\bar{b}$ и $\bar{c}$ се компланарни, тогаш ќе сметаме дека $V(\bar{a},\bar{b},\bar{c})=0$.

Производот $[\bar{a},\bar{b}]\bar{c}$ ќе го викаме мешан производ на векторите $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$. Се докажува дека

$$V(\bar{a},\bar{b},\bar{c}) = [\bar{a},\bar{b}]\bar{c}.$$

1. Да се најдат производите $[\bar{a},\bar{b}]$, $[\bar{b},\bar{c}]$ и $[\bar{c},\bar{a}]$, ако $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ се единични вектори, пар по пар заемно нормални и образуваат:

а) десна тројка вектори;

б) лева тројка вектори.

Решение. а) Да го најдеме векторот $[\bar{a},\bar{b}]=\bar{x}$. Според дефиницијата на векторски производ, векторот $\bar{x}$ има должина 1, нормален е на $\bar{a}$ и на $\bar{b}$ и, притоа, $\bar{a},\bar{b},\bar{x}$ формираат десна тројка вектори. Значи, $\bar{x}=\bar{c}$, т.е.

$$[\bar{a},\bar{b}] = \bar{c}.$$

Слично, добиваме дека $[\bar{b},\bar{c}]=\bar{a}$, $[\bar{c},\bar{a}]=\bar{b}$.

2. Дадени се векторите $\bar{a},\bar{b}$. Во кој случај постои вектор $\bar{c}$, така што $\bar{a}=[\bar{b},\bar{c}]$?

3. За кои било три вектори $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ важи $[\bar{a},\bar{b}]\bar{c}=\bar{a}[\bar{b},\bar{c}]$. Докажи!

Решение. Тројките $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ и $\bar{b},\bar{c},\bar{a}$ образуваат иста тројка вектори, па $V(\bar{a},\bar{b},\bar{c}) = V(\bar{b},\bar{c},\bar{a})$. Според тоа,

$$[\bar{a},\bar{b}]\bar{c} = V(\bar{a},\bar{b},\bar{c}) = V(\bar{b},\bar{c},\bar{a}) = [\bar{b},\bar{c}]\bar{a} = \bar{a}[\bar{b},\bar{c}].$$

За натаму мешаниот производ $[\bar{a},\bar{b}]\bar{c}$ ќе го означуваме со $(\bar{a},\bar{b},\bar{c})$.

4. За кои било вектори $\bar{a},\bar{b}$ важи

$$[\bar{a},\bar{b}] = -[\bar{b},\bar{a}]. \tag{1}$$

Докажи!

5. За кои било вектори $\bar{a},\bar{b}$ и кој било реален број λ важат равенствата:

$$[\lambda\bar{a},\bar{b}] = [\bar{a},\lambda\bar{b}] = \lambda[\bar{a},\bar{b}]. \tag{2}$$

Докажи!

6. За кои било вектори $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ важи равенството

$$[\bar{a}+\bar{b},\bar{c}] = [\bar{a},\bar{c}] + [\bar{b},\bar{c}]. \tag{3}$$

Докажи!

<u>Решение</u>. За да го докажеме ова равенство ќе го користиме следново тврдење за скаларниот производ (задача <u>III.23</u>): Ако равенството $\bar{x}\bar{d}=\bar{y}\bar{d}$ важи за секој вектор $\bar{d}$, тогаш $\bar{x} = \bar{y}$.

Затоа, нека $\bar{d}$ е произволен вектор; тогаш имаме:

$$[\bar{a}+\bar{b},\bar{c}]\bar{d} = (\bar{a}+\bar{b})[\bar{c},\bar{d}] = \bar{a}[\bar{c},\bar{d}] + \bar{b}[\bar{c},\bar{d}] =$$
$$= [\bar{a},\bar{c}]\bar{d} + [\bar{b},\bar{c}]\bar{d} = ([\bar{a},\bar{c}]+[\bar{b},\bar{c}])\bar{d},$$

од каде што следува равенството (3).

<u>7</u>. За кој било вектор $\bar{a}$ важи равенството

$$[\bar{a},\bar{a}] = \bar{0}. \tag{4}$$

Докажи!

<u>8</u>. Векторите $\bar{a}$ и $\bar{b}$ се колинеарни ако и само ако $[\bar{a},\bar{b}]=\bar{0}$. Докажи!

<u>9</u>. За кои било вектори $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ и кој било реален број λ важат равенствата:

$$(\lambda\bar{a},\bar{b},\bar{c}) = (\bar{a},\lambda\bar{b},\bar{c}) = (\bar{a},\bar{b},\lambda\bar{c}) = \lambda(\bar{a},\bar{b},\bar{c}). \tag{5}$$

Докажи!

<u>10</u>. Да се пресмета $[\bar{a},\bar{b}]$, ако $\bar{a}=2\bar{p}-3\bar{q}+5\bar{r}$, $\bar{b}=-4\bar{p}+\bar{q}-2\bar{r}$, каде што $\bar{p},\bar{q},\bar{r}$ е десна тројка заемно нормални и единични вектори.

<u>Решение</u>. За векторите $\bar{p},\bar{q}$ и $\bar{r}$ имаме:

$$[\bar{p},\bar{p}] = [\bar{q},\bar{q}] = [\bar{r},\bar{r}] = \bar{0},$$
$$[\bar{p},\bar{q}] = \bar{r},\ [\bar{q},\bar{r}] = \bar{p},\ [\bar{r},\bar{p}] = \bar{q}.$$

Користејќи го тоа, како и равенствата (1), (2) и (3), ќе имаме:

$$[\bar{a},\bar{b}] = [2\bar{p}-3\bar{q}+5\bar{r},-4\bar{p}+\bar{q}-2\bar{r}] = [2\bar{p},-4\bar{p}]+[2\bar{p},\bar{q}]+[2\bar{p},-2\bar{r}] +$$
$$+ [-3\bar{q},-4\bar{p}]+[-3\bar{q},\bar{q}]+[-3\bar{q},-2\bar{r}]+[5\bar{r},-4\bar{p}]+[5\bar{r},\bar{q}]+[5\bar{r},-2\bar{r}] =$$
$$= 2[\bar{p},\bar{q}]-4[\bar{p},\bar{r}]+12[\bar{q},\bar{p}]+6[\bar{q},\bar{r}]-20[\bar{r},\bar{p}]+5[\bar{r},\bar{q}] =$$
$$= 2[\bar{p},\bar{q}]+4[\bar{r},\bar{p}]-12[\bar{p},\bar{q}]+6[\bar{q},\bar{r}]-20[\bar{r},\bar{p}]-5[\bar{q},\bar{r}] =$$
$$= [\bar{q},\bar{r}] - 16[\bar{r},\bar{p}] - 10[\bar{p},\bar{q}] =$$
$$= \bar{p} - 16\bar{q} - 10\bar{r}.$$

11. Да се најде плоштината на паралелограмот, конструиран над векторите $\vec{AB} = \bar{a}+2\bar{b}$ и $\vec{AD}=\bar{a}-3\bar{b}$, каде што $|\bar{a}|=5$, $|\bar{b}|=3$, $\langle\bar{a},\bar{b}\rangle = \frac{\pi}{6}$.

Решение. За плоштината P на паралелограмот ABCD имаме

$$P = \overline{AB}\cdot\overline{AD}\cdot\sin\langle\vec{AB},\vec{AD}\rangle,$$

што претставува должината на векторот $[\vec{AB},\vec{AD}]$. Имаме:

$$[\vec{AB},\vec{AD}] = [\bar{a}+2\bar{b},\bar{a}-3\bar{b}] = -3[\bar{a},\bar{b}] + 2[\bar{b},\bar{a}] = -5[\bar{a},\bar{b}],$$

па

$$|[\vec{AB},\vec{AD}]| = 5\cdot5\cdot3\cdot\sin\frac{\pi}{6} = \frac{75}{2},$$

т.е. плоштината на паралелограмот ABCD е $\frac{75}{2}$.

12. Векторите $\bar{a}$ и $\bar{b}$ не се колинеарни. За кои вредности на x, векторите $\bar{p}=x\bar{a}+5\bar{b}$ и $\bar{q}=3\bar{a}-\bar{b}$ се колинеарни?

Решение. Според 8, векторите $\bar{p}$ и $\bar{q}$ се колинеарни ако и само ако $[\bar{p},\bar{q}] = \bar{0}$. Бидејќи:

$$[\bar{p},\bar{q}] = [x\bar{a}+5\bar{b},3\bar{a}-\bar{b}] = -(x+15)[\bar{a},\bar{b}].$$

Следствено, векторите $\bar{p}$ и $\bar{q}$ се колинеарни за $x=-15$.

13. Да се пресмета изразот $[\bar{a},\bar{b}]^2 + (\bar{a}\bar{b})^2$.

14. Да се провери дали во векторската алгебра важат равенствата:

а) $[\bar{a}+\bar{b},\bar{a}-\bar{b}] = [\bar{a},\bar{a}] - [\bar{b},\bar{b}]$;

б) $[\bar{a}\pm\bar{b},\bar{a}\pm\bar{b}] = [\bar{a},\bar{a}] \pm 2[\bar{a},\bar{b}] + [\bar{b},\bar{b}]$;

в) $[\bar{a},\bar{b}]^2 = \bar{a}^2\bar{b}^2$.

15. Дали од равенството $[\bar{a},\bar{c}] = [\bar{b},\bar{c}]$, $\bar{c}\neq\bar{0}$, следува $\bar{a} = \bar{b}$?

Решение. Не следува. Навистина, равенството може да го напишеме во обликот

$$[\bar{a}-\bar{b},\bar{c}] = \bar{0},$$

од каде што следува дека векторите $\bar{a}-\bar{b}$ и $\bar{c}$ се колинеарни, па не мора да биде $\bar{a}-\bar{b} = \bar{0}$.

16. Ако важи равенството $[\bar{a},\bar{x}] = [\bar{b},\bar{x}]$ за секој вектор $\bar{x}$, тогаш $\bar{a} = \bar{b}$. Докажи!

Решение. Ако равенството го напишеме во обликот $[\bar{a}-\bar{b},\bar{x}] = \bar{0}$, тогаш следува дека векторот $\bar{a}-\bar{b}$ е колинеарен со секој вектор $\bar{x}$. Тоа е можно само во случајот кога $\bar{a}-\bar{b}=\bar{0}$, т.е. $\bar{a} = \bar{b}$.

17. Векторите $\bar{a}$ и $\bar{b}$ не се колинеарни. Да се пресмета $[\bar{a}+\bar{b},\bar{a}-\bar{b}]$ и да се даде геометриско значење на добиениот резултат.

18. Ако $[\bar{a},\bar{b}] = [\bar{c},\bar{d}]$, $[\bar{a},\bar{c}] = [\bar{b},\bar{d}]$, тогаш векторите $\bar{a}-\bar{d}$ и $\bar{b}-\bar{c}$ се колинеарни. Докажи!

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned}[\bar{a}-\bar{d},\bar{b}-\bar{c}] &= [\bar{a},\bar{b}] + [\bar{a},-\bar{c}] + [-\bar{d},\bar{b}] + [-\bar{d},-\bar{c}] = \\ &= [\bar{a},\bar{b}] - [\bar{a},\bar{c}] + [\bar{b},\bar{d}] - [\bar{c},\bar{d}] = \\ &= ([\bar{a},\bar{b}]-[\bar{c},\bar{d}]) + (-[\bar{a},\bar{c}]+[\bar{b},\bar{d}]) = \bar{0},\end{aligned}$$

од каде што следува дека векторите $\bar{a}-\bar{d}$ и $\bar{b}-\bar{c}$ се колинеарни.

19. Ако $\bar{a}+\bar{b}+\bar{c} = \bar{0}$, тогаш $[\bar{a},\bar{b}]=[\bar{b},\bar{c}]=[\bar{c},\bar{a}]$. Дали важи и обратното?

20. Нека $\bar{a},\bar{b},\bar{c},\bar{d}$ се кои било четири вектори. Докажи дека векторите $[\bar{a},\bar{b}]$, $[\bar{a},\bar{c}]$ и $[\bar{a},\bar{d}]$ се компланарни.

21. Ако $[\bar{a},\bar{b}]+[\bar{b},\bar{c}]+[\bar{c},\bar{a}] = \bar{0}$, тогаш векторите $\bar{a},\bar{b}$ и $\bar{c}$ се компланарни. Докажи!

Решение. Даденото равенство можеме да го напишеме во обликот

$$[\bar{a}-\bar{c},\bar{b}-\bar{c}] = \bar{0},$$

од каде што следува дека векторите $\bar{a}-\bar{c}$ и $\bar{b}-\bar{c}$ се колинеарни. Значи, постои реален број λ, така што $\bar{a}-\bar{c}=\lambda(\bar{b}-\bar{c})$, т.е.

$$\bar{a}-\lambda\bar{b} + (\lambda-1)\bar{c} = \bar{0},$$

од каде што следува дека векторите $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ се линеарно зависни. Следствено, векторите $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ се компланарни.

22. Од една точка O повлечени се три некомпланарни вектори $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$. Докажи дека рамнината што минува низ крајните точки на овие вектори е нормална на векторот $[\bar{a},\bar{b}]+[\bar{b},\bar{c}]+[\bar{c},\bar{a}]$.

Решение. Нека $\bar{a}=\overrightarrow{OA}$, $\bar{b}=\overrightarrow{OB}$, $\bar{c}=\overrightarrow{OC}$; тогаш рамнината ABC е нормална на векторот $[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]$. Бидејќи $\overrightarrow{AB}=\bar{b}-\bar{a}$, $\overrightarrow{AC}=\bar{c}-\bar{a}$, ќе имаме:

$$[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}] = [\bar{b}-\bar{a},\bar{c}-\bar{a}] = [\bar{b},\bar{c}] + [\bar{b},-\bar{a}] + [-\bar{a},\bar{c}] =$$
$$= [\bar{a},\bar{b}] + [\bar{b},\bar{c}] + [\bar{c},\bar{a}].$$

23. Точките $A(\bar{r}_1)$, $B(\bar{r}_2)$ и $C(\bar{r}_3)$ се колинеарни ако и само ако $[\bar{r}_1,\bar{r}_2]+[\bar{r}_2,\bar{r}_3]+[\bar{r}_3,\bar{r}_1] = \bar{0}$. Докажи!

24. Ако A,B,C,D се кои било четири точки, тогаш

$$[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AD}] = [\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}] + [\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}] + [\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB}].$$

Докажи!

25. Ако постои вектор $\bar{x}$ што ги задоволува равенствата

$$[\bar{a}_1,\bar{x}] = \bar{b}_1, \qquad [\bar{a}_2,\bar{x}] = \bar{b}_2,$$

тогаш $\bar{a}_1\bar{b}_2+\bar{a}_2\bar{b}_1 = 0$. Докажи!

26. Дадени се некомпланарните вектори $\bar{a}_1,\bar{a}_2,\bar{a}_3$. Да се најдат векторите $\bar{b}_1,\bar{b}_2,\bar{b}_3$ за кои важи:

$$\bar{a}_i\bar{b}_j = \begin{cases} 0, & i\neq j, \\ 1, & i=j. \end{cases}$$

Решение. Да го најдеме векторот $\bar{b}_1$. Од $\bar{b}_1\bar{a}_2=\bar{b}_1\bar{a}_3 = 0$ следува дека векторот $\bar{b}_1$ е нормален на векторите $\bar{a}_2$ и $\bar{a}_3$, т.е. е колинеарен со векторот $[\bar{a}_2,\bar{a}_3]$, па постои реален број λ, така што

$$\bar{b}_1 = \lambda[\bar{a}_2,\bar{a}_3].$$

Множејќи го ова равенство скаларно со $\bar{a}_1$, добиваме

$$1 = \lambda(\bar{a}_1,\bar{a}_2,\bar{a}_3).$$

Векторите $\bar{a}_1,\bar{a}_2,\bar{a}_3$ не се компланарни, па $(\bar{a}_1,\bar{a}_2,\bar{a}_3)\neq 0$, па имаме $\lambda = \dfrac{1}{(\bar{a}_1,\bar{a}_2,\bar{a}_3)}$. Следствено,

$$\bar{b}_1 = \frac{1}{(\bar{a}_1,\bar{a}_2,\bar{a}_3)}[\bar{a}_2,\bar{a}_3].$$

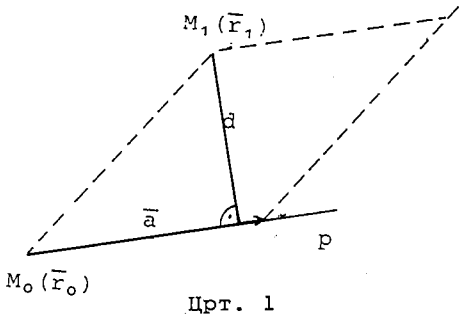
Слично, добиваме дека

$$\bar{b}_2 = \frac{1}{(\bar{a}_1,\bar{a}_2,\bar{a}_3)}[\bar{a}_3,\bar{a}_1], \qquad \bar{b}_3 = \frac{1}{(\bar{a}_1,\bar{a}_2,\bar{a}_3)}[\bar{a}_1,\bar{a}_2].$$

27. Нека $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ се кои било вектори, а x,y,z кои било скалари. Докажи дека векторите $x\bar{a}-y\bar{b}$, $z\bar{b}-x\bar{c}$ и $y\bar{c}-z\bar{a}$ се компланарни.

