EVOLVENTA (JAMTK) 6(1) (2023), 10-17

Publikovano od UM TK,
Udruženje matematičara TK
Dostupno na: http://evolventa.ba
http://www.umtk.info

Geometrijski dokazi trigonometrijskih jednakosti

Alija Muminagić[1], Jens Carstensen[2]

[1]*penzioner, Danska*
[2]*penzioner, Danska*

Sažetak: U ovom radu dajemo dokaze nekih trigonometrijskih jednakosti geometrijskim metodom, što u redovnoj nastavi činimo vrlo rijetko.

1. Uvod

Napomenimo da je trigonometrija važan i jak alat za nauku i tehniku. Međutim, u posljednje vrijeme autori programa iz matematike nalaze prostor za uvođenje "novih stvari", izbacivanjem nekih trigonometrijskih sadržaja. Istina, uvođenjem digitrona i računara, opravdano su izostala izračunavanja upotrebom tablica, a sredstva za crtanje grafova pružaju dinamičke alate koji učenicima znatno olakšavaju izučavanje trigonometrije. Pitanje je da li je dovoljno provjeravati (dokazivati) samo osnovne trigonometrijske identitete ili i komplikovanije, što se sada izbjegava.

Poznati francuski matematičar Jean Alexandre Evgène Dieudonne (1906.-1992.) je rekao da je većina trigonometrijskog sadržaja važna za samo tri zanimanja: astronome, geometre i pisce udžbenika iz trigonometrije.

Ovdje želimo pokazati kako trigonometrija može pružiti estetsku privlačnost mnogim učenicima, zainteresovanim za njezino proučavanje.

2. Primjeri dokaza trigonometrijskih jednakosti geometrijskim metodom

Primjer 2.1. *Dokazati da je* $\frac{1}{2}\operatorname{tg}40^\circ + \operatorname{tg}10^\circ + \frac{\sin 10^\circ}{\sin 40^\circ} = \frac{1}{2}\operatorname{tg}60^\circ$.

Rješenje: Posmatrajmo pravougli trougao $\triangle ABC$, sa uglovima $\sphericalangle ABC = 30^\circ$, $\sphericalangle BAC = 60^\circ$ i $\sphericalangle ACB = 90^\circ$. Neka je $|AB| = c$, $|AC| = b$ i $|CB| = a$ (Slika 1). Trougao $\triangle ABC$ je polovina jednakostraničnog trugla, pa je

$$c = 2b. \tag{1}$$

Ciljna skupina: srednja škola
Ključne riječi: trigonometrijske jednakosti, geometrijski metod
Kategorizacija: Stručno-istraživački rad
Rad preuzet: august, 2023.

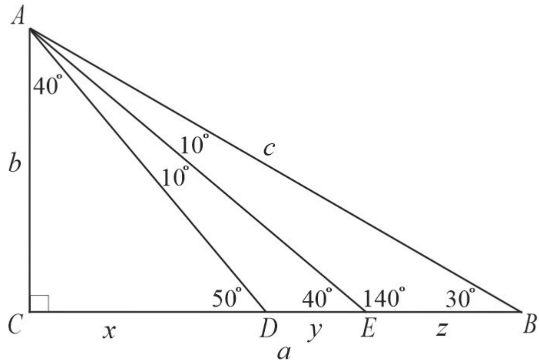
Odaberimo tačke D i E na kateti BC, tako da je $\sphericalangle CAD = 40°$ i $\sphericalangle DAE = \sphericalangle EAB = 10°$, i neka je $|CD| = x$, $|DE| = y$ i $|EB| = z$ (vidi sl. 1.). Tako je

$$|BC| = a = x + y + z. \tag{2}$$

U pravouglom truoglu $\triangle ACD$ je:

$$\operatorname{tg} 40° = \frac{x}{b} \iff x = b \cdot \operatorname{tg} 40° \quad \text{i} \tag{3}$$

$$\cos 40° = \frac{b}{|AD|} \iff |AD| = \frac{b}{\cos 40°}\ . \tag{4}$$



Slika 1.

