ГЛИГОР ТРЕНЧЕВСКИ

АЛГЕБРА

ЗА III КЛАС НА МАТЕМАТИЧКО-ФИЗИЧКА НАСОКА

„ПРОСВЕТНО ДЕЛО"
СКОПЈЕ, 1977

Уредник:
КИРИЛ МИЛЧЕВ

Рецензенти:

д-р ИЛИЈА ШАПКАРЕВ, професор на Математичкиот факултет во Скопје

д-р ДРАГАН ДИМИТРОВСКИ, професор на Математичкиот факултет во Скопје

ИЛИЈА ЈАНЕВ, професор во гимназијата „Георги Димитров“ — Скопје

Со решение на Републичкиот педагошки совет бр. 03-2076 од 1. VII 1977 година се одобрува употребата на овој учебник.

ТРИГОНОМЕТРИСКА ФОРМА НА КОМПЛЕКСНИ БРОЕВИ

§ 1. ГЕОМЕТРИСКА ИНТЕРПРЕТАЦИЈА НА КОМПЛЕКСНИТЕ БРОЕВИ

Поимот комплексен број познат ни е од минатата година, имено:

Комплексен број z се вика подредената двојка реални броеви (a, b) т. е. $z = (a, b)$.

Броевите $z = (a, b)$, за кои $b \neq 0$, се викаат *имагинарни броеви,* а броевите од видот $z = (0, b)$ — *чисто имагинарни броеви.*

Чисто имагинарниот број (0, 1) се вика *имагинарна единица* и симболички се означува со буквата i, т. е. $i = (0, 1)$.

Покажавме дека: секој комплексен број $z = (a, b)$ може да се претстави и во неговата *алгебарска* или *стандардна форма* $z = a + bi$.

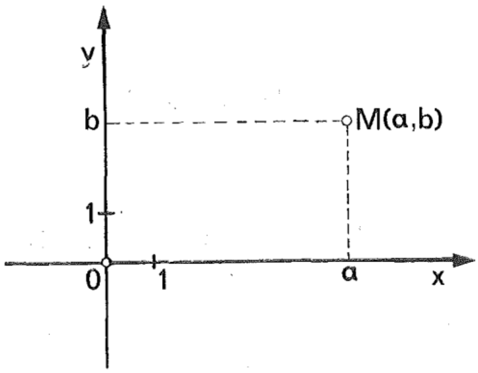
Кај комплексниот број $z = (a, b)$ или $z = a + bi$, бројот a се вика *реален дел,* а бројот b — *имагинарен дел* на комплексниот број, кое симболички го запишуваме: $\mathrm{Re}(z) = a$ и $\mathrm{Jm}(z) = b$.

Знаете дека меѓу множеството $\mathbf{R}$ на реалните броеви и множеството на сите точки на бројната оска постои обратно еднозначно соодветство (биекција), имено: На секој реален број му соодветствува една и само една точка од бројната оска, и обратно: на секоја точка од бројната оска ѝ соодветствува еден и само еден реален број.

Слично нешто може да се стори и помеѓу множеството $\mathbf{C}$ на комплексните броеви и множеството на сите точки од координатната рамнина xOy. Во рамнината π нека е зададен правоаголен координатен систем xOy. Тогаш на секоја точка $M \in \pi$ може да ѝ се придружи подредена двојка реални броеви (a, b), каде што a е апсциса, а b — ордината на точката M (црт. 1). Од друга страна со подредената двојка реални броеви (a, b) зададен е еден и само еден комплексен број $z = (a, b)$.

Според тоа, природно се наметнува следнава проста геометриска интерпретација на комплексните броеви:

На комплексниот број $z = (a, b)$ односно $z = a + bi$ му соодветствува (му ја придружуваме) точката $M(a, b)$ од координатната рамнина xOy, и обратно: на точката $M(a, b)$ од координатната рамнина xOy ѝ соодветствува (ѝ е придружен) комплексниот број $z = a + bi$.



Црт. 1

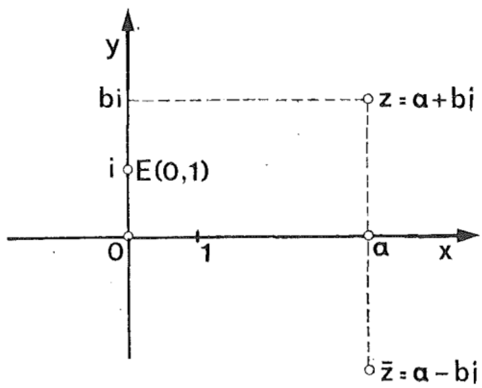
Така воспоставеното соодветство помеѓу множеството комплексни броеви $\mathbb{C}$ и сите точки од координатната рамнина xOy е обратно еднозначно (биекција). Затоа координатната рамнина xOy ја викаме уште и *бројна* или *комплексна рамнина.*

Реалните броеви $z = a + 0i = a$ на комплексната рамнина ги претставуваме со точките на Ox-оската, а чисто имагинарните броеви $z = 0 + bi = bi$ — со точките на Oy оската. Затоа Ox оската се вика уште и *реална оска,* а Oy оската — *имагинарна оска.*

На имагинарната единица $i = 0 + 1i$ ѝ соодветствува точката $E(0, 1)$, на бројот $0 = 0 + 0i$ — координатниот почеток $O(0, 0)$, а на конјугирано комплексните броеви $z = a + bi$ и $\bar{z} = a - bi$ им одговараат две точки што се симетрични спрема Ox-оската (црт. 2).

Множеството на сите комплексни броеви со исти реален дел претставува права паралелна на Oy-оската, а множенството на сите комплексни броеви со исти имагинарен дел е права паралелна на Ox оската.

Реалната оска (Ox-оската) ја дели комплексната рамнина на две полурамнини (горна и долна), што се определени соодветно со неравенствата: $Jm(z) \geqslant 0$ и $Jm(z) \leqslant 0$.

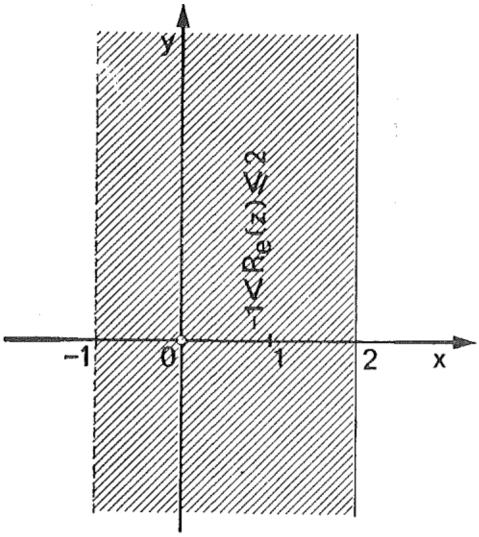


Црт. 2

Имагинарната оска (Oy-оската) ја дели комплексната рамнина исто така на две полурамнини (десна и лева), кои пак се определени соодветно со неравенствата:

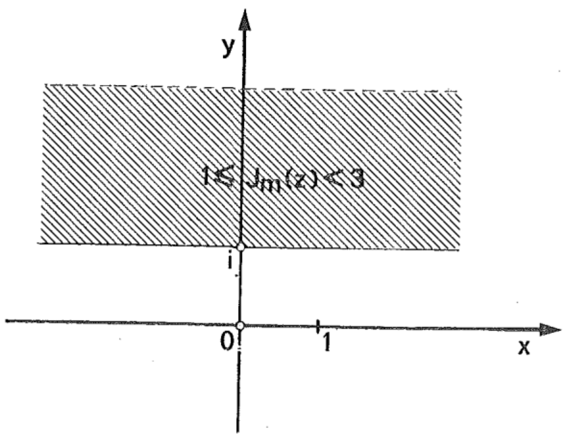
$$Re(z) \geqslant 0 \text{ и } Re(z) \leqslant 0.$$

Деловите од комплексната рамнина xOy на кои лежат сите точки $z = x + yi$, што ги задоволуваат условите: а) $-1 < Re(z) \leqslant 2$, б) $1 \leqslant Jm(z) < 3$ на цртежите 3 и 4 дадени се шрафирано.



Црт. 3

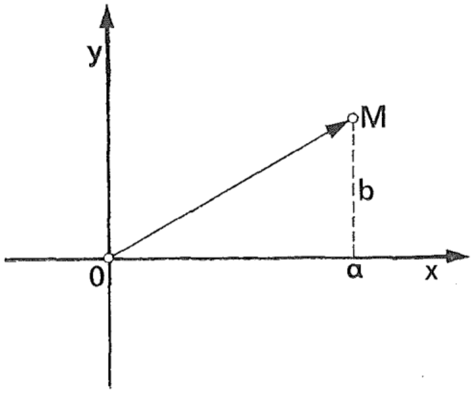
На комплексните броеви може да се даде и друга геометриска интерпретација. Секоја точка М (a, b) од рамнината xOy, може да се доведе во еднозначно соодветство со нејзиниот *радиус-вектор* $\overrightarrow{OM}$, т. е. векторот кој поаѓа од координатниот почеток $O(0, 0)$, а завршува во точката $M(a, b)$ (црт. 5). Затоа секој комплексен број $z = a + bi$, што ѝ соодветствува на точката М (a, b), може да се разгледува и како вектор $\overrightarrow{OM}$ со координати (a, b). Очигледно е дека така воспоставеното соодветство помеѓу множеството на сите комплексни броеви и множеството на сите вектори во координатната рамнина XOY што поаѓаат од координатниот почеток ќе претставува обратно еднозначно соодветство, т. е. на секој комплексен број $z = a + bi\,(z \neq 0)$ ќе му одговара по еден и само еден вектор $\overrightarrow{OM}$, и обратно: на секој вектор $\overrightarrow{OM}$ му одговара по еден и само еден комплексен број $z = a + bi$ (црт. 5).



Црт. 4

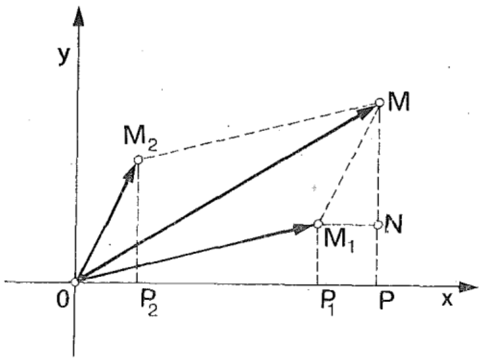
Ваквата геометриска интерпретација на комплексните броеви со помош на вектори овозможува операциите собирање и одземање на комплексните броеви да се сведат на соодветните операции со вектори.

На пример, нека се дадени броевите $z_1 = a_2 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$
Нивниот збир е еднаков на $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$



Црт. 5

Ако на комплексниот број z_1 му соодветствува вектор $\overrightarrow{OM_1}$ со координати на завршната точка $M_1 (a_1, b_1)$, на комплексниот број z_2 — вектор $\overrightarrow{OM_2}$ со координати на завршната точка M_2 (a_2, b_2), тогаш збирот на векторите $\overrightarrow{OM_1}$ и $\overrightarrow{OM_2}$ ќе биде векторот $\overrightarrow{OM}$ со почеток во координатниот почеток O и завршна точка во четвртото теме M на паралелограмот што е конструиран над векторите $\overrightarrow{OM_1}$ и $\overrightarrow{OM_2}$ (црт. 6).



Црт. 6

Од складноста на триаголниците OP_2M_2 и M_1NM следува дека точката M — завршна точка на векторот $\overrightarrow{OM}$, ќе има координати:

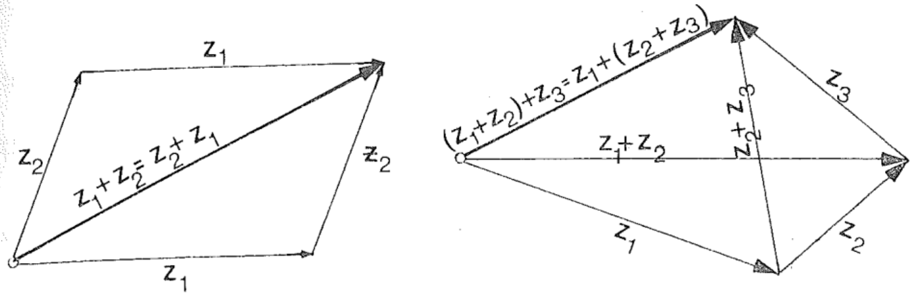
апсциса: $OP = OP_1 + P_1P = OP_1 + OP_2 = a_1 + a_2$ и

ордината: $PM = PN + NM = P_1M_1 + P_2M_2 = b_1 + b_2$

Според тоа, точката M односно векторот $\overrightarrow{OM}$ ќе му одговара на комплексниот број $z = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$, т. е. на збирот на комплексните броеви $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$.

Значи, ако на бројот z_1 му соодветствува вектор $\overrightarrow{OM_1}$, а на бројот z_2 — вектор $\overrightarrow{OM_2}$, тогаш на збирот $z_1 + z_2$ ќе му одговара збирот на векторите $\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}$, а на разликата $z_1 - z_2$ (аналогно може да се покаже) ќе ѝ одговара разликата на векторите $\overrightarrow{OM_1} - \overrightarrow{OM_2}$.

Ако комплексните броеви z_1, z_2 и z_3 ги третираме како вектори, лесно може да се докаже дека за собирањето на комплексните броеви важат комутативниот и асоцијативниот закон. Тоа јасно се гледа на цртежот 7.



Црт. 7

ЗАДАЧИ

1. Одреди ги точките од комплексната рамнина што им одговараат на броевите: $z_1 = -1 + 2i$, $z_2 = -2i$, $z_3 = 2 - 3i$, $z_4 = \sqrt{2} - 2i$, $z_5 = 1 - i$.

2. Запиши ги во алгебарска форма комплексните броеви што им одговараат на точките: $A(-2,1)$, $B(0,-5)$, $C(-3,0)$, $D(2\sqrt{3}, 2)$, $E(0,1)$.

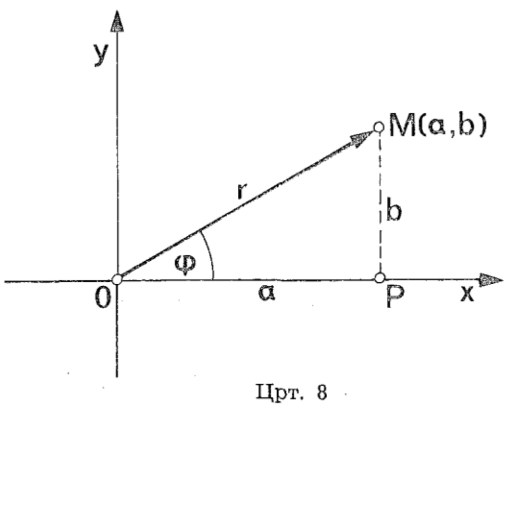
3. Како се расположени точките во рамнината што им одговараат на два: а) спротивни комплексни броја, б) конјугирано комплексни броеви?

4. Одреди го множеството на сите точки $z = x + yi$ од комплексната рамнина, кои ги задоволуваат условите: а) $Re(z) < 2$, б) $Jm(z) > 1$, в) $0 \leqslant Re(z) < 5$ и $0 \leqslant Jm(z) < 5$.

5. На комплексните броеви $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$ им одговараат соодветно точките $M_1(a_1, b_1)$ и $M_2(a_2, b_2)$. Одреди го комплексниот број $z = x + yi$ што ѝ одговара на средината M на отсечката $M_1 M_2$.

§ 2. ТРИГОНОМЕТРИСКА ФОРМА НА КОМПЛЕКСНИТЕ БРОЕВИ

На комплексниот број $z = a + bi$ нека му соодветствува вектор $\overrightarrow{OM}$ (црт. 8). Должината на векторот $\overrightarrow{OM}$, т. е. растојанието на точката M од координатниот почеток да го означиме со r, а аголот што векторот $\overrightarrow{OM}$ го зафаќа со позитивната насока на Ox-оската да го означиме со φ.



Црт. 8

Врз основа дефинициите на тригонометриските функции синус и косинус од цртежот 8 имаме: $\frac{a}{r} = \cos\varphi$, $\frac{b}{r} = \sin\varphi$, односно

$$a = r\ cos\varphi,\ b = r\ sin\varphi$$

Тогаш комплексниот број $z = a + bi$ можеме да го запишеме и во следнава форма: $z = a + bi = r\ cos\varphi + ir\ sin\varphi$

или
$$z = r\ (cos\varphi + i\ sin\varphi), \tag{1}$$

која се вика *тригонометриска форма* на комплексните броеви.

Должината r на векторот $\overrightarrow{OM}$ се вика *модул или апсолутна вредност* на комплексниот број z и се означува со $|z|$, а аголот φ, што векторот $\overrightarrow{OM}$ го зафаќа со позитивната насока на Ox-оската се вика *аргумент* на комплексниот број z и се означува со $Arg\ z$.

Аргумент на бројот 0 не се дефинира.

Од правоаголниот триаголник OPM наоѓаме $r = \sqrt{a^2 + b^2}$

Значи: $r = |z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$ (2)

Гледаме, модулот на било кој комплексен број различен од нула ($a + bi \neq 0$) секогаш е позитивен реален број, а еднаков е на нула само ако $z = a + bi = 0$, т. е. ако $a = b = 0$.

Ако комплексниот број $a + bi$ е реален, т. е. ако $b = 0$, тогаш:

$$|z| = |a + bi| = |a| = \sqrt{a^2} = \begin{cases} a, & \text{ако} \quad a \geqslant 0 \\ -a, & \text{ако} \quad a < 0 \end{cases}$$

Според тоа, поимот апсолутна вредност на реален број е специјален случај од поимот модул (апсолутна вредност) на комплексен број.

Модулот r на комплексниот број z е еднозначно определен, но со аргументот φ не е така. Аргументот на било кој комплексен број $z \neq 0$ има бесконечно многу вредности. И навистина, ако φ е аргумент на z, тогаш и $\varphi + 2k\pi$, каде што $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ е исто аргумент на тој број. Од сите тие вредности обично ја избираме вредноста на φ, што го задоволува условот $-\pi < \varphi \leqslant \pi$.

Таа вредност се вика *главна вредност* на аргументот на бројот z и се означува со $arg\ z$.

Помеѓу $Arg\ z$ и $arg\ z$ постои релацијата:

$$Arg\ z = arg\ z + 2k\pi \ (k \in \mathbf{Z})$$

Забелешка: Главната вредност на z понекогаш се дефинира и $0 \leqslant \varphi < 2\pi$.

Аргументот на комплексниот број $z = a + bi \neq 0$ го одредуваме од релациите: $\sin\varphi = \frac{b}{r}$, $\cos\varphi = \frac{a}{r}$ $(r \neq 0)$ (3)

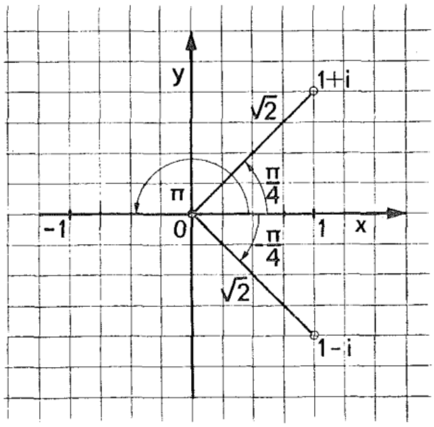
При $a \neq 0$ од формулите (3) следува дека $\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}$

Од знаците на $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$, односно од знаците на a и b утврдуваме во кој квадрант лежи бараната вредност на аргументот φ.

На пример: $|1+i|=\sqrt{2}$, $\arg(1+i)=\frac{\pi}{4}$

$|1-i|=\sqrt{2}$, $\mathrm{agr}\,(1-i)=-\frac{\pi}{4}$

$|-1|=1$ $\mathrm{agr}\,(-1)=\pi$ (црт. 9)



Црт. 9

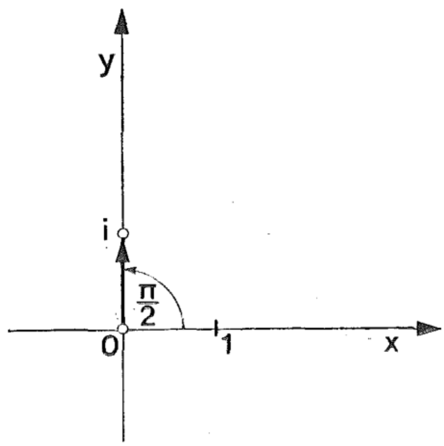
Може да се каже дека модул на даден комплексен број $z=\vec{OM}$ — тоа е растојанието од координатниот почеток O до точката M.

Според тоа, сите комплексни броеви z со исти модул $|z|=r$ лежат на кружница k со радиус r и центар во почетокот O.

Сите комплексни броеви z, пак, со исти аргумент $Agr\,z=\varphi$ се наоѓаат на една полуправа OM, која со позитивната насока на реалната оска зафаќа агол φ.

На неколку примери ќе покажеме како даден комплексен број го запишуваме во неговата тригонометриска форма.

Задача 1. Комплексниот број $1+i\sqrt{3}$, да се запише во тригонометриска форма.



Црт. 10

Решение. Прво ги одредуваме модулот и аргументот на бројот $1 + i\sqrt{3}$.

Од равенствата (2) и (3) имаме: $r = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$

$$\sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2},\quad \cos\varphi = \frac{1}{2},\ \text{а оттука}\ \varphi = \frac{\pi}{3}$$

Значи: $1 + i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$.

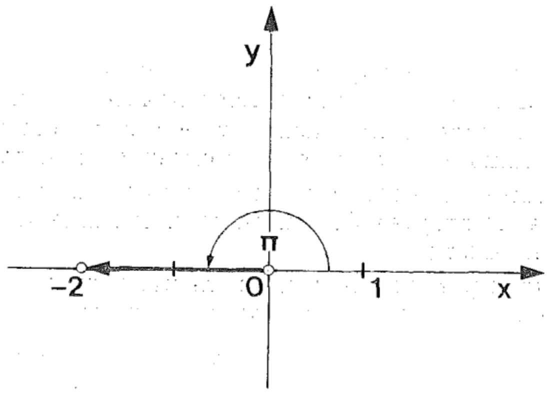
Задача 2. Да се претстави во тригонометриска форма бројот i.

Решение. Од цртежот 10 гледаме дека модулот и аргументот на имагинарната единица i се: $r = 1$ и $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Според тоа: $i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$.

Задача 3. Да се претстави во тригонометриска форма бројот -2.

Решение: Од цртежот 11 имаме: $r = 2$ и $\varphi = \pi$.
Значи: $-2 = 2\,(\cos\pi + i\,\sin\pi)$.

Задача 4.* Да се претстави во тригонометриска форма комплексниот број $z = -2\sin\frac{\pi}{5} + 2i\cos\frac{\pi}{5}$



Црт. 11

Решение. Гледаме: $Re\,(z) = -2\sin\frac{\pi}{5},\quad Jm\,(z) = 2\cos\frac{\pi}{5}$

Модулот на комплексниот број ќе биде:

$$r = \sqrt{\left(-2\sin\frac{\pi}{5}\right)^2 + \left(2\cos\frac{\pi}{5}\right)^2} = \sqrt{4\sin^2\frac{\pi}{5} + 4\cos^2\frac{\pi}{5}} = \sqrt{4\left(\cos^2\frac{\pi}{5} + \sin^2\frac{\pi}{5}\right)} = 2$$

Од $\sin\varphi = \frac{Jm\,(z)}{r} = \frac{2\cos\frac{\pi}{5}}{2} = \cos\frac{\pi}{5}$; $\cos\varphi = \frac{Re\,(z)}{r} = \frac{-2\sin\frac{\pi}{5}}{2} = -\sin\frac{\pi}{5}$ односно $\operatorname{tg}\varphi = \frac{\cos\frac{\pi}{5}}{-\sin\frac{\pi}{5}} = -\operatorname{ctg}\frac{\pi}{5}$, гледаме бараниот аргумент φ на дадениот комплексен број z ќе биде таков агол φ, за кој е $\operatorname{tg}\varphi = -\operatorname{ctg}\frac{\pi}{5}$. Тоа е аголот $\varphi = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{5} = \frac{7\pi}{10}$, бидејќи $\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{5}\right) = -\operatorname{ctg}\frac{\pi}{5}$. Според тоа: $z = 2\left(\cos\frac{7\pi}{10} + i\sin\frac{7\pi}{10}\right)$

Бидејќи е $sin\varphi = sin\ (\varphi + 2k\pi)$ $cos\varphi = cos\ (\varphi + 2k\pi)$, тоа тригонометриската форма (1) на комплексниот број z, може да се запише и вака:

$$z = r\,[cos\,(\varphi + 2k\pi) + isin\,(\varphi + 2k\pi)],\quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{4}$$

Оттука следува дека: Два комплексни броја $z_1 = \alpha_1 + b_1 i$ и $z_2 = \alpha_2 + b_2 i$ претставени во тригонометриска форма

$$z_1 = r_1\,(cos\varphi_1 + isin\varphi_1),\ z_2 = r_2\ (cos\varphi_2 + isin\varphi_2)$$

еднакви се ако и само ако:

$$r_1 = r_2, \varphi_1 = \varphi_2 + 2k\pi,\quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$$

За модулите и аргументите на два конјугирано комплексни броја $z = \alpha + bi$ и $\bar{z} = \alpha - bi$ важат релациите: $\bar{r} = r$, $\bar{\varphi} = -\varphi$, односно $|\bar{z}| = |z|$, $arg\,\bar{z} = -arg\,z$.

Значи, тригонометриските форми на два конјугирано комплексни броеви z и $\bar{z}$ ќе бидат:

$$z = r\,(cos\varphi + i\,sin\varphi),\ \bar{z} = r\,[cos\,(-\varphi) + i\,sin\,(-\varphi)] = r\,(cos\varphi - i\,sin\varphi).$$

ЗАДАЧИ

6. Одреди го модулот и аргументот на комплексните броеви:

$$z_1 = \sqrt{3} - i,\ z_2 = 1 - i,\ z_3 = 1 - i\sqrt{3},\ z_4 = 2 + i\sqrt{12},\ z_5 = 1 + i$$

7. Претстави ги во тригонометриска форма броевите:

$$z_1 = 1,\ z_2 = -1,\ z_3 = -2,\ z_4 = -i,\ z_5 = 3i,\ z_6 = -5i$$

8.* Одреди го реалниот и имагинарниот дел на комплексните броеви: а) $1 + cos\alpha + isin\alpha$, б) $1 + itg\alpha$, в) $sin\alpha + icos\alpha$, г) $1 + sin\alpha - icos\alpha$

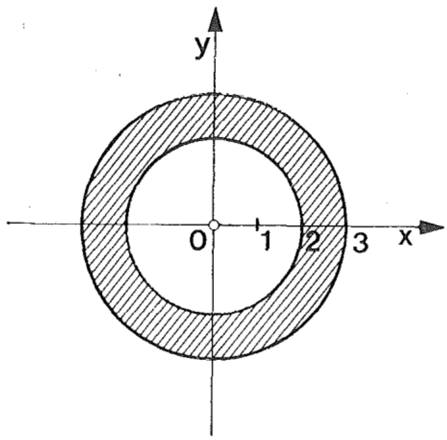
9. Претстави ги комплексните броеви во алгебарска форма:

$$\text{а) } 3\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right),\ \text{б) } 2\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$$

10. Даден е бројот $z = \cos + i\sin\varphi$, претстави ги во тригонометриска форма броевите: $\bar{z}$ и z^{-1}

11. Кое множество од точки во рамнината им одговара на сите комплексни броеви, кои имаат: а) модул $r = 2$, б) главна вредност на аргументот $\varphi = \frac{3\pi}{4}$

12. Кое заедничко својство го имаат сите комплексни броеви што им соодветствуваат на точките од кружниот прстен на цртеж 12 (вклучувајќи ги и точките од двете кружници)?



Црт. 12

13. Дадена е точка што му соодветствува на бројот $z = x + yi$. Одреди кои броеви ќе им соодветствуваат на точките што се симетрични на дадената точка: а) во однос на реалната оска, б) во однос на имагинарната оска, в) во однос на координатниот почеток.

14. На што е еднаков аргументот на: а) позитивен реален број, б) негативен реален број, в) чисто имагинарен број?

15. Одреди го модулот и аргументот на комплексните броеви:

а) $\dfrac{\sqrt{3}-i}{1-i\sqrt{3}}$, б) $\dfrac{2}{\sqrt{2}+i}$, в) $\dfrac{2}{-1+i\sqrt{3}}$

16. На координатната рамнина каде лежат точките што им одговараат на сите комплексни броеви во кои: а) реалниот дел е еднаков на -3, б) имагинарниот дел е еднаков на 7, в) аргументот е еднаков на $\dfrac{3\pi}{2}$, г) модулот е еднаков на 5.

§ 3. МНОЖЕЊЕ И ДЕЛЕЊЕ НА КОМПЛЕКСНИТЕ БРОЕВИ ВО ТРИГОНОМЕТРИСКА ФОРМА

Множењето и делењето на комплексни броеви многу се поедноставува ако тие се зададени во нивната тригонометриска форма.

За производот и количникот на два комплексни броја важат теоремите:

Теорема 1. *Модулот на производот на два комплексни броја (различни од нула) еднаков е на производот на нивните модули, а аргументот — еднаков е на збирот од нивните аргументи.*

Доказ: Нека се дадени комплексните броеви:

$$z_1 = r_1\ (\cos\varphi_1 + i\ \sin\varphi_1),\quad z_2 = r_2\ (\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2).$$

Ако ги помножиме, добиваме: $z_1 \cdot z_2 = r_1 (\cos\varphi_1 + i\ \sin\varphi_1)\cdot r_2 (\cos\varphi_2 + i\ \sin\varphi_2) = r_1 r_2 [\cos\varphi_1\ \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\ \sin\varphi_2 + i(\sin\varphi_1\ \cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\ \sin\varphi_2)]$

Но согласно адиционите теореми на тригонометриските функции:

$\cos\varphi_1\ \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\ \sin\varphi_2 = \cos(\varphi_1 + \varphi_2)$ и $\sin\varphi_1\ \cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\ \sin\varphi_2 = \sin(\varphi_1 + \varphi_2)$ имаме:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)] \tag{1}$$

Од равенството (1) следуваат релациите:

$|z_1 \cdot z_2| = r_1 \cdot r_2 = |z| \cdot |z_2|$; $\operatorname{Arg}(z_1 \cdot z_2) = \varphi_1 + \varphi_2 = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2$, $(z_1 \cdot z_2 \neq 0$

Со тоа теоремата е докажана.

Множењето на два комплексни броја што се зададени во тригонометриска форма го вршиме според формулата (1). Или со други зборови:

Комплексни броеви се множат кога ќе ги помножиме нивните модули, а аргументите ќе им ги собереме.

Забелешка: За главните вредности на аргументите во општ случај не важи формулата: $\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$

На пример: нека $z_1 = z_2 = -\sqrt{3} + i$. Главните вредности на аргументите на z_1, z_2 и $z_1 \cdot z_2 = (-\sqrt{3} + i)^2 = 2 - 2\sqrt{3}\,i$ се: $\operatorname{agr} z_1 = \operatorname{agr} z_2 = \frac{5\pi}{6} = 150°$, $\operatorname{agr}(z_1 \cdot z_2) = -\frac{\pi}{3}$

Според тоа, тука е $\arg(z_1 \cdot z_2) \neq \arg z_1 + \arg z_2$

Може да се докаже дека:

$\operatorname{agr}(z_1 \cdot z_2) = \operatorname{agr} z_1 + \arg z_2 + 2\pi\lambda$, каде што $\lambda \in \{-1, 0, 1\}$

Задача 1. Да се одреди производот на комплексните броеви:

$z_1 = 2(\cos 43° + i \sin 43°)$, $\quad z_2 = \sqrt{3}(\cos 77° + i \sin 77°)$

Решение. Врз основа на равенството (1), имаме:

$$z_1 \cdot z_2 = 2\sqrt{3} \cdot [\cos(43° + 77°) + i \sin(43° + 77°)] = 2\sqrt{3}(\cos 120° + i \sin 120°) =$$
$$= 2\sqrt{3}\,[(-\cos 60° + i \sin 60°) = 2\sqrt{3}\left(-\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\sqrt{3} + 3\,i$$

Равенството (1) лесно може да се прошири и за производ од n множители, т. е. ќе важи:

$$z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots z_n = r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \ldots r_n\,[\cos(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \ldots + \varphi_n) +$$
$$+ i \sin(\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n)] \qquad (2)$$

Задача 2. Да се одреди производот на комплексните броеви:

$$z_1 = 3\left(\cos\frac{\pi}{6} + i \sin\frac{\pi}{6}\right),\ z_2 = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i \sin\frac{2\pi}{3}\right);$$
$$z_3 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i \sin\frac{5\pi}{6}\right)$$

Решение: $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 = 3 \cdot 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} + \frac{5\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} + \frac{5\pi}{6}\right)\right] =$

$$= 12\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i \sin\frac{5\pi}{3}\right) = 12\left[\cos\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right)\right] = 12\left(\cos\frac{\pi}{3} - i \sin\frac{\pi}{3}\right) =$$
$$= 12\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 6 - 6\,i\sqrt{3}$$

Производот на два конјугирано комплексни броја z и $\bar{z}$ ќе биде: $z \cdot \bar{z} = r(\cos\varphi + i \sin\varphi) \cdot r[\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi)] = r^2\,[\cos(\varphi - \varphi) + i \sin(\varphi - \varphi)] = r^2(\cos 0 + i \sin 0) = r^2(1 + i \cdot 0) = r^2$; т.е. $z \cdot \bar{z} = r^2 = |z|^2$

Оттука во специјален случај, ако $r = 1$, имаме:

$$(\cos\varphi + i \sin\varphi) \cdot (\cos\varphi - i \sin\varphi) = 1 \qquad (3)$$

Теорема 2. *Модулот на количникот на два комплексни броја (различни од нула) еднаков е на количникот од модулот на деленикот и делителот, а аргументот — еднаков е на разликата од аргументите на деленикот и делителот,* т. е. $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$; $\operatorname{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2$

Доказ: Нека се дадени комплексните броеви:

$z_1 = r_1 (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $z_2 = r_2 (\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$

Нивниот количник при $z_1 \neq 0$ и $z_2 \neq 0$, ќе биде:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}{(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)} =$$

$$= \frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1\sin\varphi_2)}{\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2}$$

А врз основа адиционите теореми за тригонометриските функции:

$\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2 = \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$; $\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1\sin\varphi_2 = \sin(\varphi_1 - \varphi_2)$

имаме:
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\cdot[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)] \tag{4}$$

Според тоа: $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{r_1}{r_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}$; $\operatorname{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \varphi_1 - \varphi_2 = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2$

Со тоа теоремата е докажана.

