

ОЛИМПИЈАДЕ И ГЕОМЕТРИЈА

В. М. Тихомиров, Москва¹

1. НЕКОЛИКО РЕЧИ О ИСТОРИЈИ ГЕОМЕТРИЈЕ И ОЛИМПИЈАДА

Шта мислите, шта је настало раније – математика или олимпијаде?

Рекло би се, математика, будући да се задаци из аритметике и геометријске формуле могу наћи и у египатским папирусима, који су написани много пре настанка велике античке цивилизације. Међутим, у тим древним текстовима није било основне компоненте по којој се математика разликује од осталих наука – није било доказа. А без доказа – да ли је то уопште математика?

Када су се појавили први докази? То је било тако давно, да се истина расплићава у магли времена. Легенда упорно указује познатом мудрацу Талесу част да буде први математичар који је користио доказе. При том се са изненађујућом тачношћу дају године његовог рођења и смрти: 625.–527. године пре нове ере, док се времена у којима су живели Питагора и Еуклид одређују приближно.

С друге стране, прве Олимпијаде – празници одржавани у Зевсову част, када су се предивни младићи такмичили у спорту и уметности, појавиле су се пре Талесовог рођења: прва Олимпијада је одржана 776. године пре нове ере (и опет, тачан датум!).

Сада је умесно поставити питање о настанку првих математичких Олимпијада. Први математички конкурс за ученике завршне године лицеја одржан је у Румунији 1889. године, док се прави математички олимпијски покрет родио у Будимпешти, 1894. године, када је Мађарско физичко-математичко друштво донело одлуку о организацији такмичења за матуранте гимназија. Временом су ова такмичења постала традиционална. На њима су остварили изузетне резултате многи ученици, који су касније постали водећи математичари овог века.

У СССР-у је прва математичка олимпијада одржана у Лењинграду 1934. године, а прва московска градска математичка олимпијада је организована 1935. године. Олимпијаде се одржавају сваке године, са изузетком 1942. и 1943. године, када нису одржане због ратног стања.

Од 1961. године се организује Свесавезна олимпијада. (Међународне математичке олимпијаде се одржавају од 1959. године.)

Таква је историја олимпијада. Остало је да се каже неколико речи о историји геометрије, будући да је математика (како се показало) почела са геометријом.

¹Предавање које је В. М. Тихомиров одржао учесницима 56. московске математичке олимпијаде 1993. године; сматрамо, међутим, да чланак није изгубио ништа од своје актуелности.

У почетном периоду геометријом се бавило много математичара, али се обично више од осталих помињу (већ споменути) Талес, Питагора и Еуклид.

Речено је да се Талесу приписују први докази. Он је, између осталог, доказао да су унакрсни углови једнаки, да су у једнакокром троуглу углови на основици једнаки, да је угао над пречником прав и познату, његовим именом названу теорему која се налази у готово свим уџбеницима – теорему о сличности.

Сматра се да је Питагора био први творац научне школе. У тој школи је откривена теорема, свима знана као Питагорина теорема.

Еуклид је написао први уџбеник из геометрије, где је развио оно што називамо аксиоматски метод, када све произилази из основних, недефинисаних појмова, затим се њихова својства описују аксиомама, а остало се изводи строго логичким путем.

Потом је, корак по корак, математика достигла висине које чине украс опште културе човечанства. Основе, дате у делима Талеса, Питагоре, Еуклида и других оснивача наше науке, сачувале су свој значај до данашњих дана. Њихове теореме се могу искористити у решавању геометријских задатака са 56. московске математичке олимпијаде. Но, пре него што пређемо на решавање тих задатака, направимо преглед неких основних геометријских теорема античког доба, као и њихових последица.