Sinusna teorema primijenjena na trouglove $\triangle ADE$ i $\triangle AEB$ daje:

$$\begin{aligned}\frac{y}{\sin 10°} = \frac{|AD|}{\sin 40°} \iff y = \frac{|AD| \cdot \sin 10°}{\sin 40°} \overset{(4)}{=} \frac{\frac{b}{\cos 40°} \cdot \sin 10°}{\sin 40°} = \frac{b \cdot \sin 10°}{\sin 40° \cdot \cos 40°}\\ = \frac{2b \cdot \sin 10°}{2\sin 40° \cdot \cos 40°} = \frac{2b \cdot \sin 10°}{\sin 80°} = \frac{2b \cdot \sin 10°}{\cos 10°} = 2b \cdot \operatorname{tg} 10°,\end{aligned} \tag{5}$$

$$\frac{z}{\sin 10°} = \frac{c}{\sin 140°} \iff z = \frac{c \cdot \sin 10°}{\sin 140°} = (\text{zbog (1) i } \sin 140° = \sin 40°) = \frac{2b \cdot \sin 10°}{\sin 40°}. \tag{6}$$

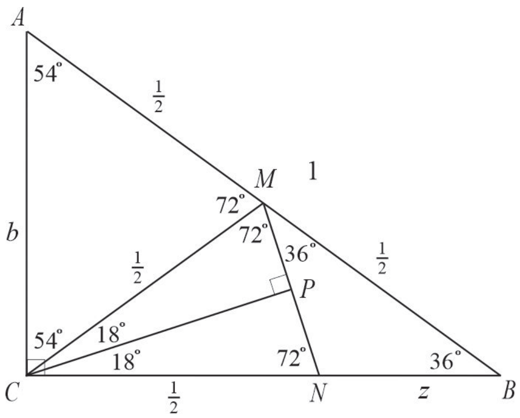
U trouglu $\triangle ABC$ je

$$\begin{aligned}&\operatorname{tg} 60° = \frac{a}{b} \iff a = b \cdot \operatorname{tg} 60°\\ &\big(\text{zbog } a = x + y + z\big) \iff x + y + z = b \cdot \operatorname{tg} 60°\\ &\big((3), (5) \text{ i } (6)\big) \iff b \cdot \operatorname{tg} 40° + 2b \cdot \operatorname{tg} 10° + \frac{2b \cdot \sin 10°}{\sin 40°} = b \cdot \operatorname{tg} 60°\\ &\iff \frac{1}{2}\operatorname{tg} 40° + \operatorname{tg} 10° + \frac{\sin 10°}{\sin 40°} = \frac{1}{2}\operatorname{tg} 60°, \quad \textit{q.e.d.}\end{aligned}$$

□

Primjer 2.2. *Dokazati da je* $\sin 54° = \sin 18° + \frac{1}{2}$.

Rješenje: Neka je trougao $\triangle ABC$ pravougli sa uglovima $\sphericalangle BAC = 54°$, $\sphericalangle CBA = 36°$ i $\sphericalangle ACB = 90°$ (Slika 2). Dalje, neka je hipotenuza $|AB| = 1$ i tačka M središte hipotenuze, tj. $|AM| = |BM| = \frac{1}{2} = |CM|$.



Slika 2.

Na kateti BC odredimo tačku N, tako da je $|MC| = \frac{1}{2} = |CN|$. Dakle, $|CN| = |MC| = |MB|\frac{1}{2}$. To povlači da je trougao $\triangle BMC$ jednakokraki i $\sphericalangle BCM = 36°$, $|MB| = \frac{1}{2}$. Neka je P projekcija tačke C na MN. Trougao $\triangle MCN$ je jednakokraki (zbog $|CN| = |MC|$), pa je $\sphericalangle MCP = \sphericalangle NCP = 18°$ (vidi sl. 2). Lako vidimo da je $\sphericalangle CMN = \sphericalangle CNM = 72°$. U jednakokrakom truglu $\triangle AMC$, je $\sphericalangle ACM = \sphericalangle MAC = 54°$ i $\sphericalangle AMC = 72°$. Dalje je $\sphericalangle BMN = 180° - \sphericalangle CMN - \sphericalangle AMC = 180° - 72° - 72° = 36°$. To znači da je trougao $\triangle BMN$ jednakokraki i

$$|BN| = |NM| = 2 \cdot |MP| \; . \tag{7}$$

S druge strane, u trouglu $\triangle MCP$ je

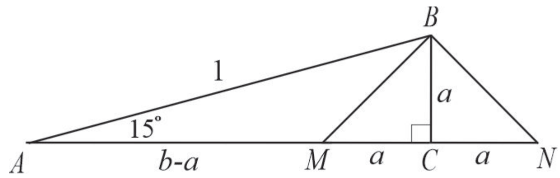
$$\sin 18^\circ = \frac{|MP|}{|CM|} \Longleftrightarrow \sin 18^\circ = \frac{|MP|}{\frac{1}{2}} \Longleftrightarrow \sin 18^\circ = 2 \cdot |MP| \overset{(7)}{=\!=} |BN| \; . \tag{8}$$