Задача 3. Да се одреди количникот на комплексните броеви:

$$z_1 = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) \text{ и } z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$$

Решение: Согласно равенството (4) добиваме:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{\sqrt{2}}\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{5\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{5\pi}{12}\right)\right] = \frac{2}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 + i$$

ЗАДАЧИ

17. Определи го производот на комплексните броеви:

а) $3(\cos 55^\circ + i\sin 55^\circ)\cdot 2(\cos 35^\circ + i\sin 35^\circ)$,

б) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)\cdot\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$, в) $\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)\cdot 3\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$

18. Определи го количникот на броевите:

а) $6(\cos 105^\circ + i\sin 105^\circ) : (\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ)$,

б) $3\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) : \sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$, в) $\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) : 2\left(\sin\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$

19. Да се одредат броевите: а) $z_1\cdot z_2$, б) $\frac{z_1}{z_2}$, в) $\frac{z_2}{z_1}$,

ако $z_1 = 2(\cos 75^\circ + i\sin 75^\circ)$ и $z_2 = \sqrt{2}(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ)$

20. Како се променува модулот и аргументот на комплексниот број z, ако тој: а) се помножи со i, б) се подели со i.

21. Докажи дека количникот на два комплексни броја со еднакви аргументи е реален број.

§ 4. СТЕПЕНУВАЊЕ НА КОМПЛЕКСНИ БРОЕВИ. МОАВРОВА ФОРМУЛА

Комплексен број z претставен во тригонометриска форма се степенува согласно формулата:

$$z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi), \quad n \in \mathbf{N} \tag{5}$$

Навистина: Нека $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, тогаш согласно равенството (2) имаме:

$$z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot \ldots \cdot z}_{n \text{ множ.}} = \underbrace{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\cdot r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\ldots r(\cos\varphi + i\sin\varphi)}_{n \text{ множители}} =$$

$$= \underbrace{r\cdot r\cdot\ldots\cdot r}_{n \text{ пати}}\cdot[\cos(\underbrace{\varphi + \varphi + \ldots + \varphi}_{n \text{ собироци}}) + i\sin(\underbrace{\varphi + \varphi + \ldots + \varphi}_{n \text{ собироци}})] = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

односно: $z^n = [r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$ (5′)

Оттука следуваат релациите: $|z^n| = r^n = |z|^n$; $\mathrm{Agr}\,(z^n) = n\varphi = n \operatorname{Arg} z$

Задача. Да се пресмета степенот $(1 + i)^{12}$

Решение. Ако бројот $1 + i$ го претставиме во тригонометриска форма:

$$1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right), \text{ добиваме:}$$

$$(1+i)^{12} = \left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^{12} = \left(\sqrt{2}\right)^{12}\left(\cos 12\cdot\frac{\pi}{4} + i\sin 12\cdot\frac{\pi}{4}\right) =$$
$$= 2^6(\cos 3\pi + i\sin 3\pi) = 64(\cos\pi + i\sin\pi) = 64(-1 + i\cdot 0) = -64$$

При $r = 1$ формула (5′) го добива видот:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi \tag{6}$$

Оваа формула игра голема улога во елементарната математика и се вика *Моаврова формула,* по името на францускиот математичар A. de Moivre, кој прв ја открил во 1707 год.

Теорема: *Моавровата формула важи и кога степеновиот показател е кој и да било цел негативен број,* т. е. ако n е природен број, тогаш:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{-n} = \cos(-n\varphi) + i\sin(-n\varphi)$$

Доказ: Нека $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$. Тогаш: $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{-n} = \dfrac{1}{(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n} =$

$$= \frac{(\cos\varphi - i\sin\varphi)^n}{(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n\cdot(\cos\varphi - i\sin\varphi)^n} = \frac{[\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)]^n}{[(\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\varphi - i\sin\varphi)]^n} =$$

$$= \frac{\cos(-n\varphi) + i\sin(-n\varphi)}{1^n} = \cos(-n\varphi) + i\sin(-n\varphi) \quad \text{т.е.}$$

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{-n} = (\cos\varphi - i\sin\varphi)^n = \cos(-n\varphi) + i\sin(-n\varphi)$$

Со помош на Моавровата формула изразите $\sin n\varphi$ и $\cos n\varphi$ лесно можат да се изразат преку синус и косинус на аголот φ.

Пример 1. Од $\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^2 = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi + 2i\sin\varphi\cdot\cos\varphi$, а врз основа дефиницијата за еднаквост на два комплексни броја ги добиваме познатите формули:

$$\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi, \quad \sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cdot\cos\varphi$$

Пример 2. Од $\cos 3\varphi + i\sin 3\varphi = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^3 = \cos^3\varphi + 3i\cos^2\varphi\cdot\sin\varphi + 3i^2\cdot\cos\varphi\cdot\sin^2\varphi + i^3\sin^3\varphi = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi + i(3\cos^2\varphi\cdot\sin\varphi - \sin^3\varphi)$ ги добиваме формулите:

$$\cos 3\varphi = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\,\sin^2\varphi,$$
$$\sin 3\varphi = 3\cos^2\varphi\cdot\sin\varphi - \sin^3\varphi$$

ЗАДАЧИ

22. Даден е комплексниот број $z = \sqrt{2}(\cos 15^\circ + i\sin 15^\circ)$. Да се одредат броевите: а) z^4, б) z^6, в) z^{10}.

23. Да се одреди вредноста на изразот: а) z^3 за $z = \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}$, б) z^4+1 за $z = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$.

24. Упрости ги изразите: а) $(1+i\sqrt{2})^5 - (1-i\sqrt{2})^5$, б) $(\sqrt{3}+i)^6 - (\sqrt{3}-i)^6$.

25. Пресметај: а) $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{30} + \left(\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{30}$, б) $(1+i)^{10} + (1-i)^{10}$.

26. Докажи дека броевите: $(a+bi)^n$ и $(a-bi)^n$, $n\in\mathbf{N}$ се конјугирано комплексни.

27. Докажи дека за кои и да било комплексни броеви z и w важат равенствата:

а) $|z\cdot w| = |z|\cdot|w|$, б) $\overline{\left(\dfrac{z}{w}\right)} = \dfrac{\bar z}{\bar w}$, в) $\overline{z^n} = (\bar z)^n$

28. Докажи дека: ако е $z = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, $w = \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}$, тогаш:

а) $z^3 = w^3 = 1$, б) $z^2 = w$, в) $w^2 = z$.

§ 5. КОРЕНУВАЊЕ НА КОМПЛЕКСНИ БРОЕВИ

Во множеството на комплексните броеви поимот корен го разгледуваме во поопшт вид и го дефинираме вака:

Дефиниција: *Корен n-ти од комплексниот број $z \neq 0$ се вика секој комплексен број w, чиј n-ти степен е еднаков на дадениот број z*, т. е.

$$\sqrt[n]{z} = w \overset{Df}{\Leftrightarrow} w^n = z$$

Ќе докажеме дека важи следнава:

Теорема: *Во множеството на комплексните броеви корен n-ти од кој и да било комплексен број $z \neq 0$ секогаш постои и има точно n различни вредности.*

Доказ: Да претпоставиме дека n-тиот корен од комплексниот број $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ е некој комплексен број $w = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$, со модул ρ и аргумент θ.

Ако комплексниот број w постои, тој ќе ја задоволува релацијата: $w^n = z$, односно: $[\rho(\cos\theta + i\sin\theta)]^n = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$,
или $\rho^n(\cos n\theta + \sin n\theta) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

Оттука врз основа еднаквоста на два комплексни броја во тригонометриска форма следуваат релациите: $\rho^n = r$, $n\theta = \varphi + 2k\pi$,

$$\text{или} \quad \rho = \sqrt[n]{r}, \quad \theta = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}, \; (k \in \mathbf{Z})$$

Гледаме дека за модулот ρ на бараниот комплексен број w добиваме единствена ненегативна вредност $\rho = \sqrt[n]{r}$, бидејќи $\sqrt[n]{r}$ го разгледуваме како аритметички корен. Меѓутоа за аргументот θ се добиваат бесконечно многу вредности, во зависност од целиот број k.

Според тоа, бараниот комплексен број w — n-ти корен од дадениот број z, ќе биде:

$$w_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{7}$$

каде што со w_k ја означуваме онаа вредност на w што му одговара на избраниот цел број k.

Меѓутоа, за различни вредности на k не секогаш ќе добиваме и различни комплексни броеви w_k. Всушност, при зголемувањето на k за 1 аргументот $\theta_k = Arg \; w_k = \dfrac{\varphi + 2k\pi}{n}$ ќе се зголеми за $\dfrac{2\pi}{n}$ радијани, а при зголемувањето на k за n единици θ_k ќе се зголеми за 2π.

Но бидејќи тригонометриските функции синус и косинус се периодични со најмал период 2π, тогаш ќе биде: $w_{k+n} = w_k$.

Според тоа, формулата (7) определува само n различни комплексни броеви w_k, кои можат да се добијат кога на k му даваме кои и да било n последователни цели вредности, на пример $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Така на пример, од формулата (7) за $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, добиваме:

$$\text{при } k = 0 \quad w_0 = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right),$$

$$\text{при } k = 1 \quad w_1 = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi}{n}\right),$$

$$\text{при } k = 2 \quad w_2 = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 4\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 4\pi}{n}\right),$$

. . . .

. . . .

$$\text{при } k = n-1 \quad w_{n-1} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + (n-1)2\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + (n-1)2\pi}{n}\right).$$

Ако понатаму продолжиме ќе видиме дека:

$$w_n = w_0, \quad w_{n+1} = w_1, \quad w_{n+2} = w_2, \quad \text{итн.}$$

Следователно, n-ти корен од кој и да било комплексен број (реален или имагинарен) има точно n различни вредности, кои се добиваат од равенството (7) за $k = 0, 1, 2, 3, \ldots, n-1$, т. е.

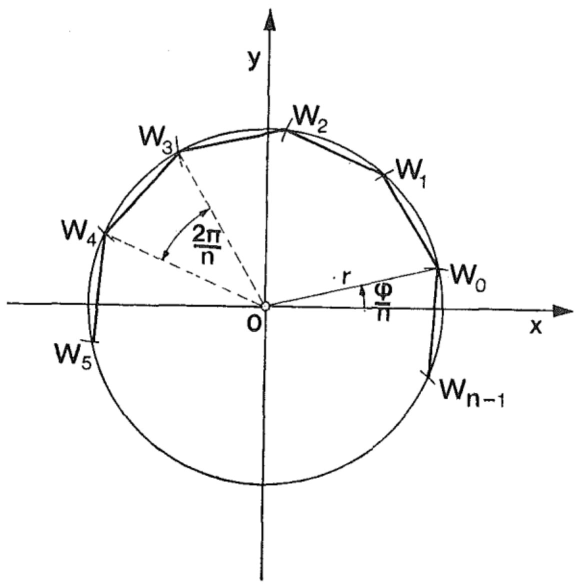
$$\sqrt[n]{z} = \{w_0, \; w_1, \; w_2, \; w_3, \; \ldots, \; w_{n-1}\}.$$

Со тоа теоремата е докажана.

Забелешка. Ако z е реален број, тогаш при употребата на симболот $\sqrt[n]{z}$ може да настане недоразбирање. Имено, во множеството на реалните броеви $\sqrt[n]{z}$ е еднозначно определен број, но (за $z \neq 0$) во множеството на комплексните броеви тоа е множество од n елементи. За да го избегнеме тоа недоразбирање, ќе пишуваме $\sqrt[n]{z}$ кога се работи во множеството на комплексните броеви, за разлика од $\sqrt[n]{z}$ кога работиме во множеството на реалните броеви.

Вредноста $w_0 = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right)$ се вика *главна вредност* на n-тиот корен од комплексниот број z.

Забележуваме дека модулите на сите n вредности на w_k (7) се еднакви на $\sqrt[n]{r}$, а аргументите: $\frac{\varphi}{n}, \frac{\varphi+2\pi}{n}, \frac{\varphi+4\pi}{n}, \ldots, \frac{\varphi+(n-1)2\pi}{n}$ им се разликуваат еден од друг за по $\frac{2\pi}{n}$. Тоа покажува дека точките што им одговараат на сите n вредности на n-тиот корен од комплексниот број z лежат на една иста кружница со центар во координатниот почеток O и радиус еднаков на $\rho = \sqrt[n]{r}$ (црт. 13), а кружницата ја делат на n складни делови.



Црт. 13

Според тоа, сите n вредности на n-тиот корен од комплексниот број $z \neq 0$ (реален или имагинарен) во комплексната рамнина претставуваат темиња на еден правилен n — аголник што е впишан во кружница со радиус $\sqrt[n]{r}$.

Задача 1. Да се одредат сите вредности на $\sqrt[3]{i}$.

Решение: Знаеме дека $i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$. Тогаш бараните вредности на $\sqrt[3]{i}$ ќе бидат

$$w_k = \cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3}, \quad k = 0,\ 1,\ 2, \quad \text{т.е.}$$

$$w_0 = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$w_1 = \cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi}{3} = \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$w_2 = \cos\frac{\frac{\pi}{2} + 4\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2} + 4\pi}{3} = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = 0 - 1\,i = -i$$

Задача 2. Да се одредат сите вредности на $\sqrt[4]{1+i}$

Решение. Тригонометриската форма на комплексниот број $1+i$ гласи:

$$1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

Бараните вредности на $\sqrt[4]{1+i}$ дадени се со равенството:

$$w_k = (\sqrt{2})^{\frac{1}{4}}\left[\cos\frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{4} + i\sin\frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{4}\right], \ k = 0,\ 1,\ 2,\ 3.$$

$$w_0 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\pi}{16} + i\sin\frac{\pi}{16}\right),$$

$$w_1 = \sqrt[8]{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{16} + \frac{2\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{16} + \frac{2\pi}{4}\right)\right] = \sqrt[8]{2}\left(-\sin\frac{\pi}{16} + i\cos\frac{\pi}{16}\right),$$

$$w_2 = \sqrt[8]{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{16} + \frac{4\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{16} + \frac{4\pi}{4}\right)\right] = \sqrt[8]{2}\left(-\cos\frac{\pi}{16} - i\sin\frac{\pi}{16}\right),$$

$$w_3 = \sqrt[8]{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{16} + \frac{6\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{16} + \frac{6\pi}{4}\right)\right] = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\pi}{16} - i\sin\frac{\pi}{16}\right).$$

Задача 3. Да се одредат сите вредности на $\sqrt[4]{-2 + 2i\sqrt{3}}$.

Решение: Претходно бројот $z = -2 + 2i\sqrt{3}$ го претставуваме во неговата тригонометриска форма: $r = \sqrt{4 + 12} = 4$, $\operatorname{tg}\,\varphi = -\frac{2\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}$; $\varphi = 120° = \frac{2\pi}{3}$.

Според тоа: $-2 + 2i\sqrt{3} = 4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$.

Тогаш бараните вредности на коренот, ќе бидат:

$$w_k = \sqrt[4]{4}\left(\cos\frac{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi}{4} + i\sin\frac{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi}{4}\right), \ k = 0,\ 1,\ 2,\ 3.$$

т.е. $w_0 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$,

$$w_1 = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\right)\right]=\sqrt{2}\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right),$$

$$w_2 = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}+\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}+\pi\right)\right]=\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right),$$

$$w_3 = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{3\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{3\pi}{2}\right)\right]=\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right).$$

ЗАДАЧИ

29. Одреди ги сите вредности на корените:

а) $\sqrt[4]{-1}$, б) $\sqrt[6]{-5}$, в) $\sqrt[3]{1-i\sqrt{3}}$, г) $\sqrt[3]{-4\sqrt{3}-4i}$.

30. Пресметај: а) $\sqrt{i}$, б) $\sqrt{-i}$, в) $\sqrt[4]{i}$ г) $\sqrt{2+i\sqrt{2}}$, д) $\sqrt{\sqrt{2}(1+i)}$.

31. Пресметај: а) $\sqrt[4]{\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}}$, б) $[\sqrt{3}(\cos 10^\circ + i\sin 10^\circ)]^{-3}$,

в) $(1+\cos\alpha+i\sin\alpha)^n$

32. Пресметај: а) $i^{\frac{3}{4}}$, б) $(\sqrt{3}+i)^{\frac{2}{3}}$, в) $(\sqrt{3}-i)^{-\frac{4}{5}}$.

33. Изврши ги назначените операции со комплексните броеви:

а) $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{10}$, б) $\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{30}$, в) $\sqrt{1-12i\sqrt{2}}$, г) $\sqrt{\frac{1-i}{1+i\sqrt{3}}}$.

34. Одреди ги комплексните броеви, кои им одговараат на темињата на квадрат, што е впишан во кружница со радиус $r=\sqrt{2}$ и центар во координатниот почеток, ако едно теме му лежи во точката (1, 1).

§ 6. n — ти КОРЕНИ НА ЕДИНИЦАТА

Да ги одредиме сите вредности на $\sqrt[n]{1}$.

Бројот 1, претставен во тригонометриска форма, гласи:

$$1 = \cos 0^\circ + i\sin 0^\circ$$

Според тоа, бараните вредности на $\sqrt[n]{1}$, ќе бидат:

$$\varepsilon_k = \sqrt[n]{1} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n},\ k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1, \text{ т.е.}$$

$$\varepsilon_0 = \cos 0^0 + i\sin 0^0 = 1 + 0\,i = 1$$

$$\varepsilon_1 = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$$

$$\varepsilon_2 = \cos\frac{4\pi}{n} + i\sin\frac{4\pi}{n} = \varepsilon_1^2$$

$$\varepsilon_3 = \cos\frac{6\pi}{n} + i\sin\frac{6\pi}{n} = \varepsilon_1^3$$

. . . .

. . . .

$$\varepsilon_k = \cos\frac{k\cdot 2\pi}{n} + i\sin\frac{k\cdot 2\pi}{n} = \varepsilon_1^k$$

Ако ги изоставиме индеките и ставиме $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$ тогаш множеството од сите вредности на $\sqrt[n]{1}$, ќе биде:

$$E_n = \{1,\ \varepsilon,\ \varepsilon^2,\ \varepsilon^3,\ \ldots,\ \varepsilon^{n-1}\}$$

Задача. Да се одреди множеството на сите вредности на $\sqrt[6]{1}$

Решение: Сите шест вредности на $\sqrt[6]{1}$ дадени се со равенството:

$$\varepsilon_k = \sqrt[6]{1} = \cos\frac{2k\pi}{6} + i\sin\frac{2k\pi}{6},\ (k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5), \text{ т.е.}$$

$$\varepsilon_0 = \cos 0^0 + i\sin 0^0 = 1 + 0\,i = 1$$

$$\varepsilon_1 = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\varepsilon_2 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\varepsilon_3 = \cos\pi + i\sin\pi = -1$$

$$\varepsilon_4 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\varepsilon_5 = \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Според тоа:

$$E_6 = \left\{1, \frac{1}{2} + i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} + i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2},\ -1, -\frac{1}{2} - i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} - i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}.$$

Ќе покажеме дека n-тите корени на единицата ги имаат следниве поважни својства:

Теорема 1. *Секој m-ти корен од единицата е и n-ти корен од единица, ако m е делител на n,* т. е. ако $n = ms$.

Доказ: Нека $n = ms$, каде $s \in \mathbf{N}$. Ако α е m-ти корен од единица, т.е. ако $\alpha^m = 1$, тогаш ќе биде и: $\alpha^n = \alpha^{ms} = (\alpha^m)^s = 1^s = 1$.

Пример: Секој 3-ти корен од единицата е и 6-ти, 12-ти, 15-ти од единица.

Теорема 2. *Не секој n-ти корен од единицата е и m-ти корен од единица, каде што $0 < m < n$.*

Навистина, бројот $\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$ е 6-ти корен на единицата, но тој не е 4-ти корен на единицата, бидејќи множеството од 4-тите корени на единицата е $E_4 = \{1, i, -1, -i\}$

Дефиниција. *Секој n-ти корен на единицата, кој не е и m-ти корен на единицата, за секое $0 < m < n$, се вика примитивен n-ти корен на единицата.*

Пример. Секој од броевите i и $-i$ е примитивен 4-ти корен на единицата, бидејќи тие не се ниту 3-ти, ниту 2-ри корени на единицата.

Може да се покаже дека важат својствата:

Теорема 3. *Комплексниот број ε е примитивен n-ти корен на единицата ако и само ако $\varepsilon = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}$, каде што $k \in N$ е заемно прост со n.*

Оттука следува дека примитивни n-ти корени на единицата има толку, колку што има природни броеви помали од n и заемно прости со n. Тој број се означува со $\varphi(n)$ и се вика *Ојлерова функција.*

На пример: $\varphi(2) = 1$, $\varphi(3) = 2$, $\varphi(4) = 2$, $\varphi(5) = 4$, $\varphi(6) = 2$.

Теорема 4. *Ако ε е примитивен n-ти корен на единицата, тогаш со $\varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \ldots, \varepsilon^{n-1}, \varepsilon^n = 1$ се исцрпува множеството E_n од сите n-ти корени на единицата.*

Доказ: Нека ε е примитивен n-ти корен на единицата. Гледаме дека секој број од низата $\varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \ldots, \varepsilon^{n-1}, \varepsilon^n$ е n-ти корен на единицата, бидејќи $(\varepsilon^k)^n = (\varepsilon^n)^k = 1^k = 1$

Треба да докажеме уште дека никои два члена од таа низа не се еднакви. Ако е $\varepsilon^m = \varepsilon^s$ за $s < m < n$, тогаш ќе имаме $\varepsilon^{m-s} = 1$. Меѓутоа, тоа не е можно бидејќи $m - s < n$, а ε е примитивен n-ти корен од единицата. Според тоа, сите броеви од низата $\varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \ldots, \varepsilon^{n-1}, \varepsilon^n$ се различни. штд.

Пример: Знаете дека $E_4 = \{1, i, -1, -i\}$, каде што е $\varepsilon = i$ и $\varepsilon_1 = -i$ се примитивни 4-ти корени на единицата. Тогаш имаме:

$$\begin{array}{lcl} \varepsilon = i & & \varepsilon_1 = -i \\ \varepsilon^2 = i^2 = -1 & & \varepsilon_1^2 = (-i)^2 = i^2 = -1 \\ \varepsilon^3 = i^3 = -i & \text{или} & \varepsilon_1^3 = (-i)^3 = -i^3 = -(-i) = i \\ \varepsilon^4 = i^4 = 1 & & \varepsilon_1^4 = (-i)^4 = i^4 = 1 \end{array}$$

Теорема 5. *Ако ε е примитивен n-ти корен на единицата, а w е една која било вредност на коренот $\sqrt[n]{z}$,* т.е. $w^n = z$, *тогаш $\{w, w \cdot \varepsilon, w \cdot \varepsilon^2, w \cdot \varepsilon^3, \ldots, w \cdot \varepsilon^{n-1}\}$ е множеството на сите вредности на $\sqrt[n]{z}$.*

Доказ: $(w \cdot \varepsilon^k)^n = w^n \cdot (\varepsilon^k)^n = w^n \cdot (\varepsilon^n)^k = z \cdot (1)^k = z.$

Да го докажеме уште следново важно својство:

Теорема 6. *Множеството E_n на сите n-ти корени на единицата е затворено множество по однос на операцијата множење.*

Доказ: Нека ε е еден примитивен n-ти корен на единицата, т. е. $\varepsilon \in E_n$, и $k, s \in \mathbf{N}$. Во тој случај врз основа теоремата 4 ќе биде $\varepsilon^k \in E_n$ и $\varepsilon^s \in E_n$. Треба да покажеме дека $(\varepsilon^k \in E_n$ и $\varepsilon^s \in E_n) \Rightarrow (\varepsilon^k \cdot \varepsilon^s) \in E_n$.

Навистина: $(\varepsilon^k \cdot \varepsilon^s)^n = (\varepsilon^{k+s})^n = (\varepsilon^n)^{k+s} = (1)^{k+s} = 1.$

ЗАДАЧИ

35. Одреди го множеството од сите вредности на: а) $\sqrt{1}$, б) $\sqrt[3]{1}$, в) $\sqrt[4]{1}$.

36. Докажи дека производот на кои било две вредности на $\sqrt[n]{1}$ е пак вредност на $\sqrt[n]{1}$.

37. Одреди ги примитивните: а) трети, б) четврти, в) шести корени на единицата.

38. Покажи дека секој 4-ти корен на единицата е и 12-ти корен на единицата, т. е. дека $E_4 \subset E_{12}$.

39. Покажи дека $\sqrt[2k]{1}$ има само две реални вредности, а коренот $\sqrt[2k+1]{1}$ има само една реална вредност.

40. Покажи дека за вредностите на $\sqrt[3]{1}$ $\left(\varepsilon_0 = 1,\ \varepsilon_1 = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{1},\ \varepsilon_2 = \dfrac{-1 - i\sqrt{3}}{2}\right)$ важат релациите: $\varepsilon_1^2 = \varepsilon_2$; $\varepsilon_2^2 = \varepsilon_1$; $\varepsilon_1 = \dfrac{1}{\varepsilon_2}$; $\varepsilon_1^2 = \dfrac{1}{\varepsilon_2^2}$; $\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 = 1$; $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0$.

ГЛАВА II

НЕЛИНЕАРНИ РАВЕНКИ СО ЕДНА НЕПОЗНАТА

§ 7. ОПШТО ЗА РАВЕНКИТЕ СО ЕДНА НЕПОЗНАТА (повторување)

Равенките со една непозната симболички ги означуваме:

$$f(x) = \varphi(x) \tag{1}$$

или

$$F(x) = 0, \tag{2}$$

каде што $f(x)$, $\varphi(x)$, $F(x)$ се некои изрази (функции) на променливата x.

Ако двете страни на равенката (1) $f(x)$ и $\varphi(x)$ се алгебарски изрази по однос на променливата x, тогаш таа се вика *алгебарска равенка*. Ако пак барем една страна на равенката (1) не е алгебарски израз (на пример некој експоненцијален, логаритамски или тригонометриски израз), тогаш равенката (1) се вика *трансцедентна*.

Според видот на алгебарските изрази $f(x)$ и $\varphi(x)$ по однос на променливата x, равенката (1) може да биде или *рационална* или *ирационална*, а секоја рационална алгебарска равенка може да биде или *цела рационална* или *дробно рационална равенка*.

На пример: Равенките $4x^3 - 5x + 1 = 0$ и $2x^2 + \frac{x-1}{3} + \sqrt{5} = 0$ се цели рационални, а равенката $3x + \frac{4}{x-2} = x + \frac{1}{x}$ е дробно рационална, бидејќи непознатата x се содржи и во именител.

Целите рационални равенки можат да бидат од прв степен или *линеарни равенки*, и равенки од повисок степен или *нелинеарни равенки*.

Бројот $x = x_0$ се вика *решение* (или *корен*) на равенката (1), односно (2), ако $f(x_0) = \varphi(x_0)$, односно $F(x_0) = 0$ е вистинито бројно равенство. Велиме уште дека бројот $x = x_0$ *ја задоволува* равенката (1), односно (2).

Да се реши равенката (1) или (2) во дадена бројна област значи да се одреди множеството на сите нејзини решенија во таа област.

На пример, множеството M на корените на равенката $x^2 + 1 = 0$ во областа на реалните броеви е $M = \emptyset$, а во областа на комплексните броеви е $M = \{i, -i\}$

Нека се дадени две равенки:

$$f_1(x) = \varphi_1(x) \tag{3}$$

и

$$f_2(x) = \varphi_2(x) \tag{4}$$

Множеството корени на равенката (3) нека е M, а на равенката (4) нека е N. Ако $M \subset N$, т. е. ако секој корен на равенката (3) е корен и на равенката (4), тогаш велиме дека равенката (4) е *последица* на равенката (3).

На пример, равенката $(x-3)(x+2) = 0$ е последица на равенката $x - 3 = 0$, бидејќи единствениот корен $x = 3$ на равенката $x - 3 = 0$ е корен и на равенката $(x-3)(x+2) = 0$.

Ако пак множествата M и N на корените на равенките (3) и (4) се совпаѓаат, т. е. $M = N$, тогаш велиме дека тие равенки се *еквивалентни* една на друга. Или, со други зборови, тоа значи дека:

Равенките (3) и (4) се еквивалентни, ако секој корен на равенката (3) е корен и на равенката (4), и обратно: секој корен на равенката (4) е корен и на равенката (3).

Воопшто, еквивалентноста на равенките е тесно сврзана со определена бројна област. На пример, равенките $x - 2 = 0$ и $(x-2)(x^2+1) = 0$ се еквивалентни во областа на реалните броеви, но тие не се еквивалентни во областа на комплексните броеви.

Во понатамошните разгледувања, по правило, еквивалентноста на равенките ќе ја разгледуваме во однос на областа на реалните броеви, ако тоа посебно поинаку не е речено.

Во процесот на решавањето на една равенка, таа може да се замени со која и да било еквивалентна на неа равенка. Меѓутоа, во некои случаи, корисно е дадената равенка да се замени и со некоја, што е нејзина последица. Во таков случај можат да се јават *странични корени*, т. е. такви броеви кои се корени на равенката—последица, но не се корени на појдовната равенка. Затоа, за да се отстранат страничните корени, неопходно е да се изврши проверка на сите најдени корени.

Ако пак равенката—последица ја замениме со равенката чија последица е таа, тогаш можеме да изгубиме некои нејзини корени.

На пример: Нека е дадена равенката

$$3x - 1 = 5 \tag{5}$$

Таа има единствен корен $x = 2$. Ако двете страни на равенката (5) ги помножиме со $(x-3)$, ќе ја добиеме равенката

$$(3x-1)(x-3) = 5(x-3), \tag{3}$$

која освен коренот $x = 2$ има уште еден страничен (придобиен) корен $x = 3$. Меѓутоа, ако појдеме од равенката (6), која има два корена $x = 2$ и $x = 3$, и двете нејзини страни ги поделиме („скратиме“) со $(x-3)$, тогаш ќе дојдеме до равенката (5) со единствен корен $x = 2$. Значи, во тој случај ние сме изгубиле еден корен $x = 3$.

Појавата на придобиени корени не треба да нè плаши, бидејќи со проверката лесно можеме да ги откриеме таквите корени. Меѓутоа, далеку е поопасна појавата на изгубени корени. Оттука станува јасно дека при решавањето на равенките треба да знаеме кои трансформации доведуваат до еквивалентни равенки, кои можат да дадат придобиени (странични) корени, а при кои трансформации можат да се изгубат некои корени.

За условите, при кои една равенка е последица на друга равенка или една равенка е еквивалентна на друга; важат следниве теореми. Нив само ќе ги формулираме без да ги докажуваме, бидејќи некои од нив вам ви се познати:

Теорема 1. *Ако функцијата $\varphi(x)$ е дефинирана за секоја вредност од областа на менување на непознатата x, тогаш равенките:*

$$f(x) = g(x)$$

и

$$f(x) + \varphi(x) = g(x) + \varphi(x) \quad \textit{се еквивалентни.}$$

Од теоремата 1 следува дека секоја равенка $f(x) = g(x)$ може да се замени со еквивалентната на неа равенка $f(x) - g(x) = 0$, а таа обично ја запишуваме во видот $F(x) = 0$.

Теорема 2. *Ако двете страни на равенката $f(x) = g(x)$ ги помножиме со функцијата $\varphi(x)$, која е дефинирана за секоја вредност од областа на менување на променливата x, тогаш ќе добиеме нова равенка*

$$f(x) \cdot \varphi(x) = g(x) \cdot \varphi(x),$$

која е последица на дадената равенка.

На пример: Ако двете страни на равенката $3x - 1 = 5$ (5) ги помножиме со $(x-3)$ ќе ја добиеме равенката

$$(3x-1)(x-3) = 5(x-3) \tag{6}$$

Равенката (6) е последица на равенката (5) бидејќи единствениот корен $x = 2$ на равенката (5) е корен и на равенката (6). Меѓутоа, равенката (6) не е еквивалента на равенката (5) бидејќи равенката (6) има корен $x = 3$ што не е корен на равенката (5).

Теорема 3. *Ако функцијата $\varphi(x)$ е дефинирана и $\varphi(x) \neq 0$ за секоја вредност од областа на менување на непознатата x, тогаш равенките $f(x) = g(x)$ и $f(x) \cdot \varphi(x) = g(x) \cdot \varphi(x)$ се еквивалентни.*

Нека се дадени неколку равенки:

$$f_1(x) = \varphi_1(x),\ f_2(x) = \varphi_2(x), \ldots, f_n(x) = \varphi_n(x), \tag{7}$$

чии множества решенија да ги означиме соодветно со $M_1, M_2, \ldots, M_n$.

По однос на равенките (7) можат да се поставаат вакви две барања: да се одредат сите вредности на непознатата x, а) кои ги задоволуваат сите равенки од (7), или б) кои да ја задоволуваат барем една од равенките (7).

Очигледно е дека првото барање се сведува на определувањето на пресекот $M_1 \cap M_2 \cap \ldots \cap M_n$, а второто барање — на определувањето на унијата $M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_n$ од множествата решенија поодделно на секоја равенка од равенките (7).

Во првиот случај велиме дека разгледуваните равенки (7) образуваат *систем равенки*, а во вториот случај — тие образуваат *вкупност равенки.*

За да го разликуваме системот равенки од вкупноста равенки, системот равенки ќе го означуваме со употреба на голема заграда, а вкупноста равенки — со средна заграда или пак равенките ги запишуваме во еден ред.

На пример, системот равенки:

$$\begin{cases} x^2 - x - 2 = 0 \\ x^2 - 2x - 3 = 0 \end{cases}$$

има едно решение $x_1 = -1$, а вкупноста од тие равенки:

$$\left[\begin{array}{l} x^2 - x - 2 = 0 \\ x^2 - 2x - 3 = 0 \end{array}\right.$$ има три решенија: $x_1 = -1$, $x_2 = 2$ и $x_3 = 3$.

Два система равенки, односно две вкупности равенки, велиме *се еквивалентни,* ако нивните множества решенија се совпаѓаат.

Ќе наведеме уште една теорема:

Теорема 4. *Равенката од видот $f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \ldots \cdot f_n(x) = 0$ е еквивалентна на вкупноста равенки:*

$$\left[\begin{array}{l} f_1(x) = 0 \\ f_2(x) = 0 \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \\ f_n(x) = 0 \end{array}\right.$$

За илустрација ќе ја докажеме само теоремата 2.

Доказ: Нека е дадена равенката $f(x) = g(x)$ (8)

Ако двете страни на равенката (8) ги помножиме со изразот $\varphi(x)$, што е дефиниран за секоја вредност од областа на менување на непознатата x, ќе ја добиеме равенката

$$f(x) \cdot \varphi(x) = g(x) \cdot \varphi(x) \tag{9}$$

Равенката (9) врз основа на теоремата 1 е еквивалентна на равенката

$$f(x) \cdot \varphi(x) - g(x) \cdot \varphi(x) = 0,$$

односно на
$$\varphi(x) \cdot [f(x) - g(x)] = 0 \tag{9'}$$

Меѓутоа, равенката (9′) врз основа на теоремата 4 е еквивалентна на вкупноста равенки:

$$\left[\begin{array}{l} f(x) - g(x) = 0 \\ \varphi(x) = 0 \end{array}\right.$$

Тоа значи дека секој корен на равенката (8) е корен и на равенката (9), но не секој корен на равенката (9) е корен и на равенката (8). Според тоа, равенката (9) е последица на равенката (8), штд.