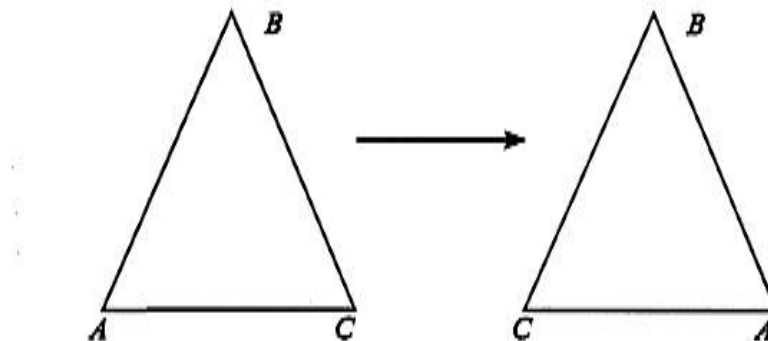
2. ТЕОРЕМЕ ТАЛЕСА, ПИТАГОРЕ И ЕУКЛИДА

Докажимо све споменуте теореме; оне су прилично једноставне, али и лепе.

Теорема 1. (Талес, прва књига "Елемената", тврђење 5) У једнакокром троуглу, углови на основици су једнаки.

Докажимо ову теорему по Луису Керолу, изванредном приповедачу, свима познатом по његовој "Алиси из земље чуда". (Међутим, мало коме је познато да је он био математичар.)

Доказ Керола се изводи помоћу – маказа. Нека је дат једнакокром троугао ABC , при чему је $AB = BC$ (слика 1).



Сл. 1

Нацртајмо тај троугао на листу папира и изрежимо га. Окренимо га на другу страну и покушајмо да запушимо насталу рупу. То нам полази за руком, зар не?

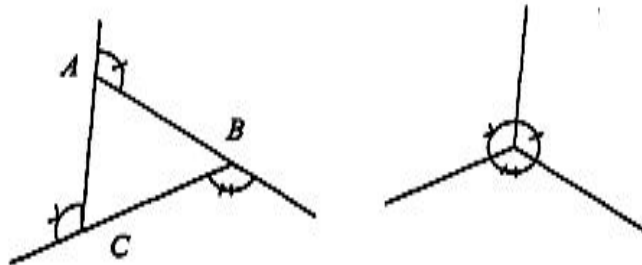
Страница BC ће се наћи на месту "бивше" странице AB , тачка C ће се покlopити са "бившом" тачком A , аналогно, тачка A ће се на изрезаном троуглу покlopити са "бившом" тачком C . На тај начин, сва темена бившег и преврнутог троугла се поклапају, тј. преврнути троугао попуњава насталу рупу, што значи да угао C заузима место угла A . Тада је угао C једнак углу A и теорема је доказана.

Сада ћемо доказати још једну фундаменталну теорему. Сматра се да је она била позната Питагори. (Наравно, то није "она" теорема).

Теорема 2. (Питагора, прва књига "Елемената", тврђење 32) *Збир углова у троуглу износи два права угла.*

Овај резултат ћемо такође доказати уз помоћ маказа, с тим да ће нам бити потребан и шестар.

Доказ. Нека је дат троугао ABC . Продужимо страницу AB преко темена B , страницу BC преко темена C и страницу CA преко темена A .



Сл. 2

Узмимо произвољан отвор шестара и нацртајмо три угла код темена A , B и C (слика 2). Изрежимо та три угла и преместимо угао са центром у B дуж странице AB , тако да се тачка B покlopи са тачком A . Потом исто урадимо са углом код темена C , преносећи га дуж странице CA , тако да се и тачка C покlopи са тачком A . На основу познатог Еуклидовог V постулата, кроз тачку A се може поставити тачно једна права паралелна са BC , па ће сва три угла бити постављена један поред другог, образујући пун круг. Тада три спољашња угла код темена A , B и C дају у збиру $4d$, где је d величина правог угла. Ако се њима дода тражена сума унутрашњих углова, добиће се три равна угла, тј. $6d$. Дакле, $\angle A + \angle B + \angle C = 2d$, што је и требало доказати.

Последица. (Теорема о спољашњем углу) *Величина спољашњег угла једнака је збиру величина два несуседна унутрашња угла троугла.*

Спољашњи угао код темена C са углом код темена C даје раван угао, а угао код темена C са угловима код темена A и B даје такође раван угао, тј. збир углова код темена A и B једнак је спољашњем углу код темена C .

Последња теорема се налази у Еуклидовим "Елементима" и доказаћемо је, такође, помоћу маказа.