Konačno je (v. $\triangle ABC$)

$$\sin 54^\circ = \frac{|BC|}{|AB|} = \frac{|CN| + |BN|}{1} = \frac{1}{2} + |BN| \overset{(8)}{=\!=} \frac{1}{2} + \sin 18^\circ \; . \qquad \square$$

Primjer 2.3. *Dokazati da je* $\dfrac{\cos 15^\circ + \sin 15^\circ}{\cos 15^\circ - \sin 15^\circ} = \sqrt{3}$.

Rješenje: Posmatrajmo pravougli trougao $\triangle ABC$ sa uglovima $\measuredangle BAC = 15^\circ$ i $\measuredangle ACB = 90^\circ$ i hipotenuzom $|AB| = 1$ (v. Sliku 3). Tada je $\sin 15^\circ = \frac{a}{1} = a = |BC|$ i $b = |AC| = \cos 15^\circ$. Na kateti AC i njezinom produžetku (preko tačke C) uzmimo tačke M i N, tako da je $|CM| = |CN| = a$. Sada je $|AN| = a+b$ i $|AM| = b-a$. Lako dobijamo da je $\measuredangle ABM = 30^\circ$.



Slika 3.

Primjenom sinusne teoreme na trouglove $\triangle ABM$ i $\triangle ABN$ dobijamo:

$$\frac{|BM|}{\sin 15} = \frac{|AM|}{\sin 30^\circ} \quad \text{i} \quad \frac{|BN|}{\sin 15^\circ} = \frac{|AN|}{\sin 120^\circ},$$

pa, zbog $|BM| = |BN|$, slijedi

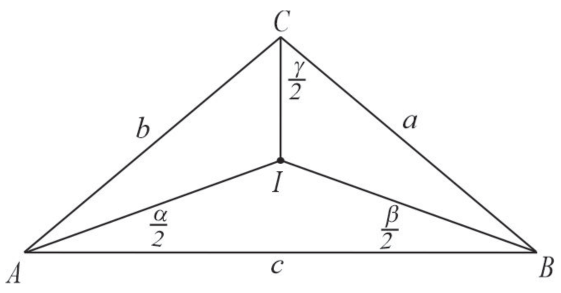
$$\frac{|AM|}{\sin 30^\circ} = \frac{|AN|}{\sin 120^\circ} \Longleftrightarrow \frac{b-a}{\sin 30^\circ} = \frac{b+a}{\sin 120^\circ} \Longleftrightarrow \frac{b+a}{b-a} = \frac{\sin 120^\circ}{\sin 30^\circ},$$

odakle je

$$\frac{\cos 15^\circ + \sin 15^\circ}{\cos 15^\circ - \sin 15^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \; .$$

Još jedno rješenje može se vidjeti u [2]. $\square$

Primjer 2.4. *Dokazati da u svakom trouglu vrijedi* $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4 \cdot \cos\dfrac{\alpha}{2} \cos\dfrac{\beta}{2} \cos\dfrac{\gamma}{2}$, *gdje su* α, β, *i* γ *unutrašnji uglovi trougla.*



Slika 4.

Rješenje: Posmatrajmo proizvoljan trougao $\triangle ABC$ i uvedimo oznake kao na Slici 4. I je centar upisane kružnice u trougao. Kako je $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}$, to je

$$\measuredangle AIB = 180^\circ - \left(90^\circ - \frac{\gamma}{2}\right) = 90^\circ + \frac{\gamma}{2},$$

pa je $\sin \measuredangle AIB = \cos\frac{\gamma}{2}$, i slično

$$\sin\measuredangle AIC = \cos\frac{\beta}{2} \quad \text{i} \quad \sin\measuredangle BIC = \cos\frac{\alpha}{2}.$$

Primjenom sinusne teoreme u trouglovima $\triangle AIC$ i $\triangle BIC$ dobijamo:

$$\frac{|IA|}{\sin\frac{\gamma}{2}} = \frac{b}{\cos\frac{\beta}{2}} \Longleftrightarrow |IA| = \frac{b\cdot\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}}$$

$$\frac{|IB|}{\sin\frac{\gamma}{2}} = \frac{a}{\cos\frac{\alpha}{2}} \Longleftrightarrow |IB| = \frac{a\cdot\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$$