ЗАДАЧИ

1. Определи ја областа на менување на непознатата x (кратко *ОМН*) на равенките и реши ги истите: а) $\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x} = \frac{4x}{1+x^2}$, б) $x\left(1 - \frac{1}{x}\right) = 0$.

2. Испитај, во областа на реалните броеви еквивалентни ли се равенките: а) $x - 2 = 3$ и $(x-2)(x^2+1) = 3(x^2+1)$, б) $x^3 - 8 = 0$ и $\frac{x-2}{x+1} = 0$, в) $x^2 = 9$ и $\frac{x^2}{x-3} = \frac{9}{x-3}$.

3. Одреди го множеството решенија на системите равенки:

а) $\left\{\begin{array}{l} (x-1)(x-2)(x-3) = 0 \\ x^2 + x - 6 = 0 \\ x^2 - 4 = 0 \end{array}\right.$, б) $\left\{\begin{array}{l} x^2 - 25 = 0 \\ x^2 + 5x = 0 \\ x^2 - 2x - 15 = 0 \end{array}\right.$

4. Одреди го множеството решенија на вкупноста равенки:

а) $\left[\begin{array}{l} x^2 - 4 = 0 \\ x^2 + x - 6 = 0, \\ x^2 - 3x = 0 \end{array}\right.$, б) $\left[\begin{array}{l} x^2 - 3x + 2 = 0 \\ \frac{x-5}{x-2} = 0 \\ x^2 + 1 = 0 \end{array}\right.$, в) $\left[\begin{array}{l} (x-4)(x+1) = 0 \\ \frac{1}{x-1} = 0 \\ x^2 - 1 = 0 \end{array}\right.$

§ 8. БИНОМНИ РАВЕНКИ

Дефиниција: *Равенките од видот*

$$ax^n + b = 0 \quad (a \neq 0,\ b \neq 0,\ n \in \mathbb{N}) \tag{1}$$

се викаат биномни равенки од n-ти степен.

Равенката (1) е еквивалентна на равенката $x^n = -\frac{b}{a}$ (2)

Ако a и b се реални броеви и ако се интересираме само за реалните корени на равенката (1), тогаш: а) при $n = 2k$, ако $\frac{b}{a} < 0$ равенката има два реални корени; а ако $\frac{b}{a} > 0$ таа нема ниту еден реален корен: б) при $n = 2k+1$ равенката (1) има само еден реален корен.

Ако пак a и b се кои и да било комплексни (реални или имагинарни) броеви и треба да ги одредиме сите комплексни корени на равенката (1), тогаш очигледно е дека решенија (корени) на равенката (2), ќе претставуваат сите n-ти корени на бројот $-\frac{b}{a}$. Модулот и аргументот на тој број содветно нека се r и φ, т. е. нека

$$-\frac{b}{a}=r(\cos\varphi+i\sin\varphi).$$

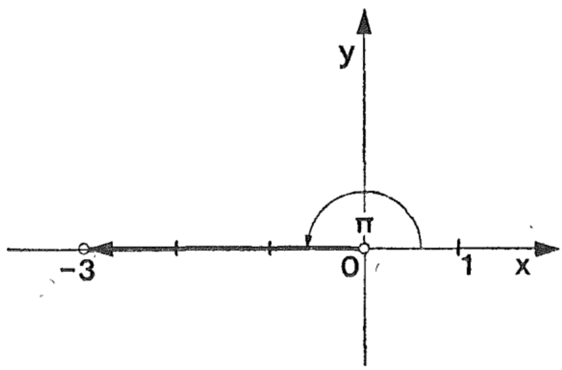
Во таков случај сите корени на биномната равенка ги определуваме од формулата:

$$x_k=\sqrt[n]{-\frac{b}{a}}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right), \tag{3}$$

каде што $k=0, 1, 2, \ldots, n$-1.

Задача 1. Да се реши равенката $x^4+3=0$.

Решение. Дадената равенка е еквивалентна на $x^4=-3$. Значи решенија на равенката ќе бидат сите вредности на коренот $\sqrt[4]{-3}$. Бројот -3 претставен во тригонометриска форма гласи: $-3=3\ (\cos\pi+i\sin\pi)$ (црт. 14). Тогаш согласно формулата (3) добиваме:



Црт. 14

$$x_k=\sqrt[4]{-3}=\sqrt[4]{3}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{4}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{4}\right)\quad(k=0,\ 1,\ 2,\ 3)$$

т.е. $$x_0=\sqrt[4]{3}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt[4]{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt[4]{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i),$$

$$x_1=\sqrt[4]{3}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)=\sqrt[4]{3}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt[4]{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i),$$

$$x_2=\sqrt[4]{3}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)=\sqrt[4]{3}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt[4]{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}(-1-i),$$

$$x_3=\sqrt[4]{3}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)=\sqrt[4]{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt[4]{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$$

Горнава постапка дава можност да се реши секоја биномна равенка во множеството на комплексните броеви.

Ако биномната равенка (1) е со реални коефициенти a и b, ќе покажеме дека за некои одредени вредности на $n \in \mathbf{N}$ таа може да се реши и без користење на тригонометриската форма на комплексните броеви.

Задача 2. Да се реши равенката $x^3 + 27 = 0$

Решение. Биномот $x^3 + 27$ може да се разложи на множители како збир на кубови. Според тоа, дадената равенка е еквивалентна на равенката:

$$(x + 3)\ (x^2 - 3x + 9) = 0,$$

а таа пак е еквивалентна на вкупноста од една линеарна равенка $x + 3 = 0$ и една квадратна равенка $x^2 - 3x + 9 = 0$.

Ако ги решиме тие равенки, наоѓаме дека дадената равенка ги има следниве решенија:

$$x_1 = -3, \quad x_2 = 3\left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\right) \quad \text{и} \quad x_3 = 3\left(\frac{1 - i\sqrt{3}}{2}\right).$$

Задача 3. Да се реши равенката $16x^4 - 1 = 0.$

Решение: Дадената равенка е еквивалентна на равенката

$$(2x - 1)\ (2x + 1)\ (4x^2 + 1) = 0,$$

а таа е еквивалентна на вкупноста равенки:

$$\left[\begin{array}{l} 2x - 1 = 0 \\ 2x + 1 = 0 \\ 4x^2 + 1 = 0 \end{array}\right.$$

Решавајќи ги нив, добиваме: $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = -\frac{1}{2}$, $x_3 = \frac{1}{2}\, i$, $x_4 = -\frac{1}{2}\, i$

Тоа се бараните решенија и на дадената равенка.

Задача 4. Да се реши равенката $x^4 + 1 = 0.$

Решение: Биномот $x^4 + 1$ може да се разложи на множители вака:

$$x^4 + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 - 2x^2 = (x^2 + 1)^2 - (x\sqrt{2})^2 = (x^2 + 1 - x\sqrt{2})\,(x^2 + 1 + x\sqrt{2})$$

Според тоа, дадената равенка е еквивалентна на равенката:

$$(x^2 - x\sqrt{2} + 1)\,(x^2 + x\sqrt{2} + 1) = 0$$

односно на вкупноста равенки $x^2 - x\sqrt{2} + 1 = 0$, $x^2 + x\sqrt{2} + 1 = 0$

Од нив ги наоѓаме бараните четири корени на дадената равенка:

$$x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i), x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i), \ x_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 + i), \ x_4 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 - i)$$

Задача 5. Да се реши равенката $x^6 - 1 = 0.$

Решение: Дадената равенка е еквивалентна на $(x^3 - 1)\ (x^3 + 1) = 0$, или на $(x - 1)\ (x + 1)\ (x^2 + x + 1)\ (x^2 - x + 1) = 0$. Нејзините корени ќе бидат:

$$x_1 = 1, \ x_2 = -1, \ x_3 = -\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}; \ x_4 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}; \ x_5 = \frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \ \text{ и } \ x_6 = \frac{1}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Задача 6. Да се реши равенката $x^6 + 1 = 0.$

Решение: Ако во дадената равенка ставиме $x = yi$, тогаш по однос на новата непозната y, ја добиваме равенката $(yi)^6 + 1 = 0$ или $y^6 \cdot i^6 + 1 = 0$. Но бидејќи $i^6 = -1$, тоа добиената равенка ќе гласи: $y^6 - 1 = 0$, (4)
а која пак туку што ја решивме (во пример 5).

Според тоа, решенијата на дадената равенка ќе ги добиеме, согласно смената $x = yi$, кога секое решение на равенката (4) го помножиме со i. Така ги добиваме решенијата на дадената равенка:

$$x_1 = i, \quad x_2 = -i, \quad x_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i, \quad x_4 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i,$$

$$x_5 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, \quad \text{и} \quad x_6 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i.$$

Задача 7. Да се реши равенката $x^8 - 1 = 0$.

Решение: Разложувајќи го биномот $x^8 - 1$ на множители, добиваме

$$(x^4 - 1)(x^4 + 1) = 0 \quad \text{или} \quad (x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1) = 0$$

Според тоа, дадената равенка ги има следниве решенија:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = i, \quad x_4 = -i, \quad x_5 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i),$$

$$x_6 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i), \quad x_7 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i) \quad \text{и} \quad x_8 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1-i).$$

ЗАДАЧИ

Реши ги равенките:

5. а) $8x^3 + 1 = 0$, б) $x^3 - 8 = 0$, в) $x^3 + 1 = 0$,
6. а) $x^4 + i = 0$, б) $x^3 - 2 = 0$, в) $x^7 - 1 = 0$,
7. а) $x^4 + 16 = 0$, б) $x^5 + 1 = 0$, в) $x^5 - 32 = 0$,
8. а) $x^6 - 64 = 0$, б) $64x^6 + 1 = 0$, в) $x^6 - i = 0$,
9. а) $x^8 + 1 = 0$, б) $x^{12} - 1 = 0$, в) $x^9 + 1 = 0$.

§ 9. БИКВАДРАТНИ И ТРИНОМНИ РАВЕНКИ

Дефиниција: *Равенките од видот*

$$ax^4 + bx^2 + c = 0, \tag{1}$$

каде што $a \neq 0$, $b \neq 0$ и $c \neq 0$ се реални броеви или изрази кои содржат параметри, се викаат биквадратни равенки.

Бидејќи во биквадратните равенки непознатата x се наоѓа само во парни степени (x^4 и x^2), затоа ако таа има корен x_0, тогаш таа ќе има и корен $-x_0$. Значи, корените на биквадратната равенка (1) се два по два спротивни броеви.

Биквадратните равенки ги решаваме со воведување на нова (помошна) непозната $x^2 = z$. На таков начин со смената $x^2 = z$ од равенката (1) ја добиваме квадратната равенка

$$az^2 + bz + c = 0 \tag{2}$$

по однос на непознатата z, чии корени се:

$$z_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{и} \quad z_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Според тоа, корените на равенката (1) ќе ги добиеме кога ќе ги решиме равенките: $x^2 = z_1$ и $x^2 = z_2$

Ако z_1 и z_2 се позитивни реални броеви, тогаш биквадратната равенка (1) ќе има четири реални корени: $x_1 = \sqrt{z_1}$, $x_2 = -\sqrt{z_1}$, $x_3 = \sqrt{z_2}$ и $x_4 = -\sqrt{z_2}$.

Ако z_1 и z_2 се негативни реални броеви или имагинарни броеви, тогаш равенката (1) нема реални корени, но во множеството на комплексните броеви таа ќе има четири имагинарни корени.

Ако пак еден од броевите z_1 и z_2 е позитивен ,а другиот — негативен, тогаш равенката (1) ќе има два реални и два имагинарни корени.

Задача 1. Да се реши равенката $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$.

Решение: Кога ќе ставиме $x^2 = z$, ја добиваме квадратната равенка $z^2 - 10z + 9 = 0$, која има корени $z_1 = 9$ и $z_2 = 1$.

Значи, дадената равенка има четири реални корени: $x_{1,2} = \pm 3$ и $x_{3,4} = \pm 1$.

Задача 2. Да се реши равенката $(x^2 - 1)^4 - 13(x^2 - 1) + 36 = 0$.

Решение: Ставаме $x^2 - 1 = u$ и добиваме биквадратна равенка по однос на непознатата u: $u^4 - 13u^2 + 36 = 0$

Таа има корени: $u_1 = 3$, $u_2 = -3$, $u_3 = 2$ и $u_4 = -2$.

Потоа ги решаваме равенките: $x^2 - 1 = 3$, $x^2 - 1 = -3$, $x^2 - 1 = 2$ и $x^2 - 1 = -2$ и добиваме дека дадената равенка има корени:

$$x_{1,2} = \pm 2, \quad x_{3,4} = \pm i\sqrt{2}, \quad x_{5,6} = \pm\sqrt{3}, \quad x_{7,8} = \pm i.$$

Задача 3. За кои вредности на параметарот k биквадратната равенка $x^4 + 2(2k + 1)x^2 + 3k^2 + 13 = 0$ ќе има два еднакви корени?

Решение: Дадената равенка ќе има два еднакви корени, ако и соодветната квадратна равенка $z^2 + 2(2k + 1)z + 3k^2 + 13 = 0$ има два еднакви корени, т. е. ако $z_1 = z_2$. А тоа ќе биде, ако $D = (2k + 1)^2 - 3k^2 - 13 = 0$

Ја решаваме квадратната равенка по однос на k: $k^2 + 4k - 12 = 0$ и наоѓаме дека: $k_1 = 2$ и $k_2 = -6$.

Дефиниција: *Равенките од видот*

$$ax^{2n} + bx^n + c = 0 \quad (a \neq 0,\ b \neq 0,\ c \neq 0,\ n \in \mathbb{N}) \tag{1}$$

се викаат триномни равенки.

Очевидно е дека при $n = 2$ триномната равенка (1) станува биквадратна. Значи, биквадратните равенки се специјален случај од триномните равенки.

Со смената
$$x^n = z \tag{2}$$

од триномната равенка (1) ја добиваме квадратната равенка:

$$az^2 + bz + c = 0 \tag{3}$$

Равенката (3) има два корена z_1 и z_2, но бидејќи е $x^n = z$, тоа решавањето на триномната равенка (1) се сведува на решавање на вкупноста од две биномни равенки од n-ти степен:

$$\left[\begin{array}{l} x^n = z_1 \\ x^n = z_2 \end{array}\right. \tag{4}$$

Знаете дека секоја биномна равенка од n-ти степен има n корени, па според тоа триномната равенка (1) ќе има $2n$ корени, т. е. толку корени, колку што е нејзиниот степен.

Задача 4. Да се реши равенката $x^8 - 17x^4 + 16 = 0$.

Решение: Со смената $x^4 = z$ дадената равенка се сведува на квадратната равенка $z^2 - 17z + 16 = 0$, чии корени се $z_1 = 16$ и $z_2 = 1$.

Потоа ги решаваме биномните равенки $x^4 = 16$ и $x^4 = 1$ и наоѓаме дека: $x_1 = 2$, $x_2 = -2$, $x_3 = 2i$, $x_4 = -2i$, $x_5 = 1$, $x_6 = -1$, $x_7 = i$, $x_8 = -i$.

ЗАДАЧИ

Да се решат равенките:

10. а) $x^4 + 7x^2 + 10 = 0$, б) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$.

11. а) $16x^4 - 17x^2 + 1 = 0$, б) $(x-3)^4 - 6(x-3)^2 + 6 = 0$.

12. а) $c^4 x^4 + c^2 (a^2 - b^2) x^2 - a^2b^2 = 0$, б) $3x^4 - 7x^2 + 10 = 0$.

13. а) $x^4 - 2(k^2 + 1) x^2 + k^4 - 2k^2 + 1 = 0$, б) $x^4 + 5x^2 + 4 = 0$.

14. а) $x^8 - 5x^4 + 6 = 0$, б) $x^8 - 4x^4 + 13 = 0$.

15. а) $32x^6 + 12x^3 + 1 = 0$, б) $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$.

16. а) $x^8 - 15x^4 - 16 = 0$, б) $x^6 - 3x^3 - 4 = 0$.

§ 10. СИМЕТРИЧНИ РАВЕНКИ

Равенката од видот:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}\, x + a_n = 0,\ a_0 \neq 0 \tag{1}$$

се вика *алгебарска равенка од n-ти степен.*

Ако коефициентите на алгебарската равенка (1) го исполнуваат условот $a_k = a_{n-k}$ каде што $\kappa = 0, 1, 2, 3, \ldots, n$, т. е. ако $a_n = a_0$, $a_{n-1} = a_1$, $a_{n-2} = a_2$, $\ldots$, итн; тогаш равенката (1) се вика *симетрична равенка* од n-ти степен. Според тоа, ја усвојуваме следнава:

Дефиниција: *Симетрична равенка од n-ти степен се вика равенката од видот:*

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0,\ (a_0 \neq 0,\ n \in \mathbb{N}), \tag{2}$$

во која коефициентите на члeновите, што се еднакво оддалечени од почетокот и крајот, се еднакви.

Очигледно е дека: *Ниту еден од корените на симетричната равенка не е еднаков на нула.*

Навистина, бидејќи $a_0 \neq 0$, тоа $x = 0$ не може да биде корен на равенката (2).

Симетричните равенки го имаат следново важно својство:

Теорема: *Ако $x = \alpha$ е корен на симетричната равенка (2), тогаш* и $x = \dfrac{1}{\alpha}$ е нејзин корен.

Доказ: Нека $x = \alpha$ е корен на равенката (2). Тогаш ќе важи равенството:

$$a_0\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + a_2\alpha^{n-2} + \ldots + a_2\alpha^2 + a_1\alpha + a_0 = 0 \tag{3}$$

Делејќи ги двете страни на равенството (3) со α^n, добиваме:

$$a_0 + a_1 \cdot \frac{1}{\alpha} + a_2 \cdot \frac{1}{\alpha^2} + \ldots + a_2 \cdot \frac{1}{\alpha^{n-2}} + a_1 \cdot \frac{1}{\alpha^{n-1}} + a_0 \cdot \frac{1}{\alpha^n} = 0,$$

или

$$a_0 + a_1\left(\frac{1}{\alpha}\right) + a_2\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 + \ldots + a_2\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{n-2} + a_1\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{n-1} + a_0\left(\frac{1}{\alpha}\right)^n = 0.$$

А тоа покажува дека и $x = \frac{1}{\alpha}$ е корен на симетричната равенка (2), штд.

Поради горново својство, симетричните равенки често ги викаме уште и *реципрочни равенки.*

Да ги разгледаме одделно симетричните равенки од трет, четврти и пети степен.

1.° Симетричната равенка од трети степен го има видот:

$$ax^3 + bx^2 + bx + a = 0, \; a \neq 0 \tag{4}$$

Со групирање на членовите, изразот на левата страна на равенката (4) може да се разложи на множители:

$$ax^3 + bx^2 + bx + a = a(x^3 + 1) + bx(x + 1) = a(x^2 + 1)(x^2 - x + 1) + \\ + bx(x+1) = (x+1)[ax^2 - ax + a + bx] = (x+1)[ax^2 + (b-a)x + a]$$

Значи, равенката (4) е еквивалентна на равенката:

$$(x + 1)[ax^2 + (b - a)x + a] = 0,$$

а ова на вкупноста равенки: $x + 1 = 0$ и $ax^2 + (b - a)x + a = 0$

Гледате, еден од корените на равенката (4) е $x = -1$, а другите два корена ги наоѓате кога ја решите симетричната равенка од втор степен $ax^2 + (b - a)x + a = 0$

Задача 1. Да се реши равенката $3x^3 - 7x^2 - 7x + 3 = 0$.

Решение: Левата страна на равенката ја разложуваме на множители и добиваме: $(x + 1)(3x^2 - 10x + 3) = 0$

Равенката $3x^2 - 10x + 3 = 0$ има корени 3 и $\frac{1}{3}$. Според тоа, корени на дадената равенка се: $x_1 = -1$, $x_2 = 3$, $x_3 = \frac{1}{3}$

2.° Симетричната равенка од четврти степен гласи:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0, \; a \neq 0 \tag{5}$$

Ако ги поделиме двете страни на равенката (5) со x^2 и ги групираме членовите со еднакви коефициенти, ќе ја добиеме еквивалентната равенка: $a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0$ (5′)

Потоа ако ставиме $x + \frac{1}{x} = z$, откаде со квадрирање наоѓаме

$$x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = z^2 \quad \text{или} \quad x^2 + \frac{1}{x^2} = z^2 - 2,$$

и ако соодветните изрази ги замениме во равенката (5'), ќе ја добиеме квадратната равенка $a(z^2 - 2) + bz + c = 0$ (6)
по однос на помошната непозната z.

Равенката (6) има два корена z_1 и z_2, но бидејќи е $x + \frac{1}{x} = z$, тоа решавањето на симетричната равенка (5) се сведува на решавање вкупноста равенки:

$$\left[\begin{array}{l} x + \frac{1}{x} = z_1 \\ x + \frac{1}{x} = z_2, \end{array}\right.$$

односно на вкупноста од квадратните равенки: $\left[\begin{array}{l} x^2 - z_1 x + 1 = 0 \\ x^2 - z_2 x + 1 = 0. \end{array}\right.$

Од нив добиваме четири вредности за непознатата x, толку колку што е степенот на равенката (5).

Задача 2. Да се реши равенката $(x^2 + 1)(x + 1)^2 - x^2 = 0$.

Решение: Дадената равенка е еквивалентна на симетричната равенка:

$$x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x + 1 = 0$$

Ја доведуваме равенката во видот: $\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 2\left(x + \frac{1}{x}\right) + 1 = 0$ и ставаме: $x + \frac{1}{x} = z$, а) $x^2 + \frac{1}{x^2} = z^2 - 2$.

Така ја добиваме равенката $z^2 - 2 + 2z + 1 = 0$ или $z^2 + 2z - 1 = 0$, која има два корена $z_1 = -1 + \sqrt{2}$ и $z_2 = -1 - \sqrt{2}$.

За да ги добиеме корените на дадената равенка, треба да је решиме вкупноста равенки:

$$\left[\begin{array}{l} x + \frac{1}{x} = -1 + \sqrt{2} \\ x + \frac{1}{x} = -1 - \sqrt{2}, \end{array}\right. \quad \text{или} \quad \left[\begin{array}{l} x^2 + (1 - \sqrt{2})x + 1 = 0 \\ x^2 + (1 + \sqrt{2})x + 1 = 0 \end{array}\right.$$

Од нив наоѓаме: $x_{1,2} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} - 1 \pm i\sqrt{2\sqrt{2} + 1}\right)$ и

$$x_{3,4} = -\frac{1}{2}\left(\sqrt{2} + 1 \mp \sqrt{2\sqrt{2} - 1}\right).$$

3.° Симетричната равенка од пети степен во општ вид гласи:

$$ax^5 + bx^4 + cx^3 + cx^2 + bx + a = 0,\ a \neq 0 \tag{7}$$

Ќе покажеме дека решавањето на равенката (7) може да се сведе на решавање на симетрична равенка од четврти степен.

Со групирање на членовите со еднакви коефициенти, добиваме:

$$a(x^5 + 1) + bx(x^3 + 1) + cx^2(x + 1) = 0 \tag{7'}$$

Кога ќе земеме пред вид дека: $x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$ и $x^5 + 1 = (x + 1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)$ и заедничкиот множител $(x + 1)$ го изнесеме пред заграда, равенката (7') го добива видот:

$$(x+1)\,[a\,(x^4-x^3+x^2-x+1)+bx\,(x^2-x+1)+cx^2]=0$$

или

$$(x+1)\,[ax^4+(-a+b)\,x^3+(a-b+c)\,x^2+(-a+b)\,x+a]=0 \qquad (7'')$$

Од равенката (7″) очигледно е дека едно решение на равенката (7) е $x=-1$, а другите решенија ги добиваме кога ќе ја решиме симетричната равенка од четврти степен:

$$ax^4+(-a+b)\,x^3+(a-b+c)\,x^2+(-a+b)\,x+a=0 \qquad (8)$$

Задача 3. Да се реши равенката

$$2x^5+5x^4-13x^3-13x^2+5x+2=0.$$

Решение: Равенката е симетрична од пети степен. Кога ќе ги примениме горниве разгледувања, последователно добиваме:

$$2\,(x^5+1)+5x\,(x^3+1)-13x^2\,(x+1)=0,$$

$$2\,(x+1)\,(x^4-x^3+x^2-x+1)+5x\,(x+1)\,(x^2-x+1)-13x^2\,(x+1)=0,$$

$$(x+1)\,[2\,(x^4-x^3+x^2-x+1)+5x\,(x^2-x+1)-13x^2]=0,$$

$$(x+1)\,(2x^4+3x^3-16x^2+3x+2)=0$$

Последната равенка е еквивалентна на вкупноста од линеарната равенка $x+1=0$ (откаде $x_1=-1$) и една симетрична равенка од четврти степен

$$2x^4+3x^3-16x^2+3x+2=0 \qquad (9)$$

За да ја решиме равенката (9), истата прво ја доведуваме во видот:

$$2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+3\left(x+\frac{1}{x}\right)-16=0 \qquad (9')$$

Со смената $x+\dfrac{1}{x}=z$ од (9′) ја добиваме равенката $2\,(z^2-2)+3z-16=0$ или $2z^2+3z-20=0$, чии корени се $z_1=\dfrac{5}{2}$ и $z_2=-4$.

Потоа ја решаваме вкупноста равенки:

$$\left[\begin{array}{l} x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{5}{2} \\[2mm] x+\dfrac{1}{x}=-4. \end{array}\right.$$

Првата равенката од вкупноста има решенија $x_2=2$ и $x_3=\dfrac{1}{2}$, а втората равенка: $x_4=-2+\sqrt{3}$ и $x_5=-2-\sqrt{3}$.

Според тоа, решенија на дадената равенка се: $x_1=-1$, $x_2=2$, $x_3=\dfrac{1}{2}$, $x_4=-2+\sqrt{3}$, $x_5=-2-\sqrt{3}$.

Во општ случај може да се покаже дека за симетричните равенки од n-ти степен ќе важат следниве тврдења:

1.° Ако симетричната равенка (2) има непарен степен $n=2k+1$, тогаш еден од нејзините корени ќе биде $x=-1$. Делејќи ги двете страни на таа равенка со биномот $x+1$ ќе добиеме симетрична равенка од $n-1$ (парен) степен.

2°. Ако симетричната равенка (2) има парен степен $n=2k$, тогаш со смената $x+\dfrac{1}{x}=z$ таа се сведува на некоја равенка од степен $\dfrac{n}{2}=k$ по однос на новата непозната z.

Забелешка: Разгледуваните погоре равенки се викаат уште и *симетрични равенки од прв ред.*

Равенките од видот:

$$a_0 x^{2k} + a_1 x^{2k-1} + a_2 x^{2k-2} + \dots + a_{k-1} x^{k+1} + a_k x^k - a_{k+1} x^{k-1} + \dots +$$
$$+ (-1)^{k-1} a_1 x + (-1)^k a_0 = 0, \quad a_0 \neq 0, \quad k \in \mathbf{N}$$

се викаат *симетрични равенки од втор ред.*

На пример, симетричните равенки од 6-ти степен од втор ред го имаат видот:

$$ax^6 + bx^5 + cx^4 + dx^3 - cx^2 + bx - a = 0, a \neq 0.$$

Нека е дадена симетрична равенка од 4-ти степен од втор ред:

$$ax^6 + bx^5 + cx^4 + dx^3 - cx^2 + bx - a = 0, a \neq 0.$$

Ако двете страни ги поделиме со x^2, таа се сведува на видот:

$$a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x - \frac{1}{x}\right) + c = 0.$$

Со воведување на смената $x - \frac{1}{x} = z$, а имајќи предвид дека $x^2 - 2 + \frac{1}{x^2} = z^2$, односно $x^2 + \frac{1}{x^2} = z^2 + 2$, таа се сведува на крадратната равенка $a(z^2 + 2) + bz + c = 0$ по однос на новата непозната z.

ЗАДАЧИ

Да се решат равенките:

17. а) $x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x + 1 = 0$, б) $2x^4 - 7x^3 + 9x^2 - 7x + 2 = 0$,

18. а) $2x^3 + 7x^2 + 7x + 2 = 0$, б) $2x^5 - 3x^4 + x^3 + x^2 - 3x + 2 = 0$,

19. а) $6x^5 - 5x^4 - 29x^3 - 29x^2 - 5x + 6 = 0$, б) $x^4 + x^3 - 10x^2 + x + 1 = 0$.

Реши ги равенките со разложување левата им страна на множители:

20. а) $x^4 - 5x^3 + 5x - 1 = 0$, б) $2x^4 + 5x^3 - 5x - 2 = 0$

21. а) $2x^3 + x^2 - x - 2 = 0$, б) $3x^3 + x^2 - x - 3 = 0$

22. Реши ги симетричните равенки од 4-ти степен од втор ред:

а) $x^4 + 5x^3 + 4x^2 - 5x + 1 = 0$, б) $6x^4 - 25x^3 + 12x^2 + 25x + 6 = 0$

23. Реши ги биномните равенки: а) $x^5 - 1 = 0$, б) $x^5 + 1 = 0$, кога знаеш дека: $x^5 - 1 = (x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$ и

$x^5 + 1 = (x + 1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)$

24. Покажи дека равенката од видот $(x + a)^4 + (x - a)^4 = c$ е биквадратна. Реши ги равенките: а) $(x + 1)^4 + (x - 1)^4 = 82$, б) $(x + 2)^4 + (x - 2)^4 = 256$.

25. Равенката од видот $(x + a)^4 + (x + b)^4 = c$ со смената $x = z - \frac{a + b}{2}$ се сведува на биквадратна равенка. На тој начин реши ја равенката $(x + 6)^4 + (x + 4)^4 = 82$.

СИСТЕМ КВАДРАТНИ РАВЕНКИ СО ДВЕ НЕПОЗНАТИ

§ 11. СИСТЕМ И ВКУПНОСТ РАВЕНКИ СО ДВЕ НЕПОЗНАТИ (Повторување)

Равенките со две непознати симболички ги означуваме:

$$f(x, y) = \varphi(x, y), \tag{1}$$

$$F(x, y) = 0 \tag{2}$$

каде што $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$, $F(x, y)$ се изрази (функции) на променливите x и y.

Двојката броеви $x = x_0$, $y = y_0$, односно подредената двојка (x_0, y_0) се вика *решение на равенката со две непознати* (1) или (2), ако $f(x_0, y_0) = \varphi(x_0, y_0)$, односно $F(x_0, y_0) = 0$ е вистинито бројно равенство. Велиме уште дека вредностите на непознатите $x = x_0$, $y = y_0$ ја задоволуваат равенката (1), односно (2).

Да се реши равенката (1) или (2) во дадена бројна област, значи да се одреди множеството на сите нејзини решенија во таа бројна област.

Нека се дадени две равенки со две непознати x и y:

$$f_1(x, y) = \varphi_1(x, y) \tag{3}$$

$$f_2(x, y) = \varphi_2(x, y), \tag{4}$$

чии множества решенија да ги означиме соодветно со M_1 и M_2.

Ако $M_1 \subset M_2$, тогаш за равенката (4) велиме дека е *последица* на равенката (3); **ако пак** $M_1 = M_2$, тогаш велиме дека равенките (3) и (4) *се еквивалентни* една на друга.

Да напомнеме: сè што беше речено по однос на еквивалентноста на равенките со една непозната, како и теоремите 1—6 во §7 аналогно важат и за равенките со две непознати.

За две равенки велиме образуваат *систем равенки со две непознати:*

$$\begin{cases} f_1(x, y) = \varphi_1(x, y) \\ f_2(x, y) = \varphi_2(x, y) \end{cases} \tag{5}$$

ако треба да се најдат сите подредени двојки броеви (x_0, y_0), кои истовремено ги задоволуваат и двете дадени равенки.

Секоја таква двојка броеви (x_0, y_0) се вика *решение на системот* (5). Ако множеството решенија на системот равенки е празно множество, тогаш велиме дека тој систем е *противречен*.

На пример: Системот равенки:

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ x + 2y = 7 \end{cases} \quad \text{е противречен.}$$

Неколку равенки
$$\left[\begin{array}{l} f_1(x, y) = \varphi_1(x, y) \\ f_2(x, y) = \varphi_2(x, y) \\ \dots\dots\dots\dots \\ f_n(x, y) = \varphi_n(x, y) \end{array}\right. \qquad (6)$$

велиме образуваат *вкупност равенки*, ако треба да се одредат сите двојки броеви (x_0, y_0), кои ја задоволуваат *барем една* од равенките (6). Секоја таква двојка броеви (x_0, y_0) се вика *решение на вкупноста* равенки (6).

Во некои случаи може да се јави потреба да разгледуваме и *вкупност од системи равенки*, а исто така и *систем од вкупности равенки*.

На пример, вкупноста од системите равенки:
$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f_1(x,y) = 0 \\ \varphi_1(x,y) = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} f_2(x,y) = 0 \\ \varphi_2(x,y) = 0 \end{cases} \end{array}\right. \qquad (7)$$

означува дека прво треба да се решат одделно системите равенки
$$\begin{cases} f_1(x,y) = 0 \\ \varphi_1(x,y) = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} f_2(x,y) = 0 \\ \varphi_2(x,y) = 0 \end{cases}$$

од вкупноста (7), а потоа да се најде унијата од тие две множества на решенија.

Нека е даден системот од две вкупности равенки
$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} f_1(x,y) = 0 \\ f_2(x,y) = 0 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} \varphi_1(x,y) = 0 \\ \varphi_2(x,y) = 0 \end{array}\right. \end{cases} \qquad (8)$$

Ако со A_1 и A_2 ги означиме множествата на сите подредени двојки броеви (x_0, y_0) што се решенија соодветно на равенките во првата вкупност
$$\left[\begin{array}{l} f_1(x,y) = 0 \\ f_2(x,y) = 0, \end{array}\right.$$

а со B_1 и B_2 ги означиме множествата на сите подредени двојки броеви (x_0, y_0) што се решенија соодветно на равенките во втората вкупност
$$\left[\begin{array}{l} \varphi_1(x,y) = 0 \\ \varphi_2(x,y) = 0, \end{array}\right.$$

тогаш множеството решенија на системот од вкупности равенки (8), ќе биде множеството $(A_1 \cup A_2) \cap (B_1 \cup B_2)$.

Два система равенки се викаат *еквивалентни*, ако секое решение на првиот систем е решение и на вториот систем, и обратно: секое решение на вториот систем е решение и на првиот систем.

При решавањето на системите равенки ќе ги ползуваме следниве теореми за еквивалентност на системите равенки. Некои од нив вам ви се познати од порано.

Теорема 1. *Ако во системот*
$$\begin{cases} f_1(x,y) = \varphi_1(x,y) \\ f_2(x,y) = \varphi_2(x,y) \end{cases} \qquad (5)$$

која и да било равенка ја замениме со еквивалентна на неа равенка, ќе добиеме друг систем — еквивалентен на дадениот.