28. Да се најде растојанието од точката $M_1(\bar{r}_1)$ до правата што минува низ точката $M_0(\bar{r}_0)$ и е паралелна со векторот $\bar{a}$.

Решение. Растојанието d од точката M_1 до правата p е, всушност, висина во паралелограмот конструиран над векторите $\overrightarrow{M_0M_1}$ и $\bar{a}$.



Црт. 1

Значи,

$$d = \frac{|[M_0M_1,\bar{a}]|}{|\bar{a}|} = \frac{|[\bar{r}_1-\bar{r}_0,\bar{a}]|}{|\bar{a}|}.$$

29. Да се најде растојанието од точката $M_1(\bar{r}_1)$ до правата p што минува низ точките $M_2(\bar{r}_2)$ и $M_3(\bar{r}_3)$.

30. Да се најде растојанието од едно теме на правоаголен паралелопипед со рабови a,b и c до една негова просторна дијагонала што не минува низ тоа теме.

Решение. Нека $OABCO_1A_1B_1C_1$ е паралелопипедот, така што $\overline{OA}=a$, $\overline{OB}=b$, $\overline{OC}=c$. Ќе го најдеме растојанието од темето O до дијагоналата AC_1. Да ставиме $\overrightarrow{OA}=\bar{a}$, $\overrightarrow{OB}=\bar{b}$, $\overrightarrow{OC}=\bar{c}$. Значи, треба да го најдеме растојанието од точката $O(\bar{o})$ до правата што минува низ точките $A(\bar{a})$ и $C(\bar{c})$. Според претходната задача, имаме

$$d = \frac{|[\bar{a},\bar{c}-\bar{a}]|}{|\bar{c}-\bar{a}|} = \frac{|[\bar{a},\bar{c}]|}{|\bar{c}-\bar{a}|},$$

па

$$d^2 = \frac{[\bar{a},\bar{c}]^2}{(\bar{c}-\bar{a})^2} = \frac{a^2c^2-(\bar{a}\bar{c})^2}{c^2+a^2-2\bar{a}\bar{c}} = \frac{a^2c^2}{a^2+c^2}.$$

31. Два паралелопипеда имаат паралелни рабови кои се однесуваат како $m_1:n_1$, $m_2:n_2$ и $m_3:n_3$. Да се најде односот на нивните волумени.

Решение. Нека O_1 и O_2 се две темиња на паралелопипедите, така што рабовите O_1A_1, O_1B_1 и O_1C_1 се паралелни соодветно со рабовите O_2A_2, O_2B_2 и O_2C_2. (Направи цртеж!). Можеме да сметаме дека

$$\vec{O_2A_2} = \frac{m_1}{n_1}\vec{O_1A_1}, \quad \vec{O_2B_2} = \frac{m_2}{n_2}\vec{O_1B_1}, \quad \vec{O_2C_2} = \frac{m_3}{n_3}\vec{O_1C_1}.$$

Волуменот V_2 на вториот паралелопипед ќе биде

$$V_2 = (\vec{O_2A_2},\vec{O_2B_2},\vec{O_2C_2}) = (\frac{m_1}{n_1}\vec{O_1A_1},\frac{m_2}{n_2}\vec{O_1B_1},\frac{m_3}{n_3}\vec{O_1C_1}) =$$
$$= \frac{m_1m_2m_3}{n_1n_2n_3}(\vec{O_1A_1},\vec{O_1B_1},\vec{O_1C_1}) = \frac{m_1m_2m_3}{n_1n_2n_3}V_1,$$

од каде што следува дека волумените се однесуваат како $m_1m_2m_3:n_1n_2n_3$.

32. Докажи дека волуменот V на тетраедарот конструиран над векторите $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ е

$$V = \frac{1}{6}(\bar{a},\bar{b},\bar{c}).$$

33. Соодветните рабови на два слични тетраедра се однесуваат како $m:n$. Да се најде односот на нивните волумени.

34. Темињата на еден тетраедар се во тежиштата на ѕидовите на тетраедарот $A_1A_2A_3A_4$. Да се најде односот на нивните волумени.

Решение. Тежиштата на ѕидовите $A_2A_3A_4$, $A_3A_4A_1$, $A_4A_1A_2$ и $A_1A_2A_3$ да ги означиме соодветно со T_1,T_2,T_3 и T_4. Според 32, волуменот V_T на тетраедарот $T_1T_2T_3T_4$ ќе биде

$$V_T = \frac{1}{6}(\vec{T_4T_1},\vec{T_4T_2},\vec{T_4T_3}),$$

а волуменот V_A на тетраедарот $A_1A_2A_3A_4$, ќе биде

$$V_A = \frac{1}{6}(\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3}, \overrightarrow{A_1A_4}).$$

Да ставиме $\overrightarrow{A_1A_2}=\bar{a}$, $\overrightarrow{A_1A_3}=\bar{b}$, $\overrightarrow{A_1A_4}=\bar{c}$. Тогаш $T_4(\frac{\bar{a}+\bar{b}}{3})$, $T_1(\frac{\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}}{3})$, $T_2(\frac{\bar{b}+\bar{c}}{3})$, $T_3(\frac{\bar{c}+\bar{a}}{3})$, па:

$$\overrightarrow{T_4T_1} = \frac{\bar{c}}{3}, \quad \overrightarrow{T_4T_2} = \frac{\bar{c}-\bar{a}}{3}, \quad \overrightarrow{T_4T_3} = \frac{\bar{c}-\bar{b}}{3}.$$

На крајот, имаме

$$(\overrightarrow{T_4T_1}, \overrightarrow{T_4T_2}, \overrightarrow{T_4T_3}) = (\frac{\bar{c}}{3}, \frac{\bar{c}-\bar{a}}{3}, \frac{\bar{c}-\bar{b}}{3}) = \frac{1}{9}(\bar{c}, \bar{c}-\bar{a}, \bar{c}-\bar{b}) =$$
$$= \frac{1}{27}(\bar{c}, -\bar{a}, -\bar{b}) = \frac{1}{27}(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}).$$

Следствено, $V_T:V_A = 1:27$.

35. Да се најде растојанието од точката $M_1(\bar{r}_1)$ до рамнината што минува низ точките $M_2(\bar{r}_2)$, $M_3(\bar{r}_3)$ и $M_4(\bar{r}_4)$.

36. Да се најде вектор $\bar{x}$ што ги задоволува равенствата

$$\bar{a}\bar{x} = \alpha, \quad \bar{b}\bar{x} = \beta, \quad \bar{c}\bar{x} = \gamma,$$

каде што $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ се дадени некомпланарни вектори, а α, β и γ се дадени реални броеви.

Решение. Од првите две равенства добиваме

$$(\beta\bar{a}-\alpha\bar{b})\bar{x} = 0,$$

а од првото и третото добиваме

$$(\gamma\bar{a}-\alpha\bar{c})\bar{x} = 0.$$

Значи, векторот $\bar{x}$ е нормален на векторите $\beta\bar{a}-\alpha\bar{b}$ и $\gamma\bar{a}-\alpha\bar{c}$, т.е. е колинеарен со векторот

$$[\beta\bar{a}-\alpha\bar{b}, \gamma\bar{a}-\alpha\bar{c}] = \alpha(\gamma[\bar{a},\bar{b}]+\alpha[\bar{b},\bar{c}]+\beta[\bar{c},\bar{a}]).$$

Значи,

$$\bar{x} = \lambda\alpha(\gamma[\bar{a},\bar{b}] + \alpha[\bar{b},\bar{c}] + \beta[\bar{c},\bar{a}])$$

за некој реален број λ. Множејќи го ова равенство скаларно со $\bar{c}$ (ако $\gamma\neq 0$), добиваме

$$\gamma = \lambda\alpha\gamma(\bar{a},\bar{b},\bar{c}),$$

па, бидејќи векторите $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ не се компланарни, имаме

$$\lambda\alpha = \frac{1}{(\bar{a},\bar{b},\bar{c})}.$$

Следствено,

$$\bar{x} = \frac{1}{(\bar{a},\bar{b},\bar{c})}(\gamma[\bar{a},\bar{b}] + \alpha[\bar{b},\bar{c}] + \beta[\bar{c},\bar{a}]).$$

2. КООРДИНАТИ НА ВЕКТОРСКИ ПРОИЗВОД

Нека $(0;\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3)$ е декартов координатен систем. Тој се наречува десен (лев) ако координатните вектори $\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3$ образуваат десна (лева) тројка вектори. Ако $\bar{a}=(\bar{a}_1,\bar{a}_2,\bar{a}_3)$, $\bar{b}=(\bar{b}_1,\bar{b}_2,\bar{b}_3)$, тогаш

$$[\bar{a},\bar{b}] = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right). \qquad (6)$$

Ако $\bar{a}=(\bar{a}_1,\bar{a}_2,\bar{a}_3)$, $\bar{b}=(\bar{b}_1,\bar{b}_2,\bar{b}_3)$, $\bar{c}=(\bar{c}_1,\bar{c}_2,\bar{c}_3)$, тогаш

$$(\bar{a},\bar{b},\bar{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \qquad (7)$$

37. Дадени се векторите $\bar{a}=(0,1,0)$, $\bar{b}=(-2,1,3)$ и $\bar{c}=(1,2,-3)$. Да се најдат координатите на векторите $[\bar{a},\bar{b}]$, $[\bar{a},\bar{c}]$, $[\bar{b},\bar{c}]$ и $[\bar{c},\bar{a}]$.

Решение. Според (6), имаме:

$$[\bar{a},\bar{b}] = \left(\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}\right) = (3,0,2).$$

Слично, имаме: $[\bar{a},\bar{c}] = (-3,0,-1)$, $[\bar{b},\bar{c}] = (-9,9,-5)$, $[\bar{c},\bar{a}]=(3,0,1)$.

38. Дадени се векторите $\bar{a}=(1,1,-1)$, $\bar{b}=(-2,-1,2)$ и $\bar{c}=(1,-1,2)$.

а) Да се изрази векторот $\bar{c}$ како линеарна комбинација на векторите $\bar{a},\bar{b}$ и $[\bar{a},\bar{b}]$.

б) Да се пресмета аголот што го зафаќа векторот $\bar{c}$ со рамнина паралелна со векторите $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

Решение. а) Имаме $[\bar{a},\bar{b}]=(3,0,1)$, па треба да ги определиме реалните броеви x,y и z, така што важи

$$\bar{c} = x\bar{a} + y\bar{b} + z[\bar{a},\bar{b}].$$

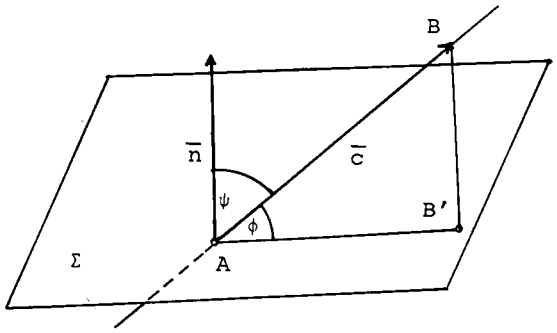
Заменувајќи ги координатите на векторите $\bar{a},\bar{b},[\bar{a},\bar{b}]$ и $\bar{c}$, го добиваме следниов систем равенки:

$$\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 1 \\ x - y \quad\quad &= -1 \\ -x + 2y + z &= 2, \end{aligned}$$

од каде што добиваме $x = -\frac{3}{4}$, $y = \frac{1}{4}$, $z = \frac{3}{4}$. Значи,

$$\bar{c} = -\frac{3}{4}\bar{a} + \frac{1}{4}\bar{b} + \frac{3}{4}[\bar{a},\bar{b}].$$

← б) Нека Σ е една рамнина паралелна со векторите $\bar{a}$ и $\bar{b}$ (црт. 2).



Црт. 2

Ако $\bar{n}$ е еден вектор нормален на Σ и $\psi=\langle\bar{c},\bar{n}\rangle$ (кој може да го најдеме), тогаш $\phi = \frac{\pi}{2} - \psi$. Значи, имаме

$$\sin\phi = \cos\psi = \frac{\bar{c}\bar{n}}{|\bar{c}||\bar{n}|}.$$

Еден вектор $\bar{n}$ нормален на рамнината Σ е векторот $[\bar{a},\bar{b}]$, па, значи,

$$\sin\phi = \frac{[\bar{a},\bar{b}]\bar{c}}{|[\bar{a},\bar{b}]||\bar{c}|} = \frac{(\bar{a},\bar{b},\bar{c})}{|[\bar{a},\bar{b}]||\bar{c}|}.$$

Имаме: $[\bar{a},\bar{b}]=(3,0,1)$, $[\bar{a},\bar{b}]\bar{c}=5$, $|[\bar{a},\bar{b}]|=\sqrt{10}$, $|\bar{c}|=\sqrt{6}$, па

$$\sin\phi = \frac{5}{\sqrt{60}} = \frac{\sqrt{15}}{6}.$$

<u>39</u>. Да се најде вектор $\bar{x}$ што е нормален на векторите $\bar{a}=(2,-3,1)$ и $\bar{b}=(1,-2,3)$, а неговата проекција врз векторот $\bar{c}=(1,2,-7)$ е $\frac{10}{3\sqrt{6}}$.

Решение. Од тоа што векторот $\bar{x}$ е нормален на векторите $\bar{a}$ и $\bar{b}$ следува дека $\bar{x}$ е колинеарен со векторот $[\bar{a},\bar{b}]$. Имаме $[\bar{a},\bar{b}]=$ $=(7,-5,-1)$, па

$$\bar{x} = \lambda(7,-5,-1)$$

за некој реален број λ. Понатаму имаме $\text{пр}_{\bar{c}}\bar{x} = \frac{10}{3\sqrt{6}}$. Но,

$$\text{пр}_{\bar{c}}\bar{x} = \frac{\bar{x}\bar{c}}{|\bar{c}|} = \frac{-10\lambda}{3\sqrt{6}}$$

па $\lambda=-1$. Следствено, $\bar{x}=(-7,5,1)$.

40. Дадени се векторите $\bar{a}_1=(2,1,-1)$, $\bar{a}_2=(-3,0,2)$ и $\bar{a}_3=(5,1,-2)$. Да се најдат векторите $\bar{b}_1,\bar{b}_2$ и $\bar{b}_3$ за кои важи:

$$\bar{a}_i\bar{b}_j = \begin{cases} 0, & i\neq j \\ 1, & i=j. \end{cases}$$

41. Дадени се векторите $\bar{a}=(2,-3,1)$, $\bar{b}=(1,1,2)$ и $\bar{c}=(3,1,-1)$. Да се провери дека $[\bar{a},[\bar{b},\bar{c}]] = (\bar{a}\bar{c})\bar{b} - (\bar{a}\bar{b})\bar{c}$.

42. Во x_1x_3-рамнината да се најде точка M колинеарна со точките $A(3,5,-8)$ и $B(-1,-2,4)$.

Решение. За точката $M(x_1,0,x_3)$ да е колинеарна со точките A и B треба векторите $\vec{AB}$ и $\vec{AM}$ да се колинеарни, т.е. $[\vec{AB},\vec{AM}]=\bar{0}$. Имаме: $\vec{AB}=(-4,-7,12)$, $\vec{AM}=(x_1-3,-5,x_3+8)$, $[\vec{AB},\vec{AM}]=$ $=(-7x_3+4,12x_1+4x_3-4,7x_1-1)$, па $-7x_3+4=0$, $12x_1+4x_3-4=0$, $7x_1-1=0$, од каде што добиваме $x_1 = \frac{1}{7}$, $x_3 = \frac{4}{7}$. Значи, $M(\frac{1}{7},0,\frac{4}{7})$.

43. Да се најде плоштината на триаголникот ABC, ако:

а) $A(2,1,0)$, $B(-3,-6,4)$, $C(-2,4,1)$;

б) $A(4,2,3)$, $B(5,7,0)$, $C(2,8,-1)$;

в) $A(6,5,-1)$, $B(12,1,0)$, $C(1,4,-5)$.

Решение. а) За плоштината P на триаголникот ABC имаме

$$P = \frac{1}{2}|[\vec{AB},\vec{AC}]|.$$

Имаме: $\vec{AB}=(-5,-7,4)$, $\vec{AC}=(-4,3,1)$, $[\vec{AB},\vec{AC}] = (-19,-11,-43)$, па

$$P = \frac{1}{2}\sqrt{19^2+11^2+43^2} = \frac{3}{2}\sqrt{259}.$$

44. На x_2-оската да се најде точка M што е компланарна со точките $A(-3,-2,5)$, $B(0,4,-3)$ и $C(1,1,2)$.

Решение. За точката $M(0,x_2,0)$ да биде компланарна со точките A,B и C, треба векторите $\vec{AB}$,$\vec{AC}$ и $\vec{AM}$ да се компланарни, т.е.

$$(\vec{AM},\vec{AB},\vec{AC}) = 0.$$

Имаме: $\vec{AM}=(3,x_2+2,-5)$, $\vec{AB}=(3,6,-8)$, $\vec{AC}=(4,3,-3)$,

$$(\vec{AM},\vec{AB},\vec{AC}) = \begin{vmatrix} 3 & x_2+2 & -5 \\ 3 & 6 & -8 \\ 4 & 3 & -3 \end{vmatrix} = -23x_2+47,$$

па $x_2 = \frac{47}{23}$. Значи, $M(0,\frac{47}{23},0)$.

45. Да се пресмета растојанието од точката $M(-2,3,5)$ до правата што минува низ точката $A(1,1,2)$ и е паралелна со векторот $\bar{a}=(-3,0,4)$.