Kako je, s jedne strane, površina P trougla $\triangle AIB$ data s

$$P = \frac{1}{2}|IA|\cdot|IB|\cdot\sin\sphericalangle AIB = \frac{1}{2}|IA|\cdot|IB|\cdot\cos\frac{\gamma}{2},$$

a s druge strane $P = \frac{1}{2}ab\cdot\sin\gamma$, nakon dijeljenja dobijamo:

$$\begin{aligned}
\frac{P_\triangle(AIB)}{P_\triangle(ABC)} &= \frac{\frac{1}{2}|AI|\cdot|IB|\cdot\cos\frac{\gamma}{2}}{\frac{1}{2}ab\cdot\sin\gamma} = \big(\text{zbog}\quad \sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\big)\\
&= \frac{\frac{b\cdot\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}}\cdot\frac{a\cdot\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}}{2ab\cdot\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}} = \frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}\\
\Longleftrightarrow \qquad P_\triangle(AIB) &= \frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}\cdot P_\triangle(ABC)
\end{aligned}$$

i slično

$$P_\triangle(AIC) = \frac{\sin\frac{\beta}{2}}{2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}\cdot P_\triangle(ABC)$$
$$P_\triangle(BIC) = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{2\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}\cdot P_\triangle(ABC)$$

Sabiranjem posljednje tri jednakosti, zbog

$$P_\triangle(ABC) = P_\triangle(AIB) + P_\triangle(AIC) + P_\triangle(BIC),$$

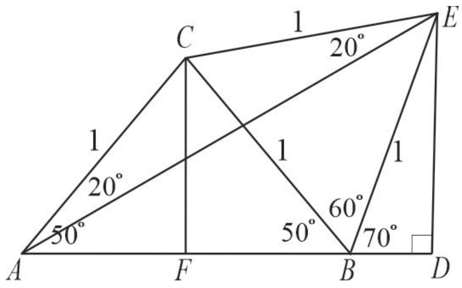
dobijamo

$$1 = \frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}} + \frac{\sin\frac{\beta}{2}}{2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\gamma}{2}} + \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{2\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}},$$

odakle slijedi

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}, \quad q.e.d. \qquad \square$$

Primjer 2.5. *Dokazati da je* $\operatorname{tg} 30^\circ = \dfrac{\sin 70^\circ}{2\cos 50^\circ + \cos 70^\circ}$.



Slika 5.

Rješenje: Posmatrajmo jednakokraki trougao $\triangle ABC$ u kojem je

$|CA| = |CB| = 1$ i $\sphericalangle CAB = \sphericalangle ABC = 50°$ (v. Sliku 5).

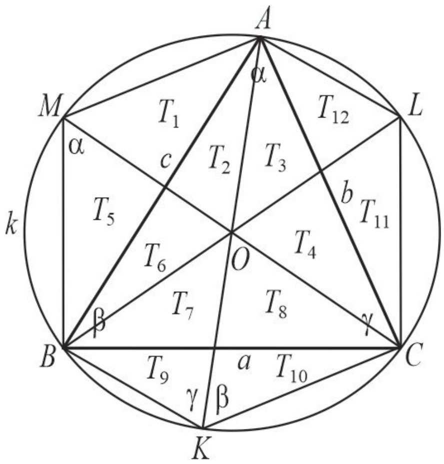
Nad stranicom BC konstruišemo jednakostranični trougao $\triangle BCE$. Tada je $|BC| = |CE| = ||EB| = 1$ i $\sphericalangle BCE = \sphericalangle CEB = \sphericalangle EBC = 60°$.
Neka je tačka D podnožje normale iz tačke E na AB i neka je CF visina u trouglu $\triangle ABC$ (vidi sl. 5).
Lako se dokazuje da je $\sphericalangle CAE = \sphericalangle AEC = 20°$ i $\sphericalangle EAD = 30°$. Sada imamo:

(v. $\triangle AFC$) $\cos 50° = \frac{|AF|}{|AC|} = |AF| = |FB|$,

(v. $\triangle BDE$) $\sin 70° = \frac{|ED|}{|BE|} = |ED|$ i $\cos 70° = \frac{|BD|}{|BE|} = |BD|$
i konačno

(v. $\triangle AED$) $\operatorname{tg} 30° = \frac{|ED|}{|AD|} = \frac{|ED|}{|AF|+|FB|+|BD|} = \dfrac{\sin 70°}{2\cos 50° + \cos 70°}$. □

Primjer 2.6. *Dokazati da u nepravouglom trouglu vrijedi* $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}\gamma$.