Од теоремата 1 следува дека: Секој систем равенки (5) е еквивалентен на некој систем равенки од видот: $\begin{cases} f(x,y)=0 \\ \varphi(x,y)=0 \end{cases}$ (5′)

Теорема 2. *Равенката од видот* $f_1(x,y)\cdot f_2(x,y)\ldots f_n(x,y)=0$ *еквивалентна е на вкупноста равенки* $\left[\begin{array}{l} f_1(x,y)=0 \\ f_2(x,y)=0 \\ \ldots\ldots\ldots \\ f_n(x,y)=0 \end{array}\right.$

Теорема 3. *Системот равенки* $\begin{cases} f(x,y)\cdot\varphi(x,y)=0 \\ F(x,y)=0 \end{cases}$

е еквивалентен на вкупноста од системите равенки $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x,y)=0 \\ F(x,y)=0 \end{cases} \\ \begin{cases} \varphi(x,y)=0 \\ F(x,y)=0 \end{cases} \end{array}\right.$

Последица: *Системот равенки* $\begin{cases} f(x,y)\cdot\varphi(x,y)=0 \\ F(x,y)\cdot\Phi(x,y)=0 \end{cases}$

е еквивалентен на вкупноста од следниве четири системи равенки:

$$\begin{cases} f(x,y)=0 \\ F(x,y)=0, \end{cases} \quad \begin{cases} f(x,y)=0 \\ \Phi(x\ y)=0, \end{cases} \quad \begin{cases} \varphi(x,y)=0 \\ F(x,y)=0, \end{cases} \quad \begin{cases} \varphi(x,y)=0 \\ \Phi(x,y)=0 \end{cases}$$

Теорема 4. *Системот равенки* $\begin{cases} y=f(x) \\ \Phi(x,y)=0 \end{cases}$

е еквивалентен на системот равенки $\begin{cases} y=f(x) \\ \Phi(x,f(x))=0. \end{cases}$

На ова теорема се засновува познатиот *метод на замена (супституција)*, со кој често се служиме при решавањето на системите равенки со две непознати. Тој се состои во следново:

Од теоремите 1 и 4 следува: Ако равенката $F(x,y)=0$ е еквивалентна на равенката $y=f(x)$, тогаш системот равенки

$$\begin{cases} F(x,y)=0 \\ \Phi(x,y)=0 \end{cases} \text{ е еквивалентен на системот } \begin{cases} y=f(x) \\ \Phi(x,f(x))=0 \end{cases}$$

во кој равенката $\Phi(x,f(x))=0$ е со една непозната.

Од таа равенка нека добиеме $x_1, x_2, \ldots, x_k$, а од првата равенка ним им соодветствуваат вредностите $y_1=f(x_1)$, $y_2=f(x_2), \ldots, y_k=f(x_k)$.

Покрај методот на замена, при решавањето на системите равенки често го применуваме и *методот на алгебарско собирање* на равенките. Тој метод се засновува на следнава:

Теорема 5. *Системот равенки* $\begin{cases} F(x,y)=0 \\ \Phi(x,y)=0 \end{cases}$

е еквивалентен на системот $\begin{cases} mF(x,y)+n\Phi(x,y)=0 \\ \Phi(x,y)=0 \end{cases}$

каде што m *и* $n\neq 0$ *се кои било реални броеви.*

§ 12. РАВЕНКИ И СИСТЕМ РАВЕНКИ ОД ВТОР СТЕПЕН СО ДВЕ НЕПОЗНАТИ

Дефиниција 1. *Равенката од видот*

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \tag{1}$$

каде што x и y се непознати, а A, B, C, D, E и F се дадени броеви, од кои барем еден од броевите A, B, C е различен од нула, се вика равенка од втор степен со две непознати или квадратна равенка со две непознати.

Првите три члена на равенката (1) се од втор степен по однос на непознатите x и y, следниве два — од прв степен, а F слободен член.

Условот барем еден од коефициентите A, B, C пред квадратните членови да е различен од нула е од суштинска природа, бидејќи во спротивен случај равенката (1) нема да биде квадратна туку линеарна. Освен тоа, коефициентите, A, B и D или B, C и E истовремено не треба да се еднакви на нула, бидејќи во тој случај равенката (1) нема да биде со две непознати, туку со една непозната.

Во равенката (1) ако $D = E = F = 0$, тогаш таа ги содржи само квадратните членови:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 0. \tag{2}$$

и се вика *хомогена квадратна равенка* со две непознати.

Решение на квадратната равенка со две непознати е секоја двојка вредности на непознатите (x_0, y_0), за која дадената равенка е задоволена.

На пример, двојките броеви $(0, 1)$, $(0, -3)$, $(1, 5)$ се решенија на равенката $x^2 - 2xy + y^2 - 3x + 2y - 3 = 0$, меѓутоа двојките броеви $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ не се решенија. Покажи!

Дефиниција 2. *Системот од две равенки со две едни исти непознати, од кои барем едната равенка е од втор степен, а другата е од прв или втор степен, се вика систем равенки од втор степен со две непознати.*

Пример: $\begin{cases} x^2 - 2y^2 + 3x - 5 = 0 \\ xy - 2y + 1 = 0, \end{cases}$ $\begin{cases} y^2 - xy + 2x + 1 = 0 \\ x - 2y - 3 = 0, \end{cases}$ $\begin{cases} xy = 12 \\ x + y = 7 \end{cases}$

се системи равенки од втор степен со две непознати.

Решение на системот равенки од втор степен со две непознати е секоја двојка вредности на непознатите (x_0, y_0) за која обете равенки од системот се задоволени.

Да се реши даден систем равенки од втор степен со две непознати значи да се одреди множеството од сите негови решенија во дадена област на броеви. Ако множеството решенија на системот равенки од втор степен со две непознати го означиме со M, а множествата решенија на секоја одделна равенка во системот ги означиме со M_1 и M_2, тогаш ќе имаме дека $M = M_1 \cap M_2$

Општиот вид на системот од две квадратни равенки со две непознати е:

$$\begin{cases} a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 + d_1x + e_1y + f_1 = 0 \\ a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 + d_2x + e_2y + f_2 = 0 \end{cases} \tag{3}$$

Ќе покажеме дека системот (3), како и секој систем со две непознати, со елиминација на едната непозната се сведува на равенка со една непозната. Да го елиминираме прво y^2, за таа цел првата и втората равенка на системот (3) ќе ги помножиме соодветно со c_2 и $-c_1$, а потоа соодветните страни на двете равенки да ги собереме. Така добиваме:

$$(a_1 c_2 - a_2 c_1) x^2 + (b_1 c_2 - b_2 c_1) xy + (d_1 c_2 - d_2 c_1) x + (e_1 c_2 - e_2 c_1) y + f_1 c_2 - f_2 c_1 = 0$$

или ако ставиме: $a_1c_2 - a_2c_1 = p, \quad d_1c_2 - d_2c_1 = q, \quad f_1c_2 - f_2c_1 = r$
$b_1c_2 - b_2c_1 = -s$ и $e_1c_2 - e_2c_1 = -t$

имаме:
$$px^2 - sxy + qx - ty + r = 0 \tag{4}$$

Равенката (4) е линеарна по однос на непознатата y, и од неа за вредности на x за кои $sx + t \neq 0$, добиваме $y = \dfrac{px^2 + qx + r}{sx + t}$

Ако овој израз го замениме во првата (или втората) равенка на системот (3) и целата равенка ја помножиме со најмалиот заеднички именител $(sx + t)^2$, ќе добиеме една равенка со една непозната, во општ случај од видот:

$$m_0x^4 + m_1x^3 + m_2x^2 + m_3x + m_4 = 0, \tag{5}$$

во која коефициентите m_0, m_1, m_2, m_3 и m_4 се определени со коефициентите на дадениот систем (3).

Равенката (5) е општа равенка од 4-ти степен, чие решавање во општ случај се разгледува во вишата алгебра.

Со расположивиот апарат на елементарната алгебра, равенката (5) може да се реши само во специјални случаи: кога таа е биквадратна или симетрична, или ако нејзината лева страна може да се разложи на квадратни или линеарни множители. Исто така ако $sx + t = 0$, равенката (4) се сведува на квадратна со една непозната, па според тоа таа може да се реши.

Од сите системи равенки од втор степен со две непознати ние ќе се задржиме само на некои специјални системи што можат да се решат.

ЗАДАЧИ

1. Одреди го степенот на равенките: $3x^2 + 5x - 2y + 4 = 0$, $2xy - y^2 - 4y + 1 = 0$, $xy + x + 1 = 0$ по однос на: а) непознатата x, б) непознатата y, в) непознатите x и y.

2. Дадена е равенката $(\kappa^2 - 1) x^2 + 2xy - (\kappa + 2) y^2 + 3x + y + 5 = 0$. Одреди, за кои вредности на параметарот κ, равенката ќе биде линеарна по однос на: а) непознатата x, б) непознатата y.

3. Одреди кои од следниве равенки: а) $3x^2 - 2xy = 0$, б) $2xy - 3 = 0$, в) $x^2 + y^2 = 5$, г) $xy + x - y = 0$, д) $x^3 + 2y^3 = 0$ се хомогени по однос на непознатите x и y.

4. Може ли дадена равенка од втор степен со две непознати да нема ниту едно решение во областа на реалните броеви? Покажи го тоа со равенката $2x^2 + y^2 + 1 = 0$.

5. Дадена е равенката $x^2 - xy + 1 = 0$. Провери кои од следниве двојки броеви: $(1, 2)$, $(-2, 3)$ $(-2; -2, 5)$, $(3, 0)$, $(0, 0)$ се решенија на дадената равенка.

6. Дадена е равенката $x^2 + xy - 2y^2 = 0$. Реши ја таа равенка прво по x (земајќи да е y параметар), а потоа реши ја по y (сметајќи да е x параметар).

7. Разложи го триномот на множители $3x^2 - 5xy - 2y^2$.

§ 13. СИСТЕМ ОД ЕДНА ЛИНЕАРНА И ЕДНА КВАДРАТНА РАВЕНКА СО ДВЕ НЕПОЗНАТИ

Општиот вид на системот равенки со две непознати, во кој едната равенка е линеарна, а другата — квадратна со две непознати, гласи:

$$\begin{cases} ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0 \\ mx+ny+p=0 \end{cases} \tag{1}$$

каде што барем еден од коефициентите a, b, c не е нула.

Овој систем секогаш може да се реши по методот на замена (супституција). Нека е, на пример, $n \neq 0$. Тогаш од втората равенка наоѓаме:

$$y=\frac{-mx-p}{n} \tag{2}$$

Ако добиениот израз за y го замениме (внесеме) во првата равенка од системот (1), ќе добиеме нов систем равенки:

$$\begin{cases} ax^2+bx\cdot\dfrac{-mx-p}{n}+c\left(\dfrac{-mx-p}{n}\right)^2+dx+e\cdot\dfrac{-mx-p}{n}+f=0 \\ y=\dfrac{-mx-p}{n} \end{cases} \tag{3}$$

кој е еквивалентен на дадениот систем (1).

Во системот (3) првата равенка е со една непозната, која во општ случај е некоја квадратна равенка по однос на непознатата x, т. е.

$$ux^2+vx+t=0, \tag{4}$$

каде што: $u=\dfrac{an^2+cm^2-bmn}{n^2}$, $v=\dfrac{dn^2-bnp+2cmp-emn}{n^2}$,

$t=\dfrac{cp^2-enp-fn^2}{n^2}$.

Ако квадратната равенка (4) нема реални корени, тогаш и системот (3), односно (4) во множеството на реалните броеви исто нема решенија. Ако пак квадратната равенка (4) има два различни реални корени x_1 и x_2 (или еден двоен реален корен $x_1=x_2$), тогаш со нивното последователно заменување во втората равенка на системот (3), ги наоѓаме и соодветните вредности y_1 и y_2 на втората непознати y. Така определените двојки броеви (x_1, y_1) и $x_2, y_2)$ се решенија на системот (3), следователно и на системот (1).

Бидејќи квадратната равенка (4) може да има два, еден или ниту еден реален корен, тоа јасно е дека и системот (1) може да има или две, или едно, или ниту едно решение.

Задача 1. Да се реши системот равенки:

$$\begin{cases} x^2+xy-2y^2+2x-2y-6=0 \\ y-x+1=0\,. \end{cases}$$

Решение: Од втората равенка добиваме: $y = x - 1$.

Заменувајќи го добиениот израз $x - 1$ во првата равенка наместо y, ја добиваме равенката $x^2 + x(x-1) - 2(x-1)^2 + 2x - 2(x-1) - 6 = 0$, односно $x^2 + x^2 - x - 2x^2 + 4x - 2 + 2x - 2x + 2 - 6 = 0$, или $3x - 6 = 0$, или $x = 2$.

Од равенката $y = x - 1$ добиваме $y = 2 - 1 = 1$.

Според тоа, дадениот систем равенки има едно решение $(2, 1)$.

Задача 2. Да се реши системот равенки $\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \\ x + y = a \end{cases}$

Решение: Дадениот систем еквивалентен е на системот равенки:

$$\begin{cases} x^2 + (a - x)^2 = a^2 \\ y = a - x \end{cases}$$, во кој првата равенка е со една непозната.

Ја средуваме и решаваме таа равенка $x^2 + a^2 - 2ax + x^2 - a^2 = 0$ односно $2x^2 - 2ax = 0$, или $2x(x - a) = 0$.

Гледаме, таа има два корена, $x_1 = 0$ и $x_2 = a$. Заменувајќи ги тие вредности во втората равенка, наоѓаме: $y_1 = a$ и $y_2 = 0$.

Следователно, дадениот систем има две решенија: $(0, a)$ и $(a, 0)$.

ЗАДАЧИ

Да се решат системите равенки:

8. а) $\begin{cases} (x+y)^2 - 5y^2 + 3y = 5x + 2, \\ x - y = 2 \end{cases}$ б) $\begin{cases} y^2 - xy + 2y = 2 \\ x + y = 2 \end{cases}$

9. а) $\begin{cases} x^2 - xy + 2y^2 + 2x - y = 13, \\ x - 2y = 4 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x + y = 7 \end{cases}$

10. а) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 8x - 12y + 27 = 0, \\ x - 2y + 3 = 0, \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x^2 - y^2 + xy = 25 \\ y - 3x + 5 = 0 \end{cases}$

11. а) $\begin{cases} x^2 + y^2 = k^2 \\ x + y = k \end{cases}$ б) $\begin{cases} xy = a^2 - b^2 \\ x - y = 2b \end{cases}$

12. а) $\begin{cases} x^2 - 5y^2 = 4, \\ x - 2y - 1 = 0 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - y = xy \\ x - y = 1 \end{cases}$

§ 14. СПЕЦИЈАЛНИ СИСТЕМИ ОД ДВЕ КВАДРАТНИ РАВЕНКИ СО ДВЕ НЕПОЗНАТИ

14.1. СИСТЕМ ОД ДВЕ ЧИСТО КВАДРАТНИ РАВЕНКИ

Тоа е системот од видот:

$$\begin{cases} a_1x^2 + b_1y^2 = c_1 \\ a_2x^2 + b_2y^2 = c_2 \end{cases} \qquad (1)$$

Со воведување на нови непознати $x^2 = u$, $y^2 = v$ системот (1) се сведува на систем линеарни равенки со две непознати:

$$\begin{cases} a_1u + b_1v = c_1 \\ a_2u + b_2v = c_2 \end{cases} \qquad (2)$$

по однос на новите непознати u и v.

При услов $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$ системот (2) има единствено решение:

$$u = \frac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}, \qquad v = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \tag{2'}$$

Според тоа, системот (1) е еквивалентен на системот $\begin{cases} x^2 = u \\ y^2 = v \end{cases}$ (3)

каде што u и v се одредени со равенствата (2').

Очигледно е дека системот (3) ќе има реални решенија, ако и само ако $u \geqslant 0$ и $v \geqslant 0$. Во тој случај ќе биде $x_{1,2} = \pm\sqrt{u}$, $y_{1,2} = \pm\sqrt{v}$.

Ако земеме предвид дека во системот (3), односно (1) се јавуваат само квадратни членови, затоа равенките во нив ќе бидат задоволени за кој било пар вредности на x и y. Значи, дадениот систем ќе има најмногу четири решенија:

$$(\sqrt{u}, \ \sqrt{v}), \ (\sqrt{u}, -\sqrt{v}), \ (-\sqrt{u}, \sqrt{v}) \ \text{ и } \ (-\sqrt{u}, \ -\sqrt{v}).$$

Задача: Да се реши системот равенки: $\begin{cases} 5x^2 - 2y^2 = 14 \\ 3x^2 + y^2 = 15 \end{cases}$

Решение: Со смената $x^2 = u$, $y^2 = v$ го добиваме системот линеарни равенки

$$\begin{cases} 5u - 2v = 14 \\ 3u + v = 15, \end{cases}$$

чие решение е $u = 4$, $v = 3$.

Значи, $x^2 = 4$, $y^2 = 3$, односно $x_{1,2} = \pm 2$, $y_{1,2} = \pm\sqrt{3}$.

Според тоа, дадениот систем ќе има четири решенија: $(2, \sqrt{3})$, $(2, -\sqrt{3})$, $(-2, \sqrt{3})$ и $(-2, -\sqrt{3})$.

14. 2. СИСТЕМ КВАДРАТНИ РАВЕНКИ ОД КОИ ЕДНАТА Е ХОМОГЕНА

Да го разгледаме системот равенки:

$$\begin{cases} a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 + d_1x + e_1y + f_1 = 0 \\ a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 = 0 \end{cases} \tag{1}$$

во кој втората равенка е хомогена.

Ако $a_2 = 0$, тогаш системот (1) е еквивалентен на

$$\begin{cases} a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 + d_1x + e_1y + f = 0 \\ (b_2x + c_2y)y = 0 \end{cases} \tag{2}$$

во кој втората равенка е еквивалентна на вкупноста од две равенки

$$b_2x + c_2y = 0, \ \ y = 0$$

Поради тоа системот (2) ќе биде еквивалентен на вкупноста од системите:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 + d_1x + e_1y + f = 0 \\ b_2x + c_2y = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 + d_1x + e_1y + f_1 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

кои лесно се решаваат со методот на замена.

Нека $a_2 \neq 0$. Втората равенка на системот (1) да ја поделиме со y^2. Тоа е допуштено, бидејќи ако $y = 0$ тогаш од истата равенка следува дека е и $x = 0$. Меѓутоа двојката броеви $(0, 0)$ не е решение на првата равенка, па според тоа таа не е решение и на системот (1). Така го добиваме системот:

$$\begin{cases} a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 + d_1x + e_1y + f_1 = 0 \\ a_2\left(\dfrac{x}{y}\right)^2 + b_2\left(\dfrac{x}{y}\right) + c_2 = 0 \end{cases} \tag{3}$$

Ако ставиме $\dfrac{x}{y} = t$ или $x = yt$, втората равенка на системот (3) станува квадратна по однос на t: $a_2t^2 + b_2t + c_2 = 0$, од која нека добиеме за t две различни реални вредности t_1 и t_2. Во таков случај системот (3), односно (1) е еквивалентен на вкупноста од системите:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 + d_1x + e_1y + f_1 = 0 \\ x = t_1y \end{cases} \\ \begin{cases} a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 + d_1x + e_1y + f_1 = 0 \\ x = t_2y \end{cases} \end{array}\right.$$

кои лесно се решаваат по методот на замена.

Задача: Да се реши системот равенки: $\begin{cases} x^2 - 5xy + 6y^2 = 0 \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases}$

Решение: Гледаме за $y = 0$ системот е противречен $\begin{cases} x^2 = 0 \\ x^2 = 10 \end{cases}$

Значи, тој нема решенија за кои е $y = 0$.

При $y \neq 0$, ако првата равенка на системот ја поделиме со y^2, и ставиме $\dfrac{x}{y} = t$, ја добиваме квадратната равенка $t^2 - 5t + 6 = 0$, од која наоѓаме $t_1 = 3$ и $t_2 = 2$, или $x = 3y$ и $x = 2y$.

Според тоа, дадениот систем е еквивалентен на вкупноста од следниве два попрости системи: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ x = 3y \end{cases}$ и $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ x = 2y \end{cases}$

Првиот систем има решенија $(3, 1)$ и $(-3, -1)$, а вториот: $(2\sqrt{2}, \sqrt{2})$ и $(-2\sqrt{2}, -\sqrt{2})$. Тоа се бараните решенија на дадениот систем.

14. 3. СИСТЕМ КВАДРАТНИ РАВЕНКИ БЕЗ ЛИНЕАРНИТЕ ЧЛЕНОВИ НА НЕПОЗНАТИТЕ

Тој систем во општ случај гласи:

$$\begin{cases} a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 = d_1 \\ a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 = d_2 \end{cases} \tag{1}$$

Ако првата равенка ја помножиме со d_2, а втората — со $(-d_1)$, а потоа соодветните страни на двете равенки ги собереме ќе ја добиеме хомогената квадратна равенка:

$$(a_1d_2 - a_2d_1)x^2 + (b_1d_2 - b_2d_1)xy + (c_2d_2 - c_2d_1)y^2 = 0$$

Заради краткост да означиме:

$$a_1d_2 - a_2d_1 = A, \quad b_1d_2 - b_2d_1 = B, \quad c_1d_2 - c_2d_1 = C$$

Така добиваме: $Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 0$ (2)

Хомогената равенка (2) заедно со една (која било) равенка од системот (1) ќе образува нов систем еквивалентен на дадениот, кој знаеме да го решиме.

Задача: Да се реши системот равенки $\begin{cases} x^2 - 2xy + 3y^2 = 9 \\ x^2 - 4xy + 5y^2 = 5 \end{cases}$

Решение: $+ \begin{cases} x^2 - 2xy + 3y^2 = 9 \;/ \cdot (-5) \\ x^2 - 4xy + 5y^2 = 5 \;/ \cdot (9) \end{cases}$

$$4x^2 - 26xy + 30y^2 = 0, \quad \text{или} \quad 2x^2 - 13xy + 15y^2 = 0$$

Добиената равенка земена заедно со една, на пример првата, равенка од дадениот систем образува нов систем еквивалентен на дадениот. $\begin{cases} x^2 - 2xy + 3y^2 = 9 \\ 2x^2 - 13xy + 15y^2 = 0 \end{cases}$

Ако го решиме тој систем на начин што е изложен во претходната точка, ги добиваме неговите решенија, а со тоа и решенијата на дадениот систем: $\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}, \ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(-\frac{5\sqrt{2}}{2}, \ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $(3, 2)$, $(-3, -2)$.

14. 4. СИСТЕМ РАВЕНКИ ВО КОЈ БАРЕМ ЕДНА ОД РАВЕНКИТЕ СЕ РАЗЛОЖУВА НА МНОЖИТЕЛИ

Во одредени случаи некои системи квадратни равенки со две непознати можат да бидат решени и кога левата страна барем на една од равенките на системот успееме да ја разложиме на множители, а при услов другата страна на таа равенка да е еднаква на нула. Да го покажеме тоа на еден пример:

Нека е даден системот равенки:

$$\begin{cases} x^2 + 2xy - 8y^2 - 6x + 18y - 7 = 0 \\ x^2 - xy - 6y^2 - 3x + 9y = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

Втората равенка на системот да ја разгледаме како квадратна по однос на непозната x: $x^2 - (y + 3)\,x - 6y^2 + 9y = 0$ (2)

Ако непозната y ја сметаме за параметар и ја решиме равен-по однос на непознатата x: $x^2 - (y + 3)\,x - 6y^2 + 9y = 0$ (2)

Тогаш равенката (2) може да се запише вака:

$$(x - 3y)\,(x + 2y - 3) = 0, \qquad (2')$$

а дадениот систем (1) го добива видот:

$$\begin{cases} x^2 + 2xy - 8y^2 - 6x + 18y - 7 = 0 \\ (x - 3y)\,(x + 2y - 3) = 0 \end{cases} \qquad (1')$$

Меѓутоа системот (1′) е еквивалентен на вкупноста од два система:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2+2xy-8y^2-6x+18y-7=0\\ x-3y=0\end{cases}\\ \\ \begin{cases}x^2+2xy-8y^2-6x+18y-7=0\\ x+2y-3=0\end{cases}\end{array}\right.$$

кои кога ги решиме добиваме: (3 ,1), (—3, —1), (1, 1), (—1, 2).

Тоа се бараните решенија и на дадениот систем.

Забелешка: Да покушаме и првата равенка на системот (1) да ја разгледаме како квадратен трином по однос на непознатата x:

$$x^2 + 2\,(y-3)\,x-(8y^2-18y+7)=0 \tag{3}$$

Ако ја решиме равенката (3) по однос на x, добиваме:

$$x_1 = 2y - 1 \quad и \quad x_2 = -4y + 7$$

Тогаш левата страна на равенката (3) може да се разложи на множители и таа ќе гласи:

$$(x-2y+1)\,(x+4y-7)=0 \tag{3′}$$

Бидејќи првата и втората равенка на дадениот систем соодветно се еквивалентни на равенките (3′) и (2′), тоа тој ќе биде еквивалентен на системот:

$$\begin{cases}(x-2y+1)\,(x+4y-7)=0\\ (x-3y)\,(x+2y-3)=0\end{cases} \tag{1″}$$

Така добиениот систем (1″) е еквивалентен на вкупноста од следниве четири системи линеарни равенки:

$$\begin{cases}x-2y+1=0\\ x-3y=0,\end{cases}\quad \begin{cases}x-2y+1=0\\ x+2y-3=0,\end{cases}\quad \begin{cases}x+4y-7=0\\ x-3y=0,\end{cases}\quad \begin{cases}x+4y-7=0\\ x+2y-3=0\end{cases}$$

Кога ќе ги решиме, добиваме: (—3, —1), (1, 1), (3, 1), (—1,2).

ЗАДАЧИ

Да се решат системите равенки:

13. а) $\begin{cases}3x^2-2y^2=10\\ x^2-2y^2=6\end{cases}$ б) $\begin{cases}ax^2+by^2=a^3\\ bx^2-ay^2=b^3\end{cases}$

14. а) $\begin{cases}2x^2+3xy-2y^2=8\\ 3x^2+xy-y^2=9\end{cases}$ б) $\begin{cases}3x^2-2xy+y^2=9\\ x^2+3xy-2y^2=4\end{cases}$

15. а) $\begin{cases}x^2-5xy+6y^2=0\\ 2x^2-3xy+3y^2=20\end{cases}$ б) $\begin{cases}x^2+xy=12\\ xy-y^2=2\end{cases}$

16. а) $\begin{cases}3x^2+8y^2=14\\ x^2+4y^2+xy=6\end{cases}$ б) $\begin{cases}x^2-5xy+6y^2=0\\ x^2+y^2=10\end{cases}$

17. а) $\begin{cases}2x^2-3xy+5y-5=0\\ (x-2)\,(y-1)=0\end{cases}$ б) $\begin{cases}(x-3y)\,(x+2y-3)=0\\ (y-1)\,(2y-3x-7)=0\end{cases}$

Реши ги следниве системи со разложување едната равенка на множители:

18. а) $\begin{cases}2x^2+3y^2=5\\ (2x-y+1)^2-4=0\end{cases}$ б) $\begin{cases}2x^2+3xy-y^2-5x+y-10=0\\ x^2-xy+2y-4=0\end{cases}$

19. а) $\begin{cases}x^2-5y^2-3x-y+22=0,\\ y^2-xy+2x=4\end{cases}$ б) $\begin{cases}2x^2-15xy+4y^2-12x+45y-24=0\\ x^2+xy-2y^2-3x+3y=0\end{cases}$

§ 15. СИСТЕМ РАВЕНКИ, ШТО СЕ СИМЕТРИЧНИ ПО ОДНОС НА НЕПОЗНАТИТЕ

Дефиниција: *Дадена равенка $f(x, y) = 0$ со две непознати x и y велиме дека е симетрична по однос на непознатите, ако таа останува непроменета при замената на x со y, и y со x.*

На пример, равенката $x^2 - 3xy + y^2 = 5$ е симетрична по однос на непознатите, бидејќи ако во неа насекаде x го замениме со y, а y со x, равенката останува иста. Но, равенката $x^2 + 2y^2 = 1$ не е симетрична. Ако во неа x го замениме со y и y со x ќе ја добиеме равенката $y^2 + 2x^2 = 1$, која не е иста со првобитната.

Во посебни случаи секоја равенка што ги содржи само изразите $x + y$, xy, $x^2 + y^2$, $x^3 + y^3$, итн. е симетрична по однос на x и y.

Решавањето на системите симетрични равенки знатно се упростува со воведувањето на нови непознати, односно со смената:

$$\begin{cases} x + y = u \\ xy = v \end{cases}$$

Тогаш другите симетрични изрази од видот $x^n + y^n$ $(n \in \mathbf{N})$ ги изразуваме со u и v, како следува:

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = u^2 - 2v,$$

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 + y^2 - xy) = u(u^2 - 2v - v) = u(u^2 - 3v)$$

$$x^4 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 = (u^2 - 2v)^2 - 2v^2, \text{ итн.}$$

Може да се докаже дека секој симетричен полином $F(x, y)$ може да се изрази како функција на u и v, така што $F(x, y) = f(x + y, xy)$.

Ќе решиме неколку наједноставни системи на симетрични равенки.

Задача 1. Да се реши системот равенки $\begin{cases} x + y = a \\ xy = b \end{cases}$ (1)

Решение: Системот (1) ќе го решиме со примена на Виетовата теорема:

Нека броевите x и y се корени на некоја квадратна равенка, чија непозната да ја означиме, на пример со z.

Ако системот има решение, тогаш согласно обратната Виетова теорема тоа решение (x, y) мора да се состои од корените на квадратната равенка:

$$z^2 - az + b = 0 \qquad (2)$$

Одредувајќи ги корените z_1 и z_2 на равенката (2) ги добиваме и двете решенија на системот (1). Тоа се двојките броеви (z_1, z_2) и (z_2, z_1) ако е $z_1 \neq z_2$. Ако пак е $z_1 = z_2$, тогаш дадениот систем има само едно решение (z_1, z_1).

Ако равенката (2) нема реални решенија, тогаш и системот (1) нема решение.

Забелешка: Кон системот (1) лесно се сведува и системот

$$\begin{cases} x - y = a \\ xy = b \end{cases} \qquad (1')$$

Со смената $y = -t$, системот (1') ќе гласи:

$$\begin{cases} x + t = a \\ xt = -b \end{cases}$$

Задача 2. Да се реши системот равенки $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ xy=2 \end{cases}$ (2)

Решение: Прв начин. Ако втората равенка на системот (2) ја квадрираме, добиваме нов систем $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x^2y^2=4 \end{cases}$ (3)

кој се решава како и системот (1).

Тука x^2 и y^2 можеме да ги разгледуваме како корени на квадратната равенка $z^2-5z+4=0$, која има две решенија $z_1=4$ и $z_2=+1$.

Според тоа, имаме: $\begin{cases} x^2=4 \\ y^2=1 \end{cases}$ или $\begin{cases} x^2=1 \\ y^2=4 \end{cases}$

Гледаме, системот (3) има осум решенија:

(2, 1), (2, —1), (—2, 1), (—2, —1), (1, 2), (1, —2), (—1, 2), (—1, —2).

Меѓутоа, дадениот систем (2) ги има само следниве четири решенија: (2, 1), (—2, —1), (1, 2) и (—1, —2). Тоа е затоа, бидејќи со квадрирање двете страни на равенката $xy=2$, добиената равенка $x^2y^2=4$ не е еквивалентна на првата, туку последица на неа. Според тоа и системот (3) не е еквивалентен на дадениот систем (2), туку — последица на него. А тоа значи дека секое решение на системот (2) е решение и на системот (3), но не секое решение на системот (3) е решение и на системот (2).

Втор начин: Гледаме и двете равенки на системот (2) се симетрични по однос на непознатите. Да воведеме $x+y=u$, $xy=v$. Тогаш $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=u^2-2v$. По однос на новите непознати u и v, системот (2) го добива видот:

$$\begin{cases} u^2-2v=5 \\ v=2 \end{cases} \tag{2'}$$

Тој има две решенија (3, 2) и (—3, 2). По таков начин дадениот систем (2) се сведува на вкупност од два система:

$$\begin{cases} x+y=3 \\ xy=2 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x+y=-3 \\ xy=2 \end{cases}$$

Првиот систем има две решенија (2, 1) и (1, 2), а исто и вториот систем има две решенија (—2, —1) и (—1, —2).

Тоа се решенија и на дадениот систем.

Задача 3. Да се реши системот равенки: $\begin{cases} x^2+y^2-x-y=92 \\ x+y+xy=32 \end{cases}$

Решение: Да ставиме $x+y=u$, $xy=v$. Тогаш $x^2+y^2=u^2-2v$.

Го добиваме системот: $\begin{cases} u^2-2v-u=92 \\ u+v=32 \end{cases}$

Од втората равенка: $v=32-u$. Со замена во првата равенка добиваме

$$u^2-2(32-u)-u=92 \quad \text{или} \quad u^2+u-156=0,$$

оттука $u_1=12$, $u_2=-13$. Тогаш $v_1=20$, $v_2=45$

На тој начин дадениот систем се сведува на вкупност од два система:

$$\begin{cases} x+y=12 \\ xy=20 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x+y=-13 \\ xy=45 \end{cases}$$

Првиот систем има две решенија $(10, 2)$ и $(2, 10)$, а вториот систем нема реални решенија.

Според тоа, дадениот систем има само две решенија $(10, 2)$, $(2, 10)$.

Задача 4. Да се реши системот равенки: $\begin{cases} x^4 + y^4 = 82 \\ x + y = 4 \end{cases}$

Решение: Ако ставиме $x + y = u$, $xy = v$, тогаш:

$x^4 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 = (u^2 - 2v)^2 - 2v^2$, или

$x^4 + y^4 = u^4 - 4u^2v + 2v^2$

По однос на новите непознати дадениот систем го добива видот:

$$\begin{cases} u^4 - 4u^2v + 2v^2 = 82 \\ u = 4 \end{cases}$$

Со замена $u = 4$ во првата равенка ја добиваме квадратната равенка по однос на v: $v^2 - 32v + 87 = 0$, откаде $v_1 = 29$, $v_2 = 3$.

На тој начин дадениот систем го сведуваме на вкупност од два система:

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ xy = 29 \end{cases} ; \qquad \begin{cases} x + y = 4 \\ xy = 3 \end{cases}$$

Првиот систем нема реални решенија, а вториот систем има две решенија $(3, 1)$ и $(1, 3)$. Тоа се решенија и на дадениот систем.