Решение. Според 28, имаме

$$d = \frac{|[\vec{AM},\bar{a}]|}{|\bar{a}|}.$$

Бидејќи $\vec{AM}=(-3,2,3)$, $[\vec{AM},\bar{a}]=(8,3,6)$, добиваме $d = \frac{\sqrt{109}}{5}$.

46. На x_1-оската да се најде точка M која е на растојание 2 од правата AB /$A(2,1,-2)$, $B(5,5,-2)$/.

47. Даден е четириаголникот ABCD /$A(2,-3,1)$, $B(-1,1,1)$, $C(-4,5,6)$, $D(2,-3,6)$/. Да се докаже дека овој четириаголник е рамнински.

Решение. За да докажеме дека четириаголникот ABCD е рамнински треба да докажеме дека точките A,B,C и D се компланарни, т.е. да докажеме дека векторите $\vec{AB}$,$\vec{AC}$ и $\vec{AD}$ се компланарни.

Имаме: $\vec{AB}=(-3,4,0)$, $\vec{AC}=(-6,8,5)$, $\vec{AD}=(0,0,5)$ и

$$(\vec{AB},\vec{AC},\vec{AD}) = \begin{vmatrix} -3 & 4 & 0 \\ -6 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 0,$$

што значи дека векторите $\vec{AB}$,$\vec{AC}$ и $\vec{AD}$ се компланарни, т.е. четириаголникот ABCD е рамнински.

48. Да се најде волуменот на тетраедарот ABCD:

а) A(2,-1,-1), B(5,-1,2), C(3,0,-3), D(6,0,-1);

б) A(0,0,0), B(3,4,-1), C(2,3,5), D(6,0,-3).

Решение. а) За волуменот V на тетраедарот ABCD имаме:

$$V = \frac{1}{6}(\vec{AB},\vec{AC},\vec{AD}).$$

Бидејќи $\vec{AB}=(3,0,3)$, $\vec{AC}=(1,1,-2)$, $\vec{AD}=(4,1,0)$, добиваме

$$V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}.$$

49. Да се најде висината на тетраедарот ABCD /A(2,-4,5), B(-1,-3,4), C(5,5,-1), D(1,1,-2)/ спуштена од темето A.

50. Три темиња на тетраедарот ABCD се: A(1,2,1), B(-1,1,1) и C(2,1,1), а четвртото теме D е на x_3-оската. Да се најдат координатите на темето D ако волуменот на тетраедарот е 10.

51. Даден е тетраедарот ABCD /A(1,1,1), B(3,1,1), C(4,5,1), D(4,5,3)/. Да се пресмета:

а) неговиот волумен;

б) плоштините на неговите ѕидови;

в) висината спуштена од темето D;

г) аголот меѓу рабовите AB и BC.

52. Да се докаже дека волуменот на еден тетраедар не се менува, ако два негови спротивни раба се лизгаат по две прави не менувајќи ја притоа својата должина.

3. ПРОИЗВОДИ ОД ПОВЕЌЕ ВЕКТОРИ

53. Да се докаже дека

$$[\bar{a},[\bar{b},\bar{c}]] = (\bar{a}\bar{c})\bar{b} - (\bar{a}\bar{b})\bar{c}. \qquad (8)$$

54. Да се докаже дека

$$[\bar{a},[\bar{b},\bar{c}]] + [\bar{b},[\bar{c},\bar{a}]] + [\bar{c},[\bar{a},\bar{b}]] = \bar{o}.$$

55. Нека $\bar{r}$ е единичен вектор, а а произволен вектор. Да се докаже дека

$$[\bar{r},[\bar{a},\bar{r}]]^2 = [\bar{a},\bar{r}]^2.$$

56. Дадени се векторите $\bar{a}$ и $\bar{b}$. Да се најде вектор $\bar{x}$ што го задоволува равенството

$$\bar{x} + [\bar{a},\bar{x}] = \bar{b}.$$

Решение. Множејќи го даденото равенство векторски со $\bar{a}$ (од лева страна), по ред добиваме:

$$[\bar{a},\bar{x}+[\bar{a},\bar{x}]] = [\bar{a},\bar{b}],$$

$$[\bar{a},\bar{x}] + [\bar{a},[\bar{a},\bar{x}]] = [\bar{a},\bar{b}],$$

$$\bar{b} - \bar{x} + (\bar{a}\bar{x})\bar{a} - \bar{a}^2\bar{x} = [\bar{a},\bar{b}].$$

Множејќи го, пак, даденото равенство скаларно со $\bar{a}$ добиваме $\bar{a}\bar{x}=\bar{a}\bar{b}$. Заменувајќи го ова во последното равенство, добиваме

$$\bar{b} - \bar{x} + (\bar{a}\bar{b})\bar{a} - \bar{a}^2\bar{x} = [\bar{a},\bar{b}],$$

од каде што имаме

$$\bar{x} = \frac{1}{1+\bar{a}^2}(\bar{b}+(\bar{a}\bar{b})\bar{a} - [\bar{a},\bar{b}]).$$

57. Дали постои вектор $\bar{x}$ што ги задоволува равенствата

$$\bar{x}\bar{a} = \alpha, \qquad [\bar{x},\bar{b}] = \bar{c},$$

каде што $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ се дадени вектори, а α даден реален број?

Решение. За да постои вектор $\bar{x}$ што го задоволува равенството $[\bar{x},\bar{b}]=\bar{c}$, мора векторите $\bar{b}$ и $\bar{c}$ да се заемно нормални. Затоа, нека векторите $\bar{b}$ и $\bar{c}$ се заемно нормални. Множејќи го равенството $[\bar{x},\bar{b}]=\bar{c}$ векторски со $\bar{a}$ (од лева страна), добиваме:

$$[\bar{a},[\bar{x},\bar{b}]] = [\bar{a},\bar{c}],$$

$$(\bar{a}\bar{b})\bar{x} - (\bar{a}\bar{x})\bar{b} = [\bar{a},\bar{c}],$$

$$(\bar{a}\bar{b})\bar{x} - \alpha\bar{b} = [\bar{a},\bar{c}],$$

$$(\bar{a}\bar{b})\bar{x} = \alpha\bar{b} + [\bar{a},\bar{c}].$$

Ако векторите $\bar{a}$ и $\bar{b}$ не се заемно нормални, тогаш $\bar{a}\bar{b}\neq 0$, па последната равенка има единствено решение

$$\bar{x} = \frac{1}{\bar{a}\bar{b}}(\alpha\bar{b}+[\bar{a},\bar{c}]).$$

Од сето тоа заклучуваме дека:

-ако векторите $\bar{b}$ и $\bar{c}$ не се заемно нормални, тогаш таков вектор $\bar{x}$ не постои;

-ако векторите $\bar{b}$ и $\bar{c}$ се заемно нормални, а векторите $\bar{a}$ и $\bar{b}$ не се заемно нормални, тогаш постои единствен таков вектор $\bar{x}$;

-ако векторите $\bar{b},\bar{c}$ и $\bar{a},\bar{b}$ се заемно нормални и, притоа, $\alpha\bar{b}+[\bar{a},\bar{c}]\neq\bar{0}$, тогаш таков вектор $\bar{x}$ не постои;

-ако векторите $\bar{b},\bar{c}$ и $\bar{a},\bar{b}$ се заемно нормални и, притоа, $\alpha\bar{b}+[\bar{a},\bar{c}]=\bar{0}$, тогаш секој вектор $\bar{x}$ ги задоволува двете равенства.

58. Да се докаже дека

$$(\bar{a},\bar{b},\bar{c})(\bar{p},\bar{q},\bar{r}) = \begin{vmatrix} \bar{a}\bar{p} & \bar{a}\bar{q} & \bar{a}\bar{r} \\ \bar{b}\bar{p} & \bar{b}\bar{q} & \bar{b}\bar{r} \\ \bar{c}\bar{p} & \bar{c}\bar{q} & \bar{c}\bar{r} \end{vmatrix}. \qquad (9)$$

59. Да се пресмета волуменот V на паралелопипедот на кој три соседни раба имаат должини a,b и c, а рабовите a и b, b и c, c и a зафаќаат соодветно агли γ,α,β.

Решение. На рабовите a,b и c (со ист почеток) ги положуваме векторите $\bar{a},\bar{b}$ и $\bar{c}$. Според (9), за волуменот V на паралелопипедот, добиваме

$$V^2 = (\bar{a},\bar{b},\bar{c})(\bar{a},\bar{b},\bar{c}) = \begin{vmatrix} \bar{a}^2 & \bar{a}\bar{b} & \bar{a}\bar{c} \\ \bar{b}\bar{a} & \bar{b}^2 & \bar{b}\bar{c} \\ \bar{c}\bar{a} & \bar{c}\bar{b} & \bar{c}^2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a^2 & ab\cos\gamma & ac\cos\beta \\ ab\cos\gamma & b^2 & bc\cos\alpha \\ ac\cos\beta & bc\cos\alpha & c^2 \end{vmatrix} =$$

$$= a^2b^2c^2 \begin{vmatrix} 1 & \cos\gamma & \cos\beta \\ \cos\gamma & 1 & \cos\alpha \\ \cos\beta & \cos\alpha & 1 \end{vmatrix}.$$

60. Да се пресмета волуменот на тетраедарот со рабови a,b,c,d,e,f.

61. Да се докаже дека

$$[[\bar{a},\bar{b}],[\bar{c},\bar{d}]] = (\bar{a},\bar{c},\bar{d})\bar{b}-(\bar{b},\bar{c},\bar{d})\bar{a} = (\bar{a},\bar{b},\bar{d})\bar{c}-(\bar{a},\bar{b},\bar{c})\bar{d}. \qquad (10)$$

62. Да се докаже дека

$$[\bar{a},\bar{b}]\,[\bar{c},\bar{d}] = \begin{vmatrix} \bar{a}\bar{c} & \bar{b}\bar{c} \\ \bar{a}\bar{d} & \bar{b}\bar{d} \end{vmatrix}. \tag{11}$$

63. Да се изведе Хероновата формула за плоштина на триаголник.

Решение. Ако се дадени страните a,b,c на триаголникот ABC, тогаш неговата плоштина P се пресметува по формулата

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \quad 2s=a+b+c,$$

позната како Херонова формула.

На страните на триаголникот ABC ги нанесуваме векторите $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$, така што да важи

$$\bar{c} = \bar{a} - \bar{b}.$$

Бидејќи $2P=|[\bar{a},\bar{b}]|$, според (11), ќе имаме:

$$4P^2 = [\bar{a},\bar{b}]^2 = [\bar{a},\bar{b}]\,[\bar{a},\bar{b}] = \begin{vmatrix} \bar{a}^2 & \bar{a}\bar{b} \\ \bar{a}\bar{b} & \bar{b}^2 \end{vmatrix}.$$

Од $\bar{c}=\bar{a}-\bar{b}$ добиваме $c^2=a^2+b^2-2\bar{a}\bar{b}$, т.е. $2\bar{a}\bar{b}=a^2+b^2-c^2$; затоа,

$$4P^2 = \begin{vmatrix} a^2 & \frac{1}{2}(a^2+b^2-c^2) \\ \frac{1}{2}(a^2+b^2-c^2) & b^2 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{4}\begin{vmatrix} 2a^2 & a^2+b^2-c^2 \\ a^2+b^2-c^2 & 2b^2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{4}((a^2+b^2-c^2)-4a^2b^2) =$$

$$= -\frac{1}{4}(a^2+b^2-c^2+2ab)(a^2+b^2-c^2-2ab) =$$

$$= -\frac{1}{4}((a+b)^2-c^2)((a-b)^2-c^2) =$$

$$= -\frac{1}{4}(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a-b-c) =$$

$$= \frac{1}{4}(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c).$$

Ставајќи 2s=a+b+c, ја добиваме Хероновата формула.

64. Да се докаже дека

$$([\bar{a},\bar{b}],[\bar{c},\bar{d}],[\bar{e},\bar{f}]) = (\bar{a},\bar{c},\bar{d})(\bar{b},\bar{e},\bar{f})-(\bar{b},\bar{c},\bar{d})(\bar{a},\bar{e},\bar{f}). \tag{12}$$

65. Да се упрости изразот:

а) $[[\bar{a},\bar{b}],[\bar{c},\bar{d}]] - [\bar{c},[[\bar{a},\bar{b}],\bar{d}]]$;

б) $([[\bar{a},\bar{b}],[\bar{b},\bar{c}]],[[\bar{b},\bar{c}],[\bar{c},\bar{a}]],[[\bar{c},\bar{a}],[\bar{a},\bar{b}]])$;

в) $[\bar{a},\bar{b}][\bar{c},\bar{d}] + \bar{c}[[\bar{a},\bar{b}],\bar{d}]$;

г) $[\bar{a}+\bar{b},\bar{b}+\bar{c}](\bar{a}+\bar{c})$.

Глава V — ВЕКТОРСКИ РАВЕНКИ НА РАМНИНИ И ПРАВИ

1. Равенката на рамнината што минува низ точката $M_1(\bar{r}_1)$ и е паралелна со векторите $\bar{a}$ и $\bar{b}$ може да се напише во видот

$$(\bar{r}-\bar{r}_1,\bar{a},\bar{b}) = 0, \tag{1}$$

или во параметарски облик

$$\bar{r} = \bar{r}_1 + \lambda\bar{a} + \mu\bar{b}. \tag{2}$$

Решение. Нека $M(\bar{r})$ е произволна точка од рамнината што минува низ точката $M_1(\bar{r}_1)$ и е паралелна со векторите $\bar{a}$ и $\bar{b}$. Тогаш векторите $\overrightarrow{M_1M}=\bar{r}-\bar{r}_1$, $\bar{a}$ и $\bar{b}$ се компланарни, па нивниот мешан производ е нула, т.е.

$$(\bar{r}-\bar{r}_1,\bar{a},\bar{b}) = 0,$$

што претставува равенката на рамнината.

Векторите $\bar{a}$ и $\bar{b}$ не се колинеарни, па постојат реални броеви λ,μ, така што

$$\bar{r}-\bar{r}_1 = \lambda\bar{a} + \mu\bar{b},$$

т.е. равенката на рамнината може да се напише во обликот (2).

2. Равенката на рамнината што минува низ точките $M_1(\bar{r}_1)$, $M_2(\bar{r}_2)$ и е паралелна со векторот $\bar{a}$ може да се напише во видот

$$(\bar{r}-\bar{r}_1,\bar{r}_2-\bar{r}_1,\bar{a}) = 0, \tag{3}$$

или во параметарски облик

$$\bar{r} = \bar{r}_1 + \lambda\bar{a} + \mu(\bar{r}_2-\bar{r}_1). \tag{4}$$

Решение. Рамнината минува низ точката $M_1(\bar{r}_1)$ и е паралелна со векторите $\overrightarrow{M_1M_2}=\bar{r}_2-\bar{r}_1$ и $\bar{a}$, па, според 1, равенката на рамнината може да се напише во обликот (3) или во обликот (4).

3. Равенката на рамнината што минува низ трите неколинеарни точки $M_1(\bar{r}_1)$, $M_2(\bar{r}_2)$ и $M_3(\bar{r}_3)$ може да се напише во обликот

$$(\bar{r}-\bar{r}_1, \bar{r}_2-\bar{r}_1, \bar{r}_3-\bar{r}_1) = 0, \tag{5}$$

или во параметарски облик

$$\bar{r} = \bar{r}_1 + \lambda(\bar{r}_2-\bar{r}_1) + \mu(\bar{r}_3-\bar{r}_1). \tag{6}$$

4. Ако $\bar{n}$ е ненулти вектор, тогаш равенката на произволна рамнина што е нормална на $\bar{n}$ може да се напише во видот

$$\bar{n}\bar{r} = D, \tag{7}$$

каде што D е реален број.

Решение. Нека Σ е произволна рамнина што е нормална на векторот $\bar{n}$, нека $M_1(\bar{r}_1)$ е една точка од Σ и нека $M(\bar{r})$ е произволна точка од Σ. Тогаш векторите $\overrightarrow{M_1M}=\bar{r}-\bar{r}_1$ и $\bar{n}$ се заемно нормални, па нивниот скаларен производ е нула, т.е.

$$(\bar{r}-\bar{r}_1)\bar{n} = 0,$$
$$\bar{r}\bar{n} = \bar{r}_1\bar{n}.$$

Ставајќи $\bar{r}_1\bar{n}=D$, равенката на рамнината Σ може да се напише во обликот (7).

5. Равенката на правата што минува низ точката $M_1(\bar{r}_1)$ и е паралелна со векторот $\bar{a}$ може да се напише во обликот (параметарски вид)

$$\bar{r} = \bar{r}_1 + \lambda\bar{a}. \tag{8}$$

6. Равенката на правата што минува низ точките $M_1(\bar{r}_1)$ и $M_2(\bar{r}_2)$ може да се напише во обликот

$$\bar{r} = \bar{r}_1 + \lambda(\bar{r}_2-\bar{r}_1). \tag{9}$$

7. Ако $\bar{a}\neq\bar{0}$ и $\bar{m}$ вектор, таков што $\bar{a}\bar{m}=0$, тогаш

$$[\bar{r},\bar{a}] = \bar{m} \tag{10}$$

е равенка на права што минува низ точката $M_1\left(\frac{[\bar{a},\bar{m}]}{a^2}\right)$ и е паралелна со векторот $\bar{a}$.