Slika 6.

Rješenje: Neka je $\triangle ABC$ nepravougli i neka je $|BC| = a$, $|CA| = b$ i $|AB| = c$ i neka su α, β i γ unutrašnji uglovi tog trougla. Neka je O centar opisane kružnice k oko $\triangle ABC$ i neka su presječne tačke pravih AO, BO i CO s kružnicom k, redom tačke K, L i M. Na taj način je šesterougao $AMBKCL$ podijeljen na 12 malih trouglova, čije površine označimo sa $T_1, T_2, \ldots, T_{12}$ kao na Slici 6. Na toj slici možemo uočiti šest trouglova sa prečnikom kružnice kao jednom stranicom. Svaki od tih trouglova podijeljen je na dva manja trougla čije su površine jednake (zašto?). Dakle imamo:

$$\begin{array}{ll} T_3 + T_4 = T_8 + T_{10} & T_2 + T_6 = T_3 + T_{12} \\ T_2 + T_6 = T_7 + T_9 & T_7 + T_8 = T_5 + T_6 \\ T_7 + T_8 = T_4 + T_{11} & T_3 + T_4 = T_1 + T_2 \end{array}$$

Sabiranjem ovih jednakosti dobijamo:

$$2(T_2+T_3+T_4+T_6+T_7+T_8) = (T_2+T_3+T_4+T_6+T_7+T_8)+(T_1+T_5)+(T_9+T_{10})+(T_{11}+T_{12}) \text{ tj.}$$

$$\underbrace{T_2 + T_3 + T_4 + T_6 + T_7 + T_8}_{P_\triangle(ABC)} = \underbrace{(T_1 + T_5)}_{P_\triangle(ABM)} + \underbrace{(T_9 + T_{10})}_{P_\triangle(BCK)} + \underbrace{(T_{11} + T_{12})}_{P_\triangle(ACL)} \text{ ili}$$

$$P_\triangle(ABC) = P_\triangle(ABM) + P_\triangle(BCK) + P_\triangle(ACL) \tag{9}$$

Iz podudarnosti trouglova $\triangle OLC \cong \triangle OMB$ slijedi

$$|LC| = |MB| \text{ i slično } |KC| = |MA| \text{ i } |AL| = |BK| \tag{10}$$

Poznato je da je $P_\triangle(ABC) = \frac{abc}{4R}$ i analogno $P_\triangle(ABM) = \frac{|AB|\cdot|AM|\cdot|BM|}{4R} = \frac{c\cdot|AM|\cdot|BM|}{4R}$, $P_\triangle(BCK) = \frac{|BC|\cdot|CK|\cdot|KB|}{4R} = \frac{a\cdot|CK|\cdot|KB|}{4R}$ i $P_\triangle(ACL) = \frac{|AC|\cdot|CL|\cdot|LA|}{4R} = \frac{b\cdot|CL|\cdot|LA|}{4R}$, pa jednalost (9) možemo pisati kao

$$abc = c\cdot|AM|\cdot|BM| + a\cdot|CK|\cdot|KB| + b\cdot|CL|\cdot|LA| \ . \tag{11}$$

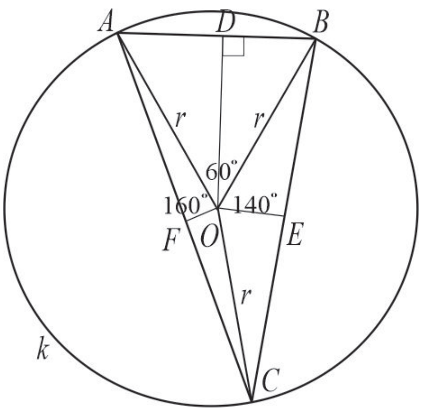
Dalje je $\sphericalangle CMB = \alpha$ (kao periferijski uglovi nad lukom $\widehat{BC}$), a u pravouglom trouglu $\triangle\, CMB$ ($\sphericalangle CBM = 90°$, kao ugao nad prečnikom) je

$$\begin{aligned}
&\operatorname{tg}\sphericalangle CMB = \operatorname{tg}\alpha = \frac{|BC|}{|BM|} = \frac{a}{|BM|} \quad \text{i slično}\\
&\operatorname{tg}\sphericalangle AKC = \operatorname{tg}\beta = \frac{|AC|}{|KC|} \overset{(10)}{=\!=} \frac{b}{|MA|}; \quad \operatorname{tg}\sphericalangle AKB = \operatorname{tg}\gamma = \frac{|AB|}{|BK|} = \frac{c}{|BK|} \ .
\end{aligned} \tag{12}$$