ЗАДАЧИ

Да се решат следниве системи равенки:

20. а) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ xy = -2 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 26 \\ xy = 5 \end{cases}$

21. а) $\begin{cases} x - y = 3 \\ xy = 40 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 15 \\ x + y = 5 \end{cases}$

22. а) $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 6 \\ x^2 + xy + y^2 = 4 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 8 \\ x^2 + y^2 + xy = 7 \end{cases}$

23. а) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ xy + 4(x + y) = 40 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + y^2 + 3xy - 4(x + y) + 3 = 0 \\ xy + 2x + 2y = 5 \end{cases}$

24. а) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 35 \\ x + y = 5 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 2 \\ xy(x + y) = 2 \end{cases}$

25. а) $\begin{cases} x^3 + y^3 + x^2y + xy^2 = 15 \\ x^2 + y^2 + x + y = 8 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^3y + xy^3 = 78 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases}$

26. а) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ xy + x + y = 19 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 7 \\ x^2 - xy + y^2 = 3 \end{cases}$

27. Реши го системот равенки со воведување на нови непознати $x + y = u$, $x - y = v$ $\begin{cases} (x + y)^2 + (x + y) - 12 = 0 \\ x^2 - y^2 = 3 \end{cases}$

§ 16. СИСТЕМ РАВЕНКИ КОИ СОДРЖАТ АПСОЛУТНИ ВРЕДНОСТИ

Системите равенки, во кои непознатите се наоѓаат (барем во еден израз) под знакот на апсолутна вредност, ги решаваме врз основа на дефиницијата и својствата на апсолутната вредност на реалните броеви, што ни се познати од претходните класови.

Решавањето на таквите системи равенки ќе го илустрираме на следниве неколку наједноставни примери:

Задача 1. Да се реши системот равенки: $\begin{cases} |x+y|=6 \\ xy=8 \end{cases}$ (1)

Решение: Првата равенка на системот, врз основа дефиницијата на апсолутна вредност, е еквивалентна на вкупноста равенки: $\left[\begin{array}{l} x+y=6 \\ x+y=-6 \end{array}\right.$

Според тоа, и дадениот систем е еквивалентен на вкупноста од следниве два система:

$$\begin{cases} x+y=6 \\ xy=8 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x+y=-6 \\ xy=8 \end{cases} \tag{2}$$

Првиот систем од вкупноста (2) има две решенија (2,4), (4,2) а исто и вториот систем од (2) има две решенија: (—2, —4), (—4, —2).

Значи, вкупноста (2), односно системот (1) има четири решенија: (2, 4), (4, 2), (—2, —4), (—4, —2).

Задача 2. Да се реши системот $\begin{cases} |x-1|+3=y \\ |x-1|+|y-3|=2 \end{cases}$ (3)

Решение: Од првата равенка гледаме $y-3=|x-1|\geqslant 0$.
Според тоа: $|y-3|=y-3$, Значи, системот (3) е еквивалентен на

$$\begin{cases} |x-1|=y-3 \\ |x-1|+y-3=2 \end{cases} \tag{3'}$$

Со елиминација на $|x-1|$, добиваме: $y-3+y-3=2$ или $y=4$.

Ако во првата равенка ставиме $y=4$, ја добиваме равенката

$|x-1|=4-3$ или $|x-1|=1$, од која наоѓаме: $x_1=2$ и $x_2=0$

Според тоа, дадениот систем има две решенија: (2,4) и (0,4).

Задача 3. Да се реши системот: $\begin{cases} |x-y|=2 \\ |x|+|y|=4 \end{cases}$ (4)

Решение: Бидејќи првата равенка од системот е еквивалентна на вкупност од две равенки $\left[\begin{array}{l} x-y=2 \\ x-y=-2 \end{array}\right.$, тоа дадениот систем е еквивалентен на вкупноста од системите равенки

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-y=2 \\ |x|+|y|=4 \end{cases} \\ \begin{cases} x-y=-2 \\ |x|+|y|=4 \end{cases} \end{array}\right. \tag{5}$$

Да го решиме прво системот $\begin{cases} x-y=2 \\ |x|+|y|=4 \end{cases}$ (5′)

од вкупноста (5) при следниве услови:

а) Нека $\begin{cases} x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0, \end{cases}$, тогаш системот (5′) го добива видот:

$\begin{cases} x - y = 2 \\ x + y = 4, \end{cases}$, откаде наоѓаме: $x = 3$, $y = 1$.

Значи, двојката броеви (3,1) е едно од решенијата на системот (5′)

б) Нека $\begin{cases} x \geqslant 0 \\ y < 0, \end{cases}$, тогаш системот (5′) го добива видот: $\begin{cases} x - y = 2 \\ x - y = 4 \end{cases}$

Тој систем е противречен (Зошто?), тоа значи дека при условите

$\begin{cases} x \geqslant 0 \\ y < 0 \end{cases}$ системот (5′) нема решенија.

в) Нека $\begin{cases} x < 0 \\ y \geqslant 0 \end{cases}$, тогаш системот (5′) го добива видот:

$\begin{cases} x - y = 2 \\ -x + y = 4 \end{cases}$ или $\begin{cases} x - y = 2 \\ x - y = -4 \end{cases}$

Овој систем исто така нема решенија.

г) Нека $\begin{cases} x < 0 \\ y < 0 \end{cases}$, тогаш системот (5′) станува: $\begin{cases} x - y = 2 \\ -x - y = 4, \end{cases}$

откаде наоѓаме $x = -1$, $y = -3$. Најдените вредности за x и y ги задоволуваат условите $\begin{cases} x < 0 \\ y < 0 \end{cases}$, па според тоа, двојката броеви $(-1, -3)$ е решение на системот (5′).

Од направените разгледувања заклучуваме дека системот (5′) има само две решенија (3, 1) и (—1, —3).

На сличен начин, ако го решиме и вториот систем од вкупноста (5), ќе најдеме дека тој има исто така две решенија: (1, 3) и (—3, —1).

Според тоа, вкупноста (5), односно системот (4) има четири решенија: (3,1), (—1, —3), (1,3), (—3, —1).

ЗАДАЧИ

Реши ги системите равенки:

28. а) $\begin{cases} |x| + 3y = 7 \\ 2x + 2|y-1| = 3 \end{cases}$, б) $\begin{cases} |x^2 - 2x| + y = 1 \\ x^2 + |y| = 1 \end{cases}$

29. а) $\begin{cases} |x + y| = 3 \\ |x - y| = 7 \end{cases}$, б) $\begin{cases} |x + 1| + 1 = y \\ |x^2 - 1| - |y - 1| = 2 \end{cases}$

30. а) $\begin{cases} y - 2|x| + 3 = 0 \\ |y| + x - 3 = 0 \end{cases}$, б) $\begin{cases} |x + y| = x - y + 4 \\ |x - y| = x + y - 4 \end{cases}$

31. За кои вредности на a системот равенки: $\begin{cases} |x| + |y| = 1 \\ x^2 + y^2 = a \end{cases}$

има реални решенија? Одреди ги тие решенија?

§ 17. ГЕОМЕТРИСКА ИНТЕРПРЕТАЦИЈА НА РЕШЕНИЈАТА НА РАВЕНКИТЕ И СИСТЕМИТЕ РАВЕНКИ СО ДВЕ НЕПОЗНАТИ

Знаете дека решение на равенката со две непознати

$$\mathbf{F}(x, y) = 0 \tag{1}$$

е секоја двојка вредности на непознатите (x_0, y_0), за која равенката (1) е задоволена.

Да ги разгледаме точките $M(x, y)$ од координатната рамнина xOy, чии координати ја задоволуваат равенката (1).

Сите тие точки ќе образуваат некое множество G, за кое велиме дека е определено (зададено) со равенката (1). Множеството точки G обично претставува некоја линија (права или крива), за која велиме дека е *график на равенката* (1), а за равенката (1) пак велиме дека е *равенка на таа линија.*

Меѓутоа, во некои исклучителни случаи множеството G може да се состои и само од една точка, а може да биде и празно множество.

На пример, со равенката $(x-2)^2 + (y-5)^2 = 0$ зададена е само една точка M (2,5) во рамнината xOy, бидејќи таа е задоволена само за реалните вредности $x = 2$, $y = 5$.

Друг пример: Нека е дадена равенката $x^2 + y^2 + 9 = 0$ (2)

Ако x и y се реални броеви, тогаш $x^2 \geqslant 0$ и $y^2 \geqslant 0$, па затоа $x^2 + y^2 + 9 > 0$. Значи, множеството G, што е зададено со равенката (2) е празно множество.

Но, ние ќе се ограничиме само на случаите кога со равенката (1) е зададена некоја линија.

Од геометријата знаете дека, ако равенката со две непознати (1) е линеарна, тогаш со неа во општ случај е зададена некоја права. Ако, пак, равенката (1) е квадратна со две непознати, тогаш во општ случај со неа е зададена некоја крива од втор ред: кружница, елипса, парабола или хипербола.

Да го разгледаме системот равенки:

$$\begin{cases} F(x, y) = 0 \\ \Phi(x, y) = 0 \end{cases} \tag{3}$$

Знаете дека решение на системот равенки (3) е секоја двојка реални вредности на непознатите (x_0, y_0), за која и двете равенки во системот се задоволени.

На секоја равенка од системот (3) нека ѝ одговара некоја линија, на која координатите на сите точки од неа (и само тие точки) ја задоволуваат таа равенка. Ние сакаме да ги одредиме оние точки $S(x, y)$ чии координати ги задоволуваат и двете равенки во системот (3). Очигледно е дека тоа ќе бидат само точките, кои лежат и на двете линии.

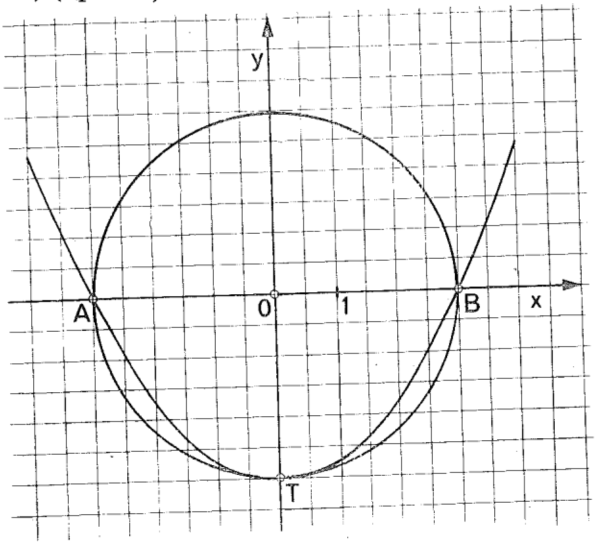
Според тоа, решавањето на системот равенки (3) геометриски се сведува на одредување заедничките (пресечни и допирни) точки на графиците (линиите) на двете равенки во тој систем. Бројот на заедничките точки на графиците е еднаков на бројот на решенијата на системот, а ако графиците немаат ниту една заедничка точка, тогаш велиме дека и системот равенки (3) нема реални решенија.

Да разгледаме неколку системи равенки.

Нека е даден системот равенки: $\begin{cases} x^2+y^2=9 & (4) \\ y=\dfrac{1}{3}\cdot x^2-3 & (5) \end{cases}$

Со помош на методот на замена лесно наоѓаме дека тој има три решенија: $(-3, 0)$, $(0, -3)$ и $(3, 0)$.

Да ги конструираме сега линиите што се зададени со равенките (4) и (5). Равенката (4) — тоа е равенка на кружница со центар во координатниот почеток и радиус $r = 3$, а равенката (5) — тоа е равенка на парабола, чија оска се совпаѓа со y-оската и со теме во точката $T(0, -3)$ (црт. 15).



Црт. 15

Од цртежот 15 гледаме дека кружницата и параболата имаат три заеднички точки $A(-3, 0)$, $T(0, -3)$ и $B(3, 0)$. Нивните координати се бараните решенија на дадениот систем.

Кружницата и параболата можат да имаат најмногу четири заеднички точки.

На пример, да го земеме системот равенки:

$$\begin{cases} x^2+y^2=9 \\ y=2x^2-2x-3 \end{cases} \qquad (6)$$

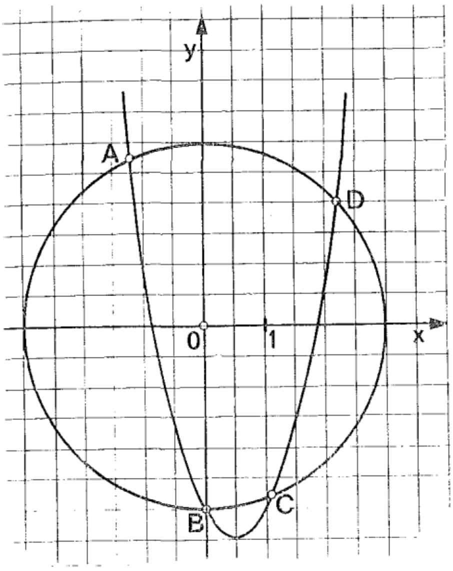
Од цртежот 16 гледаме дека кружницата $x^2+y^2=9$ и параболата $y=2x^2-2x-3$ имаат четири заеднички точки, чии координати приближно се $A(-1, 2; 2,7)$, $B(0, -3)$, $C(1, 1; -2, 8)$ и $D(2, 2; 2)$.

Според тоа, системот (6) има четири решенија:

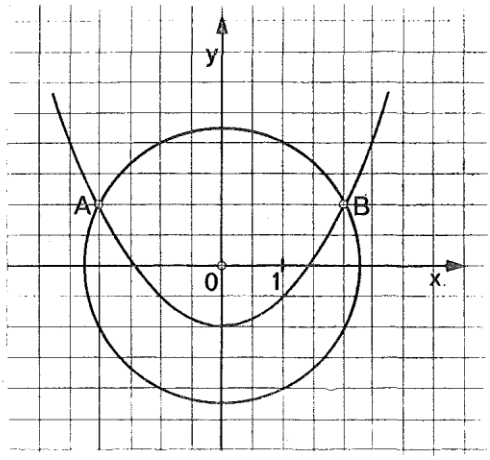
$$\begin{cases} x_1\approx -1,2 \\ y_1\approx 2,7, \end{cases} \quad \begin{cases} x_2=0 \\ y_2=-3, \end{cases} \quad \begin{cases} x_3\approx 1,1 \\ y_3\approx -2,8, \end{cases} \quad \begin{cases} x_4\approx 2,2 \\ y_4\approx 2,0 \end{cases}$$

од кои второто е точно, а останатите три се приближни.

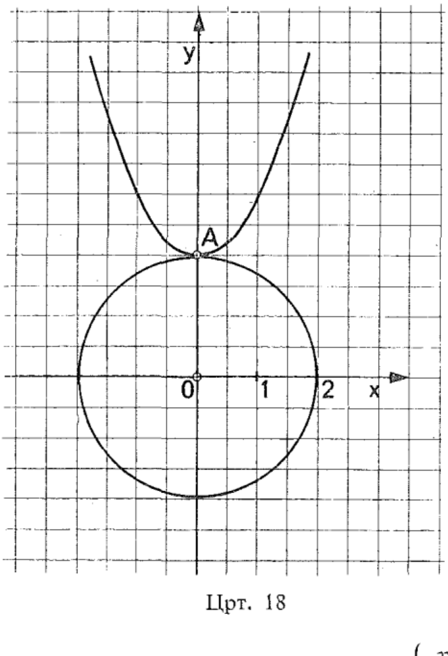
Во некои случаи кружницата и параболата можат да имаат и само две или само една заедничка точка (црт. 17 и 18)., па дури и да немаат ниту една заедничка точка (црт. 19).



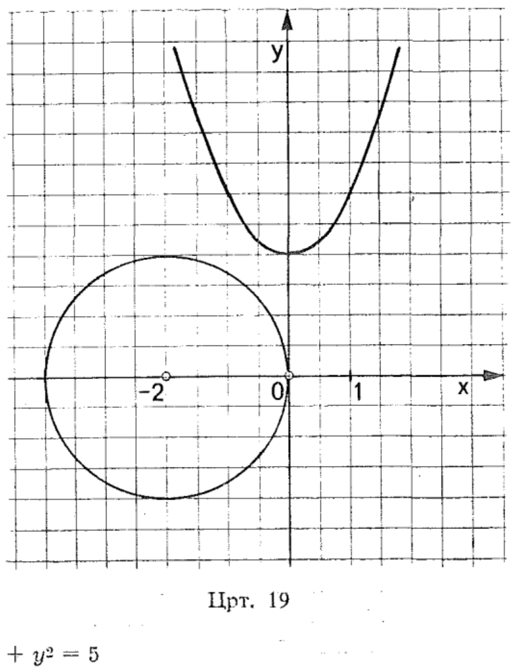
Црт. 16



Црт. 17



Црт. 18



Црт. 19

На пример: 1. Системот $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ y = \frac{1}{2} x^2 - 1 \end{cases}$

има две решенија (—2,1) и (2,1) што се гледа од цртежот 17.

2. Системот $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y = x^2 + 2 \end{cases}$ има само едно решение (0,2) (црт. 18).

3. А системот $\begin{cases} (x + 2)^2 + y^2 = 4 \\ y = x^2 + 2 \end{cases}$ нема ниту едно решение (црт. 19).

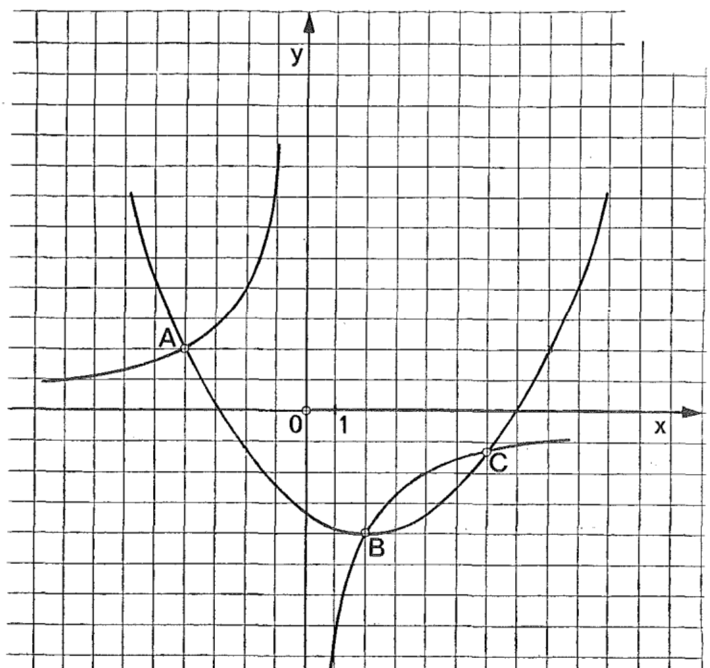
Да разгледаме сега еден систем чија геометриска смисла се состои во одредувањето на заедничките точки на парабола и хипербола.

Нека е даден системот
$$\begin{cases} x^2 - 4x - 6y = 20 \\ xy + 8 = 0 \end{cases} \tag{7}$$

Алгебарското решавање на овој систем е доста тешко, иако непознатата y лесно може да се елиминира со замена од првата во втората равенка на системот. Меѓутоа, во резултат на таа елиминација ја добиваме равенката $x^3 - 4x^2 - 20x + 48 = 0$ од трет степен по однос на x, чие алгебарско решавање во општ случај ги надминува рамките на елементарната алгебра.

Графичкото решавање пак на системот (7) се состои во одредување на заедничките точки на параболата $y = \frac{1}{6} x^2 - \frac{2}{3} x - \frac{10}{3}$ и равностраната хипербола $xy + 8 = 0$ што се нацртани на ист координатен систем.

Од цртежот 20 гледаме дека параболата и равностраната хипербола имаат три заеднички точки со координати: $A\,(-4, 2)$, $B\,(2, -4)$ и $C\,(6, -1)$.



Црт. 20

Според тоа, дадениот систем има три решенија: $(-4, 2)$, $(2, -4)$ и $(6, -1)$.

Треба да забележиме дека графичкиот начин на решавање ги дава само приближните вредности на решенијата на системот; имено за решението $x = -4$, $y = 2$ не можеме да бидеме сигурни дали тоа е точно или не е, на пример, $x = -3{,}99$, $y = 2{,}01$.

Точните решенија ги дознаваме со директна проверка во системот равенки.

Да разгледаме на крајот и еден систем равенки во кој едната равенка е линеарна со две непознати.

Нека е даден системот равенки: $\begin{cases} y = kx + n \\ x^2 + y^2 = r^2 \end{cases}$ (8)

На првата равенка ѝ одговара права, а на втората — кружница со радиус r и центар во координатниот почеток.

Правата $y = kx + n$ и кружницата $x^2 + y^2 = r^2$ можат да имаат или две заеднички точки, или една, или ниту една заедничка точка. Тоа зависи од вредностите на параметрите k, n и r; кое може да се утврди и од следнава дискусија на решенијата на системот равенки (8).

Со замена на непознатата y од првата равенка во втората, ја добиваме квадратната равенка $x^2 + (kx + n)^2 = r^2$

или
$$(k^2 + 1)\, x^2 + 2knx + n^2 - r^2 = 0, \tag{9}$$
чија дискриминанта е: $D = (k^2 + 1)r^2 - n^2$

а) Ако $D > 0$, т. е. $(k^2 + 1)\, r^2 > n^2$ тогаш равенката (9) има две различни реални решенија x_1 и x_2. Во тој случај од првата равенка на системот (8) добиваме: $y_1 = kx_1 + n$ и $y_2 = kx_2 + n$. Според тоа, системот (8) има две решенија (x_1, y_1) и (x_2, y_2), односно правата и кружницата се сечат во точките $A\,(x_1, y_1)$ и $B\,(x_2, y_2)$.

б) Ако $D = 0$, т. е. ако $(k^2 + 1)\, r^2 = n^2$, тогаш равенката (9) има двоен реален корен $x_1 = x_2$, а системот (8) има едно решение (x_1, y_1). Тоа значи дека правата ја допира кружницата, а $(k^2 + 1)\, r^2 = n^2$ претставува услов при кој правата $y = kx + n$ е тангента на кружницата $x^2 + y^2 = r^2$.

в) Ако $D < 0$, т. е. $(k^2 + 1)\, r^2 < n^2$, тогаш равенката (9) нема реални корени, а тоа значи дека правата и кружницата немат заеднички точки.

Бидејќи правата со која било крива од втор ред не може да има повеќе од две заеднички точки, тоа системот, во кој едната равенка е линеарна, а другата е квадратна со две непознати, има неповеќе од две решенија.

Слично на тоа може да се покаже дека: системот од две квадратни равенки со две непознати има неповеќе од четири решенија.

ЗАДАЧИ

32. Состави равенка со две непознати со која се зададени само точките $A\,(2,1)$, $B\,(0, -3)$.

33. Реши ги графички следниве системи равенки, а потоа провери ја точноста на добиените решенија со алгебарско решавање:

а) $\begin{cases} x^2 - 2x - y + 4 = 0, \\ y = 2x \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 36 \\ x^2 + 6y = 36 \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x^2 - y^2 = 25 \end{cases}$

34. Одреди ги условите при кои правата $y = kx + n$ ја допира:
а) елипсата $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, б) хиперболата $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$
в) параболата $y^2 = 2px$, г) кружницата $(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$.

§ 18. ПРИМЕНА НА СИСТЕМИТЕ КВАДРАТНИ РАВЕНКИ СО ДВЕ НЕПОЗНАТИ

Во алгебрата, геометријата, физиката, техниката, како и во секојдневната практика често се среќаваме со задачи, чие решавање доведува до составување и решавање на системи квадратни равенки со две непознати.

Во претходните класови разгледувавме слични такви задачи кои доведуваа до составување и решавање на линеарни равенки со една непозната, системи линеарни равенки со две и три непознати и квадратни равенки со една непозната.

Примената на системите квадратни равенки со две непознати при решавањето на задачи од овој вид ќе ја илустрираме на следниве неколку примери:

Задача 1. Двоцифрен број е 3 пати поголем од збирот на неговите цифри. А производот на тој број и бројот што е напишан од истите цифри во обратен ред е еднаков на 1944. Кој е тој број?

Решение: Нека цифрата на десетките на бараниот двоцифрен број е x, а цифрата на единиците нека е y, каде што $x, y \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Тогаш бараниот број ќе биде $10x + y$, а бројот што е напишан со истите цифри но во обратен ред ќе биде $10y + x$.

Согласно условите на задачата го составуваме системот равенки:

$$\begin{cases} 10x + y = 3(x + y) \\ (10x + y)(10y + x) = 1944 \end{cases}$$

Ако го решиме добиениот систем равенки, наоѓаме дека тој има две решенија $x_1 = 2$, $y_1 = 7$ и $x_2 = -2$, $y_2 = -7$. Меѓутоа, условите на задачата ги задоволува само првото решение $x = 2$, $y = 7$. Според тоа, бараниот двоцифрен број е бројот 27.

Задача 2. Два работника, ако работат заедно некоја работа можат да ја свршат за 12 дена. Меѓутоа, ако тие ја извршуваат работата едно по друго, при што секој да заврши по половина од целата работа, тогаш работата ќе биде завршена за 25 дена. За колку дена секој од работниците ќе ја заврши сам целата работа (при претпоставка дека првиот работник е побрз во работењето)?

Решение: Нека првиот работник сам може да ја заврши целата работа за x, а вториот работник — за y дена, при претпоставка $x < y$. Во тој случај за 1 работен ден првиот работник ќе заврши $\frac{1}{x}$ од работата, а вториот $\frac{1}{y}$ од целата работа. Согласно првиот услов на задачата ја добиваме равенката

$$\frac{12}{x} + \frac{12}{y} = 1 \text{ или } 12(x + y) = xy.$$

Ако работниците работата ја извршуваат поодделно и ако ставиме дека првиот работник првата половина од работата ја завршил за t дена, тогаш вториот работник втората половина од работата ќе ја заврши за $(25 - t)$ дена

Согласно вториот услов на задачата го составуваме системот равенки

$$\begin{cases} \dfrac{t}{x} = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{25-t}{y} = \dfrac{1}{2} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} t = \dfrac{x}{2} \\ 25-t = \dfrac{y}{2} \end{cases}$$

од кој, ако ја елиминираме помошната непозната t, ја добиваме равенката

$$25-\frac{x}{2} = \frac{y}{2} \quad \text{или} \quad x+y = 50.$$

Така го добиваме системот равенки: $\begin{cases} 12(x+y) = xy \\ x+y = 50 \end{cases}$

кој при претпоставка $x < y$ има единствено реално решение $x = 20$, $y = 30$.

Според тоа, првиот работник сам може да ја заврши работата за 20 дена, а вториот — за 30 дена.

Задача 3. Два авиона едновремено полетале од два аеродрома A и B, растојанието меѓу кои е 3 000 km и се сретнале после 3 часа. Првиот авион пристинал на аеродромот B $2\frac{1}{2}$ часа порано, отколку вториот авион на аеродромот A. Да се одредат брзините на авионите.

Решение: Нека првиот авион летал со брзина x km на час, а вториот авион — со брзина y km на час (при што $x > y$). Во тој случај првиот авион од A во B стигнал за $\frac{3\,000}{x}$ часа, а вториот од B во A — за $\frac{3\,000}{y}$ часа.

Бидејќи авионите се сретнале после 3 часа летање, тоа ќе биде:

$$3x + 3y = 3\,000 \text{ или } x + y = 1\,000$$

Но бидејќи првиот авион во лет поминал $2\frac{1}{2}$ часа помалку отколку вториот авион, тоа ќе биде: $\frac{3\,000}{y} - \frac{3\,000}{x} = 2\frac{1}{2}$ или $1\,200\,(x-y) = xy$.

Така го добиваме системот равенки: $\begin{cases} x + y = 1000 \\ 1\,200\,(x-y) = xy \; (x > 0,\ y > 0,\ x > y) \end{cases}$

Добиениот систем равенки лесно може да се реши по методот на замена, па по неговото решавање ќе добиеме: $x = 600$, $y = 400$.

Според тоа, првиот авион имал брзина 6 00 $\frac{km}{\text{час}}$, а вториот 300 $\frac{km}{\text{час}}$.

ЗАДАЧИ

35. Двоцифрен број е 2 пати поголем од производот на неговите цифри. Бројот, што е напишан со истите цифри но во обратен ред се однесува кон дадениот број, како 7 : 4. Најди го тој број!

36. Две славини, ако се отворат едновремено, го наполнуваат еден празен базен за 2 часа. На првата славина сама да го наполни базенот, потребно ѝ е 3 часа повеќе отколку на втората славина сама да го наполни. За колку часа го наполнува секоја славина базенот?

37. Збирот на два броја е еднаков на 2, а збирот на нивните реципрочни вредности е $3\frac{1}{8}$. Кои се тие броеви?

38. Производот на два броја еднаков е на 84. Ако секој од нив се зголеми за 3, производот ќе стане 150. Кои се тие броеви?

39. Раздели го бројот 100 на два дела, чиј производ е 1 275.

40. Одреди такви два броја, што нивниот збир, производ и разликата на нивните квадрати да биде еден ист број.

41. Производот на два позитивни броја е 3 пати поголем од нивниот збир, а збирот од квадратите на тие броеви е еднаков на 160. Кои се тие броеви?

42. Збирот на цифрите на еден двоцифрен број е 9, а производот на тој број и бројот што е напишан со истите цифри во обратен ред изнесува 2 430. Кој е тој број?

43. Аритметичката средина на два броја е еднаква на 17, а геометриската средина е еднаква на 15. Кои се тие броеви?

44. Одреди ги страните на правоаголник, ако е познат неговиот периметар $L = 34$ cm и неговата дијагонала $d = 13$ cm.

45. Одреди ги страните на равнокрак триаголник, чија висина е $h = 6$ cm, а периметарот му е 18 cm.

46. Дијагоналите на ромбот се разликуваат за 7 cm, а неговата плоштина е $P = 39$ cm^2. Одреди ги дијагоналите на тој ромб!

47. Во правоаголниот триаголник дадена е хипотенузата c и збирот на двете катети s. Одреди ги катетите на тој триаголник!

48. Ако ги соединеме едно по друго средините на страните на еден правоаголник ќе добиеме ромб, чиј периметар е 52 cm и плоштина 120 cm^2. Одреди ги страните на тој правоаголник!

49. Разликата на катетите на правоаголен триаголник е d (2 cm), а неговата плоштина е p (24 cm^2). Да се одредат катетите на триаголникот.

50. Два многуаголника имаат вкупно 14 страни и 32 дијагонали. Одреди колку страни има секој од тие многуаголници!

51. Одреди ги страните на равнокрак триаголник, ако се познати неговите две нескладни висини h и h_1.

52. Висината, што е спуштена од темето на правиот агол кон хипотенузата еднаква е на h, а збирот на катетите е еднаков на s. Да се одреди хипотенузата.

53. Хипотенузата на еден правоаголен триаголник е еднаква на 25 cm, а висината што е спуштена кон неа — на 6,72 cm. Одреди ги катетите на тој триаголник.

54. Една дактилографка ако секој ден отчукува по 2 листа повеќе од установената норма, тогаш добиената задача ќе ја заврши 3 дена порано од рокот, а ако отчукува по 4 листа секој ден над нормата, тогаш работата ќе ја заврши 5 дена пред рокот. Колку листа таа требало да отчука и во каков рок?

55. На изминат пат од 90 m предното тркало на една кола прави 5 завртувања повеќе отколку задното тркало. Ако периметарот на предното тркало се зголеми за 6 dm, а периметарот на задното се намали за 6 dm, тогаш на истиот пат предното тркало ќе направи 2 завртувања повеќе отколку задното. Одреди ги периметрите на двете тркала!

56. По кружна патека долга 2 km во иста насока се движат два велосипедиста кои се настигнуваат на секои 20 минути. Одреди ги брзините на нивното движење, ако првиот од нив целата патека ја изминува за 1 минута побрзо отколку вториот.

ГЛАВА IV

НЕРАВЕНКИ И СИСТЕМ КВАДРАТНИ НЕРАВЕНКИ СО ЕДНА НЕПОЗНАТА

§ 19. СИСТЕМ КВАДРАТНИ НЕРАВЕНКИ СО ЕДНА НЕПОЗНАТА

Поимот *систем неравенки* го воведуваме исто како и поимот систем равенки. Имено, велиме дека е зададен системот неравенки со една непозната:

$$\begin{cases} f_1(x) < \varphi_1(x) \\ f_2(x) < \varphi_2(x) \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ f_n(x) < \varphi_n(x) \end{cases} \qquad (1)$$

ако треба да се одредат сите вредности на непознатата x, за кои се задоволени *сите неравенки* во него.

Секоја вредност на непознатата $x = x_0$, за која се задоволени сите неравенки во системот (1) се вика *решение* на тој систем. А да се реши даден систем неравенки со една непозната, значи да се одреди множеството на сите негови решенија.

Ако бараното множество решенија на даден систем неравенки го означиме со S, а множествата решенија на секоја одделна неравенка во системот — со $M_1, M_2, M_3, \ldots, M_n$, тогаш ќе имаме дека:

$$S = M_1 \cap M_2 \cap M_3 \cap \ldots \cap M_n$$

Според тоа, за да се реши даден систем неравенки со една непозната, треба прво да се реши секоја неравенка во системот, а потоа да се одреди пресекот од множествата на нивните решенија. Ако пресекот е празно множество, тогаш велиме дека системот неравенки *нема решение.*

Забелешка: Одредувањето на множеството на решенијата на системот неравенки знатно се олеснува, ако множествата на решенијата на секоја одделна неравенка од системот геометриски ги претставиме на иста бројна оска. Тоа го изведуваме така, што ги прецртуваме оние делови од бројната оска што одговараат на броевите за кои секоја неравенка од системот не е задоволена. Во таков случај, непрецртаниот дел од бројната оска (ако остане таков) ќе ни го даде бараното множество на решенијата на дадениот систем неравенки.

Очигледно е дека, ако барем една неравенка во системот (1) нема решение, тогаш и целиот систем исто така нема решение (Зошто?).

Ако во системот неравенки со една непозната (1) барем една неравенка е квадратна, а другите се линеарни или квадратни, велиме дека тоа е систем квадратни неравенки со една непозната.

Покрај системи неравенки ние ќе разгледуваме и *вкупност неравенки*. Велиме дека неравенките:

$$\left[\begin{array}{l} f_1(x) < \varphi_1(x) \\ f_2(x) < \varphi_2(x) \\ :\;:\;:\;:\;:\;:\;:\;: \\ f_n(x) < \varphi_n(x) \end{array}\right. \tag{2}$$

образуваат *вкупност неравенки,* ако треба да се одредат сите вредности на непознатата x, за кои е задоволена *барем една* од тие неравенки.

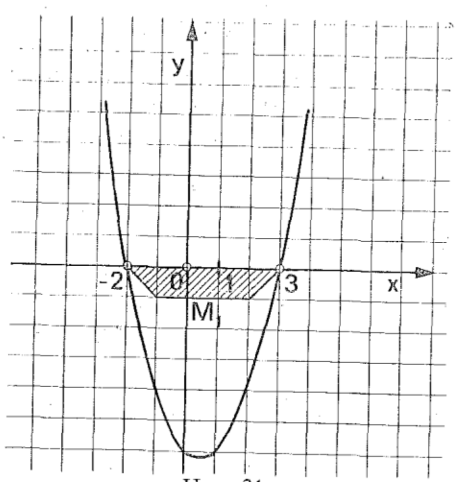
Очигледно е дека множеството M на сите решенија на вкупноста (2) ќе биде унијата од множествата решенија на секоја одделна неравенка во вкупноста: $M = M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup \ldots\ldots \cup M_n$.