Теорема 3. (Еуклид, прва књига "Елемената", тврђење 4) *Ако две странице једног троугла имају исте дужине као и две странице другог*

троугла и ако су углови одређени тим странама такође једнаки, онда су та два троугла подударна.

У ствари, то је познати СУС став о подударности троуглова.

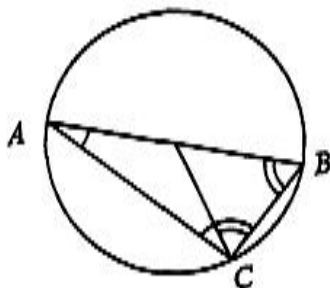
Доказ се сада намеће. Потребно је изрезати троугао $A_1B_1C_1$, поклопити A_1 са A , A_1B_1 са AB и тада ће се (због подударности углова) A_1C_1 поклопити са AC . Како се сва темена поклапају, троуглови су подударни и теорема је доказана.

Све три наведене теореме су доказане на начин који се не користи у уџбеницима, али и сам Еуклид није расуђивао тако (можда чак и мање строго). Обично се све изводи из аксиома, али за исправно извођење је потребна велика претходна припрема, која је прилично неинтересантна. Уместо тога, позвали смо се на здрав разум и било је прилично убедљиво, зар не? Али, оно што је интересно јесте чињеница да смо успут досегли такав ниво да нам маказе више нису неопходне да бисмо напредовали даље у математици. Допољне су нам управо доказане теореме и апсолутно тачни закони логике. Сада смо у могућности да решимо не само наше олимпијске задатке, већ смо спремни да решимо произвољан задатак из геометрије, с тим да претходно научимо и сличност. Но, пре него што пређемо на "олимпијску" геометрију, извешћемо (али овога пута апсолутно строго, да ниједан љубитељ строгости неће моћи ништа да нам замери) неколико последица наведених теорема.

Последица 1. (Талес, трећа књига "Елемената", тврђење 31) Угао над пречником је прав.

Доказ ове последице се ослања на два већ доказана тврђења: теорему 1 и последицу теореме 2.

Нека је угао C – угао над пречником AB , а O центар кружнице. Спојимо O са C (слика 3).



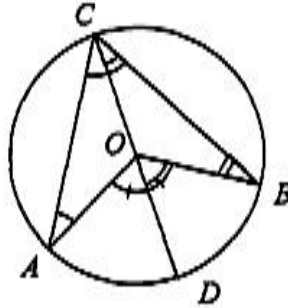
Сл. 3

$$\angle COB = 2\angle ACO, \angle COA = 2\angle BCO \Rightarrow \angle C = \angle ACO + \angle BCO = \frac{1}{2}\angle AOB = \frac{2d}{2} = d.$$

Тада је $\angle C = \angle ACO + \angle OCB$. На основу теореме 1, $\angle ACO = \angle CAO$, а $\angle OCB = \angle CBO$. При томе је, на основу теореме 2, $\angle ACO + \angle CAO = \angle COB$, а $\angle OCB + \angle CBO = \angle COA$. Међутим, углови COB и COA су упоредни, па је њихов збир једнак $2d$. Значи, $\angle C$ је половина тог угла, тј. d .

Последица 2. (Теорема о периферијском углу) Нека је угао C – угао над тетивом AB . Тада је он два пута мањи од централног угла AOB .

Ово тврђење се доказује аналогно последици 1, па ћемо се само позвати на цртеж (слика 4).



Сл. 4

$$\angle AOD = 2\angle ACD, \angle BOD = 2\angle DCB \Rightarrow \angle ACB = \frac{1}{2}\angle AOB.$$

Размислите сада о следећем: Нека су дата два троугла ABC и $A'BC$, такви да је $\angle A = \angle A'$. Тада тачке A, A', B и C леже на истој кружности. Ово тврђење се природно назива *обратна теорема о периферијском углу*.

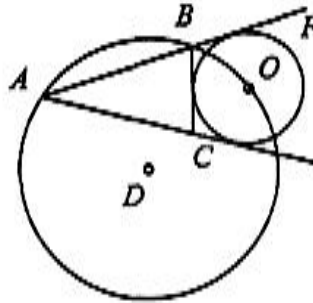
Пре него што наставимо наш поход кроз геометрију, проверимо да ли су нам досад стечена знања довољна да решимо геометријске задатке 56. олимпијаде за осми, девети и десети разред.