Решение. Равенката на правата што минува низ точката $M_1(\frac{[\bar{a},\bar{m}]}{a^2})$ и е паралелна со векторот $\bar{a}$, според 5, може да се напише во обликот

$$\bar{r} = \frac{[\bar{a},\bar{m}]}{a^2} + \lambda\bar{a}.$$

Сега, имаме

$$[\bar{r},\bar{a}] = \left[\frac{[\bar{a},\bar{m}]}{a^2} + \lambda\bar{a},\bar{a}\right] = \frac{1}{a^2}[[\bar{a},\bar{m}],\bar{a}] =$$
$$= \frac{1}{a^2}((\bar{a}\bar{a})\bar{m} - (\bar{a}\bar{m})\bar{a}) = \bar{m},$$

т.е. равенката на таа права може да се напише во обликот (10).

8. Да се напише равенката на рамнината што минува низ точката $M_1(\bar{r}_1)$ и низ правата $\bar{r} = \bar{r}_0+\lambda\bar{a}$.

Решение. Рамнината минува низ точките $M_1(\bar{r}_1)$ и $M_0(\bar{r}_0)$ и е паралелна со векторот $\bar{a}$, па, според 2, нејзината равенка е $(\bar{r}-\bar{r}_0,\bar{r}_1-\bar{r}_0,\bar{a})=0$ или, во параметарски вид, $\bar{r} = \bar{r}_0+\lambda(\bar{r}_1-\bar{r}_0)+\mu\bar{a}$.

9. Да се напише равенката на рамнината којашто минува низ точката $M_1(\bar{r}_1)$ и е нормална на правата $\bar{r} = \bar{r}_0+\lambda\bar{a}$.

Решение. Од тоа што рамнината е нормална на правата $\bar{r} = \bar{r}_0+\lambda\bar{a}$, следува дека таа е нормална на векторот $\bar{a}$. Ако $M(\bar{r})$ е произволна точка од рамнината, тогаш векторите $\bar{r}-\bar{r}_1$ и $\bar{a}$ се заемно нормални, па имаме

$$(\bar{r}-\bar{r}_1)\bar{a} = 0,$$

што претставува равенка на бараната рамнина.

10. Да се состави равенката на рамнината што минува низ точката $M_0(\bar{r}_0)$ и е нормална на пресечната права на рамнините $\bar{r}\bar{n}_1=D_1$, $\bar{r}\bar{n}_2=D_2$.

Решение. Пресечната права на рамнините $\bar{r}\bar{n}_1=D_1$ и $\bar{r}\bar{n}_2=D_2$ е паралелна со векторот $[\bar{n}_1,\bar{n}_2]$, па бараната рамнина е нормална на векторот $[\bar{n}_1,\bar{n}_2]$. Значи, равенката на таа рамнина е

$$(\bar{r}-\bar{r}_0)[\bar{n}_1,\bar{n}_2] = 0,$$

т.е.

$$(\bar{r}-\bar{r}_0,\bar{n}_1,\bar{n}_2) = 0.$$

11. Да се најде пресечната точка (прободот) на правата $\bar{r} = \bar{r}_0+\lambda\bar{a}$ и рамнината:

а) $\bar{r}\bar{n} = D$;

б) $\bar{r} = \bar{r}_1 + \mu\bar{b} + \nu\bar{c}$.

Решение. а) Правата $\bar{r} = \bar{r}_0+\lambda\bar{a}$ ја прободува рамнината $\bar{r}\bar{n}=D$ ако векторите $\bar{a}$ и $\bar{n}$ не се заемно нормални, т.е. ако $\bar{a}\bar{n}\neq 0$. Имаме $(\bar{r}_0+\lambda\bar{a})\bar{n} = D$, $\bar{r}_0\bar{n} + \lambda(\bar{a}\bar{n}) = D$. Бидејќи $\bar{a}\bar{n}\neq 0$, од последната равенка добиваме

$$\lambda = \frac{D-\bar{r}_0\bar{n}}{\bar{a}\bar{n}}.$$

Заменувајќи ја оваа вредност на λ во равенката на правата, добиваме

$$\bar{r} = \bar{r}_0 + \frac{D-\bar{r}_0\bar{n}}{\bar{a}\bar{n}}\bar{a},$$

што претставува радиусвекторот на прободот.

б) Правата $\bar{r} = \bar{r}_0 + \lambda\bar{a}$ ја прободува рамнината $\bar{r}=\bar{r}_1+\mu\bar{b}+\nu\bar{c}$ ако и само ако векторите $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ не се компланарни, т.е. ако и само ако $(\bar{a},\bar{b},\bar{c}) \neq 0$. За да го најдеме прободот на правата и рамнината, доволно е да го определиме параметарот λ од равенката

$$\bar{r}_0 + \lambda\bar{a} = \bar{r}_1 + \mu\bar{b} + \nu\bar{c},$$

т.е. од равенката

$$\lambda\bar{a} = \bar{r}_1-\bar{r}_0 + \mu\bar{b} + \nu\bar{c}.$$

Имаме:

$$\lambda(\bar{a},\bar{b},\bar{c}) = (\bar{r}_1-\bar{r}_0+\mu\bar{b}+\nu\bar{c},\bar{b},\bar{c}) = (\bar{r}_1-\bar{r}_0,\bar{b},\bar{c}),$$

па

$$\lambda = \frac{(\bar{r}_1-\bar{r}_0,\bar{b},\bar{c})}{(\bar{a},\bar{b},\bar{c})}.$$

Заменувајќи во равенката на правата го добиваме радиусвекторот на прободот:

$$\bar{r}_0 + \frac{(\bar{r}_1-\bar{r}_0,\bar{b},\bar{c})}{(\bar{a},\bar{b},\bar{c})}\bar{a}.$$

12. Да се напише равенката на правата, којашто минува низ точката $M_0(\bar{r}_0)$ и ги сече правите $\bar{r}=\bar{r}_1+\lambda\bar{a}_1$, $\bar{r}=\bar{r}_2+\mu\bar{a}_2$.

13. Да се напише равенката на правата, којашто лежи во рамнината $\bar{r}\bar{n}=D$ и ја сече под прав агол правата $\bar{r}=\bar{r}_0+\lambda\bar{a}$.

Решение. Јасно е дека правата $\bar{r}=\bar{r}_0+\lambda\bar{a}$ треба да ја прободува рамнината $\bar{r}\bar{n}=D$, т.е. да биде $\bar{a}\bar{n}\neq 0$. Бараната права ќе минува низ прободот P на правата и рамнината. Според 11 а), радиусвекторот на P е

$$\bar{r}_0 + \frac{D-\bar{r}_0\bar{n}}{\bar{a}\bar{n}}\bar{a}.$$

Бараната права е нормална на дадената права, па, значи, е нормална на векторот $\bar{a}$; но, треба да лежи и во дадената рамнина, па е нормална и на векторот $\bar{n}$. Следствено, бараната права е паралелна со векторот $[\bar{a},\bar{n}]$. Нејзината равенка, во параметарски вид, е

$$\bar{r} = \bar{r}_0 + \frac{D-\bar{r}_0\bar{n}}{\bar{a}\bar{n}}\bar{a} + \lambda[\bar{a},\bar{n}],$$

или, како пресек на две рамнини, е

$$(\bar{r}-\bar{r}_0,\bar{a},[\bar{a},\bar{n}]) = 0, \quad \bar{r}\bar{n} = D.$$

14. Да се најде ортогоналната проекција (за понатаму, само проекција) на точката $M_0(\bar{r}_0)$ врз правата $\bar{r}=\bar{r}_1+\lambda\bar{a}$.

Решение. Нека $M(r_1+\lambda\bar{a})$ е произволна точка од правата. За да биде $M=M_0'$ проекцијата на M_0 врз правата треба векторот $\overrightarrow{M_0M}$ да биде нормален на векторот $\bar{a}$, т.е. $\overrightarrow{M_0M}\cdot\vec{a}=0$. Бидејќи $\overrightarrow{M_0M}=$ $=\bar{r}_1+\lambda\bar{a}-\bar{r}_0$, од

$$(\bar{r}_1+\lambda\bar{a}-\bar{r}_0)\bar{a} = 0$$

добиваме

$$\lambda = \frac{(\bar{r}_0-\bar{r}_1)\bar{a}}{a^2},$$

па точката M_0' има радиусвектор

$$\bar{r}_1 + \frac{(\bar{r}_0-\bar{r}_1)\bar{a}}{a^2}\bar{a}.$$

15. Да се најде симетричната точка на точката $M_0(\bar{r}_0)$ во однос на правата $r=\bar{r}_1+\lambda\bar{a}$.

16. Да се најде проекцијата на точката $M_0(\bar{r}_0)$ врз рамнината:

а) $\bar{r}\bar{n} = D$;

б) $r = r_1 + \lambda\bar{a} + \mu\bar{b}$.

17. Да се најде симетричната точка на точката $M_0(\bar{r}_0)$ во однос на рамнината:

а) $\bar{r}\bar{n} = D$;

б) $\bar{r} = \bar{r}_1 + \lambda\bar{a} + \mu\bar{b}$.

18. Да се најде пресечната точка на трите рамнини $\bar{r}\bar{n}_k = D_k$, $k=1,2,3$.

Решение. За рамнините да имаат единствена заедничка точка потребно е векторите $\bar{n}_1,\bar{n}_2$ и $\bar{n}_3$ да не се компланарни, т.е. $(\bar{n}_1,\bar{n}_2,\bar{n}_3) \neq 0$.

Од првите две равенки добиваме

$$\bar{r}(D_2\bar{n}_1-D_1\bar{n}_2) = 0,$$

а од првата и третата

$$\bar{r}(D_3\bar{n}_1-D_1\bar{n}_3) = 0.$$

Значи, векторот $\bar{r}$ е нормален на векторите $D_2\bar{n}_1-D_1\bar{n}_2$ и $D_3\bar{n}_1-D_1\bar{n}_3$, па е колинеарен со векторот

$$[D_2\bar{n}_1-D_1\bar{n}_2, D_3\bar{n}_1-D_1\bar{n}_3] = D_1(D_1[\bar{n}_2,\bar{n}_3]+D_2[\bar{n}_3,\bar{n}_1]+D_3[\bar{n}_1,\bar{n}_2]).$$

Тоа, пак, значи дека постои реален број λ, така што

$$\bar{r} = \lambda D_1(D_1[\bar{n}_2,\bar{n}_3] + D_2[\bar{n}_3,\bar{n}_1] + D_3[\bar{n}_1,\bar{n}_2]).$$

Заменувајќи во првата равенка, добиваме

$$\lambda = \frac{1}{D_1^2(\bar{n}_1,\bar{n}_2,\bar{n}_3)},$$

па, пресечната точка на рамнините има радиусвектор

$$\frac{1}{(\bar{n}_1,\bar{n}_2,\bar{n}_3)}(D_1[\bar{n}_2,\bar{n}_3]+D_2[\bar{n}_3,\bar{n}_1]+D_3[\bar{n}_1,\bar{n}_2]).$$

19. Да се најде потребен и доволен услов четирите рамнини $\bar{r}\bar{n}_k = D_k$, $k=1,2,3,4$, да му припаѓаат на еден сноп рамнини (т.е. да имаат единствена заедничка точка).

20. Низ пресечната права на рамнините $\bar{r}\bar{n}_1=D_1$ и $\bar{r}\bar{n}_2=D_2$ да се повлече рамнина, нормална на рамнината $\bar{r}\bar{n}_3=D_3$.

Решение. Бараната рамнина е паралелна со векторите $\bar{n}_3$ и $[\bar{n}_1,\bar{n}_2]$ и минува низ една точка $M_0(\bar{r}_0)$ што лежи на правата, т.е. за која $\bar{r}_0\bar{n}_1=D_1$ и $\bar{r}_0\bar{n}_2=D_2$. Равенката на бараната рамнина ќе биде

$$(\bar{r}-\bar{r}_0,\bar{n}_3,[\bar{n}_1,\bar{n}_2]) = 0, \text{ т.е. } (\bar{r},\bar{n}_3,[\bar{n}_1,\bar{n}_2])=(\bar{r}_0,\bar{n}_3,[\bar{n}_1,\bar{n}_2]).$$

Бидејќи:

$$\begin{aligned}(\bar{r}_0,\bar{n}_3,[\bar{n}_1,\bar{n}_2]) &= (\bar{n}_3,[\bar{n}_1,\bar{n}_2],\bar{r}_0) = \bar{n}_3[[\bar{n}_1,\bar{n}_2],\bar{r}_0] = \\ &= \bar{n}_3((\bar{r}_0\bar{n}_1)\bar{n}_2 - (\bar{r}_0\bar{n}_2)\bar{n}_1) = \\ &= \bar{n}_3(D_1\bar{n}_2-D_2\bar{n}_1) = D_1(\bar{n}_2\bar{n}_3)-D_2(\bar{n}_1\bar{n}_3),\end{aligned}$$

равенката на бараната рамнина ќе биде

$$(\bar{r},\bar{n}_3,[\bar{n}_1,\bar{n}_2]) = D_1(\bar{n}_2\bar{n}_3)-D_2(\bar{n}_1\bar{n}_2).$$

21. Да се напише равенката на правата $[\bar{r},\bar{a}]=\bar{m}$ $(\bar{a}\neq\bar{0},\ \bar{a}\bar{m}=0)$ во параметарски вид.

22. Да се најде прободот на правата $[\bar{r},\bar{a}]=\bar{m}$ $(\bar{a}\neq\bar{0},\ \bar{a}\bar{m}=0)$ со рамнината $\bar{r}\bar{n}=D$.

23. Низ правата $\bar{r}=\bar{r}_0+\lambda\bar{a}$ да се повлече рамнина нормална на рамнината $\bar{r}\bar{n}=D$.

24. Низ правата $[\bar{r},\bar{a}]=\bar{m}$ $(\bar{a}\neq\bar{0},\ \bar{a}\bar{m}=0)$ да се повлече рамнина нормална на рамнината $\bar{r}\bar{n}=D$.

25. Да се напише равенката на рамнината, којашто минува низ точката $M_0(\bar{r}_0)$ и низ правата $[\bar{r},\bar{a}]=\bar{m}$ $(\bar{a}\neq\bar{0},\ \bar{a}\bar{m}=0)$.

Решение. Правата $[\bar{r},\bar{a}]=\bar{m}$, $\bar{a}\neq\bar{0}$, $\bar{a}\bar{m}=0$, минува низ точката $M_1(\frac{[\bar{a},\bar{m}]}{a^2})$ и е паралелна со векторот $\bar{a}$, па равенката на рамнината што минува низ точката $M_0(\bar{r}_0)$ и низ правата ќе биде

$$(\bar{r}-\bar{r}_0, \frac{[\bar{a},\bar{m}]}{a^2} - \bar{r}_0, \bar{a}) = 0,$$

т.е.

$$(\bar{r}-\bar{r}_0, [\bar{a},\bar{m}]-a^2\bar{r}_0, \bar{a}) = 0.$$

Бидејќи

$$\begin{aligned}(\bar{r}-\bar{r}_0, [\bar{a},\bar{m}]-a^2\bar{r}_0, \bar{a}) &= (\bar{r}-\bar{r}_0)[[\bar{a},\bar{m}]-a^2\bar{r}_0, \bar{a}] = \\ &= (\bar{r}-\bar{r}_0)([[\bar{a},\bar{m}], \bar{a}]-a^2[\bar{r}_0, \bar{a}]) = \\ &= (\bar{r}-\bar{r}_0)(a^2\bar{m}-(\bar{a}\bar{m})\bar{a}-a^2[\bar{r}_0, \bar{a}]) = \\ &= (\bar{r}-\bar{r}_0(a^2\bar{m}-a^2[\bar{r}_0, \bar{a}]) = \\ &= a^2\bar{r}(\bar{m}-[\bar{r}_0, \bar{a}])-\bar{r}_0\bar{m},\end{aligned}$$

равенката на рамнината ќе биде

$$\bar{r}(\bar{m}-[\bar{r}_0, \bar{a}])-\bar{r}_0\bar{m} = 0.$$

26. Да се напише равенката на правата, дадена како пресек на рамнините $\bar{r}\bar{n}_1=D_1$, $\bar{r}\bar{n}_2=D_2$, во:

а) обликот $[\bar{r}, \bar{a}]=\bar{m}$;

б) параметарски вид.

Решение. а) Правата е паралелна со векторот $[\bar{n}_1, \bar{n}_2]$, па нејзината равенка ќе биде

$$[\bar{r}, [\bar{n}_1, \bar{n}_2]] = \bar{m}$$

Значи, треба да го најдеме векторот $\bar{m}$. Имаме:

$$\begin{aligned}\bar{m} &= [\bar{r}, [\bar{n}_1, \bar{n}_2]] = (\bar{r}\bar{n}_2)\bar{n}_1-(\bar{r}\bar{n}_1)\bar{n}_2 = \\ &= D_2\bar{n}_1-D_1\bar{n}_2,\end{aligned}$$

па равенката на правата е $[\bar{r}, [\bar{n}_1, \bar{n}_2]] = D_2\bar{n}_1-D_1\bar{n}_2$.

27. Да се состави равенката на нормалата, спуштена од точката $M_0(\bar{r}_0)$ на правата:

а) $\bar{r} = \bar{r}_1 + \lambda\bar{a}$;

б) $[\bar{r}, \bar{a}] = \bar{m}$ $(\bar{a}\neq\bar{0}, \bar{a}\bar{m}=0)$;

в) $\bar{r}\bar{n}_1=D_1$, $\bar{r}\bar{n}_2=D_2$.