Задача 1. Да се реши системот неравенки

$$\left\{\begin{array}{r} x^2 - x - 6 < 0 \\ x^2 + 5x + 4 > 0 \\ x - 2 < 0 \end{array}\right. \tag{3}$$

Решение. Прво ја решаваме одделно секоја неравенка во системот.

Бидејќи $D = 1 + 24 = 25 > 0$, $a = 1 > 0$, тоа квадратниот трином $x^2 - x - 6$ има две различни реални нули: $x_1 = -2$ и $x_2 = 3$ и тој добива негативни вредности само во интервалот $(-2, 3)$, кое се гледа и од цртежот 21.

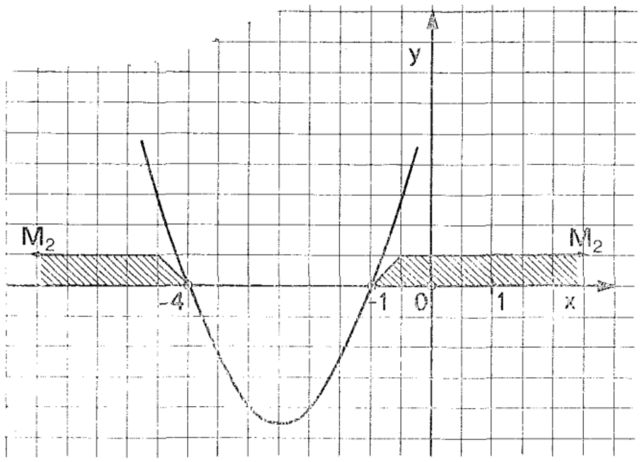


Црт. 21

Значи, првата неравенка во системот (3) има множество решенија

$$M_1 = (-2, 3)$$

И кај втората неравенка имаме: $D = 25 - 16 = 9 > 0$, $a = 1 > 0$, $x_1 = -4$ и $x_2 = -1$. Од цртежот 22 гледаме дека квадратниот трином $x^2 + 5x + 4$ добива позитивни вредности за секоја вредност на x во интервалите $(-\infty, -4)$ и $(-1, \infty)$.

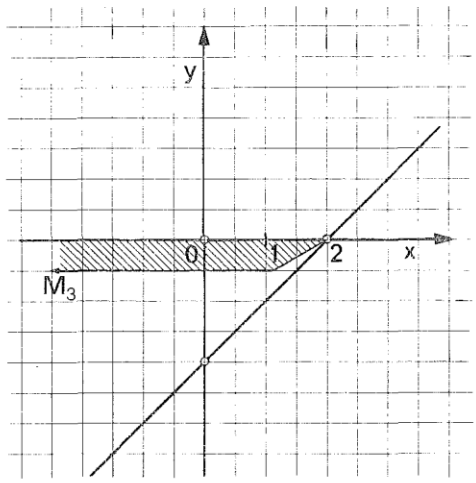


Црт. 22

Според тоа, втората неравенка во системот (3) има множество решенија

$$M_2 = (-\infty, \quad -4) \cup (-1, \infty)$$

Третата неравенка во системот (3) е линеарна. Таа има множество решенија $M_3 = (-\infty, 2)$, што се гледа и од цртежот 23.

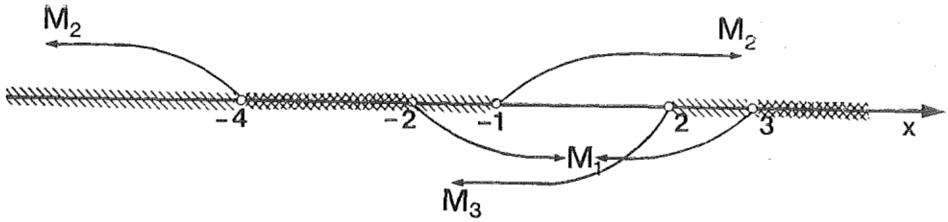


Црт. 23

Останува да го одредиме пресекот на множествата на решенијата M_1, M_2 и M_3 на трите неравенки во системот (3). За таа цел множествата M_1, M_2 и M_3 геометриски ги претставуваме на иста бројна оска (црт 24), а деловите од бројната оска вон од тие множества ги прецртуваме. Потоа гледаме непрецртан дел од бројната оска е само интервалот $(-1. 2)$.

Според тоа, дадениот систем неравенки има множество решенија

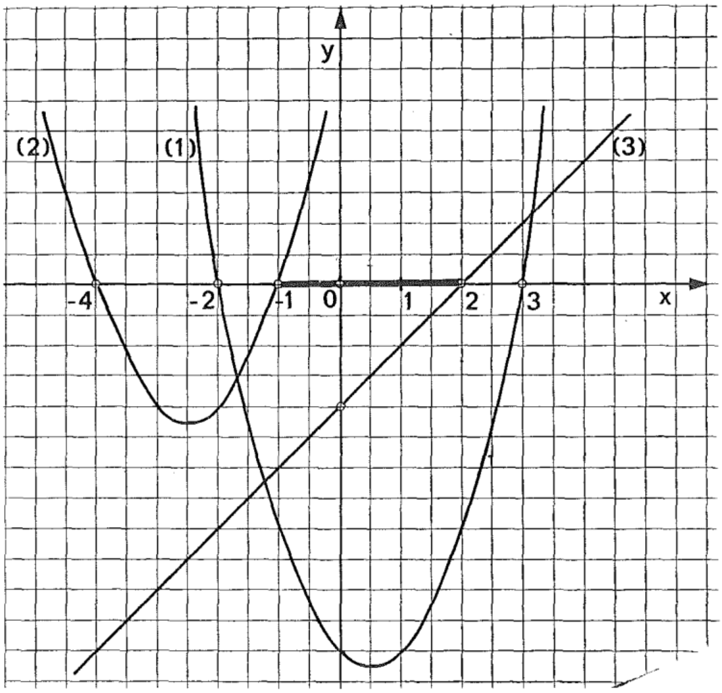
$$M = M_1 \cap M_2 \cap M_3 = (-2, \ 3) \cap [(-\infty, \ -4) \cup (-1 \quad \infty)] \cap (-\infty, \ 2) = (-1, \ 2).$$



Црт. 24

Забелешка. Множеството решенија на системот неравенки (3) графички може да се реши побрзо и вака: Ги конструираме графиците на функциите $y = x^2 - x - 6$, $y = x^2 + 5x + 4$ и $y = x - 2$ во исти координатен систем xOy. (црт. 25). Потоа од цртежот ги одредуваме оние вредности на x, за кои првата и третата функции добиваат негативни вредности, а втората функција — позитивни вредности.

Од цртежот 25 гледаме дека тие вредности на x се наоѓаат во интервалот $(-1, 2)$.



Црт. 25

Значи, $M = (-1, 2)$.

Задача 2. Да се реши системот неравенки

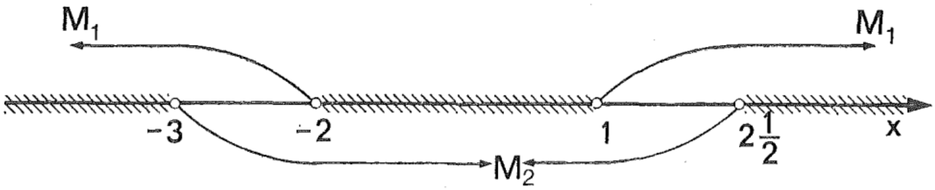
$$\begin{cases} x^2 + x - 2 > 0 \\ 2x^2 + x - 15 < 0 \\ 3x^2 - 2x + 1 > 0 \end{cases}$$

Решение. Лесно одредуваме дека: првата неравенка има множество решенија $M_1 = (-\infty, \ -2) \cup (1, \infty)$, втората — $M_2 = \left(-3, 2\frac{1}{2}\right)$, а третата — $M_3 = (-\infty, \infty)$, т. е. таа е задоволена за секоја реална вредност на непознатата x.

Очигледно е дека штом една неравенка на системот е задоволена за секоја реална вредност на x, тогаш множеството на решенијата на системот ќе биде еднакво на пресекот од множествата на решенијата на преостанатите неравенки во тој систем (Зошто?). Во нашиот случај (црт. 26), ќе биде:

$$M = M_1 \cap M_2 \cap M_3 = M_1 \cap M_2 = [(-\infty, -2) \cup (1, \infty)] \cap \left(-3; \quad 2\frac{1}{2}\right) =$$

$$= (-3, -2) \cup \left(1, \ 2\frac{1}{2}\right).$$



Црт. 26

Множеството решенија M можеме да го одредиме уште и со примена на дистрибутивниот закон на пресекот во однос на унијата, имено:

$$M = [(-\infty, \ -2) \cup (1, \ \infty)] \cap \left(-3, \ 2\frac{1}{2}\right) =$$

$$= \left[(-\infty, \ -2) \cap \left(-3, \ 2\frac{1}{2}\right)\right] \cup \left[(1, \ \infty) \cap \left(-3, \ 2\frac{1}{2}\right)\right] =$$

$$= (-3, -2) \cup \left(1, \ 2\frac{1}{2}\right).$$

Задача 3. Да се реши системот неравенки: $\begin{cases} x^2+1<0 \\ 2x-2<0 \\ x+1>0 \end{cases} \qquad (4)$

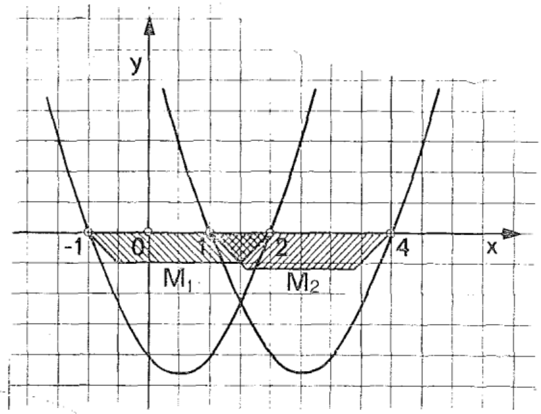
Решение: Гледаме, првата неравенка во дадениот систем во множеството на реалните броеви нема ниедно решение (Зошто?), а со оглед на тоа што ги бараме заедничките решенија на сите неравенки во системот, може да се заклучи дека дадениот систем исто така нема решение, односно бараното множество решенија на системот (4) е $\emptyset$.

Задача 4. Да се реши вкупноста неравенки: $\left[\begin{array}{l} x^2-\ x-2<0 \\ x^2-5x+4<0. \end{array}\right.$

Решение: Лесно наоѓаме дека: првата неравенка има множество решенија $M_1 = (-1, 2)$, а втората — $M_2 = (1, 4)$. Во тој случај бараното множество решенија на вкупноста на тие две неравенки ќе биде:

$$M = M_1 \cup M_2 = (-1, \ 2) \cup (1, \ 4) = (-1, \ 4)$$

Геометриска интерпретација на множеството решенија дадена е на црт. 27.



Црт. 27

ЗАДАЧИ

Да се решат следниве системи и вкупности неравенки:

1. а) $\begin{cases} x^2 - 5x + 6 > 0, \\ 3x - 2 < x + 8 \end{cases}$, б) $\begin{cases} x^2 + x + 10 > 0 \\ x^2 + 2x + 6 < 0 \end{cases}$

2. а) $\left[\begin{array}{l} x^2 - 2x - 35 < 0, \\ x^2 - x - 6 > 0 \end{array}\right.$, б) $\left[\begin{array}{l} 4x - x^2 - 3 > 0 \\ 2x^2 - 5x + 3 < 0 \end{array}\right.$

3. а) $\begin{cases} 3x^2 + 7x + 4 > 0, \\ 3x^2 + x > 0 \\ 2x - 5 < 0 \end{cases}$, б) $\begin{cases} -x^2 - 2x + 3 > 0 \\ 9x^2 - 6x + 1 > 0 \\ 3x^2 + x - 4 < 0 \end{cases}$

4. а) $\left[\begin{array}{l} x^2 + 1 > 0 \\ x^2 + x - 6 < 0 \end{array}\right.$, б) $\left[\begin{array}{l} 2x^2 + x - 15 > 0 \\ x^2 + x + 1 < 0 \end{array}\right.$

§ 20. ДРОБНО РАЦИОНАЛНИ НЕРАВЕНКИ СО ЕДНА НЕПОЗНАТА

Дробно рационални неравенки со една непозната се такви неравенки, кои содржат дробно рационални изрази по однос на непознатата, т. е. во кои непознатата x, се содржи и во именител.

Секоја дробно рационална неравенка со една непозната може да се доведе во видот $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)} > 0$ или $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)} < 0$, $(\varphi(x) \neq 0)$, (1)

каде што $f(x)$ и $\varphi(x)$ се полиноми по однос на непознатата x.

Теорема 1. *Неравенката* $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)} > 0$ $\left(\text{односно } \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} < 0\right)$ *еквивалентна е на неравенката* $f(x) \cdot \varphi(x) > 0$ (*односно на* $f(x) \cdot \varphi(x) < 0$).

Доказ: Ако броителот и именителот на левата страна на неравенката $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)} > 0$ ги помножиме со $\varphi(x)$ (при што по услов е $\varphi(x) \neq 0$), ја добиваме неравенката $\dfrac{f(x) \cdot \varphi(x)}{[\varphi(x)]^2} > 0$.

Бидејќи при $\varphi(x) \neq 0$ е $[\varphi(x)]^2 > 0$, тоа ако ги помножиме двете страни на последната неравенка со $[\varphi(x)]^2$, ја добиваме еквивалентната неравенка $f(x) \cdot \varphi(x) > 0$, штд.

Лесно може да се покаже дека важи и следнава:

Теорема 2. 1° *Неравенкаѿа* $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)} > 0$ *е еквиваленѿна на вкуйносѿа од сисѿемиѿе неравенки*: $\begin{cases} f(x) > 0 \\ \varphi(x) > 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} f(x) < 0 \\ \varphi(x) < 0 \end{cases}$

2°. *Неравенкаѿа* $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)} < 0$ *еквиваленѿна е на вкуйносѿа од сисѿемиѿе неравенки*: $\begin{cases} f(x) > 0 \\ \varphi(x) < 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} f(x) < 0 \\ \varphi(x) > 0 \end{cases}$

Дробно рационалните неравенки (1) ги решаваме врз основа на теоремата 1 или 2.

Задача 1. Да се реши неравенката $\dfrac{x^2-7x+6}{x^2-1} < -1$.

Решение: Дадената неравенка е еквивалентна на неравенката:
$\dfrac{x^2-7x+6}{x^2-1} + 1 < 0$, или $\dfrac{2x^2-7x+5}{x^2-1} < 0$, односно на $(2x^2-7x+5)\,(x^2-1) < 0$ (2)

Ако триномот $2x^2-7x+5$ и биномот x^2-1 ги разложиме на линеарни множители, неравенката (2) го добива видот:

$$2(x-1)\left(x-2\frac{1}{2}\right)(x+1)(x-1) < 0 \quad \text{или} \quad 2(x-1)^2\left(x-2\frac{1}{2}\right)(x+1) < 0 \qquad (3$$

Очигледно е дека при $x \neq 1$ множителот $(x-1)^2$ е позитивен. Ако двете страни на неравенката (3) ги поделиме со изразот $2(x-1)^2$ ќе ја добиеме неравенката $\left(x-2\frac{1}{2}\right)(x+1) < 0$, (4)

која е еквивалентна на дадената при услов да е $x \neq 1$.

Неравенката $\left(x-2\frac{1}{2}\right)(x+1) < 0$ има множество решенија $\left(-1,\ 2\frac{1}{2}\right)$.

Кога од тоа множество го изоставиме бројот 1, кој се содржи во него, наоѓаме дека неравенката (3) има множество решенија:

$$M = (-1,\ 1) \cup \left(1, 2\frac{1}{2}\right) \quad \text{или} \quad M = \left(-1, 2\frac{1}{2}\right) \setminus \{1\}$$

Тоа е и бараното множество решенија и на дадената неравенка.

Задача 2. Да се реши неравенката $\dfrac{6}{x-1} - \dfrac{3}{x+1} > \dfrac{7}{x+2}$

Решение: Дадената неравенка е еквивалентна последователно на секоја од следниве неравенки:

$$\frac{6}{x-1} - \frac{3}{x+1} - \frac{7}{x+2} > 0; \quad \frac{6(x+1)(x+2) - 3(x-1)(x+2) - 7(x^2-1)}{(x-1)(x+1)(x+2)} > 0;$$

$$\frac{-4x^2+15x+25}{(x-1)(x+1)(x+2)} > 0; \quad \frac{-4\left(x+\frac{5}{4}\right)(x-5)}{(x-1)(x+1)(x+2)} > 0; \quad \frac{\left(x+1\frac{1}{4}\right)(x-5)}{(x-1)(x+1)(x+2)} < 0$$

односно на: $\left(x+1\frac{1}{4}\right)(x-5)(x-1)(x+1)(x+2) < 0$ при $x \neq \pm 1$, $x \neq -2$ (4)

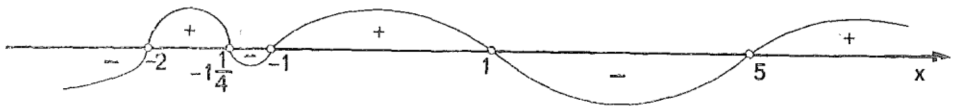
Неравенката (4) ќе ја решиме по *методот на интервали*, кој се состои во следново:

Гледаме левата страна на неравенката (4) претставува производ од пет линеарни множители. Нулите на секој од тие множители се броевите:

$$x_1 = -2,\ x_2 = -1\frac{1}{4},\ x_3 = -1,\ x_4 = 1 \text{ и } x_5 = 5.$$

Тие бројната оска (црт. 28) ја разбиваат на шест интервали:

$$(-\infty, -2), \left(-2, -1\frac{1}{4}\right), \left(-1\frac{1}{4}, -1\right), (-1, 1), (1, 5), (5, \infty)$$



Црт. 28

Очигледно е дека, ако променливата x зема вредности од последниот интервал $(5, \infty)$, тогаш секој од петте множители е позитивен, па според тоа и нивниот производ ќе биде позитивен. Следователно ниту еден број од тој интервал не е решение на неравенката (4).

Ако пак променливата x зема вредности од претходниот интервал, т. е. ако $x \in (1, 5)$, тогаш само множителот $x - 5$ ќе биде негативен, а сите други множители остануваат позитивни. Производот во тој случај е негативен, па според тоа секој број од интервалот $(1, 5)$ е решение на неравенката (4). При преминот на следниов интервал $(-1, 1)$ забележуваме дека ако $x \in (-1, 1)$, тогаш покрај множителот $x - 5$ негативен ќе биде и множителот $x - 1$, а останатите множители ќе бидат пак позитивни. Според тоа, производот во тој случај ќе биде позитивен, па затоа ниту еден број од него не е решение на неравенката (4). Ако така продолжиме да се движиме од десно на лево по бројната оска, забележуваме дека при преминот од еден интервал во нему претходниот интервал, знакот на производот се менува во спротивен, бидејќи еден од множителите наместо позитивен станува негативен. Во нашиот случај ако $x \in \left(-1\frac{1}{4}, -1\right)$, тогаш производот ќе биде негативен, па според тоа секој број од интервалот $\left(-1\frac{1}{4}, -1\right)$ е решение на неравенката (4).

Ако е $x \in \left(-2, -1\frac{1}{4}\right)$, производот е позитивен, па според тоа во интервалот $\left(-2, -1\frac{1}{4}\right)$ неравенката (4) нема решенија. Ако пак е $x \in (-\infty, -2)$, тогаш производот ќе биде негативен, односно секој број од интервлот $(-\infty. -2)$ е решение на неравенката (4).

Од изложеното следува дека множеството решенија на неравенката (4) се состои од интервалите $(-\infty. -2)$, $\left(-1\frac{1}{4}, -1\right)$, $(1, 5)$, односно тоа е еднакво на унијата од нив:

$$M = (-\infty, -2) \cup \left(-1\frac{1}{4}, -1\right) \cup (1, 5)$$

Задача 3. Да се реши неравенката: $\dfrac{x^2 + x + 1}{x^2 - 5x + 6} > 0.$

Решение: Дадената неравенка, согласно теоремата 2, еквивалентна е на вкупноста од системите неравенки:

$$\begin{cases} x^2 + x + 1 > 0 \\ x^2 - 5x + 6 > 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x^2 + x + 1 < 0 \\ x^2 - 5x + 6 < 0 \end{cases} \qquad (5)$$

Ако ги решиме одделно системите неравенки од вкупноста (5), наоѓаме:

Првиот систем неравенки има множество решенија $M_1 = (-\infty, 2) \cup (3, \infty)$, а вториот систем — множество решенија $M_2 = \emptyset$.

Според тоа, вкупноста од системите неравенки (5) ќе има множество решенија $M = M_1 \cup M_2 = (-\infty, 2) \cup (3, \infty) \cup \varnothing = (-\infty, 2) \cup (3, \infty)$.

Тоа е бараното множество решенија на дадената неравенка.

ЗАДАЧИ

Да се решат неравенките:

5. а) $\dfrac{2x-1}{x-2} < x+2$, б) $\dfrac{3x^2-5x+1}{x^2+4} < 1$

6. а) $\dfrac{3}{x+1} + \dfrac{7}{x+2} < \dfrac{6}{x-1}$, б) $\dfrac{x^2-3x-4}{x^2+x+1} < 2$

7. а) $\dfrac{x}{x^2+7x+12} > \dfrac{x}{x^2+3x+2}$, б) $\dfrac{x^2-3x-2}{3x^2-2x} < 0$

8. а) $\dfrac{x^2+x-6}{x^2-4x-5} > 0$, б) $\dfrac{(x-2)(x+3)}{x-5} < 0$

9. а) $(x-1)(x+4)(x-x+1) < 0$, б) $(x+5)(x+3)(x+1)(x-2)(x-4) > 0$

10. а) $\dfrac{(x-1)(x-4)}{x+3} > 0$ б) $\dfrac{x^2+6x+8}{x^2-8x+15} < 0$

11. Докажи дека равенката $\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x-2} = \dfrac{1}{p}$ за секоја вредност на параметарот $p \neq 0$ има два различни реални корени.

§ 21. НЕРАВЕНКИ ШТО СОДРЖАТ АПСОЛУТНИ ВРЕДНОСТИ

Во алгебрата често се среќаваме и со неравенки во кои непознатата се наоѓа под знакот на апсолутна вредност. Таквите неравенки ги решаваме врз основа на дефиницијата и својствата на апсолутната вредност на реалните броеви, што ќе го илустрираме на следниве примери.

Задача 1. Да се реши неравенката $|x^2-2x-3| < 3$ (1)

Решение. Врз основа на својството $|x| \leqslant a \quad (a>0) \Rightarrow -a \leqslant x \leqslant a$ дадената неравенка е еквивалентна на системот неравенки:

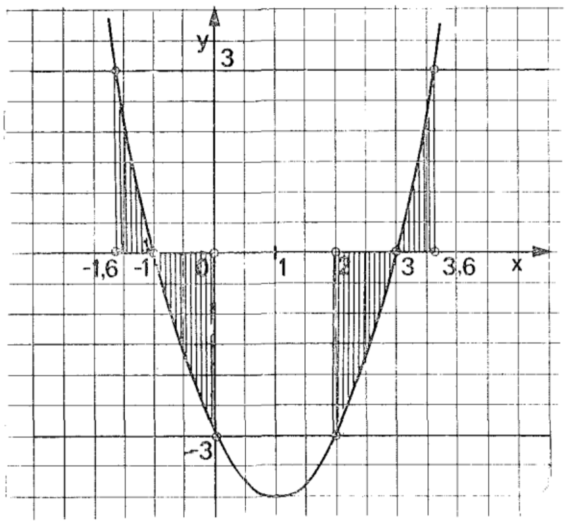
$$-3 < x^2-2x-3 < 3, \text{ односно } \begin{cases} x^2-2x-3 < 3 \\ x^2-2x-3 > -3 \end{cases} \qquad (2)$$

Множеството решенија на првата неравенка од системот (2) е $M_1 = (1-\sqrt{7},\ 1+\sqrt{7})$, а на втората неравенка е $M_2 = (-\infty, 0) \cup (2, \infty)$.

Според тоа, системот неравенки (2), односно дадената неравенка (1) има множество решенија:

$$\begin{aligned} M = M_1 \cap M_2 &= (1-\sqrt{7},\ 1+\sqrt{7}) \cap [(-\infty, 0) \cup (2, \infty)] = \\ &= [(1-\sqrt{7},\ 1+\sqrt{7}) \cap (-\infty, 0)] \cup [(1-\sqrt{7},\ 1+\sqrt{7}) \cap (2, \infty)] = \\ &= (1-\sqrt{7}, 0) \cup (2, 1+\sqrt{7}). \end{aligned}$$

Решавањето на дадената неравенка (1), односно системот неравенки (2) може да ја добие следнава проста геометриска интерпретација: Го цртаме графикот на квадратниот трином x^2-2x-3, т. е. параболата $y=x^2-2x-3$ во координатната рамнина xOy (црт. 29). Потоа од цртежот ги одредуваме оние вредности на x за кои функцијата (квадратниот трином) x^2-2x-3 добива вредности, чија апсолутна вредност е помала од 3, односно вредности што се помали од 3 и поголеми од -3.



Црт. 29

Од цртежот 29 гледаме дека дадената неравенка има множество решенија

$$M=(-1{,}6;\ 0)\cup(2;\ 3{,}6)$$

Задача 2. Да се реши неравенката $x|x+2|<4-x$

Решение: Гледаме, под знакот на апсолутна вредност се наоѓа само изразот $x+2$, кој добива вредност нула за $x=-2$. Бројот -2 ја разбива бројната оска на два интервала $(-\infty,-2)$ и $[-2,\infty)$.

1.° Ако $x\in(-\infty,-2)$, тогаш дадената неравенка е еквивалентна на системот: $\begin{cases}-x(x+2)<4-x\\ x<-2\end{cases}$ или $\begin{cases}x^2+x+4>0\\ x<-2\end{cases}$ (3)

Првата неравенка во системот (3) е задоволена за секое x, т. е нејзиното множество решенија ќе биде $M_1=(-\infty,\infty)$, а втората неравенка има множество решенија $M_2=(-\infty,-2)$. Според тоа системот (3) ќе има множество решенија $M=M_1\cap M_2=(-\infty,\ \infty)\cap(-\infty,\ -2)=(-\infty,\ -2)$.

2.° Ако $x\in[-2,\infty)$, тогаш дадената неравенка е еквивалентна на системот: $\begin{cases}x(x+2)<4-x\\ x\geqslant-2\end{cases}$ или $\begin{cases}x^2+3x-4<0\\ x\geqslant-2\end{cases}$ (4)

Неравенките во системот (4) соодветно имаат множества решенија $N_1=(-4,1)$ и $N_2=[-2,\infty)$. Според тоа системот (4) ќе има множество решенија $N=N_1\cap N_2=(-4,\ 1)\cap[-2,\ \infty)=[-2,\ 1)$.

На крајот лесно го наоѓаме и бараното множество решенија S на дадената неравенка. Тоа ќе биде: $S=M\cup N=(-\infty,\ -2)\cup[-2,\ 1)=(-\infty,\ 1)$.

Задача 3. Да се реши неравенката

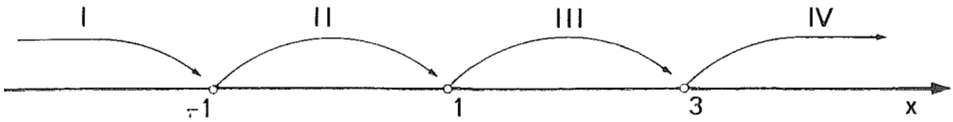
$$|x^2-4x+3|-2|x+1|>x(x-3)$$

Решение: Квадратниот трином $x^2 - 4x + 3$ го разложуваме на линеарни множители: $|x^2 - 4x + 3| = |(x-1)(x-3)| = |x-1| \cdot |x-3|$, па дадената неравенка го добива видот: $|x-1| \cdot |x-3| - 2|x+1| > x(x-3)$ (5)

Гледаме, изразите под знакот на апсолутна вредност добиваат вредност нула за $x = -1$, $x = 1$ и $x = 3$. Тие ја разбиваат бројната оска (црт. 30) на четири интервали: $(-\infty, -1)$, $[-1, 1)$, $[1, 3)$ и $[3, \infty)$

1°. $x \in [3, \infty) \Rightarrow (|x+1| = x+1,\ |x-1| = x-1,\ |x-3| = x-3)$

Во тој случај неравенката (5) е еквивалентна на
$(x-1)(x-3) - 2(x+1) > x(x-3)$, односно на $-3x + 1 > 0$



Црт. 30

Таа има множество решенија $\left(-\infty, \dfrac{1}{3}\right)$, но бидејќи

$\left(-\infty, \dfrac{1}{3}\right) \cap [3, \infty) = \emptyset$, тоа во интервалот $[3, \infty)$ дадената неравенка нема решенија.

2°. $x \in [1, 3) \Rightarrow (|x+1| = x+1,\ |x-1| = x-1,\ |x-3| = -(x-3))$.

Во тој случај дадената неравенка го добива видот:

$-(x-1)(x-3) - 2(x+1) > x(x-3)$ или $2x^2 - 5x + 5 < 0$ (5′)

Бидејќи неравенката (5′) нема решенија, тоа и дадената неравенка во интервалот $[1, 3)$ исто така нема решенија.

3°. $x \in [-1, 1) \Rightarrow (|x+1| = x+1,\ |x-1| = -(x-1),\ |x-3| = -(x-3))$.
Во тој случај неравенката (5) ќе гласи: $(x-1)(x-3) - 2(x+1) > x(x-3)$

Таа има множество решенија $\left(-\infty, \dfrac{1}{3}\right)$, но бидејќи е

$\left(-\infty, \dfrac{1}{3}\right) \cap [-1, 1) = \left[-1, \dfrac{1}{3}\right)$ тоа дадената неравенка во интервалот $[-1, 1)$ има множество решенија $\left[-1, \dfrac{1}{3}\right)$.

4°. $x \in (-\infty, -1) \Rightarrow (|x+1| = -(x+1),\ |x-1| = -(x-1),\ |x-3| = -(x-3))$
Во тој случај неравенката (5) ќе гласи: $(x-1)(x-3) + 2(x+1) > x(x-3)$ или $x + 5 > 0$. Ова неравенка има множество решенија $(-5, \infty)$.

Го одредуваме пресекот: $(-5, \infty) \cap (-\infty, -1) = (-5, -1)$. Според тоа, дадената неравенка во интервалот $(-\infty, -1)$ има множество решенија $(-5, -1)$.

Обединувајќи ги сите решенија добиваме:

$$\emptyset \cup \emptyset \cup \left[-1, \frac{1}{3}\right) \cup (-5, -1) = \left(-5, \frac{1}{3}\right),$$

т. е. дадената неравенка има множество решенија $M = \left(-5, \dfrac{1}{3}\right)$.

ЗАДАЧИ

Да се решат неравенките:

12. а) $|x-4| > 5$, б) $|x-2| < 7$, в) $x + |x-5| > 7$

13. а) $|x^2 - 2x - 3| < 3x - 3$, б) $\left|\frac{x-1}{2x+1}\right| < 1$.

14. а) $x^2 - 3|x| + 2 > 0$, б) $2x|x-1| + |x+3| > 0$

15. а) $|x-3| - |x+1| < 1$, б) $x|x-2| > 3x - 1$

16. а) $|x^2 - 3x + 2| \leqslant 2$, б) $|x^2 - x - 6| \geqslant 0$

§ 22. ПРИМЕНА НА КВАДРАТНИТЕ НЕРАВЕНКИ И СИСТЕМИ НЕРАВЕНКИ СО ЕДНА НЕПОЗНАТА

Кон решавање на квадратни неравенки и системи квадратни неравенки со една непозната доаѓаме во решавањето на низа задачи од најразличен карактер. Ќе го илустрираме тоа на неколку примери.

Задача 1. Да се одреди дефиниционата област на функцијата

$$y = \sqrt{2x^2 - 3x - 5} \tag{1}$$

Решение: Знаете дека дефинициона област на која било функција $y = f(x)$ е множеството на сите реални вредности на аргументот x, за кои изразот $f(x)$ има смисла, т. е. и тој е некој реален број.

Гледаме, аналитичкиот израз на дадената функција е квадратен корен, чиј подкоренов израз е квадратен трином $2x^2 - 3x - 5$. Бидејќи квадратниот корен има смисла (т. е. тој претставува реален број) само за ненегативните вредности на подкореновиот израз, тоа дефиниционата област на дадената функција ќе ја сочинуваат оние и само оние вредности на аргументот x, за кои важи неравенката $2x^2 - 3x - 5 \geqslant 0$ (2)

Множеството решенија на неравенката (2) $M = (-\infty, -1] \cup \left(2\frac{1}{2}, \infty\right)$ во исто време е и бараната дефинициона област на функцијата (1).

Задача 2.* Да се одредат областа на менување и екстремните вредности на функцијата

$$y = \frac{x^2 - 3x + 1}{x^2 + x + 1} \tag{3}$$

Решение: Гледаме: квадратниот трином $x^2 + x + 1$ нема реални нули. Ако двете страни на равенката (3) ги помножиме со него ќе ја добиеме равенката

$$x^2y + xy + y = x^2 - 3x + 1,$$

или

$$(y-1)x^2 + (y+3)x + y - 1 = 0, \tag{3'}$$

која е еквивалентна на равенката (3)

При $y = 1$ добиваме $4x = 0$, т. е. $x = 0$.

При $y \neq 1$ равенката (3') претставува квадратна равенка по однос на променливата x, а y нека е некој параметар. Според познатата формула, таа може да се запише и вака:

$$x = \frac{-(y+3) \pm \sqrt{(y+3)^2 - 4(y-1)^2}}{2(y-1)} \tag{3''}$$

Равенството (3″) постои (има смисла) тогаш и само тогаш, ако подкореновиот израз е ненегативен реален број, т. е. ако е исполнет условот
$(y+3)^2 - 4(y-1)^2 \geqslant 0$, или $-3y^2 + 14y + 5 \geqslant 0$ (3‴)

Според тоа, величината y може да добива само такви вредности, за кои важи неравенката (3''').

Ако ја решиме неравенката (3''') добиваме дека таа има множество решенија во интервалот $\left[-\frac{1}{3}, 5\right]$, т.е. $-\frac{1}{3} \leqslant y \leqslant 5$.

Значи, бараната област на менување на функцијата (3) претставува интервалот $\left[-\frac{1}{3}, 5\right]$.