3. ГЕОМЕТРИЈСКА РЕШЕЊА ОЛИМПИЈСКИХ ЗАДАТАКА

У осмом разреду је био предложен следећи задатак (аутора И. Ф. Акулича):

Кружница са центром D пролази кроз тачке A, B и центар O споља уписане кружнице троугла ABC , која додирује страницу BC и продужетке страница AB и AC . Доказати да се тачке A, B, C и D налазе на истој кружности.

Решење. Означимо са $\angle D = \angle ADB$. Тада имамо (слика 5) :



Сл. 5

на основу теореме о периферијском углу

$$\angle AOB = \frac{1}{2} \angle D; \quad (i)$$

AO је симетрала угла, па је

$$\angle BAO = \frac{1}{2} \angle A; \quad (ii)$$

на основу теореме о збиру углова у троуглу и из (i) – (ii)

$$\angle FBO = \frac{1}{2} (\angle D + \angle A); \quad (iii)$$

BO је симетрала угла, па је

$$\angle FBO = \frac{1}{2} \angle FBC; \quad (iv)$$

и, на крају, из теореме о спољашњем углу

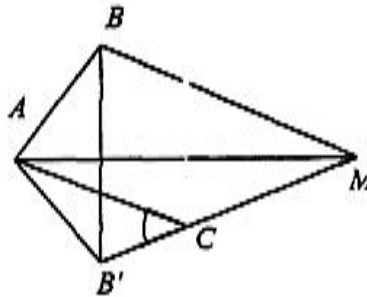
$$\angle FBC = \angle A + \angle C, \quad (v)$$

па је (из (iii) – (v)), $\angle D = \angle C$, тј. по обрнутој теорему о периферијском углу, тачке A , B , C и D леже на истој кружности. Задатак је решен.

А ево и задатка за 9. разред (аутора И. Ф. Шаригина):

Дат је конвексан четвороугао $ABMC$, у којем је $AB = BC$, $\angle BAM = 30^\circ$, $\angle ACM = 150^\circ$. Доказати да је AM симетрала угла BMC .

Решење. Тачку B пресликамо симетрично у односу на AM (слика 6).



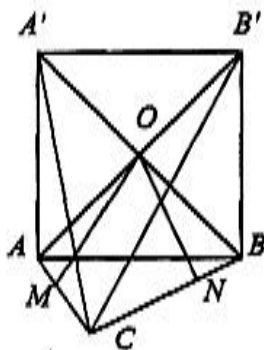
Сл. 6

Из подударности троуглова добијамо $|AB| = |AB'|$ и $\angle BAB' = 60^\circ$. Дакле, троугао ABV' је једнакостраничан и A , B' и C леже на истој кружници са центром у тачки B . На основу теореме о периферијском углу следи $\angle ACB' = 30^\circ$, тј. B' , M и C леже на истој правој, симетричној MB у односу на MA , па је MA симетрала угла BMC . Задатак је решен.

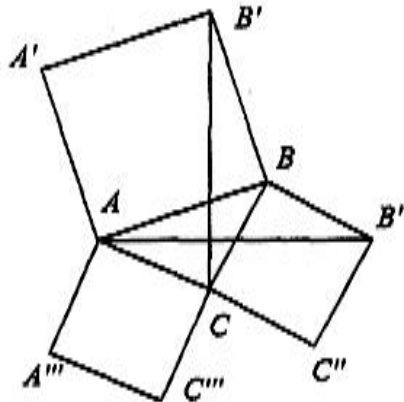
И, на крају, задатак за 10. разред, чији је аутор такође И. Ф. Шаригин:

Над страницом AB троугла ABC конструиран је са спољашње стране квадрат са центром O . Нека су тачке M и N средишта страница AC и BC , редом, а дужине тих страница b и a , редом. Наћи максималну вредност збира $OM + ON$, када се угао ACB мења.