Решение. а) Нормалата, спуштена од точката $M_0(\bar{r}_0)$ на правата $\bar{r} = \bar{r}_1+\lambda\bar{a}$, ќе ја добиеме како пресек на две рамнини:

-рамнината што минува низ точката $M_0(\bar{r}_0)$ и правата $\bar{r} = \bar{r}_1+\lambda\bar{a}$, чија равенка е $(\bar{r}-\bar{r}_0,\bar{r}_1-\bar{r}_0,\bar{a})=0$ и

-рамнината што минува низ точката $M_0(\bar{r}_0)$ и е нормална на правата $\bar{r} = \bar{r}_1+\lambda\bar{a}$, чија равенка е $(\bar{r}-\bar{r}_0)\bar{a} = 0$.

Значи, равенката на нормалата е $(\bar{r}-\bar{r}_0,\bar{r}_1-\bar{r}_0,\bar{a}) = 0$, $(\bar{r}-\bar{r}_0)\bar{a} = 0$.

28. Да се најде растојанието од точката $M_0(\bar{r}_0)$ до рамнината:

а) $\bar{r}\bar{n} = D$;

б) $\bar{r} = \bar{r}_1 + \lambda\bar{a} + \mu\bar{b}$.

29. Да се најде растојанието од точката $M_0(\bar{r}_0)$ до правата:

а) $\bar{r} = \bar{r}_1 + \lambda\bar{a}$;

б) $[\bar{r},\bar{a}] = \bar{m}$, $\bar{a}\neq\bar{0}$, $\bar{a}\bar{m}=0$;

в) $\bar{r}\bar{n}_1 = D_1$, $\bar{r}\bar{n}_2 = D_2$.

30. Да се најде ортогоналната проекција на точката $M_0(\bar{r}_0)$ врз правата:

а) $[\bar{r},\bar{a}] = \bar{m}$, $\bar{a}\neq\bar{0}$, $\bar{a}\bar{m}=0$;

б) $\bar{r}\bar{n}_1 = D_1$, $\bar{r}\bar{n}_2 = D_2$.

31. Дадени се рамнината $\bar{r}\bar{n} = D$ и правата:

а) $\bar{r} = \bar{r}_0 + \lambda\bar{a}$;

б) $[\bar{r},\bar{a}] = \bar{m}$, $\bar{a}\neq\bar{0}$, $\bar{a}\bar{m}=0$;

в) $\bar{r}\bar{n}_1 = D_1$, $\bar{r}\bar{n}_2 = D_2$.

Да се најдат потребни и доволни услови за правата да: 1) ја прободува рамнината, 2) е паралелна со рамнината, 3) лежи во рамнината.

32. Темињата на еден триаголник се $M_1(\bar{r}_1)$, $M_2(\bar{r}_2)$ и $M_3(\bar{r}_3)$. Да се најде потребен и доволен услов правата $\bar{r} = \bar{r}_0+\lambda\bar{a}$ да ја прободува рамнината на триаголникот.

33. Да се најде прободот на правата со рамнината што минува низ неколинеарните точки $M_1(\bar{r}_1)$, $M_2(\bar{r}_2)$ и $M_3(\bar{r}_3)$.

34. Да се напише равенката за заедничката нормала на разминувачките прави $\bar{r} = \bar{r}_1+\lambda\bar{a}_1$, $\bar{r} = \bar{r}_2+\lambda\bar{a}_2$.

Решение. Векторот $[\bar{a}_1,\bar{a}_2]$ е нормален на двете прави, па ако Σ_i, $i=1,2$, е рамнина низ правата $\bar{r} = \bar{r}_i+\lambda\bar{a}_i$, $i=1,2$, тогаш заедничката нормала ќе биде нивниот пресек. Според тоа, равенката на заедничката нормала ќе биде:

$$(\bar{r}-\bar{r}_1,\bar{a}_1,[\bar{a}_1,\bar{a}_2]) = 0,\ (\bar{r}-\bar{r}_2,\bar{a}_2,[\bar{a}_1,\bar{a}_2]) = 0.$$

35. Да се најде најкусото растојание меѓу разминувачките прави $\bar{r} = \bar{r}_1+\lambda\bar{a}_1$, $\bar{r} = \bar{r}_2+\lambda\bar{a}_2$.

Глава VI

ПЛОШТИНА НА НАСОЧЕН ПАРАЛЕЛОГРАМ

Два неколинеарни вектори $\bar{a}=\overrightarrow{OA}$ и $\bar{b}=\overrightarrow{OB}$ определуваат еден паралелограм OACB. За овој паралелограм ќе велиме дека е насочен, ако двојката вектори $\bar{a},\bar{b}$ е подредена. Еден паралелограм може да биде насочен на два начина: со парот $(\bar{a},\bar{b})$ или со парот $(\bar{b},\bar{a})$. За секоја од овие две насоки велиме дека е спротивна на другата. За парот $(\bar{a},\bar{b})$ ќе велиме дека образува десна двојка вектори, ако од $\bar{a}$ кон $\bar{b}$ „се оди" спротивно од движењето на стрелките кај часовникот.

Нека V е множеството од сите вектори во просторот. Дефинираме пресликување $f:V\times V\to\mathbb{R}$ на следниов начин:

$$f((\bar{a},\bar{b})) = \begin{cases} P_{OACB}, & \text{ако } \bar{a},\bar{b} \text{ е десна двојка вектори} \\ -P_{OACB}, & \text{ако } \bar{a},\bar{b} \text{ е лева двојка вектори} \\ 0, & \text{ако } \bar{a} \text{ и } \bar{b} \text{ се колинеарни,} \end{cases}$$

каде што P_{OACB} е плоштината на паралелограмот OACB. За поедноставно, наместо $f((\bar{a},\bar{b}))$ ќе пишуваме само $(\bar{a},\bar{b})$. Значи, симболот $(\bar{a},\bar{b})$ ќе ни ја означува плоштината на паралелограмот конструиран над векторите $\bar{a}=\overrightarrow{OA}$ и $\bar{b}=\overrightarrow{OB}$, земена со знак + или - во зависност од тоа дали двојката вектори $\bar{a},\bar{b}$ е десна или лева.

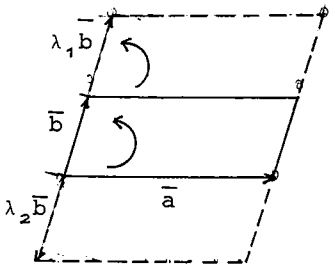
1. Докажи дека

$$(\bar{a},\bar{b}) = -(\bar{b},\bar{a}). \tag{1}$$

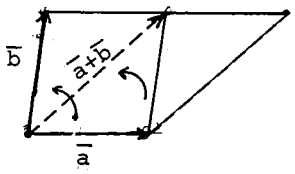
2. Докажи дека за секој реален број λ важат равенствата

$$(\lambda\bar{a},\bar{b}) = (\bar{a},\lambda\bar{b}) = \lambda(\bar{a},\bar{b}). \tag{2}$$

Решение. Дека плоштините $(\bar{a},\lambda\bar{b})$ и $\lambda(\bar{a},\bar{b})$ се еднакви по апсолутна вредност, геометриски е јасно. Но, тие се еднакви и по знак, зашто при $\lambda > 0$ двојките $\bar{a},\lambda\bar{b}$ и $\bar{a},\bar{b}$ образуваат иста двојка вектори, а за $\lambda < 0$ - спротивни двојки вектори. На црт. 1, $\lambda_1 > 0$, а $\lambda_2 < 0$.



Црт. 1



Црт. 2

3. Докажи ги равенствата (црт. 2):

$$(\bar{a},\bar{a}+\bar{b}) = (\bar{a}+\bar{b},\bar{b}) = (\bar{a},\bar{b}). \tag{3}$$

4. Докажи дека за секој реален број λ важи равенството

$$(\bar{a}+\lambda\bar{a},\bar{b}) = (\bar{a},\bar{b}) + (\lambda\bar{a},\bar{b}). \tag{4}$$

Решение. Имаме:

$$(\bar{a}+\lambda\bar{a},\bar{b}) = ((1+\lambda)\bar{a},\bar{b}) = (1+\lambda)(\bar{a},\bar{b}) =$$
$$= (\bar{a},\bar{b}) + \lambda(\bar{a},\bar{b}) = (\bar{a},\bar{b}) + (\lambda\bar{a},\bar{b}).$$

5. Докажи дека за секој реален број λ важат равенствата:

$$(\bar{a}+\lambda\bar{b},\bar{b}) = (\bar{a},\bar{b}+\lambda\bar{a}) = (\bar{a},\bar{b}). \tag{5}$$

Решение. Имаме:

$$(\bar{a}+\lambda\bar{b},\bar{b}) = \frac{1}{\lambda}(\bar{a}+\lambda\bar{b},\lambda\bar{b}) = \frac{1}{\lambda}(\bar{a},\lambda\bar{b}) = (\bar{a},\bar{b}).$$

6. Ако векторите $\bar{a},\bar{b}$ и $\bar{c}$ се компленарни, тогаш:

$$(\bar{a}+\bar{b},\bar{c}) = (\bar{a},\bar{c}) + (\bar{b},\bar{c}),\quad (\bar{a},\bar{b}+\bar{c}) = (\bar{a}+\bar{b}) + (\bar{a},\bar{c}). \tag{6}$$

Решение. Ќе го докажеме само првото равенство.

Ако векторите $\bar{a}$ и $\bar{c}$ не се колинеарни, тогаш постојат еднозначно определени реални броеви λ и μ, така што важи

$$\bar{b} = \lambda\bar{a} + \mu\bar{c}.$$

Сега, имаме:

$$(\bar{a}+\bar{b},\bar{c}) = (\bar{a}+\lambda\bar{a}+\mu\bar{c},\bar{c}) = (\bar{a}+\lambda\bar{a},\bar{c}) =$$
$$= (\bar{a},\bar{c}) + (\lambda\bar{a},\bar{c}) = (\bar{a},\bar{c}) + (\lambda\bar{a}+\mu\bar{c},\bar{c}) =$$
$$= (\bar{a},\bar{c}) + (\bar{b},\bar{c}).$$

Ако, пак, векторите $\bar{a}$ и $\bar{c}$ се колинеарни и ако, на пример, $\bar{a}=\lambda\bar{c}$, тогаш имаме:

$$(\bar{a}+\bar{b},\bar{c}) = (\lambda\bar{c}+\bar{b},\bar{c}) = (\bar{b},\bar{c}) =$$
$$= (\lambda\bar{c},\bar{c}) + (\bar{b},\bar{c}) = (\bar{a},\bar{c}) + (\bar{b},\bar{c}).$$

7. Упрости го симболот:

а) $(2\bar{a},3\bar{b})$; б) $(2\bar{a}+3\bar{b},3\bar{a})$;

в) $(-2\bar{a},3\bar{a}+2\bar{b})$; г) $(\bar{a}+\bar{b},-\bar{a}+2\bar{b})$.

Решение. а) Имаме:

$$(2\bar{a},3\bar{b}) = 2(\bar{a},3\bar{b}) = 2\cdot 3(\bar{a},\bar{b}) = 6(\bar{a},\bar{b}).$$

г) Имаме:

$$(\bar{a}+\bar{b},-\bar{a}+2\bar{b}) = (\bar{a},-\bar{a}+2\bar{b}) + (\bar{b},-\bar{a}+2\bar{b}) =$$
$$= (\bar{a},-\bar{a}) + (\bar{a},2\bar{b}) + (\bar{b},-\bar{a}) + (\bar{b},2\bar{b}) =$$
$$= (\bar{a},2\bar{b}) + (\bar{b},-\bar{a}) =$$
$$= 2(\bar{a},\bar{b}) + (\bar{a},\bar{b}) = 3(\bar{a},\bar{b}).$$

8. Пресметај $(\bar{a}+\bar{b},\bar{a}-\bar{b})$ и резултатот толкувај го геометриски.

Решение. Како во претходната задача, добиваме дека

$$(\bar{a}+\bar{b},\bar{a}-\bar{b}) = -2(\bar{a},\bar{b}). \qquad (7)$$

Геометриски равенството (7) значи дека плоштина на паралелограмот конструиран над векторите $\bar{a}$ и $\bar{b}$ е половина од плоштината на паралелограмот конструиран над неговите дијагонали.

9. Дали од равенството $(\bar{a},\bar{b})=(\bar{a},\bar{c})$ следува $\bar{b}=\bar{c}$?

Решение. Не следува. Навистина, равенството $(\bar{a},\bar{b})=(\bar{a},\bar{c})$ може да го напишеме во обликот $(\bar{a},\bar{b}-\bar{c})=0$, коешто равенство важи и во случајот кога $\bar{b}\neq\bar{c}$, а векторите $\bar{a}$ и $\bar{b}-\bar{c}$ се колинеарни.

10. Ако равенството $(\bar{x},\bar{b})=(\bar{x},\bar{c})$ важи за секој вектор $\bar{x}$, тогаш $\bar{b}=\bar{c}$. Докажи!

Решение. Според претходната задача, векторот $\bar{b}-\bar{c}$ треба да биде колинеарен со секој вектор $\bar{x}$. Тоа е можно само во случајот кога $\bar{b}-\bar{c}=\bar{o}$, т.е. $\bar{b}=\bar{c}$.

11. Каква релација задоволуваат векторите $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$, ако $(\bar{a},\bar{b})=$ $=(\bar{b},\bar{c})=(\bar{c},\bar{a})$?

Решение. Од дадените равенства ги добиваме равенствата

$$(\bar{a}+\bar{b},\bar{c}) = (\bar{b}+\bar{c},\bar{a}) = (\bar{c}+\bar{a},\bar{b}) = 0,$$

од каде што следува дека векторите $\bar{a},\bar{b}$ и $\bar{c}$ се колинеарни.

12. Каква релација задоволуваат реалните броеви λ и μ, ако важи равенството $(\lambda\bar{a}+\mu\bar{b},\mu\bar{a}+\lambda\bar{b})=(\bar{a},\bar{b})$?

Решение. Имаме:

$$(\lambda\bar{a}+\mu\bar{b},\mu\bar{a}+\lambda\bar{b}) = \lambda^2(\bar{a},\bar{b}) + \mu^2(\bar{b},\bar{a}) =$$
$$= (\lambda^2-\mu^2)(\bar{a},\bar{b}).$$

Значи, бараната релација е $\lambda^2-\mu^2=1$.

13. Нека A_1,B_1,C_1 и D_1 ги делат страните AB,BC,CD и DA од паралелограмот $ABCD$ во однос $m:n$. Пресметај ја плоштината P на четириаголникот $A_1B_1C_1D_1$.

Решение. Од условот на задачата (направи цртеж) добиваме дека:

$$\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{C_1C} = \frac{m}{m+n}\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{A_1B} = \overrightarrow{DC_1} = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{AB},$$
$$\overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{D_1D} = \frac{m}{m+n}\overrightarrow{AD},\quad \overrightarrow{B_1C} = \overrightarrow{AD_1} = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{AD}.$$

Сега, имаме:

$$\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{A_1B} + \overrightarrow{BB_1} = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{AB} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{AD},$$
$$\overrightarrow{D_1C_1} = \overrightarrow{D_1D} + \overrightarrow{DC_1} = \frac{m}{m+n}\overrightarrow{AD} + \frac{n}{m+n}\overrightarrow{AB},$$

што значи $\overrightarrow{A_1B_1}=\overrightarrow{D_1C_1}$, т.е. четириаголникот $A_1B_1C_1D_1$ е паралелограм. Следствено

$$P = (\vec{A_1B_1}, \vec{A_1D_1}).$$

Бидејќи

$$\vec{A_1D_1} = \vec{A_1A} + \vec{AD_1} = -\frac{m}{m+n}\vec{AB} + \frac{n}{m+n}\vec{AD},$$

добиваме:

$$P = (\vec{A_1B_1}, \vec{A_1D_1}) = (\frac{n}{m+n}\vec{AB} + \frac{m}{m+n}\vec{AD}, -\frac{m}{m+n}\vec{AB} + \frac{n}{m+n}\vec{AD}) =$$

$$= \frac{n^2}{(m+n)^2}(\vec{AB}, \vec{AD}) - \frac{m^2}{(m+n)^2}(\vec{AD}, \vec{AB}) =$$

$$= \frac{n^2}{(m+n)^2}(\vec{AB}, \vec{AD}) + \frac{m^2}{(m+n)^2}(\vec{AB}, \vec{AD}) =$$

$$= \frac{m^2+n^2}{(m+n)^2}(\vec{AB}, \vec{AD}) = \frac{m^2+n^2}{(m+n)^2}P_{ABCD}.$$

<u>14</u>. Нека A_1 и C_1 ги делат страните AB и CD од паралелограмот ABCD во однос $\lambda=m:n$, а B_1 и D_1 ги делат страните BC и DA во однос $\mu=p:q$. Најди ја плоштината P на четириаголникот $A_1B_1C_1D_1$.

<u>15</u>. Нека A',C' се точки од дијагоналата AC, а B' и D' се точки од дијагоналата BD на паралелограмот ABCD, така што четириаголникот $A'B'C'D'$ е паралелограм и, притоа, $\vec{AC}=\lambda\vec{A'C'}$, $\vec{BD}=\mu\vec{B'D'}$. Најди ја плоштината на паралелограмот $A'B'C'D'$.

