O jednom svojstvu težišta trokuta i tetraedra

Petar Svirčević[1], *Zagreb*

Koristeći aritmetičko–geometrijsku (AG) nejednakost formulirat ćemo i dokazati, na elementaran način, dva teorema o svojstvima težišta trokuta i težišta tetraedra, koja se često koriste u matematičkim primjenama.

Ovdje ćemo koristiti naziv *AG nejednakost*, a to znači nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine; tj.

$$A_n(a_1, ..., a_n) \geqslant G_n(a_1, ..., a_n), \tag{1}$$

gdje se broj

$$A_n(a_1, ..., a_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \tag{2}$$

naziva *aritmetička sredina*, a broj

$$G_n(a_1, ..., a_n) = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i} \tag{3}$$

geometrijska sredina od nenegativnih realnih brojeva $a_1, ..., a_n$, tj. $a_1, ..., a_n \in R^+ \cup \{0\}$.

Svakako da (1) možemo preglednije pisati u obliku

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}, \tag{4}$$

iz kojeg se vidi da jednakost vrijedi ako i samo ako je $a_1 = a_2 = ... = a_n$. Ovu nejednakost u općem obliku prvi je dokazao A. L. Cauchy 1820., a do danas su dani i drugi dokazi. U ovom članku nećemo dati opći dokaz, koji se može naći u $[1]$, nego ćemo dati provjeru, odnosno dokaze, samo za $n = 1, 2, 3, 4$. Iz (4) dobivamo $a_1 = a_1$ ako je $n = 1$, dakle uvijek se dobije jednakost.

Iz evidentne nejednakosti $(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2 \geqslant 0$ nakon kvadriranja i sređivanja dobivamo

$$\frac{a_1 + a_2}{2} \geqslant \sqrt{a_1 a_2}, \tag{5}$$

pa je time dokazano (4) za slučaj $n = 2$.

Dokaz *AG nejednakosti* za slučaj $n = 3$ malo je teži. U prvom razredu srednje škole smo lako provjerili rastav $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$, ili

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \frac{1}{2}(a + b + c)\left[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right] \geqslant 0, \tag{6}$$

uz uvjet $a, b, c \geqslant 0$; pa odatle slijedi

$$a^3 + b^3 + c^3 \geqslant 3abc. \tag{7}$$

---

[1] Autor predaje matematiku na Željezničkoj tehničkoj školi u Zagrebu, petar.svircevic@zg.hinet.hr

Ako uzmemo da je $a^3 = a_1,\ b^3 = a_2,\ c^3 = a_3$ i to supstituiramo u (7) dobivamo

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} \geqslant \sqrt[3]{a_1 a_2 a_3}. \tag{8}$$

I na kraju ćemo dokazati *AG nejednakost* za slučaj $n = 4$, koji je također jednostavan. Primijenimo li (5) dvaput na sumu od četiri nenegativna broja imamo

$$\begin{aligned}\frac{(a_1 + a_2) + (a_3 + a_4)}{4} &\geqslant \frac{2\sqrt{a_1 a_2} + 2\sqrt{a_3 a_4}}{4} = \frac{\sqrt{a_1 a_2} + \sqrt{a_3 a_4}}{2}\\ &\geqslant \sqrt{\sqrt{a_1 a_2}\sqrt{a_3 a_4}} = \sqrt[4]{a_1 a_2 a_3 a_4}\end{aligned}$$

ili

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4} \geqslant \sqrt[4]{a_1 a_2 a_3 a_4}. \tag{9}$$

Sada prelazimo na formuliranje i dokazivanje najavljenih teorema.

Teorem 1. Točka T unutar trokuta, čiji su vrhovi u točkama T_1, T_2, T_3, je njegovo težište ako i samo ako je produkt udaljenosti te točke od stranica trokuta maksimalan.