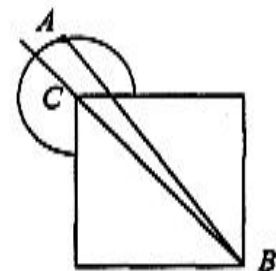
Решење. За решење овог задатка нам је неопходан један резултат који нисмо доказали у претходном разматрању, иако је прилично једноставан, а познат је као теорема о средњој линији. По тој теорему је $OM = \frac{1}{2}CB'$, а $ON = \frac{1}{2}CA'$ (слика 7(а)).



Сл. 7(а)



Сл. 7(б)



Сл. 7(в)

Конструишимо над страницама CB и AC спољашње квадрате $CBV''C''$ и $ACC'''B'''$. Спојимо A са B'' (слика 7(б)). Из $AB = BV'$, $CB = BV''$, $\angle ABV'' = \angle CBV'$ следи подударност троуглова $B'CV'$ и ABV'' . Следи да је дужина странице CB' максимална када је максимална дужина странице $B''A$, а она је мак-

симална када је $\angle ACB$ једнак 135° (слика 7(в)). За CA' добијамо исти резултат, разматрањем троуглова ABA''' и ACA' . Дакле, максимум се достиже за $\angle ACB = 135^\circ$ и износи $\frac{1+\sqrt{2}}{2}(a+b)$.

4. НАСТАВАК ГЕОМЕТРИЈСКОГ ОПИСМЕЊАВАЊА И АНАЛИТИЧКА РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ЗА 9. И 10. РАЗРЕД

Досад смо све задатке решавали геометријски. Решења су била изузетно кратка (проверите: свако се састојало из највише седам импликација). Ипак, није лако наћи таква решења. Потврду за то је пружила 56. олимпијада. Задатак за 8. разред није решио нико, задатак за 9. разред решио је само један ученик (али не геометријски, већ аналитички), док је један ученик "скоро" решио задатак, о чему ће бити речи касније. Задатак за 10. разред решило је мање од 10 ученика, а и међу тим решењима је било свега једно геометријско.

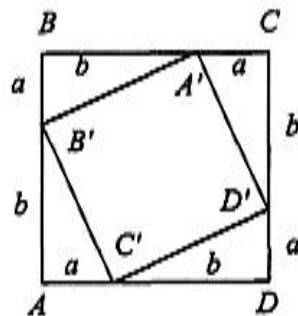
Овде желим да претресем једну важну тезу: Сви геометријски задаци се могу решити чисто алгебарски, без цртежа и додатних конструкција, односно, стандардно. При томе, у $2/3$ случајева, аналитичка решења су суштински једноставнија од геометријских. Ову тезу желим да илуструјем на примерима задатака за 9. и 10. разред. Но, пре тога морамо још понешто научити.

Почнимо дакле, од најпознатије теореме у геометрији – Питагорине теореме.

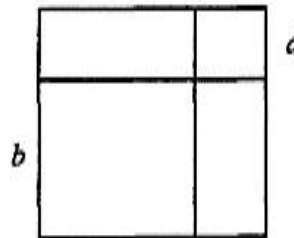
Теорема 4. Квадрат над хипотенузом једнак је збиру квадрата над катетама.

Докажимо и ову теорему помоћу маказа.

Нека су катете нашег троугла једнаке a и b . Конструирајмо квадрат $ABCD$ са страницом $a+b$ и нацртајмо у њему четири троугла, као што је приказано на слици 8 (а).



Сл. 8(а)



Сл. 8(б)

На основу теореме о подударности троуглова, троуглови $A'B'B'$, $B'AC'$, $C'DD'$ и $D'CA'$ су подударни нашем троуглу, па и међусобно. Из теореме о збиру углова у троуглу, следи да су сви углови четвороугла $A'B'C'D'$ једнаки d , па је у питању квадрат површине c^2 , где је c дужина хипотенузе. Изрежимо сада наша четири

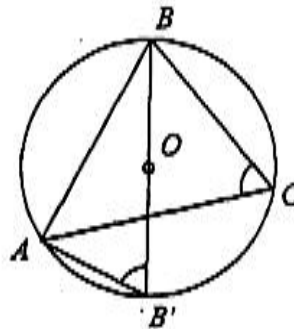
троугла и ставимо их поред квадрата страница a и b , као што је приказано на слици 8 (б). Добијамо да је $a^2 + b^2 = c^2$, чиме је доказ завршен.