<u>Решение</u>. Од условот на задачата имаме

$$\lambda(\vec{A'B'}+\vec{A'D'}) = \vec{AB}+\vec{AD}, \qquad \mu(\vec{A'D'}-\vec{A'B'}) = \vec{AD}-\vec{AB},$$

од каде што добиваме:

$$\vec{A'B'} = \frac{1}{2\lambda\mu}[(\lambda+\mu)\vec{AB} + (\mu-\lambda)\vec{AD}],$$

$$\vec{A'D'} = \frac{1}{2\lambda\mu}[(\mu-\lambda)\vec{AB} + (\lambda+\mu)\vec{AD}].$$

Според тоа,

$$P = (\vec{A'B'}, \vec{A'D'}) = (\frac{1}{2\lambda\mu}[(\lambda+\mu)\vec{AB}+(\mu-\lambda)\vec{AD}], \frac{1}{2\lambda\mu}[(\mu-\lambda)\vec{AB}+(\lambda+\mu)\vec{AD}]) =$$

$$= \frac{1}{4\lambda^2\mu^2}((\lambda+\mu)\vec{AB}+(\mu-\lambda)\vec{AD}, (\mu-\lambda)\vec{AB}+(\lambda+\mu)\vec{AD}) =$$

$$= \frac{(\lambda+\mu)^2}{4\lambda^2\mu^2}(\vec{AB}, \vec{AD}) + \frac{(\mu-\lambda)^2}{4\lambda^2\mu^2}(\vec{AD}, \vec{AB}) =$$

$$= \frac{(\lambda+\mu)^2-(\mu-\lambda)^2}{4\lambda^2\mu^2}(\vec{AB}, \vec{AD}) = \frac{1}{\lambda\mu}P_{ABCD}.$$

16. Ако ABC е триаголник, тогаш

$$2P_{ABC} = (\vec{AB},\vec{AC}). \tag{8}$$

Докажи!

17. Нека точките M и N ги делат страните AB и AC од триаголникот ABC во однос m:n и p:q соодветно. Најди ја плоштината P на четириаголникот MBCN.

Решение. Имаме:

$$\vec{AM} = \frac{m}{m+n}\vec{AB}, \qquad \vec{AN} = \frac{p}{p+q}\vec{AC},$$

па

$$P_{AMN} = \frac{1}{2}(\vec{AM},\vec{AN}) = \frac{mp}{2(m+n)(p+q)}(\vec{AB},\vec{AC}).$$

Сега, за плоштината P на четириаголникот MBCN добиваме:

$$P = P_{ABC}-P_{AMN} = \frac{1}{2}(\vec{AB},\vec{AC}) - \frac{mp}{2(m+n)(p+q)}(\vec{AB},\vec{AC}) =$$

$$= \frac{mq+np+nq}{(m+n)(p+q)} P_{ABC}.$$

18. Нека A′,B′ и C′ се точки од страните (или нивните продолженија) BC,CA и AB од триаголникот ABC, така што векторите $\vec{AA'}$,$\vec{BB'}$ и $\vec{CC'}$ образуваат триаголник. Најди ја плоштината P на тој триаголник.

Решение. Прво ќе побараме потребен и доволен услов што треба да го задоволуваат точките A′,B′ и C′ за векторите $\vec{AA'}$,$\vec{BB'}$ и $\vec{CC'}$ да образуваат триаголник.

За таа цел, нека точките A′,B′ и C′ ги делат страните BC,CA и AB во односи λ,μ и ν соодветно. Тогаш

$$\vec{AA'} = \frac{1}{1+\lambda}(\vec{AB}+\lambda\vec{AC}), \quad \vec{BB'} = \frac{1}{1+\mu}(\vec{BC}+\mu\vec{BA}), \quad \vec{CC'} = \frac{1}{1+\nu}(\vec{CA}+\nu\vec{CB}).$$

Векторите $\vec{AA'}$,$\vec{BB'}$ и $\vec{CC'}$ образуваат триаголник ако и само ако

$$\vec{AA'} + \vec{BB'} + \vec{CC'} = \bar{o},$$

коешто равенство е еквивалентно со равенството

$$\frac{\nu-\lambda}{1+\nu}\vec{AB} + \frac{\lambda-\mu}{1+\mu}\vec{AC} = \bar{o}.$$

Но, векторите $\vec{AB}$ и $\vec{AC}$ не се колинеарни, па $\nu-\lambda=0$ и $\lambda-\mu=0$, од каде што добиваме $\lambda=\mu=\nu$.

Следствено, векторите $\vec{AA'}$,$\vec{BB'}$ и $\vec{CC'}$ образуваат триаголник ако и само ако точките A',B' и C' ги делат страните BC,CA и AB во еден ист однос.

Значи, нека точките A',B' и C' ги делат страните BC,CA и AB во однос $\lambda=m:n$. За плоштината P на триаголник образуван од векторите $\vec{AA'}$,$\vec{BB'}$ и $\vec{CC'}$ ќе имаме:

$$P = \frac{1}{2}(\vec{AA'},\vec{C'C}) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m+n}(n\vec{AB}+m\vec{AC}),\ -\frac{m}{m+n}\vec{AB}+\vec{AC}\right) =$$
$$= \frac{n}{2(m+n)}(\vec{AB},\vec{AC}) - \frac{m^2}{2(m+n)^2}(\vec{AC},\vec{AB}) =$$
$$= \frac{n}{2(m+n)}(\vec{AB},\vec{AC}) + \frac{m^2}{2(m+n)^2}(\vec{AB},\vec{AC}) =$$
$$= \frac{m^2+mn+n^2}{2(m+n)^2}(\vec{AB},\vec{AC}) = \frac{m^2+mn+n^2}{(m+n)^2}P_{ABC}.$$

19. Да се најде плоштината P на триаголникот чии страни се паралелни и еднакви со тежишните линии AA_1, BB_1 и CC_1 на триаголникот ABC.

20. Нека T е тежиштето на триаголникот ABC. Да се најде плоштината P на триаголникот чии страни се паралелни и еднакви со отсечките AT,BT и CT.

21. Нека A',B' и C' ги разделуваат страните BC,CA и AB од триаголникот ABC соодветно во односи λ,μ и ν. Да се најде плоштината на триаголникот $A'B'C'$.

Решение. Прво, добиваме дека:

$$\vec{A'B'} = -\frac{1}{1+\lambda}\vec{AB} + \frac{1-\lambda\mu}{(1+\lambda)(1+\mu)}\vec{AC},$$
$$\vec{A'C'} = \frac{\lambda\nu-1}{(1+\lambda)(1+\mu)}\vec{AB} - \frac{\lambda}{1+\lambda}\vec{AC}.$$

Потоа, имаме

$$2P = (\vec{A'B'},\vec{A'C'}) =$$
$$= \left(-\frac{1}{1+\lambda}\vec{AB} + \frac{1-\lambda\mu}{(1+\lambda)(1+\mu)}\vec{AC},\ \frac{\lambda\nu-1}{(1+\lambda)(1+\nu)}\vec{AB} - \frac{\lambda}{1+\lambda}\vec{AC}\right) =$$

$$= \frac{\lambda}{(1+\lambda)^2}(\vec{AB},\vec{AC}) + \frac{(1-\lambda\mu)(\lambda\nu-1)}{(1+\lambda)^2(1+\mu)(1+\nu)}(\vec{AC},\vec{AB}) =$$

$$= \frac{\lambda(1+\mu)(1+\nu)+(\lambda\mu-1)(\lambda\nu-1)}{(1+\lambda)^2(1+\mu)(1+\nu)}(\vec{AB},\vec{AC}) =$$

$$= \frac{1+\lambda\mu\nu}{(1+\lambda)(1+\mu)(1+\nu)}(\vec{AB},\vec{AC}).$$

Следствено,

$$P = \frac{1+\lambda\mu\nu}{(1+\lambda)(1+\mu)(1+\nu)}P_{ABC}.$$

22. Нека AA_1, BB_1 и CC_1 се тежишните линии во триаголникот ABC. Да се најде плоштината на триаголникот $A_1B_1C_1$.

23. Нека AA_2, BB_2 и CC_2 се симетралите на аглите во триаголникот ABC. Да се најде плоштината на триаголникот $A_2B_2C_2$.

24. Нека AA_3, BB_3 и CC_3 се висините во триаголникот ABC. Да се најде плоштината на триаголникот $A_3B_3C_3$.

Решение. Од III.51, следува дека точките A_3, B_3 и C_3 ги делат страните BC, CA и AB соодветно во односи:

$$\lambda = (c^2+a^2-b^2):(a^2+b^2-c^2),$$

$$\mu = (a^2+b^2-c^2):(b^2+c^2-a^2),$$

$$\nu = (b^2+c^2-a^2):(c^2+a^2-b^2).$$

Сега, според 19, добиваме

$$P = \frac{(a^2+b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)}{4a^2b^2c^2}P_{ABC}.$$

25. Нека точката A′ ја дели страната BC од триаголникот ABC во однос λ. Да се најдат плоштините на триаголниците ABA′ и AA′C.

Решение. Бидејќи

$$\vec{AA'} = \frac{1}{1+\lambda}(\vec{AB}+\lambda\vec{AC}),$$

ќе имаме:

$$P_{ABA'} = \frac{1}{2}(\vec{AB},\vec{AA'}) = \frac{1}{2}(\vec{AB},\frac{1}{1+\lambda}\vec{AB}+\frac{\lambda}{1+\lambda}\vec{AC}) =$$

$$= \frac{\lambda}{2(1+\lambda)}(\vec{AB},\vec{AC}) = \frac{\lambda}{1+\lambda}P_{ABC},$$

$$P_{AA'C} = \frac{1}{1+\lambda}P_{ABC}.$$

26. Нека A_λ и A_μ ја делат страната BC од триаголникот ABC во односи λ и μ. Да се најде плоштината на триаголникот $AA_\lambda A_\mu$.

Решение. Прво, имаме:

$$\vec{AA_\lambda} = \frac{1}{1+\lambda}(\vec{AB}+\lambda\vec{AC}), \qquad \vec{AA_\mu} = \frac{1}{1+\mu}(\vec{AB}+\mu\vec{AC}),$$

а потоа

$$\begin{aligned} P_{AA_\lambda A_\mu} &= \frac{1}{2}(\vec{AA_\lambda},\vec{AA_\mu}) = \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+\lambda}\vec{AB}+\frac{\lambda}{1+\lambda}\vec{AC},\frac{1}{1+\mu}\vec{AB}+\frac{\mu}{1+\mu}\vec{AC}\right) = \\ &= \frac{\mu}{2(1+\lambda)}(\vec{AB},\vec{AC}) - \frac{\lambda}{2(1+\mu)}(\vec{AB},\vec{AC}) = \\ &= \frac{(\mu-\lambda)(1+\lambda+\mu)}{(1+\lambda)(1+\mu)}P_{ABC}. \end{aligned}$$

27. Да се најде плоштината на триаголникот ABA_1, каде што AA_1 е тежишната линија во триаголникот ABC.

28. Да се најде плоштината на триаголникот ABA_2, каде што AA_2 е симетралата на аголот α во триаголникот ABC.

29. Да се најде плоштината на триаголникот ABA_3, каде што AA_3 е висина во триаголникот ABC.

30. Нека O е центарот на опишаната кружница околу триаголникот ABC и нека $A_4=AO\cap BC$. Да се најде плоштината на триаголникот ABA_4.

31. Нека:

-AA_1 е тежишна линија,

-AA_2 е симетралата на аголот α,

-AA_3 е висина и

-O центарот на опишаната кружница, $A_4=AO\cap BC$.

Да се најдат плоштините на триаголниците: AA_1A_2, AA_1A_3, AA_1A_4, AA_2A_3, AA_2A_4 и AA_3A_4.

32. Нека точките A′ и B′ ги делат страните BC и CA од триаголникот ABC соодветно во односи λ и μ и нека $R=AA'\cap BB'$. Да се најдат плоштините на триаголниците ABR, RBA′ и ARB′.

Решение. Според I.90, имаме

$$\vec{AR} = \frac{1}{1+\lambda+\lambda\mu}(\vec{AB}+\lambda\vec{AC}),$$

па

$$P_{ABR} = \frac{1}{2}(\vec{AB},\vec{AR}) = \frac{1}{2}(\vec{AB},\frac{1}{1+\lambda+\lambda\mu}\vec{AB}+\frac{\lambda}{1+\lambda+\lambda\mu}\vec{AC}) =$$

$$= \frac{\lambda}{2(1+\lambda+\lambda\mu)}(\vec{AB},\vec{AC}) = \frac{\lambda}{1+\lambda+\lambda\mu}P_{ABC}.$$

Слично, добиваме дека:

$$P_{RBA'} = \frac{\lambda^2\mu}{(1+\lambda)(1+\lambda+\lambda\mu)}P_{ABC'} \qquad P_{ARB'} = \frac{1}{(1+\mu)(1+\lambda+\lambda\mu)}P_{ABC}.$$

33. Нека T е тежиштето на триаголникот ABC. Да се најде плоштината на триаголникот ABT.

34. Нека V е центарот на впишаната кружница во триаголникот ABC. Да се најде плоштината на триаголникот ABV.

35. Нека H е ортоцентарот во триаголникот ABC. Да се најде плоштината на триаголникот ABH.

36. Нека O е центарот на опишаната кружница околу триаголникот ABC. Да се најде плоштината на триаголникот ABO.

37. Нека T е тежиштето, V е центарот на впишаната кружница, H е ортоцентарот во триаголникот ABC и нека O е центарот на опишаната кружница околу триаголникот ABC. Да се најдат плоштините на триаголниците: ATV,ATH,ATO,AVH,AVO и AHO.

38. Нека A′,B′ и C′ ги делат страните BC,CA и AB од триаголникот ABC соодветно во односи λ,μ и ν. Ако $R=AA'\cap BB'$, $S=BB'\cap CC'$, $T=CC'\cap AA'$, да се најде плоштината на триаголникот RST.

Решение. Според I.91, имаме

$$\vec{RS} = \frac{\lambda\mu\nu-1}{(1+\lambda+\lambda\mu)(1+\mu+\mu\nu)}((1+\mu)\vec{AB}-\vec{AC})$$

$$\vec{RT} = \frac{\lambda\mu\nu-1}{(1+\lambda+\lambda\mu)(1+\nu+\lambda\nu)}(\vec{AB}+\lambda\vec{AC}),$$

$$(\vec{RS},\vec{RT}) = \frac{(\lambda\mu\nu-1)^2}{(1+\lambda+\lambda\mu)(1+\mu+\mu\nu)(1+\nu+\nu\lambda)}(\vec{AB},\vec{AC}),$$

т.е. плоштината на триаголникот RST е

$$P_{RST} = \frac{(\lambda\mu\nu-1)^2}{(1+\lambda+\lambda\mu)(1+\mu+\mu\nu)(1+\nu+\nu\lambda)} P_{ABC}.$$

39. Ако $(O;\bar{e}_1,\bar{e}_2)$ е афин координатен систем во рамнината и ако $\bar{a}=(a_1,a_2)$, $\bar{b}=(b_1,b_2)$, тогаш

$$(\bar{a},\bar{b}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} (\bar{e}_1,\bar{e}_2).$$

Докажи!

40. Даден е триаголникот ABC $/A(a_1,a_2)$, $B(b_1,b_2)$, $C(c_1,c_2)/$. Докажи дека

$$2P_{ABC} = \begin{vmatrix} b_1-a_1 & b_2-a_2 \\ c_1-a_1 & c_2-a_2 \end{vmatrix} (\bar{e}_1,\bar{e}_2).$$

ВТОР ДЕЛ

ОДГОВОРИ И УПАТСТВА

Гл. I АФИНИ ОПЕРАЦИИ СО ВЕКТОРИ

2. Исти. 5. Не. На пример, ако четириаголникот ACDB е рамнокрак трапез со основи AC и BD, тогаш $\overline{AB}=\overline{CD}$, но $\overline{AC}\neq\overline{BD}$. 8. Колинеарни со иста насока се: $\vec{AB}$ и $\vec{DC}$, $\vec{BA}$ и $\vec{CD}$, $\vec{AD}$ и $\vec{BC}$, $\vec{DA}$ и $\vec{CB}$, а со спротивна насока се: $\vec{AB}$ и $\vec{CD}$, $\vec{BA}$ и $\vec{DC}$, $\vec{AD}$ и $\vec{CB}$, $\vec{DA}$ и $\vec{BC}$. 9. а) Не. б) Да. 10. Ако n=2m е парен број, тогаш колинеарни се векторите $\vec{OA}_1$ и $\vec{OA}_{m+1}$, $\vec{OA}_2$ и $\vec{OA}_{m+2}$,...,$\vec{OA}_m$ и $\vec{OA}_{2m}$; ако, пак, n=2m+1 е непарен број, тогаш меѓу векторите $\vec{OA}_i$, i=1,2,...,n, нема колинеарни. 17. а) Насоката на векторот $\bar{a}+\bar{b}$ е иста со насоката на векторите $\bar{a}$ и $\bar{b}$, а должината му е a+b. б) Ако $a \geq b$, тогаш насоката на векторот $\bar{a}+\bar{b}$ е иста со насоката на $\bar{a}$, а должината му е a-b. 18. Може. 20. а) Векторите $\bar{a}$ и $\bar{b}$ се колинеарни со иста насока. б) Векторите $\bar{a}$ и $\bar{b}$ се колинеарни со спротивна насока и, притоа, $a \geq b$. 25. б) $\vec{DB}$. в) $\bar{o}$. г) $\vec{AB}$. 26. $\vec{BC}=\vec{FE}=\vec{AB}+\vec{AF}$, $\vec{CD}=\vec{AF}$, $\vec{ED}=\vec{AB}$. 31. $\langle\bar{a}+\bar{b},\bar{a}\rangle=60^\circ$, $\langle\bar{a}+\bar{b},\bar{b}\rangle=30^\circ$. 32. 150°. 34. И нивниот збир се ротира за истиот насочен агол. 38. $\vec{AB}=\bar{b}-\bar{a}$, $\vec{BC}=-\bar{a}-\bar{b}$, $\vec{CD}=\bar{a}-\bar{b}$, $\vec{DA}=\bar{a}+\bar{b}$. 39. $\vec{CB}=\vec{EF}=-\bar{a}-\bar{b}$, $\vec{DC}=-\bar{b}$, $\vec{DE}=-\bar{a}$. 42. а) Колинеарни со спротивни насоки. б) Колинеарни со исти насоки и, притоа, $a \geq b$. в) Колинеарни со исти насоки и, притоа, $b \geq a$. г) Или $\bar{a}=\bar{o}$, или $\bar{b}=\bar{o}$, или $\bar{a}\neq\bar{o}$, $\bar{b}\neq\bar{o}$, $\bar{a} \perp \bar{b}$. 43. а) $\bar{x}=\bar{b}+\bar{c}$. б) $\bar{x}=\bar{b}-\bar{c}$. 49. а) $\bar{a}$. б) $-2\bar{c}$. 50. б) $\bar{x}=-\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}$. в) $\bar{x}$ е произволен вектор. г) Ако $2\bar{a}+\bar{b}=\bar{o}$, тогаш $\bar{x}$ е произволен вектор, а ако $2\bar{a}+\bar{b}\neq\bar{o}$, тогаш таков вектор $\bar{x}$ не постои. 51. а) $\bar{x}=-\bar{a}+5\bar{b}$, $\bar{y}=\bar{a}-3\bar{b}$. б) $\bar{x}=\bar{b}$, $\bar{y}=-\bar{a}$. в) Ако $\bar{b}\neq3\bar{a}$, тогаш системот нема решение, а ако $\bar{b}=3\bar{a}$, тогаш решение на системот е $\bar{x}=\bar{c}$, $\bar{y}=2\bar{c}-\bar{a}$, каде што $\bar{c}$ е произволен вектор.