Најмалата вредност $y = -\frac{1}{3}$ функцијата ја добива за

$$x = \frac{-\left(-\frac{1}{3}+3\right) \pm \sqrt{0}}{2\left(-\frac{1}{3}-1\right)} = 1,$$

а најголемата вредност $y = 5$ таа ја добива за $x = \frac{-(5+3) \pm \sqrt{0}}{2(5-1)} = -1$.

Задача 3. За кои вредности на параметарот a, квадратната функција $y = (a^2 - 1)x^2 + 2(a - 1)x + 1$ добива позитивни вредности за секоја вредност на x?

Решение: Квадратната функција добива позитивни вредности за секое x, ако се исполнети едновремено условите $D < 0$ и $a > 0$, односно за дадената функција, ако е:

$$\begin{cases} (a-1)^2 - (a^2-1) < 0 \\ a^2 - 1 > 0 \end{cases} \tag{4}$$

Ако го решиме системот неравенки (4), добиваме $a > 1$.

Значи, условите на задачата ќе бидат исполнети, ако е $a > 1$.

Задача 4. Бројот 100 на колку начини може да се раздели на два цели собирци, чиј производ да е поголем од 1600.

Решение: Нека едниот собирок е x, тогаш другиот собирок ќе биде $100 - x$. Броевите x и $100 - x$ согласно условот на задачата треба да се цели броеви, а нивниот производ да е поголем од 1600, т. е. треба да важи неравенката $x(100 - x) > 1600$, каде што x е природен број помал од 100.

Неравенката (5) може да се доведе во видот $-x^2 + 100x - 1600 > 0$ или

$$x^2 - 100x + 1600 < 0$$

Ако ја решиме, наоѓаме дека нејзино множество на решенијата е интервалот (20, 80), т. е. $20 < x < 80$.

Бидејќи променливата x е природен број, тоа таа може да ги зема следниве вредности: $x = 21, 22, 23, \ldots, 78, 79$. Нив ги има конечен број и тоа точно 69. Тој број покажува на колку начини може да се избере првиот собирок, а на секој од нив да му одговара и по еден втор собирок $100 - x$.

Значи, постојат вкупно 69 начини.

ЗАДАЧИ

17. Да се одреди дефиниционата област на функциите:

а) $y = \sqrt{5x^2 - 8x - 4}$, б) $y = \dfrac{x-3}{x^2+3x-4}$

18. Да се одредат вредностите на x, за кои изразот

$\sqrt{\dfrac{x^2+3x-4}{x+1}}$ добива реални вредности.

19. Дадена е функцијата $y = \dfrac{x^2+1}{(\lambda-2)\,x^2+2x+\lambda}$. За кои вредности на λ дефиниционата област на функцијата ќе биде множеството на сите реални броеви.

20. Одреди го множеството на сите броеви x, за кои функциите

$$y = \frac{1}{2}\cdot x + 2 \text{ и } y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 6$$

имаат: а) исти знак, б) различни знаци, в) еднакви вредности.

21. За кои вредности на параметарот k, равенката
$(k^2+k-2)\,x^2 - 2\,(k-1)\,x + 2 = 0$ ќе има реални корени?

22. За кои вредности на k, равенката $k^2x^2 + kx - 1 = 0$ ќе има два различни реални корени?

23. За кои вредности на k, двата корени на равенката
$x^2 + 2\,(k-4)\,x + k\,(k+6) = 0$ се позитивни броеви?

24. За кои вредности на p, и двата корени на равенката
$x^2 - (k+1)\,x + k + 4 = 0$ се негативни броеви.

25. За кои вредности на параметарот p, квадратниот трином
$4x^2 + (4p+2)\cdot x + p^2 + 2$ добива позитивни вредности за секоја вредност на x.

26. За кои вредности на параметарот k, квадратната функција
$y = (k-1)\,x^2 - (k+2)\,x + 2k$ за секое x добива негативни вредности.

27. Дадена е равенката $kx^2 - (k+2)\,x - (k-1) = 0$. Да се испитаат корените на равенката во зависност од промената на параметарот k.

28. Одреди за кои вредности на параметарот k, неравенката
$(k-1)\,x^2 + kx + k < 0$ е задоволена за секоја вредност на x.

ИРАЦИОНАЛНИ РАВЕНКИ И НЕРАВЕНКИ

§ 23. ОСНОВНИ ПОИМИ

Дефиниција: *Равенката, во која барем еден нејзин член е ирационален израз по однос на непознатата x, се вика ирационална равенка.*

Пример: Равенките: $\sqrt{x-2}+x=3$, $\sqrt[3]{x-2}+\sqrt{x+1}=3$, $x^2-x+2\sqrt{x^2-x-1}=4$ се ирационални. Меѓутоа, равенката $\sqrt[3]{2}\cdot x^2-\sqrt{5}\cdot x+1=0$ не е ирационална, бидејќи непознатата x ниту во еден нејзин член не се наоѓа под знакот на некој корен. Таа е квадратна равенка со реални коефициенти.

Во елементарната алгебра ирационалните равенки ги разгледуваме само во множеството на реалните броеви. Затоа сите корени со парен коренов показател, што ќе се сретнуваат во ирационалните равенки, ќе ги сметаме да се аритметички корени (т. е. тие и нивните подкоренови изрази да се ненегативни), а сите корени со непарен коренов показател да се алгебарски корени (т. е. тие и нивните подкоренови изрази да можат да бидат кои да било реални броеви).

На пример, во равенката $\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x-2}=3$ (1)
квадратниот корен $\sqrt{x+1}$ добива реални вредности (велиме има смисла) само при $x+1\geqslant 0$, т. е. при $x\geqslant -1$. Така, на пример, за $x=8$ тој добива реална вредност $\sqrt{9}=+3$ (и само $+3$). Меѓутоа, кубниот корен $\sqrt[3]{x-2}$ има смисла за секоја реална вредност на x, но и тој за секоја фиксна реална вредност на x, на пример за $x=1$ или $x=10$, добива единствена фиксна реална вредност, на пример $\sqrt[3]{-1}=-1$ (и само -1) или $\sqrt[3]{8}=+2$ (и само $+2$).

Според тоа, коренот $\sqrt{x+1}$ е определен (дефиниран) само кога x зема вредности од интервалот $[-1,\infty)$, а коренот $\sqrt[3]{x-2}$ — за секое $x\in(-\infty,\infty)$. Велиме: коренот $\sqrt{x+1}$ има област на определеност $D_1=[-1,\infty)$, а коренот $\sqrt[3]{x-2}$ — област на определеност

$D_2 = (-\infty, \infty)$. Заедничкиот дел (пресекот) на тие две области се вика *област на определеност на равенката* (1) (кратко *OOP*) или *област на менување на непознатата* (кратко *ОМН*) на равенката (1).

Дефиниција: *Област на определеност на равенката се вика пресекот од областите на определеност на одделните изрази што влегуваат во состав на равенката.*

Пример 1. Областа на определеност на равенката $\sqrt{x-1} + \sqrt{x^2-1} = x\sqrt{x}$ ја наоѓаме од системот неравенки

$$\begin{cases} x-1 \geqslant 0 \\ x^2-1 \geqslant 0 \\ x \geqslant 0, \end{cases}$$

од каде добиваме $x \geqslant 1$, или $x \in [1, \infty)$.

Очигледно е дека ниедна вредност на непознатата x, што не ѝ припаѓа на OOP не може да биде решение на равенката. Според тоа, ако *OOP* е празно множество, тогаш без да ја решаваме равенката со сигурност можеме да тврдиме дека таа нема решение.

Пример 2. Нека е дадена равенката $\sqrt{x-5} + \sqrt{2-x} = 8$.

Првиот корен има смисла само при $x \geqslant 5$, а вториот корен — само при $x \leqslant 2$. Бидејќи $[5, \infty) \cap (-\infty, 2] = \emptyset$, тоа дадената равенка не е определена ни за една реална вредност на непознатата x. Според тоа, таа нема решение.

Дадена ирационална равенка дека нема решение во некои случаи може да се утврди и без решавање и без определување на нејзината област на определеност.

Пример 3. Ирационалната равенка $\sqrt{x-3} = -2$ нема решение, бидејќи коренот $\sqrt{x-3}$ е аритметички, па затоа неговата вредност е ненегативна за секоја вредност на x од *OOP*.

На сличен начин може да се утврди дека и равенките

$$\sqrt{2x-1} + \sqrt{x+3} = -5, \quad \sqrt{x+5} \cdot \sqrt{x^2-1} + 3 = 0$$

немаат решение. Образложи зошто!?

ЗАДАЧИ

1. Одреди ја областа на определеност на равенката:

а) $\sqrt{x-4} + \sqrt{3-x} = 2$, б) $\sqrt{x^2-4} = \sqrt{x-1}$

2. Докажи дека следниве равенки немаат решение:

а) $\sqrt{x-3} \cdot \sqrt{3-x} = 5$, б) $\sqrt{x^2-1} \cdot \sqrt{1-x^2} = x$

в) $\sqrt{x-5} + \sqrt{4-x} = 3$, г) $\sqrt{4-x^2} - \sqrt{x-5} = x-1$

3. Образложи зошто равенката $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+2} = 0$ нема решение!

4. Одреди ги напамет решенијата на равенките:

а) $\sqrt{(x-1)(x+2)} + \sqrt{x-1} = 0$, б) $\sqrt{x(x^2-4)} + \sqrt{x(x+2)} = 0$

§ 24. ЕКВИВАЛЕНТНОСТ НА НЕКОИ ТРАНСФОРМАЦИИ

Да разгледаме неколку теореми, врз основа на кои ќе ги вршиме трансформациите на ирационалните равенки при нивното решавање.

Теорема 1. *Ако двете страни на равенката* $f(x) = \varphi(x)$ (1)
ги квадрираме, ќе ја добиеме равенката $[f(x)]^2 = [\varphi(x)]^2$, (2)
која е последица на дадената равенка.

Доказ: Равенката (2) е еквивалентна на $[f(x)]^2 - [\varphi(x)]^2 = 0$ или на

$$[f(x) - \varphi(x)] \cdot [f(x) + \varphi(x)] = 0 \tag{2'}$$

Меѓутоа, равенката (2′) е задоволена освен за решенијата на дадената равенка (1) уште и за решенијата на равенката

$$f(x) = -\varphi(x) \tag{2''}$$

Со тоа теоремата е докажана.

Според тоа, при преминот од равенката (1) кон равенката (2) не постои опасност да се изгубат некои од корените на равенката (1), меѓутоа постои можност да се јават нови странични корени и тоа оние што се корени на равенката (2″).

Од доказот на теоремата 1 следува и следнава:

Теорема 2. *Равенката* $[f(x)]^2 = [\varphi(x)]^2$ *е еквивалентна на вкупноста од две равенки:* $\left[\begin{array}{l} f(x) = \varphi(x) \\ f(x) = -\varphi(x) \end{array}\right.$

Забелешка: Равенката (2) понекогаш може да биде и еквивалентна на дадената равенка (1). Тоа ќе биде само при услов ако $f(x) \cdot \varphi(x) \geqslant 0$, т. е. ако во *ООР* функциите $f(x)$ и $\varphi(x)$ имаат еднакви знаци.

Теорема 3. *Ако двете страни на равенката* $f(x) = \varphi(x)$, *или кратко* $f = \varphi$, *ги степенуваме на трети степен, ќе ја добиеме равенката*

$$[f(x)]^3 = [\varphi(x)]^3 \text{ или } f^3 = \varphi^3, \tag{3}$$

која во множеството на реалните броеви е еквивалентна на дадената равенка.

Доказ: Равенката (3) е еквивалентна на $f^3 - \varphi^3 = 0$, или на

$$(f - \varphi)(f^2 + f \cdot \varphi + \varphi^2) = 0 \tag{3'}$$

Вториот множител може да се запише и вака

$$f^2 + f\varphi + \varphi^2 = \frac{1}{4}[(2f + \varphi)^2 + 3\varphi^2]$$

Очигледно е дека при $f \neq 0$ и $\varphi \neq 0$ секогаш е $f^2 + f\varphi + \varphi^2 > 0$, т. е. тој нема реални корени.

Според тоа, равенките (1) и (3) имаат исти корени.

Ако е $f = 0$ и $\varphi = 0$, тогаш дадената равенка $f = \varphi$ и $f^3 = \varphi^3$ пак се еквивалентни.

Може да се докаже дека во множеството на реалните броеви важи и тврдењето: Ако двете страни на една равенка ги степенуваме на степен со непарен показател, добиваме равенка што е еквивалентна на дадената; но кога степенуваме на степен со парен показател, тогаш добиената равенка во општ случај не е еквивалентна, туку последица на дадената.

При решавањето на ирационалните равенки често ги применуваме и следниве трансформации:

1°. $$\sqrt{f(x)} \cdot \sqrt{\varphi(x)} = c \Rightarrow \sqrt{f(x) \cdot \varphi(x)} = c.$$

2°. $$\frac{\sqrt{f(x)}}{\sqrt{\varphi(x)}} = c \Rightarrow \sqrt{\frac{f(x)}{\varphi(x)}} = c.$$

3°. $$(\sqrt{f(x)})^2 = c \Rightarrow f(x) = c,$$

кои во општ случај не се еквивалентни, бидејќи ја прошируваат областа на менување на непознатата *(ОМН)* на појдовната равенка.

Навистина, решението на секоја од вторите равенки за кое е $f(x) < 0$ и $\varphi(x) < 0$ нема да биде решение и на соодветната појдовна равенка.

§ 25. СВЕДУВАЊЕ НА ИРАЦИОНАЛНИТЕ РАВЕНКИ НА РАЦИОНАЛНИ

При решавањето на ирационалните равенки се раководиме од познатиот принцип: со извршување на пригодни трансформации истите да ги сведеме на решавање на некои познати рационални равенки (линеарни, квадратни, биквадратни).

Со таа цел двете страни на равенката (по претходно извршени соодветни трансформации) ги степенуваме со еден ист показател. Повторувајќи ја таа постапка конечен број пати, дадената ирационална равенка ја сведуваме на некоја рационална равенка, која во општ случај не е еквивалентна туку последица на дадената.

Затоа најдените решенија на добиената рационална равенка неопходно е да ги провериме со цел да утврдиме дали тие се решенија и на дадената ирационална равенка.

Задача 1. Да се реши равенката $\sqrt{2x-6} + \sqrt{x+4} = 5$

Решение: Го пренесуваме едниот корен од левата на десната страна и потоа двете страни на равенката ги квадрираме, па добиваме:

$(\sqrt{2x-6})^2 = (5-\sqrt{x+4})^2$ или $2x-6 = 25-10\sqrt{x+4}+x+4$

Оттука наоѓаме: $10\sqrt{x+4} = 35-x$

Повторно квадрираме: $100(x+4) = 1225-70x+x^2$

Добиената равенка има два корена: $x_1 = 5$ и $x_2 = 165$. Меѓутоа, проверката покажува дека само коренот $x = 5$ ја задоволува дадената равенка: $\sqrt{4}+\sqrt{9} = 5$ или $5 = 5$ но $\sqrt{324}+\sqrt{169} \neq 5$.

Задача 2. Да се реши равенката $\sqrt{x+1}-1=\sqrt{x-\sqrt{x+8}}$.

Решение: Ги квадрираме двете страни на равенката и добиваме:

$$x+1-2\sqrt{x+1}+1=x-\sqrt{x+8} \quad \text{или} \quad 2+\sqrt{x+8}=2\sqrt{x+1}$$

Повторно квадрираме, па добиваме: $4+4\sqrt{x+8}+x+8=4(x+1)$

или
$$4\sqrt{x+8}=3x-8$$

Трет пат квадрираме и ја добиваме рационалната равенка:

$16(x+8)=9x^2-48x+64$ или $9x^2-64x-64=0$,

која има два корена $x_1=8$ и $x_2=-\dfrac{8}{9}$.

Проверката покажува дека само $x=8$ е корен на дадената равенка
$$\sqrt{9}-1=\sqrt{8-4} \text{ или } 2=2.$$

Задача 3. Да се реши равенката
$$\sqrt{1-3x}+5=\sqrt{x^2-4x+4} \tag{1}$$

Решение: Ако ги квадрираме двете страни на равенката, а потоа уште еднаш квадрираме, ќе добиеме рационална равенка од четврти степен

$x^4-2x^3-43x^2+344x+384=0$, која не сме во состојба да ја решиме.

Ќе побараме друг излез: во решавањето да ја вклучиме и областа на определеност на равенката. Забележуваме дека подкореновиот израз на вториот корен е точен квадрат: $x^2-4x+4=(x-2)^2$.

Според тоа, дадената равенка може да се запише вака:

$$\sqrt{1-3x}+5=\sqrt{(x-2)^2}, \quad \text{или} \quad \sqrt{1-3x}+5=|x-2| \tag{2}$$

Ја одредуваме *ООР*: $1-3x\geqslant 0$ или $x\leqslant\dfrac{1}{3}$, а во неа ќе биде:
$$|x-2|=-(x-2)$$

Со оглед на тоа, равенката (2) е еквивалентна на:

$$\sqrt{1-3x}+5=2-x \quad \text{или} \quad \sqrt{1-3x}=-(3+x) \tag{3}$$

Со квадрирање двете страни на равенката (3) доаѓаме до:
$$1-3x=x^2+6x+9 \quad \text{или} \quad x^2+9x+8=0,$$
која има две решенија: $x_1=-1$ и $x_2=-8$.

И двете решенија ѝ припаѓаат на *ООР*, меѓутоа проверката покажува дека решение на дадената равенка е само $x=-8$.

ЗАДАЧИ

5. Еквивалентни ли се равенките: а) $\sqrt{x^2-4}=\sqrt{5}$,

б) $\sqrt{(x-2)(x+2)}=\sqrt{5}$, в) $\sqrt{x-2}\cdot\sqrt{x+2}=\sqrt{5}$.

Реши ги следниве равенки:

6. а) $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+7}=4$, б) $\sqrt{x^2+1}=x-4$

7. а) $\sqrt{2x-4}-\sqrt{x+5}=1$, б) $\sqrt{x+9}+3=2\sqrt{x}$

8. а) $\sqrt{1-x^2}=(1-\sqrt{x})^2$, б) $\sqrt{x^2-4}=\sqrt{x-2}\cdot\sqrt{x+2}$

9. а) $2\sqrt{2x^2+3x+5}=3x+2$, б) $\sqrt{2+x}=2-\sqrt{x}$

10. а) $\sqrt{x+a}+\sqrt{x-a}=\sqrt{2x}$, б) $\sqrt{7+\sqrt{x-3}}=2$

11. а) $\sqrt{2x-1}+\sqrt{5x-4}=\sqrt{3x+1}$, б) $\sqrt{4x-2}+\sqrt{4x+2}=4$

12. а) $\sqrt{x+5}+\sqrt{x}=\sqrt{4x+9}$, б) $\sqrt{x-3}\cdot\sqrt{2(x+1)}=x+1$

13. а) $\sqrt{x+2}+\sqrt{x-5}=-3$, б) $\sqrt{x-3}+\sqrt{3-x}=0$

14. а) $\sqrt{x^2-9}=x-3$, б) $\sqrt{x}+\sqrt{x+1}+1=0$

15. а) $\sqrt{x+5}+\sqrt{5-x}=4$, б) $\sqrt{8-x}+x=2$

16. а) $\sqrt{a-x}=\sqrt{a}-\sqrt{x}$, б) $\sqrt{x-2}=a$, при $a>0$

§ 26. **РАВЕНКИ КОИ СОДРЖАТ КУБНИ КОРЕНИ**

Основен метод на решавање на ирационалните равенки, кои содржат кубни корени е степенувањето на двете страни на равенката на трет степен. При тоа згодно е да се користи формулата:

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm b^3 \pm 3ab\,(a \pm b)$$

Задача 1. Да се реши равенката $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{7-x}=2$ (1)

Решение: Двете страни на равенката да ги степенуваме на трет степен:

$$x+1+7-x+3\sqrt[3]{x+1}\cdot\sqrt[3]{7-x}\,(\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{7-x})=8 \qquad (2)$$

Ако земеме пред вид дека изразот $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{7-x}$ во равенката (2) согласно равенката (1) е еднаков на 2, ќе ја добиеме равенката

$$8+3\sqrt[3]{x+1}\cdot\sqrt[3]{7-x}\cdot 2=8 \quad \text{или} \quad 6\sqrt[3]{(x+1)\,(7-x)}=0 \qquad (3)$$

која може да биде нееквивалентна, но секогаш е последица на дадената равенка.

Равенката (3) има два корена $x_1=-1$ и $x_2=7$. Проверката покажува дека и двата корена ја задоволуваат дадената равенка.

Задача 2. Да се реши равенката $\sqrt[3]{x^3+9x^2-2}=x+1$

Решение: Двете страни на равенката ги степнуваме на трет степен, па добиваме: $x^3+9x^2-2=(x+1)^3$ или $2x^2-x-1=0$.

Добиената равенка е еквивалентна на дадената, па според тоа нејзините решенија $x_1=1$ и $x_2=-\frac{1}{2}$ се решенија и на дадената равенка.

ЗАДАЧИ

Да се решат равенките:

17. а) $\sqrt[3]{x^2-x-1}=x-1$, б) $\sqrt[3]{x^3-2x-3}=x-1$

18. а) $\sqrt[3]{2x+4}+\sqrt[3]{x-3}=1$, б) $\sqrt[3]{x+7}-\sqrt[3]{x-12}=1$

19. а) $\sqrt[3]{8-x}+\sqrt[3]{8+x}=1$, б) $\sqrt[3]{x^2+15}=2\sqrt[3]{x+1}$

§ 27. МЕТОД НА ВОВЕДУВАЊЕ НА НОВА НЕПОЗНАТА

При решавањето на ирационалните равенки понекогаш го применуваме и методот на воведување на нова непозната.

Задача 1. Да се реши равенката $\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} - 3 = 0.$

Решение: Ако ставиме $\sqrt[3]{x} = t$, тогаш $\sqrt[3]{x^2} = (\sqrt[3]{x})^2 = t^2$ и дадената равенка го добива видот $t^2 - 2t - 3 = 0$, која е квадратна по однос на новата непозната t.

Таа равенка има две решенија: $t_1 = -1$, $t_2 = 3$

Од $\sqrt[3]{x} = -1$ добиваме $x_1 = -1$, а од $\sqrt[3]{x} = 3$, добиваме $x_2 = 27$.

Тоа се бараните корени на дадената равенка.

Задача 2. Да се реши равенката $x^2 - x + 2\sqrt{x^2 - x - 1} = 4$ (1)

Решение: Ако го издвоиме коренот, а сите други членови ги пренесеме на другата страна и двете страни на равенката ги квадрираме, ќе добиеме равенка од IV степен. Затоа неа ќе ја решиме на друг начин.

Таа е еквивалентна на равенката

$$x^2 - x - 1 + 1 + 2\sqrt{x^2 - x - 1} = 4 \qquad (1')$$

Ако ставиме $\sqrt{x^2 - x - 1} = t$ $(t \geqslant 0)$, тогаш $x^2 - x - 1 = t^2$, па равенката (1′) можеме да ја запишеме вака:

$$t^2 + 1 + 2t = 4 \quad \text{или} \quad t^2 + 2t - 3 = 0 \qquad (2)$$

Равенката (2) има две решенија $t_1 = 1$ и $t_2 = -3$. На таков начин решавањето на дадената равенка (1) го сведуваме на решавање на вкупноста од две равенки:

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt{x^2 - x - 1} = 1 \\ \sqrt{x^2 - x - 1} = -3 \end{array}\right. \qquad (3)$$

Втората равенка на вкупноста (3) нема решенија (Зошто?), а од првата равенка наоѓаме: $x_1 = 2$, $x_2 = -1$.

Проверката покажува дека тие се решенија и на дадената равенка.

Задача 3. Да се реши равенката

$$\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} - \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} = 2 \qquad (4)$$

Решение: Областа на определеност на равенката ја одредуваме од условите: $x - 1 \geqslant 0$ и $x - 2\sqrt{x-1} \geqslant 0$

Од првата неравенка имаме $x \geqslant 1$, а при тој услов од втората неравенка $x \geqslant 2\sqrt{x-1}$, наоѓаме: $x^2 \geqslant 4(x-1)$ или $x^2 - 4x + 4 \geqslant 0$, односно $(x-2)^2 \geqslant 0$, Значи, *ООР* ќе биде $x \geqslant 1$ или $D = [1, \infty)$.

Да ставиме $\sqrt{x-1} = t$ $(t \geqslant 0)$, откаде $x - 1 = t^2$ или $x = t^2 + 1$.

Воведувајќи го тоа во дадената равенка, добиваме

$$\sqrt{t^2 + 1 + 2t} - \sqrt{t^2 + 1 - 2t} = 2 \qquad (5)$$

или
$$\sqrt{(t+1)^2} - \sqrt{(t-1)^2} = 2,$$

односно
$$|t+1| - |t-1| = 2 \qquad (6)$$

Бидејќи $t \geqslant 0$, тоа $t+1>0$, па затоа $|t+1| = t+1$

Според тоа, равенката (6) може да се запише: $t+1-|t-1| = 2$

или
$$|t-1| = t-1 \tag{7}$$

Да ја решиме равенката (7).

1.° Ако $0 \leqslant t < 1$, тогаш таа го добива видот $-(t-1) = t-1$ откаде имаме: $t=1$. Бидејќи $1 \notin [0, 1)$, тоа $t=1$ не е решение на (7).

2.° Ако $t \geqslant 1$, тогаш равенката (7) ќе гласи: $t-1 = t-1$, или $-1 = -1$. Тоа значи дека секоја вредност на t од интервалот $[1, \infty)$ е решение на равенката (7).

Бидејќи решенија на равенката (7) по однос на непознатата t се сите $t \geqslant 1$, тоа решенија на дадената равенка (4) ќе бидат сите вредности на x, за кои е $\sqrt{x-1} \geqslant 1$, откаде $x-1 \geqslant 1$ или $x \geqslant 2$.

Според тоа, решенија на равенката (4) се сите вредности на x од интервалот $[2, \infty)$.

Предлагаме горнава равенка да ја решите без воведување на нова непозната.

ЗАДАЧИ

Да се решат равенките:

20. а) $\sqrt{3x^2+5x-8} - \sqrt{3x^2+5x+1} = 1$, б) $\dfrac{3}{\sqrt{x+1}} + \dfrac{1}{2} = 2$

21 а) $\sqrt{x^2-3x+3} + \sqrt{x^2-3x+6} = 3$ б) $\dfrac{3(x-3)}{\sqrt{x+3}} = \sqrt{x+3}$

22. а) $x^2 - x = 4 - 2\sqrt{x^2-x+1}$, б) $5\sqrt[3]{x} - 2\sqrt[3]{x^2} - 2 = 0$

23. а) $x^2+3x+4\sqrt{x^2+3x-6} = 18$

24. а) $\sqrt{x^2+4x+4} - \sqrt{x^2-12x+36} = 6$,

25 а) $\sqrt{x^2+5} + \sqrt{x^2+21} = 8$, б) $\sqrt{2-\sqrt{2+x}} = x$

26. а) $\sqrt{(x+2)^2} + \sqrt{(x-5)^2} = 10$, б) $\sqrt{5+x} + \sqrt{5-x} = \dfrac{x}{2}$

27. а) $\sqrt{4+x\sqrt{2x^2-17}} = x+2$, б) $\sqrt{1-\sqrt{1+x}} = x$

§ 28. ИРАЦИОНАЛНИ НЕРАВЕНКИ

При решавањето на ирационалните неравенки голема улога игра освен определувањето на *ОМН*, односно областа на определеност на неравенката, уште и проучувањето на знаците на двете страни на неравенката за различните вредности на непознатата.

Бидејќи при решавањето на неравенките обично се добиваат бесконечни множества од решенија, тоа очигледно е дека проверката на сите нивни решенија практички станува невозможна. Затоа сите трансформации што ќе ги вршиме над ирационалните неравенки треба да бидат еквивалентни, за да не би се појавиле некои придобиени решенија, што не се решенија на појдовната неравенка.

Ослободувањето на корените кај ирационалните неравенки го вршиме исто како и кај ирационалните равенки со изолирање на еден или два корена и последователно степенување двете страни на неравенката на соодветна степен. Притоа треба секогаш да се има пред вид следново:

1.° *Ирационалната неравенка од видот* $\sqrt[2k]{f(x)} < \varphi(x)$ *е еквивалентна на системот неравенки:*

$$\begin{cases} f(x) \geqslant 0 \\ \varphi(x) > 0 \\ f(x) < [\varphi(x)]^{2k} \end{cases}$$

2.° *Ирационалната неравенка од видот:* $\sqrt[2k]{f(x)} > \varphi(x)$ *е еквивалентна на вкупноста од следниве два системи неравенки:*

$$\begin{cases} f(x) \geqslant 0 \\ \varphi(x) < 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \varphi(x) \geqslant 0 \\ f(x) > [\varphi(x)]^{2k} \end{cases}$$

3. *Ирационалната неравенка од видот* $\sqrt[2k+1]{f(x)} < \varphi(x)$ *е еквивалентна на неравенката* $f(x) < [\varphi(x)]^{2k+1}$

Да ги разгледаме прво следниве прости примери:

Пример 1. Да се реши неравенката $\sqrt{x} < 1$

Област на определеност на неравенката е $x \geqslant 0$. Бидејќи двете страни се ненегативни, тоа ако ги квадрираме, добиваме $x < 1$.

Значи, дадената неравенка е еквивалентна на системот $\begin{cases} x \geqslant 0 \\ x < 1 \end{cases}$

Според тоа, решенија на неравенката ќе бидат сите вредности на x од интервалот $[0, 1)$, т. е. $0 \leqslant x < 1$.

Пример 2. Да се реши неравенката $\sqrt{x} < -1$.

Бидејќи во областа на определеност $x \geqslant 0$ левата страна на неравенката е ненегативна, а десната страна е негативна, тоа неравенката нема решение.

Затоа квадрирање на двете страни на ова неравенка не е потребно.

Пример 3. Да се реши неравенката $\sqrt{x} > 1$

Гледаме: во областа на определеност $x \geqslant 0$, двете страни на неравенката се ненегативни. Ако ги квадрираме ја добиваме еквивалентната неравенка $x > 1$, која ни го дава и множеството на сите решенија на дадената неравенка.

Пример 4. Да се реши неравенката $\sqrt{x} > -1$

Во областа $x \geqslant 0$ левата страна на неравенката е ненегативна, а десната страна е негативен број. Според тоа, неравенката е задоволена за секој број од областа на определеност $x \geqslant 0$. И тука не е потребно квадрирање на двете страни.

Решение на неравенката е интервалот $[0, \infty)$.

Да ги решиме сега следниве посложени неравенки:

Задача 1. Да се реши неравенката $\sqrt{x^2 - 3x - 10} < 9 - x$ (1)

Решение: Областа на определеност на дадената неравенка ја наоѓаме од условот $x^2 - 3x - 10 \geqslant 0$. Ако ја решиме таа неравенка, добиваме: $D = (-\infty, -2] \cup [5, \infty)$.

Во областа D за некои вредности на x десната страна на неравенката (1) може да добива позитивни, а за други вредности на x таа може да добива непозитивни вредности, додека пак за сите вредности на x во областа D левата страна на неравенката (1) добива само ненегативни вредности.

Очигледно е дека за вредностите на x, за кои десната страна на неравенката (1) добива негативни вредности, таа не може да има решенија (Зошто?). А за вредностите на x од областа D за кои $9 - x > 0$, двете страни на неравенката (1) се ненегативни. При тие услови дадената неравенка е еквивалентна на неравенката

$$x^2 - 3x - 10 < (9 - x)^2 \text{ или на } 15x - 91 < 0$$

Како што гледаме решавањето на дадената неравенка го сведуваме на решавање на системот неравенки: $\begin{cases} x^2 - 3x - 10 \geqslant 0 \\ 9 - x > 0 \\ x^2 - 3x - 10 < (9 - x)^2 \end{cases}$

Ако го решиме тој систем наоѓаме дека $-\infty < x \leqslant -2$ или $5 \leqslant x < 6\frac{1}{15}$. Значи, множеството решенија на дадената неравенка е

$$M = (-\infty, -2] \cup \left[5,\ 6\frac{1}{15}\right)$$

Задача 2. Да се реши неравенката $\sqrt{x^2 - 3x + 2} > 2 - x$ (2)

Решение: Областа на определеност на неравенката ја одредуваме од условот $x^2 - 3x + 2 \geqslant 0$, откаде наоѓаме $D = (-\infty, 1] \cup [2, \infty)$.

Очигледно е дека: секоја вредност на $x \in D$, за која десната страна на неравенката (2) има негативна вредност, т. е. $2 - x < 0$, е нејзино решение.

Тоа значи дека сите решенија на системот неравенки

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 2 \geqslant 0 \\ 2 - x < 0 \end{cases}$$

се решенија и на дадената неравенка.

Меѓутоа, неравенката (2) има и други решенија. За вредностите на $x \in D$, за кои десната страна на неравенката (2) има позитивни вредности, таа е еквивалентна на неравенката $x^2 - 3x + 2 > (2 - x)^2$.

Според тоа, и сите решенија на системот неравенки

$$\begin{cases} 2 - x \geqslant 0 \\ x^2 - 3x + 2 > (2 - x)^2 \end{cases}$$

се исто така решенија на дадената неравенка.

Како што гледаме, решавањето на неравенката (2) го сведуваме на решавање на вкупноста од два система неравенки:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2 - 3x + 2 \geqslant 0 \\ \qquad 2 - x < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 2 - x \geqslant 0 \\ x^2 - 3x + 2 > (2 - x)^2 \end{cases} \end{array}\right. \tag{3}$$

Првиот систем има решение $x > 2$, а вториот систем нема решение. Според тоа, вкупноста (3), односно дадената неравенка (2) има множество решенија $M = (2, \infty) \cup \phi = (2, \infty)$.

Задача 3. Да се реши неравенката $\sqrt{x+1} + \sqrt{3-x} > 1.$ (4)

Решение: Областа на определеност на неравенката (4) ја одредуваме од системот неравенки:
$$\begin{cases} x + 1 \geqslant 0 \\ 3 - x \geqslant 0, \end{cases}$$

откаде наоѓаме $-1 \leqslant x \leqslant 3$, т. е. $D = [-1, 3]$

Во областа D двете страни на неравенката (4) се ненегативни, па затоа таа е еквивалентна на неравенката $\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{3-x}\right)^2 > 1$

или на
$$\sqrt{x+1} \cdot \sqrt{3-x} > -\frac{3}{2} \tag{5}$$

Но бидејќи левата страна на неравенката (5) е ненегативен број, а десната страна е негативен број $\left(-\frac{3}{2}\right)$, тоа таа ќе биде задоволена за секоја вредност на непознатата x од областа на определеност D.

Според тоа неравенката (5) а исто така и дадената неравенка (4) има множество решенија, што се совпаѓа со областа на определеност на неравенката $D = [-1, 3]$.