Dokaz. Neka je x_3 udaljenost točke T od stranice $\overline{T_1T_2}$, x_1 udaljenost točke T od stranice $\overline{T_2T_3}$ i x_2 udaljenost točke T od stranice $\overline{T_3T_1}$, i konačno neka su duljine stranica

$$b_1 = |T_2T_3|,\ b_2 = |T_3T_1|,\ b_3 = |T_1T_2|. \tag{10}$$

Ako je P površina $\Delta T_1T_2T_3$, tada vrijedi jednakost

$$b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = 2P. \tag{11}$$

Iz AG nejednakosti (8) dobivamo nejednakost

$$a_1a_2a_3 \leqslant \left(\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3}\right)^3, \tag{12}$$

pa ako to uvažimo i primjenimo na (11), slijedi nejednakost

$$b_1x_1 \cdot b_2x_2 \cdot b_3x_3 \leqslant \left(\frac{2P}{3}\right)^3. \tag{13}$$

Jasno je da će u (13) vrijediti jednakost kada je

$$b_1x_1 = b_2x_2 = b_3x_3 = \frac{2P}{3}. \tag{14}$$

Ako su h_1, h_2, h_3 duljine visina trokuta na stranice $\overline{T_2T_3}$, $\overline{T_3T_1}$, $\overline{T_1T_2}$ respektivno, tada iz (14) slijedi $b_1x_1 = \frac{2}{3}P = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}b_1h_1$ odnosno $x_1 = \frac{1}{3}h_1$, pa na analogan način dobivamo i druge jednakosti, dakle

$$x_i = \frac{1}{3}h_i, \quad i = 1, 2, 3. \tag{15}$$

Iz analitičke geometrije znamo da je težište trokuta udaljeno od svake stranice za jednu trećinu duljine odgovarajuće visine.

U jednakosti (11) su sve veličine fiksne osim varijabli x_1, x_2, x_3, pa na osnovu (15) zaključujemo da je

$$(x_1 \cdot x_2 \cdot x_3)_{\max} = \left(\frac{1}{3}\right)^3 h_1 \cdot h_2 \cdot h_3, \tag{16}$$

što je i trebalo naći. Obrat se može lako napraviti, te je time teorem u potpunosti dokazan.

Teorem 2. Točka T unutar tetraedra, čiji su vrhovi u točkama T_1, T_2, T_3, T_4, gdje nikoje tri nisu kolinearne i niti sve četiri komplanarne, je njegovo težište onda i samo onda ako je produkt udaljenosti te točke od strana tetraedra maksimalan.

Dokaz. Budući su T_1, T_2, T_3, T_4 vrhovi tetraedra $T_1T_2T_3T_4$, tada njegovu bazu i plašt čine trokuti $\Delta T_1T_2T_3$, $\Delta T_2T_3T_4$, $\Delta T_3T_4T_1$, $\Delta T_4T_1T_2$, čije su površine $B_{123} = P(\Delta T_1T_2T_3)$, $B_{234} = P(\Delta T_2T_3T_4)$, $B_{341} = P(\Delta T_3T_4T_1)$, $B_{412} = P(\Delta T_4T_1T_2)$, a visine tetraedra na te baze neka su h_4, h_1, h_2, h_3 respektivno.

Na osnovu uvedenih oznaka jasno je da je volumen V tetraedra $T_1T_2T_3T_4$ dan s relacijama

$$V = \frac{1}{3}B_{123}h_4 = \frac{1}{3}B_{234}h_1 = \frac{1}{3}B_{341}h_2 = \frac{1}{3}B_{412}h_3. \tag{17}$$

Nadalje neka su udaljenosti točke T od strana tetraedra dane s

$$x_4 = d(T, \Delta T_1T_2T_3), \quad x_1 = d(T, \Delta T_2T_3T_4), \quad x_2 = d(T, \Delta T_3T_4T_1), \quad x_3 = d(T, \Delta T_4T_1T_2). \tag{18}$$

Iz (17) i (18) slijedi

$$B_{234}x_1 + B_{341}x_2 + B_{412}x_3 + B_{123}x_4 = 3V. \tag{19}$$

Treba naći točku T tako da bude

$$(x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4)_{\max}. \tag{20}$$

Iz AG nejednakosti (9) dobivamo nejednakost

$$a_1a_2a_3a_4 \leqslant \left(\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4}\right)^4, \tag{21}$$

pa ako to uvažimo i primijenimo na (19), slijedi

$$B_{234}x_1 \cdot B_{341}x_2 \cdot B_{412}x_3 \cdot B_{123}x_4 \leqslant \left(\frac{3V}{4}\right)^4. \tag{22}$$