г) Решение на системот е $\overline{x}=3\overline{c}$, $\overline{y}=\overline{c}$, каде што $\overline{c}$ е кој било вектор. 52. а) $\overline{x}=\frac{1}{2}(\overline{a}+\overline{b})$, $\overline{y}=\frac{1}{2}(\overline{a}-\overline{b})$. б) $\overline{x}=\overline{a}$, $\overline{y}=\overline{a}-\overline{b}$. в) $\overline{x}=2(\sqrt{2}+1)\overline{b}$, $\overline{y}=(2\sqrt{2}+1)\overline{b}-\overline{a}$. 53. а) $\frac{1}{3}(10\overline{u}+\overline{v})$. б) $\frac{1}{3}(-5\overline{u}+\overline{v})$. в) $\frac{1}{18}(-5\overline{u}+7\overline{v})$. 56. а) Во секој случај. б) Ако и само ако векторите $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ формираат триаголник. 57. $\overline{c}=\overline{p}+2\overline{q}$. 58. а) Да. б) Да, ако и само ако векторите $\overline{p},\overline{q}$ и $\overline{r}$ формираат триаголник. 59. $\overline{d}=-\overline{p}+2\overline{q}-\overline{r}$. 61. $\overrightarrow{OD}=\overline{p}-\overline{q}+\overline{r}$, $\overrightarrow{OS}=\frac{1}{2}(\overline{p}+\overline{r})$. 62. $\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}(\overline{a}-\overline{b})$, $\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}(\overline{a}+\overline{b})$, $\overrightarrow{CD}=\frac{1}{2}(-\overline{a}+\overline{b})$, $\overrightarrow{DA}=-\frac{1}{2}(\overline{a}+\overline{b})$. 71. а) $3\overrightarrow{OM_1}-2\overrightarrow{OA}$. б) $\frac{1}{2}(3\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OA})$. 72. $\overrightarrow{OM_1}=\frac{1}{4}(3\overline{a}+\overline{b})$, $\overrightarrow{OM_2}=\frac{1}{2}(\overline{a}+\overline{b})$, $\overrightarrow{OM_3}=\frac{1}{4}(\overline{a}+3\overline{b})$. 74. $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OC}+\frac{1}{k}(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})$, $\overrightarrow{OS}=\frac{1}{1+k}(\overrightarrow{OA}+k\overrightarrow{OC})$, $\overrightarrow{OP}=\frac{1}{k-1}(k\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})$. 79. а) и б) Линеарно зависни. 81. б) и г) Линеарно независни. 83. Да, важи и обратното. 84. Ако $\overline{a}=\overline{o}$, тогаш равенството важи за кои било x и y; ако, пак, $\overline{a}\neq\overline{o}$, тогаш равенството важи само за x=y. 85. Ако x=0, тогаш равенството важи за кои било вектори $\overline{a}$ и $\overline{b}$; ако, пак, $x\neq 0$, тогаш равенството важи само за $\overline{a}=\overline{b}$. 87. б) Не постојат такви x,y. в) x=3t-1, y=t, каде што t е произволен реален број. 94. $\overline{AP}:\overline{AC}=k:(k+1)$, $\overline{BP}:\overline{BE}=1:(k+1)$. 95. $\overline{ES}:\overline{SD}=1:4$, $\overline{AS}:\overline{SF}=2:3$, $\overline{BT}:\overline{TD}=1:3$, $\overline{ET}:\overline{TF}=1$. 96. $\overline{ES}:\overline{SD}=\lambda\mu:(1+\lambda+\mu+\lambda\mu)$, $\overline{AS}:\overline{SF}=\lambda(1+\mu):(1+\mu+\lambda\mu)$, $\overline{BT}=\overline{TD}=\mu:(1+\mu+\lambda\mu)$, $\overline{ET}:\overline{TF}=(1+\mu):\mu(1+\lambda)$. 117. Постои ако и само ако триаголникот е рамностран. 122. $D(\overline{r}_3+\frac{1}{k}(\overline{r}_1-\overline{r}_2))$, $E(\frac{1}{1+k}(\overline{r}_1+k\overline{r}_3))$, $F(\frac{1}{k-1}(k\overline{r}_3-\overline{r}_2))$. 129. Да; ако A_1 е средина на отсечката BC, тогаш точката M ја дели отсечката AA_1 во однос 2:1. 130. Да; ако T е точката, така што $\overrightarrow{TA}+\overrightarrow{TB}+\overrightarrow{TC}=\overline{o}$ (види ја претходната задача), тогаш точката M е определена со равенството $6\overrightarrow{MT}=\overrightarrow{CA}$. 135. Самата точка. 136. Средината на отсечката AB. 137. Ако точките A,B,C не се коли-

неарни, тогаш центроидот на точките A,B,C е тежиштето на триаголникот ABC; ако, пак, точките A,B,C се колинеарни, тогаш центроидот на точките A,B,C е точката M од задачата 129. 138. Пресекот на дијагоналите. 139. Центарот на правилниот n-аголник. 152. Права паралелна со дадената.

Гл. II КООРДИНАТИ НА ВЕКТОРИ И ТОЧКИ

4. б) (10). в) (25). г) (0). 5. а) $\bar{r}=(1)$. б) $\bar{r}=(-3)$. 6. $x=4k$, $y=-5k$, каде што k е произволен реален број. 9. а) (3). б) (4). в) (-3). г) (4). 11. а) M(3). б) $M(\frac{22}{5})$. в) M(-1). г) M=A. 12. а) M(5). б) M(-1). 15. а) $\frac{3}{2}$. б) $-\frac{4}{3}$. в) $-\frac{1}{2}$. г) $-\frac{5}{2}$. 17. $(ABC)=-\frac{4}{5}$, $(ACB)=-\frac{1}{5}$, $(BAC)=-\frac{5}{4}$, $(BCA)=\frac{1}{4}$, (CAB)=5, (CBA)=4. 21. $(ABR)=\frac{\lambda+\mu+2\lambda\mu}{2+\lambda+\mu}$. 22. а) 3. б) $-\frac{11}{9}$. в) $\frac{33}{40}$. г) -2. 23. $D(\frac{8}{5})$. 34. $\bar{a}+\bar{b}=(2,5)$, $2\bar{a}-3\bar{b}+\bar{c}=(10,-6)$, $3\bar{a}-2\bar{b}+\bar{c}+\bar{d}=(0,0)$. 35. а) $\bar{r}=(\frac{13}{5},\frac{13}{5})$. б) $\bar{r}=(-2,2)$. 37. б) $\bar{c}=2\bar{a}-3\bar{b}$. в) $\bar{c}=-\frac{3}{2}\bar{a}$. 40. а) x=0. б) $x=\pm 1$. г) За ниедно x. 42. A(0,0), B(1,0), C(1,1), D(0,1). 43. A(0,0), B(1,0), C(2,1), D(2,2), E(1,2), F(0,1). 44. A(0,0), B(1,0), $C(\frac{1}{3},1)$, D(0,1), $S(\frac{1}{4},\frac{3}{4})$, $T(0,\frac{3}{2})$. 45. а) $(-a_1,-a_2)$. б) $(a_1,-a_2)$. в) $(-a_1,a_2)$. 47. а) $\vec{AB}=(2,-1)$. б) $\vec{AB}=(-1,-2)$. в) $\vec{AB}=(3,-4)$. г) $\vec{AB}=(-4,-4)$. 48. а) B(2,1). б) B(0,-2). в) B(0,-2). г) B(0,0). 49. б) Не. 50. в) D(-4,-1). в) D(0,1). 52. б) Да. в) Не. 58. а) A'(0,-3), B'(-2,4), C'(2,1). б) A'(3,0), B'(8,2), C'(3,-1). 62. а) $M(-\frac{8}{3},\frac{5}{3})$, б) M(9,5). 63. а) M(-1,5). б) M(0,0). в) M(2,2). г) M(0,-3). 64. A(1,3), B(3,1), C(-1,3). 65. C(5,4), D(10,8). 66. A(0,-2), B(3,7). 68. а) T(2,1). б) T(0,3). в) T(0,0). 69. C(-7,7). 70. A(0,0), B(1,0), C(0,1), $T(\frac{1}{3},\frac{1}{3})$. 71. а) $\bar{a}_3$

б) $\bar{a}_8$. в) $\bar{a}_6$. г) $\bar{a}_3, \bar{a}_5$ и $\bar{a}_8$. д) $\bar{a}_2, \bar{a}_6$ и $\bar{a}_8$, ѓ) $\bar{a}_3, \bar{a}_4, \bar{a}_6$ и $\bar{a}_7$. 74. $2\bar{a}=(4,6,-2)$, $2\bar{a}-\bar{b}=(4,5,-6)$, $\bar{a}-2\bar{b}-2\bar{c}=(0,1,-3)$, $\bar{a}+2\bar{b}+3\bar{c}=(5,5,-2)$, $\bar{a}-\bar{b}-\bar{c}=(1,2,-2)$. 75. б) $\bar{d}=\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}$. в) $\bar{d}=2\bar{a}+\bar{b}-\bar{c}$. 76. б) Да. в) Не. 78. б) Не. в) Да. 79. $x=3t$, $y=4t$, $z=6t$, каде што t е произволен реален број. 80. $x=2$, $y=3$, $z=5$. 82. $A(0,0,0)$, $B(1,0,0)$, $D(0,1,0)$, $C(1,1,0)$, $A_1(0,0,1)$, $B_1(1,0,1)$, $C_1(1,1,1)$, $D_1(0,1,1)$. 83. $A(0,0,0)$, $B(1,0,0)$, $C(0,1,0)$, $D(0,0,1)$. 84. а) $(-a_1,-a_2,-a_3)$. б) $(a_1,a_2,-a_3)$. в) $(-a_1,a_2,a_3)$, $(a_1,-a_2,a_3)$. 86. а) $\vec{AB}=(2,2,1)$. б) $\vec{AB}=(\frac{1}{6},-1,-1)$. в) $\vec{AB}=(5,4,3)$. г) $\vec{AB}=(0,0,1)$. 87. а) $B(3,\frac{3}{2},4)$. б) $B(\frac{7}{2},7,5)$. в) $B(2,4,1)$. г) $B(3,5,4)$. 88. $D(\frac{17}{2},4,0)$. 90. $D(6,5,7)$. 93. а) Да. б) и в) Не. 96. б) Правата AB е паралелна со рамнината CDE. в) Правата AB ја прободува рамнината CDE. 98. а) $M(2,5,1)$. б) $M(0,0,0)$. 99. $B(10,-2,-3)$. 101. $T(\frac{8}{3},\frac{1}{3},2)$. 102. $C(4,-12,4)$. 103. $A(-2,4,-12)$, $B(19,-2,-15)$, $C(1,4,18)$, $D(-2,-2,6)$. 105. $A_1(0,-7,12)$, $A_2(\frac{7}{3},0,\frac{37}{6})$, $A_3(\frac{24}{5},\frac{37}{5},0)$, $\lambda_1=-\frac{1}{2}$, $\lambda_2=\frac{1}{5}$, $\lambda_3=-\frac{7}{2}$.

Гл. III СКАЛАРЕН ПРОИЗВОД

1. $\bar{a}=\bar{0}$ или $a \perp p$. 3. Не; на пример, ако $\bar{a},\bar{b} \perp \bar{p}$ и $\bar{a}\neq\bar{b}$, тогаш $\text{пр}_p\bar{a}=\text{пр}_p\bar{b}=0$, а $\bar{a}\neq\bar{b}$. 6. а) a; б) $-a$. 12. Не. На пример, нека векторите $\bar{b}$ и $\bar{c}$ се заемно нормални и нека $\bar{a}=\bar{b}+\bar{c}$; тогаш $\text{пр}_{(\bar{b}+\bar{c})}\bar{a}=0$, а $\text{пр}_{\bar{b}}\bar{a}+\text{пр}_{\bar{c}}\bar{a}=b+c$. 14. -9, 1, -11. 17. Упатство. Види задача 10. 18. Не; левата страна е вектор колинеарен со $\bar{c}$, а десната страна е вектор колинеарен со $\bar{a}$. 20. Упатство. Види задача 11. 22. Не; на пример, ако $\bar{b}\neq\bar{c}$ и $\bar{a} \perp (\bar{b}-\bar{c})$, тогаш важи равенството $\bar{a}\bar{b}=\bar{a}\bar{c}$. 25. а) Ако и само ако векторите $\bar{a}$ и $\bar{b}$ се

колинеарни и исто насочени. б) Ако и само ако векторите $\bar{a}$ и $\bar{b}$ се колинеарни и спротивно насочени. 27. б) $\sqrt{35+18\sqrt{2}}$. в) $\sqrt{161+12\sqrt{2}}$. 28. б) $\cos\langle\bar{p},\bar{q}\rangle = \frac{1}{6\sqrt{11}}$. в) $\cos\langle\bar{p},\bar{q}\rangle = -\frac{1}{2\sqrt{15}}$. г) $\cos\langle\bar{p},\bar{q}\rangle = \frac{1}{2\sqrt{15}}$. 29. 60°. 30. $\cos\langle\bar{a},\bar{b}\rangle = -\frac{\sqrt{10}}{10}$. 33. $\bar{p}=\bar{o}$. 35. 90°; дијагоналите во секој ромб се заемно нормални. 38. $\vec{CC'} = \frac{1}{c^2}(a^2\vec{CA}+b^2\vec{CB})$. 39. $h = \frac{ab}{c}$. 41. $\cos\phi = \frac{4}{5}$. 43. Упатство. Во равенството (13) од претходната задача, стави O=T и искористи ги равенствата $2t_a=3\overline{TA}$, $2t_b=3\overline{TB}$, $2t_c=3\overline{TC}$. 47. Упатство. Да се искористи резултатот од задачата I.89. 48. $\cos\phi = -\frac{(s-a)(s-b)}{ab}$, $2s=a+b+c$. 56. $\vec{AA_4} = \frac{1}{b^2(c^2+a^2-b^2)+c^2(a^2+b^2-c^2)}\cdot[b^2(c^2+a^2-b^2)\vec{AB}+c^2(a^2+b^2-c^2)\vec{AC}]$. Упатство. Искористи ги равенствата $\vec{A_4A}+\vec{AB}+\vec{BA_4}=\bar{o}$, $\vec{A_4A}=x\vec{OA}$, $\vec{BA_4}=$ $=y(\vec{AC}-\vec{AB})$. 59. $\overline{AA_\lambda}^2 = \frac{1}{(1+\lambda)^2}(\lambda(1+\lambda)b^2+(1+\lambda)c^2-\lambda a^2)$. Упатство. Најди ја должината на векторот $\vec{AA_\lambda} = \frac{1}{1+\lambda}(\vec{AB}+\lambda\vec{AC})$. 60. а) $\overline{PQ}^2 =$ $= \frac{(1-\lambda)^2}{(1+\lambda+\lambda^2)^2}[\lambda(1+\lambda)c^2+(1+\lambda)a^2-\lambda b^2]$, $\overline{QR}^2=\frac{(1-\lambda)^2}{(1+\lambda+\lambda^2)^2}[\lambda(1+\lambda)a^2+(1+\lambda)b^2-\lambda c^2]$, $\overline{RP}^2 = \frac{(1-\lambda)^2}{(1+\lambda+\lambda^2)^2}[\lambda(1+\lambda)b^2+(1+\lambda)c^2-\lambda a^2]$. б) $\overline{AP}^2=\frac{1}{(1+\lambda+\lambda^2)^2}[\lambda(\lambda+1)b^2+$ $+(\lambda+1)c^2-\lambda a^2]$. 63. $\cos\phi = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$. Упатство. Во претходната задача стави $\alpha=90^\circ$. 73. Упатство. Следува од претходната задача. 75. Упатство. Да се искористи претходната задача. 81. $\cos\alpha =$ $\frac{b^2c^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}$, $\cos\beta = \frac{c^2a^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}$, $\cos\gamma = \frac{a^2b^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}$. 82. $\frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2)$. Упатство. Ако O е центарот на опишаната кружница околу пирамидата ABCD и ако $\bar{a}=\vec{DA}$, $\bar{b}=\vec{DB}$, $\bar{c}=\vec{DC}$, тогаш $\vec{DO}=\frac{1}{2}(\bar{a}+\bar{b}+\bar{c})$. 85. Исти агли. 86. б) $\frac{37}{6}$. в) 1. г) 0. 87. б) 10. в) 13. г) $\frac{5}{12}$. 88. б)