Напоменимо да се однос наспрамне катете и хипотенузе назива *синус* ($\sin \varphi$), а однос налегле катете и хипотенузе *косинус* ($\cos \varphi$).

Теорема 5. Нека је дат троугао са страницама a , b и c (слика 9). Тада важе следећи односи:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}, \quad (1) \text{ (синусна теорема)}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \varphi, \quad (2) \text{ (косинусна теорема)}$$

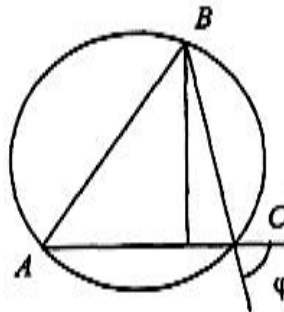


Сл. 9

где је φ угао између страница a и b .

Доказ. Опишимо кружницу око троугла ABC и означимо са B' дијаметрално супротну тачку тачки B . Тада из теореме о периферијском углу и дефиниције синуса добијамо $\frac{c}{\sin C} = 2R$, тј. $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$, чиме је доказан део под (1).

С друге стране, спустимо висину BD из тачке B на AC (слика 10).



Сл. 10

Из Питагорине теореме, дефиниција синуса и косинуса и релације $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$ (која опет следи из Питагорине теореме), добијамо:

$$c^2 = (b - a \cos \varphi)^2 + (a \sin \varphi)^2 = a^2(\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) + b^2 - 2ab \cos \varphi = a^2 + b^2 - 2ab \cos \varphi,$$

што је и требало доказати.

Сада смо спремни да задатке за 9. и 10. разред решимо аналитички.

Аналитичко решење задатка за 9. разред (слика 11). Из синусне теореме за троугао ABM добијамо:

$$\frac{a}{\sin \varphi} = \frac{b}{\sin 30^\circ} = 2b,$$

а из исте теореме за троугао BMC добијамо:

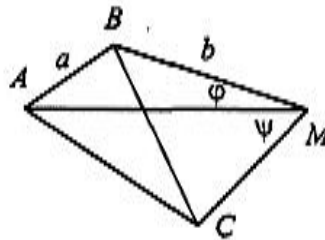
$$\frac{b}{\sin(90^\circ + \psi)} = \frac{a}{\sin(\varphi + \psi)}.$$

Из ове две једнакости следи

$$2 \sin \varphi \cos \psi = \sin(\varphi + \psi) \Rightarrow \operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \psi \Rightarrow \varphi = \psi,$$

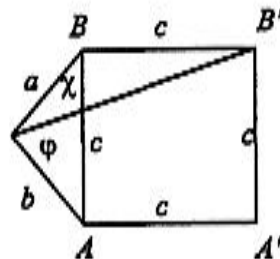
при чему су коришћене једноставне једнакости: $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, $\sin(90^\circ + \psi) = \cos \psi$, $\angle BCM = 90^\circ + \psi$ и важна релација, коју није тешко доказати:

$$\sin(\varphi + \psi) = \sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \sin \psi.$$



Сл. 11

Аналитичко решење задатка за 10. разред (слика 12).



Сл. 12

Из косинусне теореме имамо:

$$|CB'|^2 = d^2 = a^2 + c^2 - 2ac(\chi + 90^\circ) = a^2 + c^2 + 2ac \sin \chi, \quad (i)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \varphi. \quad (ii)$$

Из синусне теореме следи

$$\frac{b}{\sin \chi} = \frac{c}{\sin \varphi} \Rightarrow c \sin \chi = b \sin \varphi. \quad (iii)$$

Даље је (из (i)-(iii))

$$d^2 = 2a^2 + b^2 + 2ab(\sin \varphi - \cos \varphi).$$

Аналогно,

$$d'^2 = 2b^2 + a^2 + 2ab(\sin \varphi - \cos \varphi),$$

где је $d' = CA'$. Оба израза достижу максимум за $\varphi = 135^\circ$. Тада је максимална вредност

$$d_1 + d_2 = ((2b^2 + a^2 + 2\sqrt{2}ab)^{\frac{1}{2}} + (2a^2 + b^2 + 2\sqrt{2}ab)^{\frac{1}{2}}) = \sqrt{2}b + \sqrt{2}a + b + a = (\sqrt{2} + 1)(a + b)$$

$$\Rightarrow |OM| + |ON| = \frac{\sqrt{2} + 1}{2}(a + b).$$

Није ли истина да се геометријска и аналитичка решења веома разликују, иако оба пута воде ка циљу?