U (22) su sve veličine osim varijabli x_1, x_2, x_3, x_4 fiksne, pa se pitamo kako naći (20)? Dakle, u (22) će vrijediti jednakost ako i samo ako je

$$B_{234}x_1 = B_{341}x_2 = B_{412}x_3 = B_{123}x_4 = \frac{3V}{4}, \tag{23}$$

a odatle je $B_{234}x_1 = \dfrac{3}{4}V = \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{1}{3}B_{234}h_1$ ili $x_1 = \dfrac{1}{4}h_1$, pa na analogan način dobivamo i druge jednakosti, dakle

$$x_k = \frac{1}{4}h_k, \quad k = 1, 2, 3, 4. \tag{24}$$

Iz statike znamo, da je težište tetraedra udaljeno od svake strane (baze i plaštnih trokuta) za jednu četvrtinu duljine odgovarajuće visine tetraedra, što se može dokazati na elementaran način pomoću *metode posebnih slučajeva* i *analitičke geometrije*.

Na osnovu (24) zaključujemo, da težište tetraedra ima svojstvo

$$(x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4)_{\max} = \left(\frac{1}{4}\right)^4 h_1 \cdot h_2 \cdot h_3 \cdot h_4. \tag{25}$$

Relativno lako se može dokazati i obrat ove tvrdnje, pa je time i ovaj teorem u potpunosti dokazan.

Generalizacija: Točka T unutar *n-dimenzionalnog tetraedra*, čiji su vrhovi u točkama $T_1, T_2, ..., T_{n+1}$, gdje mora biti ispunjen uvjet nedegeneriranosti, je njegovo težište ako i samo ako je produkt udaljenosti te točke od strana *n-dimenzionalnog tetraedra* maksimalan.

Taj opći slučaj se ne može dokazati na elementaran način, no napomenimo samo to da bi rezultat bio dan u obliku

$$(x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{n+1})_{\max} = \left(\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} h_1 \cdot h_2 \cdot \ldots \cdot h_{n+1}, \tag{26}$$

što smo i očekivali, jer odatle specijalizacijom dobivamo (16) i (25) za $n = 2$ odnosno $n = 3$.

Literatura

[1] I. Brnetić, *Nejednakosti među sredinama*, HMD, Zbornik radova (1. kongres nastavnika matematike Republike Hrvatske), Zagreb 2000.

[2] B. Pavković, B. Dakić, Ž. Hanjš, P. Mladinić, *Male teme iz matematike*, HMD, Zagreb 1994.

[3] Murray R. Spiegel: *Theoretical Mechanics*, SCHAUM'S OUTLINE SERIES, McGRAW.

⋆⋆⋆

Cullenovi brojevi

Ima mnogo zanimljivh brojeva koji imaju neko dano svojstvo. Neki od njih su jako veliki i obično se ne poznaju svi takvi brojevi. Pojavom elektroničkih računskih strojeva bilo je omogućeno da se nađu još mnogi novi brojevi. No, kako god bio savršen računski stroj, on je ipak ograničen. Da li ima još koji veći broj? Najčešće je jedini način da se uz pomoć modernijih računala pokuša naći još neki.

Jedni od takvih brojeva su Cullenovi brojevi, a oni su oblika $C_n = n \cdot 2^n + 1$. Postavlja se pitanje da li ima konačno mnogo prostih Cullenovih brojeva. Za $n = 1$ je $C_1 = 3$ i on je prost. Tek je 1958. godine R. M. Robinson pokazao da je C_{141} sljedeći prost Cullenov broj. W. Keller je odredio sve Cullenove proste brojeve C_n za $n \leqslant 30\,000$. J. Young je 1997. godine našao sve takve brojeve za $n \leqslant 100\,000$. Y. Gallot je napravio program pomoću kojeg je bilo moguće naći sve proste Cullenove brojeve za $n \leqslant 633\,000$. U tabeli su dani svi do sada poznati prosti Cullenovi brojevi.

n	otkrivač	godina
481 899	M. Morii i Y. Gallot	1998
361 275	D. Smith i Y. Gallot	1998
262 419	D. Smith i Y. Gallot	1998
90 825	J. Young	1997
59 656	J.Young	1997
32 469	M. Morii	1997
32 292	M. Morii	1997
18 496	W. Keller	1984
6 611	W. Keller	1984
5 795	W. Keller	1984
4 713	W. Keller	1984
141	R. M. Robinson	1958
1	—	