90°. в) 30°. г) 0°. 89. $\cos\phi = \frac{2}{\sqrt{13}}$, $\cos\phi = -\frac{2}{\sqrt{29}}$, $\cos\phi = -\frac{5}{\sqrt{26}}$. 91. а) 181. б) (-194,12). 93. а) $\bar{e}=(\frac{4}{5},-\frac{3}{5})$. б) $\bar{e}=(-\frac{3}{5},\frac{4}{5})$. 94. б) 4. в) 13. г) 8. 95. б) $\cos\phi = -\frac{7\sqrt{130}}{130}$. 96. б) Правоаголен со прав агол кај темето B. в) Остроаголен. г) Правоаголен со прав агол кај темето C. 98. $C_1(1,0)$, а таква точка C_2 не постои. 99. $4\sqrt{2}$. 101. $B(\sqrt{3},3-\sqrt{3})$, $C(-2+\sqrt{3},1-\sqrt{3})$, $D(-3,0)$, $E(-2-\sqrt{3},1+\sqrt{3})$, $F(-\sqrt{3},3+\sqrt{3})$ или $B(-\sqrt{3},3+\sqrt{3})$, $C(-2-\sqrt{3},1+\sqrt{3})$, $D(-3,0)$, $E(-2+\sqrt{3},1-\sqrt{3})$, $F(\sqrt{3},3-\sqrt{3})$. 106. $\frac{2\sqrt{10}}{5}$. 107. $M_1(\frac{16}{5},-\frac{12}{5})$. 108. $\frac{27\sqrt{101}}{101}$, $\frac{9\sqrt{2}}{2}$, $\frac{27\sqrt{53}}{53}$. 110. $M_1(-8,-7)$, $M_2(0,-1)$. 111. $M(-\frac{5}{2},-\frac{1}{2})$. 115. а) 7. б) 4. в) 13. г) 2. 116. 6. 117. $C_1(2,0)$, $C_2(0,\frac{2}{7})$. 118. $C(2,2)$. 120. б) -4. в) 4. г) 0. 122. б) 315. в) 1. г) 118. 123. (10,5,10), (10,5,15), (124,-8,77). 124. б) $\cos\phi = -\frac{4}{9}$. в) $\cos\phi = \frac{16}{25}$. г) 0°. 125. $\cos\phi_1 = \frac{6}{11}$, $\cos\phi_2 = -\frac{2}{11}$, $\cos\phi_3 = \frac{9}{11}$. 126. $(2,2,2\sqrt{2})$ и $(2,2,-2\sqrt{2})$. 127. $(\frac{-1+\sqrt{5}}{4},\frac{1}{2},\frac{-1-\sqrt{5}}{4})$ и $(\frac{-1-\sqrt{5}}{4},\frac{1}{2},\frac{-1+\sqrt{5}}{4})$. 128. (3,1,0) и (-3,-1,0). 129. 60°. 131. $(\frac{3}{17},\frac{27}{17},\frac{21}{17})$. 132. б) 5. в) 7. г) 9. 133. $M(0,0,\frac{14}{9})$. 134. $M(10,0,0)$. 135. 90°. 136. $(3k,4k,0)$, $k\in\mathbb{R}^*$. 138. $M(-1,2,4)$. 139. $3\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{14}$. 140. $t_a = \frac{\sqrt{14}}{2}$, $s_a = \frac{5\sqrt{6}}{8}$. 141. $\cos\alpha = \frac{1}{9}$, $\cos\beta=\cos\gamma = \frac{2}{3}$. 143. (5,11,-3). 145. $\frac{3}{4}$. 146. $M_1(\frac{81}{7},\frac{75}{7},-\frac{120}{7})$. 147. а) $\frac{24\sqrt{91}}{91}$. б) $\frac{\sqrt{322}}{322}$. 149. $M'(\frac{55}{14},-\frac{1}{7},\frac{3}{14})$. 150. $\frac{\sqrt{129}}{3}$. 151. $\sqrt{21}$. 152. $M_1(\frac{51}{7},\frac{34}{7},-\frac{10}{7})$. 153. $M_1(2,-5,7)$. 154. $h_a=\sqrt{14}$, $h_b = \frac{2\sqrt{595}}{17}$, $h_c=\sqrt{20}$. 159. а) $\frac{6}{7}$. б) $\frac{9\sqrt{230}}{115}$. 160. $\frac{\sqrt{6}}{6}$.

Гл. IV ВЕКТОРСКИ ПРОИЗВОД

1. б) $[\bar{a},\bar{b}]=-\bar{c}$, $[\bar{b},\bar{c}]=-\bar{a}$, $[\bar{c},\bar{a}]=-\bar{b}$. 2. Ако и само ако векторите $\bar{a}$ и $\bar{b}$ се заемно нормални. 13. $\bar{a}^2\bar{b}^2$. 14. Не важат. 17. $2[\bar{b},\bar{a}]$. Геометриско значење на овој резултат е дека плоштината на паралелограмот, конструиран над дијагоналите од паралелограмот ABCD, е двапати поголема од плоштината на паралелограмот ABCD. 19. Обратното не важи. На пример, ако $\bar{a}=\bar{b}=\bar{c}\neq\bar{o}$, тогаш $[\bar{a},\bar{b}]=[\bar{b},\bar{c}]=[\bar{c},\bar{a}]$, но $\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}=3\bar{a}\neq\bar{o}$. Но, ако кои било два од векторите $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ не се колинеарни, тогаш од $[\bar{a},\bar{b}]=[\bar{b},\bar{c}]=[\bar{c},\bar{a}]$ следува $\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}=\bar{o}$. 24. Упатство. Стави $\vec{BC}=\vec{AC}-\vec{AB}$, $\vec{BD}=\vec{AD}-\vec{AB}$. 27. Упатство. Докажи дека мешаниот производ на трите вектори е нула. 29. $d=\dfrac{|[\bar{r}_1-\bar{r}_2,\bar{r}_3-\bar{r}_2]|}{|\bar{r}_3-\bar{r}_2|}$. 33. $m^3:n^3$. 35. $d=\dfrac{|(\bar{r}_1-\bar{r}_2,\bar{r}_3-\bar{r}_2,\bar{r}_4-\bar{r}_2)|}{|[\bar{r}_3-\bar{r}_2,\bar{r}_4-\bar{r}_2]|}$. Упатство. Растојанието е, всушност, висината на паралелопипедот, конструиран над векторите $\vec{M_2M_1}$, $\vec{M_2M_3}$ и $\vec{M_2M_4}$, спуштена од темето M_1. 40. $\bar{b}_1=(-\frac{2}{3},\frac{4}{3},-1)$, $\bar{b}_2=(\frac{1}{3},-\frac{1}{3},1)$, $\bar{b}_3=(\frac{2}{3},-\frac{1}{3},1)$. Упатство. Види задача 26. 43. б) $\frac{1}{2}\sqrt{362}$. в) $\frac{1}{2}\sqrt{1326}$. 46. $M(\frac{5}{4},0,0)$. 48. б) $\frac{135}{6}$. 49. $\frac{17\sqrt{381}}{381}$. 50. $(0,0,21)$. 65. а) $(\bar{a},\bar{b},\bar{d})\bar{c}-(\bar{c}\bar{d})[\bar{a},\bar{b}]$. б) $(\bar{a},\bar{b},\bar{c})^4$. в) 0. г) $2(\bar{a},\bar{b},\bar{c})$.

Гл. V ВЕКТОРСКИ РАВЕНКИ НА РАМНИНИ И ПРАВИ

10. $(\bar{r}-\bar{r}_0,\bar{n}_1,\bar{n}_2)=0$. 12. $(\bar{r}-\bar{r}_0,\bar{r}_1-\bar{r}_0,\bar{a}_1)=0$, $(\bar{r}-\bar{r}_0,\bar{r}_2-\bar{r}_0,\bar{a}_2)=0$. 15. $2\bar{r}_1-\bar{r}_0+2\dfrac{(\bar{r}_0-\bar{r}_1)\bar{a}}{a^2}\bar{a}$. 16. а) $\bar{r}_0+\dfrac{D-\bar{r}_0\bar{n}}{n^2}\bar{n}$; б) $\bar{r}_0+\dfrac{(\bar{r}_1-\bar{r}_0,\bar{a},\bar{b})}{[\bar{a},\bar{b}]^2}[\bar{a},\bar{b}]$. 17. а) $\bar{r}_0+2\dfrac{D-\bar{r}_0\bar{n}}{n^2}\bar{n}$; б) $\bar{r}_0+2\dfrac{(\bar{r}_1-\bar{r}_0,\bar{a},\bar{b})}{[\bar{a},\bar{b}]^2}[\bar{a},\bar{b}]$. 19. $D_1(\bar{n}_2,\bar{n}_3,\bar{n}_4)-D_2(\bar{n}_3,\bar{n}_4,\bar{n}_1)+D_3(\bar{n}_4,\bar{n}_1,\bar{n}_2)-D_4(\bar{n}_1,\bar{n}_2,\bar{n}_3)=0$. 21.

$\bar{r} = \frac{[\bar{a},\bar{m}]}{a^2} + \bar{a}$; види задача 7. 22. $\frac{[\bar{a},\bar{m}]}{a^2} + \frac{a^2D-(\bar{a},\bar{m},\bar{n})}{a^2(\bar{a}\bar{n})}\bar{a}$.

23. $(\bar{r}-\bar{r}_0,\bar{a},\bar{n})=0$. 24. $(r - \frac{[\bar{a},\bar{m}]}{a^2},\bar{a},\bar{n})=0$.

26. б) $\bar{r} = \frac{[D_2\bar{n}_1-D_1\bar{n}_2,[\bar{n}_1,\bar{n}_2]]}{[\bar{n}_1,\bar{n}_2]^2} + \lambda[\bar{n}_1,\bar{n}_2]$. 27. б) $(\bar{r}-\bar{r}_0)\bar{a}=0$, $\bar{r}([\bar{r}_0,\bar{a}]-\bar{m})+\bar{r}_0\bar{m}=0$. в) $(\bar{r}-\bar{r}_0,\bar{n}_1,\bar{n}_2)=0$, $(\bar{r}\bar{n}_1-D_1)(\bar{r}_0\bar{n}_2-D_2)-$ $-(\bar{r}\bar{n}_2-D_2)(\bar{r}_0\bar{n}_1-D_1)=0$. 28. а) $d = \frac{|\bar{n}\bar{r}_0-D|}{|\bar{n}|}$. б) $d = \frac{|(\bar{r}_0-\bar{r}_1,\bar{a},\bar{b})|}{|[\bar{a},\bar{b}]|}$.

29. а) $d = \frac{|[\bar{r}_0-\bar{r}_1,\bar{a}]|}{a}$. б) $d = \frac{|[a^2\bar{r}_0-[\bar{a},\bar{m}],\bar{a}]|}{a^3}$. в) $d =$ $= \frac{|D_2\bar{n}_1-D_1\bar{n}_2-[\bar{r}_0,[\bar{n}_1,\bar{n}_2]]|}{|[\bar{n}_1,\bar{n}_2]|}$. 30. а) $\frac{[\bar{a},\bar{m}]+(\bar{a}\bar{r}_0)\bar{a}}{a^2}$.

б) $\frac{D_1[\bar{n}_2,[\bar{n}_1,\bar{n}_2]]-D_2[\bar{n}_1,[\bar{n}_1,\bar{n}_2]]+(\bar{r}_0,\bar{n}_1,\bar{n}_2)[\bar{n}_1,\bar{n}_2]}{[\bar{n}_1,\bar{n}_2]^2}$. 31. а)

1) $\bar{a}\bar{n}\neq0$, 2) $\bar{a}\bar{n}=0$, 3) $\bar{a}\bar{n}=0$ и $\bar{r}_0\bar{n}=D$. б) 1) $\bar{a}\bar{n}\neq0$, 2) $\bar{a}\bar{n}=0$, 3) $\bar{a}\bar{n}=0$ и $(\bar{a},\bar{n},\bar{m})+\bar{a}^2D=0$. в) 1) $(\bar{n},\bar{n}_1,\bar{n}_2)\neq0$, 2) $(\bar{n},\bar{n}_1,\bar{n}_2)=0$, 3) $(\bar{n},\bar{n}_1,\bar{n}_2)=0$ и $(D_2[\bar{n},\bar{n}_1]-D_1[\bar{n},\bar{n}_2])[\bar{n}_1,\bar{n}_2]+[\bar{n}_1,\bar{n}_2]^2D=0$. 32. $(\bar{r}_1,\bar{r}_2,\bar{a})+(\bar{r}_2,\bar{r}_3,\bar{a})+$ $+(\bar{r}_3,\bar{r}_1,\bar{a})\neq0$. 33. $\bar{r}_0 - \frac{(\bar{r}_0,\bar{r}_1,\bar{r}_2)+(\bar{r}_0,\bar{r}_2,\bar{r}_3)+(\bar{r}_0,\bar{r}_3,\bar{r}_1)-(\bar{r}_1,\bar{r}_2,\bar{r}_3)}{a([\bar{r}_1,\bar{r}_2]+[\bar{r}_2,\bar{r}_3]+[\bar{r}_3,\bar{r}_1])}$.

35. $d = \frac{|(\bar{r}_2-\bar{r}_1,\bar{a}_1,\bar{a}_2)|}{|[\bar{a}_1,\bar{a}_2]|}$.

Гл. VI ПЛОШТИНА НА НАСОЧЕН ПАРАЛЕЛОГРАМ

14. $P = \frac{mp+nq}{(m+n)(p+q)}P_{ABCD}$. Упатство. Докажи, прво, дека четириаголникот $A_1B_1C_1D_1$ е паралелограм. 19. $P = \frac{3}{8}P_{ABC}$. 20. $P = \frac{1}{3}P_{ABC}$.

22. $\frac{1}{4}P_{ABC}$. 23. $\frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}P_{ABC}$. 27. $\frac{1}{2}P_{ABC}$. 28. $\frac{c}{b+c}P_{ABC}$.

29. $\frac{c^2+a^2-b^2}{2a^2}P_{ABC}$. 30. $\frac{c^2(a^2+b^2-c^2)}{b^2(a^2+c^2-b^2)+c^2(a^2+b^2-c^2)}P_{ABC}$.

31. $P_{AA_1A_2} = \frac{c-b}{2(b+c)}P_{ABC}$, $P_{AA_1A_3} = \frac{c^2-b^2}{2a^2}P_{ABC}$, $P_{AA_1A_4} =$

$$= \frac{(b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)}{2[b^2(c^2+a^2-b^2)+c^2(a^2+b^2-c^2)]}P_{ABC},\quad P_{AA_2A_3} = \frac{2s(s-a)(s-b)}{a^2(b+c)}P_{ABC},$$

$$P_{AA_2A_4} = \frac{4bcs(s-a)(s-c)}{(b+c)[b^2(c^2+a^2-b^2)+c^2(a^2+b^2-c^2)]}P_{ABC},\quad P_{AA_3A_4} =$$

$$= \frac{c^2(a^2+b^2-c^2)^2-b^2(c^2+a^2-b^2)^2}{2a^2[b^2(c^2+a^2-b^2)+c^2(a^2+b^2-c^2)]}P_{ABC}.$$

33. $\frac{1}{3}P_{ABC}$. 34. $\frac{c}{a+b+c}P_{ABC}$.

35. $\frac{(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)}{2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-a^4-b^4-c^4}P_{ABC}$. 36. $\frac{c^2(a^2+b^2-c^2}{2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-a^4-b^4-c^4}P_{ABC}$.

37. $P_{ATV} = \frac{c-b}{3(a+b+c)}P_{ABC},\quad P_{ATH} = \frac{2(c^2-b^2)b^2+c^2-a^2)}{3[2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-a^4-b^4-c^4]}P_{ABC},$

$$P_{ATO} = \frac{(b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)}{3[2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-a^4-b^4-c^4]}P_{ABC},\quad P_{AVH} =$$

$$= \frac{2(c-b)(s-a)(b^2+c^2-a^2)}{2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-a^4-b^4-c^4}P_{ABC},\quad P_{AVO} = \frac{2bc(b-c)(s-a)}{2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-a^4-b^4-c^4}P_{ABC},$$

$$P_{AHO} = \frac{16(b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)}{[2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-a^4-b^4-c^4]^2}P^3_{ABC}.$$