Konačno,

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma =& \frac{a}{|BM|} + \frac{b}{|MA|} + \frac{c}{|BK|}\\
=& \frac{a\cdot|MA|\cdot|BK| + b\cdot|BM|\cdot|BK| + c\cdot|BM|\cdot|MA|}{|BM|\cdot|MA|\cdot|BK|}\\
\overset{(10)}{=\!=}& \frac{a\cdot|KC|\cdot|BK| + b\cdot|CL|\cdot|AL| + c\cdot|BM|\cdot|MA|}{|BM|\cdot|MA|\cdot|BK|} \overset{(11)}{=\!=} \frac{abc}{|BM|\cdot|MA|\cdot|BK|}\\
=& \frac{a}{|BM|}\cdot\frac{b}{|MA|}\cdot\frac{c}{|BK|} \overset{(12)}{=\!=} \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma \ . \qquad \square
\end{aligned}$$

Primjer 2.7. *Dokazati da je* $\sin 60° + \sin 140° + \sin 160° = 4\sin 80° \sin 70° \sin 30°$.



Slika 7.

Rješenje: Neka je O centar kružnice k čiji je poluprečnik r, i neka su tačke A, B i C na kružnici tako da je $\sphericalangle AOB = 60°$, $\sphericalangle BOC = 140°$ i $\sphericalangle COA = 160°$. Spojimo dužima tačke A i B, B i C i C i A (v. Sliku 7).

U trouglovima $\triangle\, BDO$, $\triangle\, EBO$ i $\triangle\, FCO$ je $\sin 30° = \frac{|BD|}{r}$ i slijedi da je $|AB| = 2\cdot|BD| = 2r\cdot\sin 30°$ i slično $|BC| = 2\cdot|BE| = 2r\cdot\sin 70°$ i $|AC| = 2\cdot|AF| = 2r\cdot\sin 80°$.

Površina trougla $\triangle\, ABC$ je

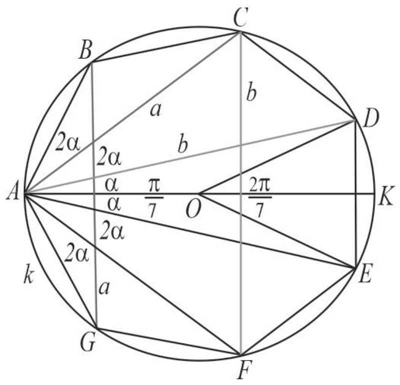
$$\begin{aligned}
P_\triangle(ABC) &= \frac{1}{2}|AB|\cdot|BC|\cdot\sin\sphericalangle ABC\\
&= \frac{1}{2}\cdot 2r\cdot\sin 30°\cdot 2r\cdot\sin 70°\cdot\sin 80°\\
&= 2r^2\cdot\sin 30°\cdot\sin 70°\cdot\sin 80° \ .
\end{aligned} \tag{13}$$

S druge strane je

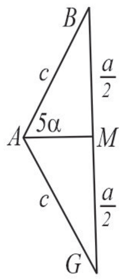
$$\begin{aligned}
P_\triangle(ABC) &= P_\triangle(AOB) + P_\triangle(BOC) + P_\triangle(AOC)\\
&= \frac{1}{2}r^2\sin 60° + \frac{1}{2}r^2\sin 140° + \frac{1}{2}r^2\sin 160° \ .
\end{aligned} \tag{14}$$

Iz (13) i (14) slijedi tvrđenje. $\square$

Primjer 2.8. *Dokazati da je* $\sin\frac{\pi}{14}\cdot\sin\frac{3\pi}{14}\cdot\sin\frac{5\pi}{14} = \frac{1}{8}$.



Slika 8.



Slika 9.

Rješenje: Konstruišemo pravilan sedmougao $ABCDEFG$, upisan u kružnicu k prečnika $|AK|$. Neka je $\sphericalangle DOE = \dfrac{2\pi}{7} = 4\alpha$, a $\sphericalangle DAK = \frac{1}{2}\cdot 4\alpha = 2\alpha$ (kao centralni i perfierijski uglovi), tj. $\alpha = \dfrac{\pi}{14}$ (v. Sliku 8).
Tako je $\sphericalangle CAB = \sphericalangle DAC = \sphericalangle EAD = \sphericalangle FAE = \sphericalangle GAF = 2\alpha$ i neka je $|BG| = |CA| = a$, $|CF| = |DA| = b$ i $|AB| = |BC| = |CD| = |EF| = |FG| = |GA| = c$.