5. НЕКЕ ЗАКЉУЧНЕ ПРИМЕДБЕ И КОМЕНТАРИ

Наведеним задацима се не исцрпљује геометријска тематика на 56. олимпијади. У деветом разреду је био "утешни" задатак, који је био доста решаван, док је у једанаестом разреду био изузетно тежак задатак који се допао свима који су учествовали у одабиру задатака:

Мува лети у унутрашњости правилног тетраедра ивице a . Одредити најмање растојање које она мора да прелети да би боравила на свакој страни и вратила се у полазну тачку.

У питању је изузетно садржајан и интересантан задатак.

Осим наведених, било је још неколико задатака са геометријским компонентама. Међутим, задаци које смо изабрали поседују једну особеност: они се уобрајају у групу стандардних, тј. оних који се налазе у школским уџбеницима. Свако ко воли математику би требао да буде у стању да реши било који од њих. Чињеница да је на олимпијади било свега неколико решења указује да се геометријско образовање налази на низбрдици. Штета.

Моја је намера била да покажем колико је мало, у суштини, потребно знати, да би се могли решавати геометријски задаци, чак и тежи од оних који се појављују на Московским олимпијадама. У овој лекцији смо прешли пут, који су за нас поставили Талес, Питагора, Еуклид и други наши далеки претходници, и томе

додали неколико закључака, који су постали општепознати тек у 14. веку, када је развијена тригонометрија. Осим тога, решили смо све геометријске (стандардне, али тешке) задатке олимпијаде, при чему два од њих на два начина. И чини ми се да је и у аналитичким и у геометријским решењима било скривено много лепог за памћење. Ничега, за шта би се могло рећи: "Како је до тога могуће доћи?" и иако су ти задаци савршено нетривијални, они су изазвали велики "отпор", чак и код признатих експерата за елементарну геометрију. Уосталом, нико од организатора није нашао наведено једноставно аналитичко решење задатка за 9. разред. Њега је "скоро" нашао један ученик, који осим тог задатка практично није ништа урадио. Такви радови се обично не прегледају са пуном пажњом, али овде је дошло до изузетка: прегледач је ушао у суштину решења и закључио да је ученик стигао до краја (добрио је једнакост $2 \sin \varphi \cos \chi = \sin(\varphi + \chi)$), а затим наставио да размишља у погрешном правцу). После је требало одлучити да ли наградити тај рад специјалном наградом за појединачно решење задатка. Многим "професионалним" олимпијцима се то решење учинило "неолимпијским". Ипак, специјална награда је додељена. Колико је "олимпијско размишљање" отргнуто од геометријског образовања, говори следећа чињеница: један од победника из 10. разреда је, не решивши геометријски задатак, узвикнуо, када му је предочено аналитичко решење: "А када су то на олимпијади били задаци који су тражили примену косинусне теореме?"

У претходном тексту желео сам да истакнем две идеје. Прва је: око $2/3$ геометријских задатака има једноставније аналитичко решење, тако да је корисно знати синусну и косинусну теорему, а друга: најтеже је формализовати и аналитички решити задатке са кружницама. Међутим, тамо важну улогу у геометријском испитивању игра теорема о периферијском углу, коју је формулисао родоначелник наше науке, јонски трговац и један од седам античких мудраца –Талес. Једна од првих теорема се показала незаменљивом!

На крају бих желео да изразим наду да је 56. олимпијада била празник и за оне који су на њој учествовали и за оне који су организовали. А управо то и јесте циљ сваке олимпијаде, зар не?

**Статијата прв пат е публикувана во списанието ТАНГЕНТА
на ДМ на Србија во 2000/01 година**