Trougao $\triangle ABG$ je jednakokraki (v. Sliku 9), pa je u $\triangle ABM$

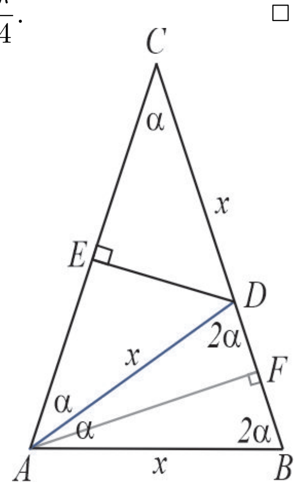
$$\sin 5\alpha = \frac{\frac{a}{2}}{c} = \frac{a}{2c} \iff a = 2c\cdot\sin 5\alpha = 2c\cdot\sin 5\frac{\pi}{14}\ .$$

Slično je u $\triangle ACF$: $\quad b = 2a\cdot\sin 3\alpha = 2a\cdot\sin\dfrac{3\pi}{14}$, a u $\triangle ADE$: $\quad c = 2b\cdot\sin\alpha = 2b\cdot\sin\dfrac{\pi}{14}$. Nakon množenja tri posljednje jednakosti dobijamo:

$$a\cdot b\cdot c = 8a\cdot b\cdot c\cdot\sin\frac{\pi}{14}\cdot\sin\frac{3\pi}{14}\cdot\sin\frac{5\pi}{14} \iff \frac{1}{8} = \sin\frac{\pi}{14}\cdot\sin\frac{3\pi}{14}\cdot\sin\frac{5\pi}{14}.$$

□

Primjer 2.9. *Dokazati da je* $\cos 36^\circ - \cos 72^\circ = \dfrac{1}{2}$.



Slika 10.

Rješenje: Neka je trougao $\triangle\ ABC$ jednakokraki $|AC| = |BC|$, $\sphericalangle ACB = \alpha = 36^\circ$, $|AB| < |AC|$ i $2\cdot|AB| > |AC|$. Lako nalazimo da je $\sphericalangle CBA = \sphericalangle BAC = 72^\circ = 2\alpha$ (v. Sliku 10). Na kraku BC odredimo tačku D tako da je $|AB| = |AD|$. Tada je $|AD| = |CD|$ (zašto?). Neka je $x = |AD| = |CD| = |AB|$. Sada imamo: $\sphericalangle DAC = \alpha$, $\sphericalangle ADB = 2\alpha = \sphericalangle DBA = 72^\circ$, pa je i $\sphericalangle BAD = \alpha$. Neka je $|CD| = 1$. Povucimo visinu DE u trouglu $\triangle\ ADC$. Tada je $|AC| = 2\cdot|CE| = 2\cdot\cos\alpha =$ (u pravouglom trouglu $\triangle\ DEC$ je $\cos\alpha = \frac{|CE|}{x} \Leftrightarrow \cos 36^\circ = \frac{|CE|}{1} = |CE|) = 2\cdot\cos 36^\circ$.

Povucimo sada visinu AF u trouglu $\triangle ABD$. U tom slučaju je

$$|BD| = 2\cdot|BF| = \big(\text{u pravouglom trouglu } \triangle ABF \text{ je } \cos 2\alpha = \frac{|FB|}{x} \iff \cos 72^\circ = \frac{|FB|}{1} = |FB|\big) = 2\cdot\cos 72^\circ.$$

Konačno je

$$|BC| = |BD| + |DC| \iff |AC| = |BD| + |DC| \iff 2\cdot\cos 36^\circ = 2\cdot\cos 72^\circ + 1 \iff \cos 36^\circ - \cos 72^\circ = \frac{1}{2},\ \textit{q.e.d.}$$

□

Primjer 2.10. *Dokazati da je* $\dfrac{1}{\sin\left(25\frac{5}{7}\right)^\circ} = \dfrac{1}{\sin\left(51\frac{3}{7}\right)^\circ} + \dfrac{1}{\sin\left(77\frac{1}{7}\right)^\circ}$.

Rješenje: Neka je $\alpha = \left(25\frac{5}{7}\right)^\circ = \left(\frac{180}{7}\right)^\circ$. Posmatrajmo jednakokraki trougao $\triangle ABC$ ($|AC| = |BC|$), $\sphericalangle ACB = \alpha$, ($|AB| < |CB|$) (v. Sliku 11). Odredimo na kraku BC, tačku D tako da je $|BD| = |AB| = y$. U trouglu $\triangle ABC$ je

$$2\cdot\sphericalangle BAC+\alpha=180^\circ \Longleftrightarrow \sphericalangle BAC=\sphericalangle ABC=\frac{180^\circ-\alpha}{2}=\frac{180^\circ-\left(\frac{180}{7}\right)^\circ}{2}=3\cdot\left(\frac{180}{7}\right)^\circ=3\alpha$$

Kako je trougao $\triangle ABD$ jednakokraki, slijedi da je

$$2\cdot\sphericalangle BAD=180^\circ-3\alpha \Longleftrightarrow \sphericalangle BAD=\sphericalangle ADB=\frac{180^\circ-3\left(\frac{180}{7}\right)^\circ}{2}=2\cdot\left(\frac{180}{7}\right)^\circ=2\alpha\ .$$

Sa Slike 11 vidimo da je $\sphericalangle CAD=\sphericalangle CAB-\sphericalangle BAD=3\alpha-2\alpha=\alpha$, pa zbog $\sphericalangle ACD=\alpha$ trougao $\triangle ACD$ je jednakokraki i $|AD|=|CD|=x$. Neka je E projekcija tačke A na BD i neka je $|AE|=1$. Sada imamo da je u pravouglom trouglu $\triangle AEC$:

$$\sin\alpha=\frac{|AE|}{|AC|}=\frac{1}{|AC|},\ \text{tj. } |AC|=\frac{1}{\sin\alpha}=|BC|\ . \tag{15}$$

U pravouglom trouglu $\triangle AED$ je

$$\sin 2\alpha=\frac{|AE|}{|AD|}\Longleftrightarrow |AD|=\frac{|AE|}{\sin 2\alpha}=\frac{1}{\sin 2\alpha}\ , \tag{16}$$

a u pravouglom trouglu $\triangle AEB$ je

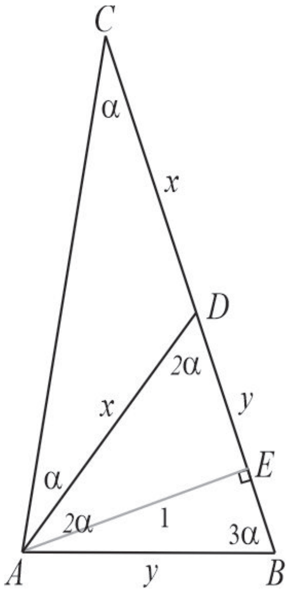
$$\sin 3\alpha=\frac{|AE|}{|AB|}=\frac{1}{|AB|}\Longleftrightarrow |AB|=\frac{1}{\sin 3\alpha}\ . \tag{17}$$

Zbog, $|BC|=|BD|+|DC|=|AB|+|AD|$ je prema (15), (16) i (17)

$$\frac{1}{\sin\alpha}=\frac{1}{\sin 2\alpha}+\frac{1}{\sin 3\alpha},$$

odnosno

$$\frac{1}{\sin\left(25\frac{5}{7}\right)^\circ}=\frac{1}{\sin\left(51\frac{3}{7}\right)^\circ}+\frac{1}{\sin\left(77\frac{1}{7}\right)^\circ},\quad q.e.d. \qquad \square$$



Slika 11.

Zaključak

Ovaj članak smo napisali zato što mislimo, da kada god u nastavi matematike imamo priliku da nešto prikažemo geometrijski, tu priliku ne treba propuštati, jer mišljenje u slikama pomaže u pojednostavljenju i razumijevanju. Ako i čitaoci misle tako, onda je ovaj članak ispunio cilj. Čitaocima predlažemo da zadatke riješe i na neke druge načine, a napominjemo da je takvih drugih načina puno.

Možda, neko od čitaoca riješi ove zadatke na neke druge načine i napiše članak za EVOLVENTU s tim rješenjima?

Literatura

[1] J. Carstesen and A. Muminagić: *Geometrijski dokazi nekih trigonometrijskih jednakosti*, Triangle, Vol. 1 (1997), No. 2, 87-88.

[2] A. Muminagić: *Geometrijski dokazi nekih trigonometrijskih jednakosti*, Nastava matenatike (Beograd), LVIII, Vol. 58 (2013), 31-34.

[3] A. Muminagić: *Geometrijski dokazi nekaterih trigonometrijskih enakosti*, Presek 41 (2013—2014), 1, 1-4.