ЗАДАЧИ

Да се решат неравенките:

28. а) $\sqrt{x^2 - 5x + 4} > x - 3,$ б) $3\sqrt{6 + x - x^2} > 2(2x - 1),$

29. а) $\sqrt{x^2 - 5x - 24} > x + 2,$ б) $\sqrt{x^2 - x - 6} \leqslant x + 5$

30. а) $\sqrt{x+6} - \sqrt{x+1} > \sqrt{2x-5},$ б) $\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x} > 2$

31. а) $\sqrt{x-1} + \sqrt{x} > 2,$ б) $\dfrac{x - 2 + \sqrt{x}}{x - 2 - \sqrt{x}} < 0$

32. а) $\sqrt{x+2} - \sqrt{x-1} > \sqrt{x},$ б) $\sqrt{x+3} + \sqrt{x+4} < \sqrt{x+5}$

33. а) $\sqrt{x+2} + \sqrt{x-5} \geqslant \sqrt{5-x},$ б) $\sqrt{x+2} > x$

34. а) $\sqrt{(x-3)(2-x)} < 3 + 2x,$ б) $\sqrt{3-x} + \sqrt{x+1} > \dfrac{1}{2}$

ПОЛИНОМИ

§ 29. ОСНОВНИ ПОИМИ ЗА ПОЛИНОМИТЕ

Дефиниција 1. *Рационалниот алгебарски израз од видот*

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n, \ (a_0 \neq 0) \tag{1}$$

каде што x е променлива (аргумент) n е природен број, а $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ се дадени реални броеви, се вика полином со една променлива x.

Броевите $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$ се викаат *коефициенти на полиномот* (1), а n — *степен на полиномот*. За полиномот (1) велиме дека е од n-ти степен ако и само ако $a_0 \neq 0$. Во тој случај за бројот a_0 велиме да е *водечки* (или *најстар*) коефициент на тој полином, а за a_n — *слободен член*.

Ако $a_0 = 1$, тогаш за полиномот (1) велиме дека е во *сведен вид*.

За пократко означување на полиномите често се користиме со симболите $P(x)$, $Q(x)$, $f(x)$, $\varphi(x)$, итн. или пак со $P_n(x)$, $Q_n(x)$ итн., ако сакаме да истакнеме дека тој е од n-ти степен.

Така, на пример, полиномот (1) може да се означи со:

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n, \ (a_0 \neq 0) \tag{1'}$$

а полиномите од трет, втор и прв степен — соодветно со:

$$P_3(x) = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3, \ (a_0 \neq 0)$$

$$P_2(x) = a_0x^2 + a_1x + a_2, \ (a_0 \neq 0)$$

$$P_1(x) = a_0x + a_1, \ (a_0 \neq 0)$$

Најнискиот степен на еден полином од x би требало да е прв, меѓутоа во работата со полиноми целисходно е да примиме дека има и *полиноми од нулти степен* ($P_0(x)$) — тоа се сите постојани реални броеви различни од нула. Навистина, бројот $a_n \neq 0$ може да се запише во видот a_nx^0, бидејќи $x^0 = 1$. Значи $P_0(x) = a_0$ ($a_0 \neq 0$).

Согласно горната дефиниција, полиномот (1) е од n-ти степен само при услов $a_0 \neq 0$. Тоа значи дека некои од другите коефициенти на полиномот (1) можат да бидат и еднакви на нула. Така, на пример, во полиномот од четврти степен $2x^4 + 5x^2 + 3$ коефициентите пред непарните степени на x се еднакви на нула; а во полиномот од седми степен $4x^7 + 1$ сите коефициенти, освен водечкиот и слободниот член, се еднакви на нула. Тие два полинома всушност би требало да ги запишуваме вака: $2x^4 + 0x^3 + 5x^2 + 0x + 3$ и

$$4x^7 + 0x^6 + 0x^5 + 0x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x + 1.$$

Заради општност на разгледувањата ќе го воведеме и поимот *нула полином.*

Дефиниција 2. *Полиномот* $0x^n + 0x^{n-1} + \ldots + 0x + 0$ (2)

на кој сите коефициенти се еднакви на нула, се вика нула-полином или нулти полином (не мешај го со поимот полином од нулти степен).

Затоа полиномот (1) кај кој $a_0 \neq 0$ се вика уште *ненула-полином.* Меѓутоа под зборот полином секогаш ќе подразбираме ненула-полином, без тоа посебно да го нагласуваме.

Нула-полиномот е единствен полином на кого не му припишуваме никаков степен.

Согласно дефиницијата 1, коефициентите на ненула полиномот (1) се кои и да било реални броеви. Затоа велиме дека тој е *полином со реални коефициенти.*

Ако пак сите коефициенти на полиномот (1) се рационални (односно само цели) броеви, тогаш велиме дека тој е *полином со рационални* (односно со *цели*) *коефициенти.* Очигледно е дека секој полином со цели коефициенти во исто време е и со рационални, па и со реални коефициенти, но обратното не е.

Даден полином можеме да го разгледуваме во различни бројни множества. При тоа:

Ако полиномот $P(x)$ го разгледуваме во множеството на целите броеви $\mathbf{Z}$, тогаш неговите коефициенти се дадени цели броеви, а променливата x може да зема вредности само од множеството на целите броеви, т. е. $x \in \mathbf{Z}$. Ако пак полиномот $P(x)$ го разгледуваме во множеството на рационалните (односно реалните) броеви, тогаш неговите коефициенти $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$ се дадени рационални (односно реални) броеви, а променливата x може да зема кои било рационални (односно реални) вредности, т. е. $x \in \mathbf{Q}$ (односно $x \in \mathbf{R}$).

Тоа значи дека, даден полином $P(x)$ со цели коефициенти, можеме да го разгледуваме, освен во множеството на целите броеви, уште и во множеството на рационалните и во множеството на реалните броеви, па дури и во множеството на комплексните броеви (Зошто?).

§ 30. ИДЕНТИЧНИ ПОЛИНОМИ СО ЕДНА ПРОМЕНЛИВА

Пред да се запознаеме со некои основни својства на полиномите, ќе ги воведеме следниве две дефиниции:

Дефиниција 1. *Велиме дека полиномот*

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

е идентички еднаков на нула, ако за секоја вредност на x тој добива вредност нула. Тоа го запишуваме: $P(x) \equiv 0$

Дефиниција 2. *Велиме дека два полинома*

$$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$$

$$Q(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+b_2x^{m-2}+\ldots+b_{m-1}x+b_m$$

се идентички еднакви, ако тие добиваат еднакви вредности за која и да било вредност на x. Тоа го запишуваме: $P(x)\equiv Q(x)$

Ќе докажеме дека важат следниве теореми:

Теорема 1. *Полиномот*

$$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n \tag{1}$$

е идентички еднаков на нула, ако и само ако сите негови коефициенти се еднакви на нула, т. е. $a_0=a_1=a_2=\ldots=a_n=0$ (2)

Тоа значи дека условот (2) е и потребен и доволен за да биде $P(x)\equiv 0$.

Доказ: а) *Потребен услов:* $P(x)\equiv 0 \Rightarrow a_0=a_1=a_2=\ldots=a_n=0$

Ако полиномот $P(x)$ е еднаков на нула за секое x, тогаш тој е еднаков на нула и за $x=0$, па добиваме:

$$P(0)=0+a_n=0, \text{ а оттука } a_n=0$$

Полиномот $P(x)$ значи се сведува на:

$$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x\equiv 0$$

или на $$P(x)=x(a_0x^{n-1}+a_1x^{n-2}+a_2x^{n-3}+\ldots+a_{n-1})\equiv 0$$

Производот $$x(a_0x^{n-1}+a_1x^{n-2}+a_2x^{n-3}+\ldots+a_{n-1})$$

за да би имал вредност нула за секое x, мора да е

$$a_0x^{n-1}+a_1x^{n-2}+a_2x^{n-3}+\ldots+a_{n-1}\equiv 0 \tag{3}$$

Бидејќи полиномот (3) треба да е еднаков на нула за секое x, тоа тој ќе биде еднаков на нула и за $x=0$, откаде добиваме:

$$0+a_{n-1}=0, \text{ односно дека } a_{n-1}=0.$$

Продолжувајќи така може да се докаже дека и другите коефициенти $a_{n-2}, a_{n-3}, \ldots\ a_1, a_0$ се еднакви на нула, штд.

б) *Доволен услов:* $a_0=a_1=a_2=\ldots=a_n=0\Rightarrow P(x)\equiv 0$

Очигледно е дека вредноста на нула-полиномот $0x^n+0x^{n-1}+\ldots+0x+0$ за секоја вредност на x е еднаква на нула. Според тоа, $P(x)\equiv 0$, штд.

Теорема 2. *Два полинома*

$$P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n,\ (a_0\neq 0)$$

$$Q_m(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+b_2x^{m-2}+\ldots b_{m-1}x+b_m,\ (b_0\neq 0)$$

се идентични, ако и само ако тие имаат еднакви степени и коефициентите на сличните членови (пред еднаквите степени на x) се соодветно еднакви, т. е. $n=m,\ a_0=b_0,\ a_1=b_1,\ldots,a_n=b_m$ (4)

Тоа значи дека условите (4) се и потребен и доволен услов за да биде $P_n(x)\equiv Q_m(x)$.

Доказ: а) *Потребен услов:*

$$P_n(x)\equiv Q_m(x)\Rightarrow(n=m,\ a_0=b_0,\ a_1=b_1,\ldots,\ a_n=b_m)$$

Ако $P_n(x) \equiv Q_m(x)$, тогаш разликата $R(x) = P_n(x) - Q_m(x) \equiv 0$ е нула-полином.

Полиномите $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ не можат да имаат различни степени, бидејќи ако $n \neq m$, тогаш водечкиот коефициент на полиномот $R(x)$ би бил еден од броевите a_0 или b_0. Значи, еден од тие коефициенти ќе биде еднаков на нула; а тоа противречи на претпоставката дека $a_0 \neq 0$ и $b_0 \neq 0$. Според тоа: $n = m$, па ќе биде:

$$R(x) = (a_0 - b_0) x_n + (a_1 - b_1) x^{n-1} + (a_2 - b_2) x^{n-2} + \ldots + (a_n - b_n) \equiv 0 \tag{5}$$

Но бидејќи $R(x)$ е нула полином, тоа од (5) следува:

$$\begin{cases} a_0 - b_0 = 0 \\ a_1 - b_1 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n - b_n = 0 \end{cases} \quad \text{односно} \quad \begin{cases} a_0 = b_0 \\ a_1 = b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n = b_n, \text{ штд.} \end{cases}$$

б) *Доволен услов:* Ако полиномите $P(x)$ и $Q(x)$ имаат еднакви степени и коефициентите на сличните членови им се соодветно еднакви, тогаш очигледно е дека тие два полинома потполно се совпаѓаат, па според тоа тие се идентично еднакви, штд.

Врз основа својствата на идентичните полиноми можат да се решат следниве задачи:

Задача 1. Полиномот $P(x) = x^3 - 2x + 5$ да се подреди по степените на $x - 1$.

Решение: Задачата се сведува на одредување на друг полином $Q(x-1)$, таков што $Q(x-1) \equiv P(x)$. Согласно теоремата 2 степенот n на $Q(x-1)$ треба да е еднаков на степенот на $P(x)$, т. е. $n = 3$.

Така бараниот полином ќе гласи:

$$Q(x-1) = A(x-1)^3 + B(x-1)^2 + C(x-1) + D,$$

чии коефициенти A, B, C и D се неодредени и треба да ги одредиме така што да важи идентитетот:

$$A(x-1)^3 + B(x-1)^2 + C(x-1) + D \equiv x^3 - 2x + 5 \tag{6}$$

Ако левата страна на (6) ја подредиме по степените на x, равенството (6) го добива видот:

$$Ax^3 + (B - 3A)x^2 + (3A - 2B + C)x + B - A - C + D \equiv x^3 - 2x + 5 \tag{6'}$$

Врз основа на теоремата 2, идентитетот (6') ќе важи, ако е:

$$\begin{cases} A = 1 \\ B - 3A = 0 \\ 3A - 2B + C = -2 \\ B - A - C + D = 5, \text{ откаде} \end{cases} \qquad \begin{cases} A = 1 \\ B = 3 \\ C = 1 \\ D = 4 \end{cases}$$

Според тоа, бараниот полином ќе биде:

$$Q(x-1) = (x-1)^3 + 3(x-1)^2 + (x-1) + 4$$

Оваа постапка на одредување на полиномот $Q(x-1)$ го добила името *метод на неопределени коефициенти* по тоа што при одредувањето на $Q(x-1)$ се послуживме со неопределените коефициенти A, B, C и D.

Задача 2. Со методот на неопределени коефициенти полиномот $ax^2 + bx + c$ да се трансформира во видот $a(x - \alpha)^2 + \beta$.

Решение: Нека важи идентитетот

$$ax^2 + bx + c \equiv a(x - \alpha)^2 + \beta, \tag{7}$$

каде што α и β се бараните коефициенти што треба да ги одредиме.

Ако десната страна на равенството (7) ја подредиме по степените на x, добиваме:

$$ax^2 + bx + c \equiv ax^2 - 2a\alpha x + a\alpha^2 + \beta \tag{7'}$$

Според теоремата 2, идентитетот (7') ќе важи, ако е:

$$\begin{cases} -2a\alpha = b \\ a\alpha^2 + \beta = c, \text{ откаде} \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha = -\dfrac{b}{2a} \\ \beta = \dfrac{4ac-b^2}{4a} \end{cases}$$

Значи: $ax^2 + bx + c \equiv a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 + \dfrac{4ac-b^2}{4a}$

ЗАДАЧИ

1. Од која степен се полиномите: а) $2x^3 - 4x^2 + x - 1$, б) $0x^6 + 0x^5 - 3x^4 + 1$, в) $x^5 - 32$, г) $-x^6$, д) $0x - 3$.

2. Напиши го полиномот $x^3 + 3x^2 - 4x + 5$ по степените на: а) $x - 1$, б) $x + 1$, в) $x + 3$.

3. Покажи дека важат идентитетите: а) $(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1) \equiv x^4 - 1$, б) $x^4 + x^2 + 1 \equiv (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$, в) $x^6 - 1 \equiv (x - 1)(x + 1)(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)$

4. По методот на неопределени коефициенти трансформирај го полиномот $x^2 - 6x + 7$ во форма $(x - a)^2 + c$.

5. Одреди ги непознатите коефициенти така што полиномите да бидат идентични: а) $a_0x^2 - 2x + 1 \equiv b_0x^3 - 4x^2 + b_2x + b_3$, б) $Ax^3 + 3x^2 + Cx - 5 \equiv 2x^3 + Dx^2 - x + F$.

§ 31. ОПЕРАЦИИ СО ПОЛИНОМИ

Познато е како ги извршуваме операциите собирање, множење и одземање на целите рационални изрази. Бидејќи полиномите од променливата x се специјален случај на цели рационални изрази, тоа вам ви се познати правилата на извршување на операциите собирање, множење и одземање на полиноми.

На пример, нека се дадени полиномите $P(x) = 2x^3 - x^2 + 4$ и $Q(x) = x^2 - 3x + 1$.

Нивниот збир и производ ќе бидат следниве полиноми:

$$P(x) + Q(x) = (2x^3 - x^2 + 4) + (x^2 - 3x + 1) = 2x^3 - 3x + 5,$$

$$P(x) \cdot Q(x) = (2x^3 - x^2 + 4)(x^2 - 3x + 1) = 2x^5 - x^4 + 4x^2 -$$
$$- 6x^4 + 3x^2 - 12x + 2x^3 - x^2 + 4 = 2x^5 - 7x^4 + 5x^3 + 3x^2 - 12x + 4$$

Значи, по ослободувањето на заградите и сведувањето на сличните членови бараните полиноми збир и производ на дадените полиноми ги доведуваме во нивната единствена *канонична форма.*

Даден цел алгебарски израз ќе сметаме дека е доведен во *канонична* или *стандардна* форма, ако тој не содржи загради и слични членови, а членовите му се подредени по намалувачките степени на променливата x.

Очигледно е дека операциите со полиномите се сведуваат на операции со нивните коефициенти. На пример, собирањето на два полинома се сведува на собирање на коефициентите на сличните членови; а множењето — на множење и собирање на нивните коефициенти.

Основните својства на собирањето и множењето на реалните броеви, лесно се уверуваме дека важат и за полиномите, т. е. ќе важат идентитетите: $P + Q \equiv Q + P$, $(P + Q) + R \equiv P + (Q + R)$,

$$P \cdot Q \equiv Q \cdot P, \qquad (P \cdot Q) \cdot R \equiv P \cdot (Q \cdot R), \qquad (P + Q) \cdot R \equiv PR + QR,$$

каде што P, Q и R се произволни полиноми.

Дефиниција: *Два полинома се викаат заемно спротивни, ако нивниот збир е идентичен на нула-полиномот.*

На пример: Нека $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ е даден полином, а нему спротивен нека е полиномот

$$- P(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_n.$$

Него го одредуваме од условот:

$$P + (-P) = (a_0 + b_0)\, x^n + (a_1 + b_1)x^{n-1} + \ldots + (a_n + b_n) \equiv 0,$$

каде што $\begin{cases} a_0 + b_0 = 0 \\ a_1 + b_1 = 0, \text{ а оттука} \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_n + b_n = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} b_0 = - a \\ b_1 = - a_1 \\ \ldots\ldots\ldots \\ b_n = - a_n \end{cases}$

Според тоа, полиномот $-P(x)$, што е спротивен на полиномот P(x), ќе биде: $- P(x) = - a_0x^n - a_1x^{n-1} - \ldots - a_n$

Тој се добива кога сите коефициенти на $P(x)$ се заменат со спротивните на нив броеви.

Одземањето на полиноми го дефинираме како обратна (инверзна) операција на собирањето на полиноми, имено:

Разликата на полиномите $P(x) - Q(x)$ се вика полиномот $R(x)$, што го задоволува условот $Q(x) + R(x) \equiv P(x)$.

Ако кон двете страни на тој идентитет додадеме $- Q$, ќе добиеме $R(x) \equiv P(x) + (- Q)$

Според тоа, одземањето на полиномот $Q(x)$ го заменуваме со додавање на нему спротивниот полином $-Q(x)$.

Видовме дека коефициентите на полиномите: збир, производ и разлика ги добиваме од коефициентите на дадените полиноми преку операциите собирање, множење и одземање.

Бидејќи множествата на целите, рационалните и реалните броеви се затворени по однос на операциите собирање, множење и одземање; тоа значи дека ако коефициентите на полиномите $P(x)$ и $Q(x)$ се цели (односно рационални или реални) броеви, тогаш и коефициентите на збирот, производот и разликата на тие полиноми ќе бидат пак цели (односно рационални или реални) броеви.

На пример, збирот, производот и разликата на два полинома со цели коефициенти се полиноми пак со цели коефициенти, итн. Според тоа, ќе важи следнава теорема:

Теорема 1. *Множеството на сите полиноми со цели (односно со рационални или реални) коефициенти е затворено по однос на операциите собирање, множење и одземање.*

Може да се покаже дека важи и следнава:

Теорема 2. *Ако ненула полиномите $P(x)$ и $Q(x)$ се соодветно од n и m-ти степен, при што $n \geqslant m$, тогаш:*

1.° *Степенот на полиномот-збир $P(x) + Q(x)$ и полиномот-разлика $P(x) - Q(x)$ не е поголем од n, а*

2.° *Степенот на полиномот-производ $P(x) \cdot Q(x)$ е еднаков на збирот $(n + m)$ од степените на полиномите-множители.*

§ 32. ДЕЛЕЊЕ НА ПОЛИНОМИ

32. 1. ДЕЛИВОСТ НА ПОЛИНОМИ

Дефиниција: *Полиномот $P(x)$ велиме дека е делив со полиномот $\varphi(x)$, ако постои полином $Q(x)$, таков што да важи идентитетот:*

$$P(x) \equiv \varphi(x) \cdot Q(x) \tag{1}$$

Полиномите $\varphi(x)$ и $Q(x)$ се викаат *делители* на полиномот $P(x)$, односно $\varphi(x)$ е *делител*, а $Q(x)$ — *количник* од делењето на $P(x)$ со $\varphi(x)$

Пример: Полиномот $x^3 + 1$ е делив со полиномот $x + 1$, бидејќи е

$$x^3 + 1 \equiv (x + 1)(x^2 - x + 1)$$

Нека полиномот $P(x)$ е од n-ти степен, а полиномот $\varphi(x)$ од m-ти степен. Тогаш врз основа на теорема 2 (§ 31) полиномот $Q(x)$ ќе биде од $(n - m)$-ти степен. Според тоа, за да постои идентитетот (1) потребно е степенот на $P(x)$ да не е помал од степенот на $\varphi(x)$.

Ако $n = m$, тогаш количникот $Q(x)$ е од нулти степен, т. е. тој е некоја константа. На пример: $2x^3 - 4x + 3 \equiv (x^3 - 2x + \frac{3}{2}) \cdot 2$.

Воопшто, секој реален број $c \neq 0$ е делител на даден полином $P(x)$.

Навистина: $P(x) \equiv c \left[\frac{1}{c} \cdot \varphi(x)\right]$

Таквите делители се викаат *тривијални делители,* но нас ќе не интересираат само нетривијалните делители на $P(x)$ и под зборот делители на $P(x)$ ќе ги подразбираме неговите нетривијални делители.

Ќе покажеме дека за деливоста на полиноми важат следниве теореми:

Теорема 1. *Ако полиномот $P(x)$ е делив со полиномот $\varphi(x)$, тогаш постои само еден единствен полином — количник $Q(x)$.*

Доказ: Да претпоставиме дека при делењето на $P(x)$ со $\varphi(x)$ се добиваат два различни количници $Q(x)$ и $Q_1(x)$. Во тој случај имаме:

$$P(x) \equiv \varphi(x) \cdot Q(x) \quad \text{и} \quad P(x) \equiv \varphi(x) \cdot Q_1(x),$$

а оттука следува $\varphi(x) \cdot Q(x) \equiv \varphi(x) \cdot Q_1(x)$ или $\varphi(x)\,[Q(x) - Q_1(x)] \equiv 0.$

Бидејќи по услов $\varphi(x) \not\equiv 0$, тоа мора да е $Q(x) - Q_1(x) \equiv 0$ или $Q(x) \equiv Q_1(x)$

Значи, количникот $Q(x)$ ако постои тој е единствен, штд.

Теорема 2. *Ако секој од полиномите $A(x)$ и $B(x)$ е делив со полиномот $\varphi(x)$, тогаш и збирот $A(x) + B(x)$ е делив со $\varphi(x)$.*

Доказ: Нека е $A(x) \equiv \varphi(x) \cdot Q_1(x)$ и $B(x) \equiv \varphi(x) \cdot Q_2(x)$.
Тогаш $A(x) + B(x) \equiv \varphi(x) \cdot Q_1(x) + \varphi(x) \cdot Q_2(x)$ или

$$A(x) + B(x) \equiv \varphi(x)\,[Q_1(x) + Q_2(x)], \text{ штд.}$$

Теорема 3. *Ако еден од множителите на производот $A(x) \cdot B(x)$ е делив со полиномот $\varphi(x)$, тогаш и производот е делив со $\varphi(x)$.*

Доказ: Нека полиномот $A(x)$ е делив со $\varphi(x)$, т. е. нека е $A(x) \equiv \varphi(x) \cdot Q(x)$. Во тој случај имаме: $A(x) \cdot B(x) \equiv [\varphi(x)\, Q(x)]\, B(x)$, а врз основа асоцијативниот закон: $A(x) \cdot B(x) \equiv \varphi(x)\,[Q(x) \cdot B(x)]$.

32. 2. ДЕЛЕЊЕ СО ОСТАТОК

Делењето на полиномите со остаток го воведуваме со следнава:

Дефиниција: *Да се подели полиномот $P_n(x)$ со полиномот $\varphi_m(x) \not\equiv 0$, значи да се одредат два нови полинома — еден $q(x)$, кој се вика количник, и друг $r(x)$, кој се вика остаток; такви што да важи идентитетот*

$$P_n(x) \equiv \varphi_m(x)\, q(x) + r(x) \tag{2}$$

и степенот на $r(x)$ да е барем за единица помал од степенот на $\varphi(x)$, или $r(x) \equiv 0$:

Очигледно е дека степенот на $q(x)$ ќе биде еднаков на разликата од степените на полиномите $P_n(x)$ и $\varphi_m(x)$, т.е. на $n - m$ (Зошто?)

Се поставува прашањето: делењето со остаток дали секогаш е возможно, т.е. за секои два дадени полинома $P(x)$ и $\varphi(x)$ дали секогаш постојат такви два полинома $q(x)$ и $r(x)$, за кои да важи идентитетот (2) и степенот на $r(x)$ да е помал од степенот на $\varphi(x)$, или $r(x) \equiv 0$? И ако такви полиноми постојат, дали тие се еднозначно определени?

Потврден одговор на тие прашања ни дава следнава:

Теорема: *За два кои било полиноми $P_n(x)$ и $\varphi_m(x)$, при што $\varphi_m(x) \not\equiv 0$, секогаш постои и тоа единствена двојка полиноми $q(x)$ и $r(x)$ што ги задоволуваат условите:*

1.° *да важи идентитетот* $P(x) \equiv \varphi(x)\, q(x) + r(x)$ *и*

2.° *степенот на* $r(x)$ *да е помал од* m, *или* $r(x) \equiv 0$.

Доказ: Ако $n < m$, тогаш идентитетот (2) го задоволуваат полиномите: $q(x) \equiv 0$ и $r(x) \equiv P(x)$. Ако пак $n = m$, тогаш $q(x)$ е една константа k и ќе важи: $P_n(x) = \varphi(x) \cdot k + r(x)$, при што степенот на $r(x)$ е помал од n.

На пример, ако $P(x) = 2x^2 - x + 3$, $\varphi(x) = x^2 + x + 1$, тогаш $2x^2 - x + 3 \equiv (x^2 + x + 1) \cdot 2 + (-3x + 1)$, т. е. $q(x) = 2$ и $r(x) = -3x + 1$.

Случајот кога $n > m$ да го разгледаме на следниов конкретен

Пример: Нека $P(x) = 2x^4 - 3x^3 + 3x^2 + 8x - 1$, $\varphi(x) = 2x^2 + x - 1$.

Забележуваме дека, ако $\varphi(x)$ го помножиме со x^2 го добиваме полиномот

$$\varphi(x) \cdot x^2 = (2x^2 + x - 1) \cdot x^2 = 2x^4 + x^3 - x^2,$$

кај кој членот ($2x^4$) со највисок степен на x е исти како и кај полиномот $P(x)$. Затоа разликата $P(x) - \varphi(x) \cdot x^2 = -4x^3 + 4x^2 + 8x - 1$ ќе има понизок степен отколку $P(x)$.

Ако $\varphi(x)$ го помножиме со $-2x$, го добиваме полиномот $\varphi(x) \cdot (-2x) = -4x^3 - 2x^2 + 2x$, кој има исти прв член ($-4x^3$) како и полиномот $P(x) - \varphi(x) \cdot x^2$. Гледаме дека разликата

$$P(x) - \varphi(x) \cdot x^2 - \varphi(x) \cdot (-2x) = 6x^2 + 6x - 1$$

има уште понизок степен од $P(x)$, но не понизок и од $\varphi(x)$. Ако потоа $\varphi(x)$ го помножиме со 3, го добиваме полиномот $\varphi(x) \cdot 3 = 6x^2 + 3x - 3$, а ако него го извадиме од предходниот, го добиваме полиномот:

$$P(x) - \varphi(x) \cdot x^2 - \varphi(x) \cdot (-2x) - \varphi(x) \cdot 3 = 3x + 2 \tag{3}$$

кој има понизок степен и од $\varphi(x)$.

Равенството (3) може да се запише и вака:

$$P(x) = \varphi(x)\,(x^2 - 2x + 3) + 3x + 2$$

Во тој случај ќе биде: $q(x) = x^2 - 2x + 3$, $r(x) = 3x + 2$.

Постапката на определување на полиномот-количник $q(x)$ и остатокот $r(x)$ кратко ја запишуваме вака:

$$\begin{array}{l}
(2x^4 - 3x^3 + 3x^2 + 8x - 1) : (2x^2 + x - 1) = x^2 - 2x + 3 \\
\underline{-\,2x^4 \pm x^3 \mp x^2} \\
\qquad -4x^3 \mp 4x^2 + 8x - 1 \\
\qquad \underline{\mp 4x^3 \mp 2x^2 \pm 3x} \\
\qquad\qquad 6x^2 + 6x - 1 \\
\qquad\qquad \underline{-\,6x^2 \pm 3x \mp 3} \\
\qquad\qquad\qquad 3x + 2 = r(x)
\end{array}$$

На сличен начин и во општ случај може да се покаже дека при $n > m$ постојат двојка полиноми $q(x)$ и $r(x)$, такви што да важи идентитетот (2) и степенот на $r(x)$ да е помал од m или $r(x) \equiv 0$.

Останува да покажеме дека полиномите $q(x)$ и $r(x)$ се единствени. Да претпоставиме (спротивното) дека постои уште една двојка полиноми $q_1(x)$ и $r_1(x)$, такви што
$$P(x) \equiv \varphi(x) \cdot q_1(x) + r_1(x) \tag{3}$$
и степенот на $r_1(x)$ да е помал од степенот на $\varphi(x)$, или $r_1(x) \equiv 0$.

Од (2) и (3) добиваме: $\varphi(x)\, q(x) + r(x) \equiv \varphi(x)\, q_1(x) + r_1(x)$

или
$$\varphi(x)\,[q(x) - q_1(x)] \equiv r_1(x) - r(x) \tag{4}$$

Идентитетот (4) можен е само ако $q(x) \equiv q_1(x)$.

Навистина, ако $q(x) \not\equiv q_1(x)$ тогаш степенот на левата страна на (4) не може да биде помал од степенот на φ(x), додека пак степенот на десната страна на (4) ќе биде помал од степенот на $\varphi(x)$ (Зошто?). Меѓутоа, таков идентитет на два полинома со различни степени согласно теоремата 2 (§ 30) е неможен. Според тоа, мора да биде $q(x) \equiv q_1(x)$, а тогаш ќе биде и $r_1(x) \equiv r(x)$.

Со тоа теоремата е докажана.

Последица: *Полиномот $P(x)$ е делив со полиномот $\varphi(x)$ ако и само ако остатокот $r(x)$ од делењето на $P(x)$ со $\varphi(x)$ е нула-полином,* т. е. $r(x) \equiv 0$.

Доказ: а) *Потребен услов:* Нека полиномот $P(x)$ е делив со $\varphi(x)$. Тогаш ќе важи идентитетот $$P(x) \equiv \varphi(x) \cdot q(x) \tag{1}$$

Ако ги спoредиме идентитетите (2) и (1), добиваме дека $r(x) \equiv 0$.

б) *Доволен услов:* Ако $r(x) \equiv 0$, тогаш идентитетот (2) го добива видот $P(x) \equiv \varphi(x) \cdot q(x)$, а тоа значи дека полиномот $P(x)$ е делив со $\varphi(x)$, штд.

Забелешка: Делењето на два полинома може да се изврши уште и според методот на неопределени коефициенти. Да го илустрираме тоа на горниов

Пример: Да се подели полиномот $P(x) = 2x^4 - 3x^3 + 3x^2 + 8x - 1$ со полиномот $\varphi(x) = 2x^2 + x - 1$.

Решение: Во нашиот случај полиномот количник $q(x)$ ќе биде од втор степен (Зошто?), кого со помош на неопределени коефициенти го запишуваме:

$$q(x) = ax^2 + bx + c$$

А согласно дефиницијата за делење на полиноми, остатокот $r(x)$ ќе биде од прв степен ($m - 1 = 2 - 1 = 1$), па според тоа ќе го има видот $r(x) = dx + e$. Во таков случај од идентитетот:

$$2x^4 - 3x^3 + 3x^2 + 8x - 1 \equiv (2x^2 + x - 1)(ax^2 + bx + c) + dx + e \quad \text{или}$$
$$2x^4 - 3x^3 + 3x^2 + 8x - 1 \equiv 2ax^4 + (a + 2b)x^3 + (2c + b - a)x^2 + (d + c - b)x + e - c,$$

согласно теоремата 2, добиваме:

$$\begin{cases} 2a = 2 \\ a + 2b = -3 \\ 2c + b - a = 3 \\ d + c - b = 8, \text{ а оттука:} \\ e - c = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 3 \\ d = 3 \\ e = 2 \end{cases}$$

Според тоа: $q(x) = x^2 - 2x + 3$ и $r(x) = 3x + 2$.

32. 3. ДЕЛЕЊЕ НА ПОЛИНОМ СО БИНОМОТ $x - \alpha$

Посебен интерес претставува делењето на кој и да било полином $P(x)$ со биномот $\varphi(x) = x - \alpha$, каде што α е некој реален број. Во тој случај, бидејќи делителот $\varphi(x)$ е од прв степен, остатокот $r(x)$ ќе биде од нулти степен, т. е. тој е некој број r. При тоа ќе важи идентитетот $$P(x) \equiv (x - \alpha) \cdot q(x) + r, \tag{5}$$

односно: $$P(x) \equiv (x - \alpha)(b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \ldots + b_{n-2}x + b_{n-1}) + r \tag{5'}$$

Теорема на Безу *(остаточна теорема): Остатокот при делењето на полиномот* $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ *со биномот* $x - \alpha$ *еднаков е на вредноста на полиномот* $P(x)$ *за*

$$x = \alpha, \text{ т. е. } r = P(\alpha) = a_0\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\alpha + a_n$$

Доказ: Идентитетот (5) важи за секое x, па според тоа и за $x = \alpha$. Ако во двете негови страни ставиме $x = \alpha$, добиваме: $P(\alpha) = r$, штд.

Пример: Остатокот од делењето на полиномот

$P(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 - x + 1$ со $x + 2$ еднаков е на

$$r = P(-2) = (-2)^4 + 2(-2)^3 + 3(-2)^2 - (-2) + 1 = 15.$$

За определување на коефициентите на количникот

$$q(x) = b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \ldots + b_{n-2} + b_{n-1}$$

и остатокот r при делењето на $P(x)$ со $x - \alpha$ може да се послужиме со методот на неопределени коефициенти. За таа цел ќе го извршиме множењето на десната страна во идентитетот (5), односно (5'):

$$P(x) \equiv b_0x^n + b_1x^{n-1} + b_2x^{n-2} + \ldots + b_{n-2}x^2 + b_{n-1}x -$$
$$- b_0\alpha x^{n-1} - b_1\alpha x^{n-2} - \ldots\ldots - b_{n-2}\alpha x - b_{n-1}\alpha + r$$

$$\text{или } P(x) \equiv b_0x^n + (b_1 - b_0\alpha)x^{n-1} + (b_2 - b_1\alpha)x^{n-2} + \ldots$$
$$\ldots + (b_{n-1} - b_{n-2}\alpha)x - b_{n-1}\alpha + r$$

Врз основа теоремата 2 за идентичност на два полинома, добиваме:

$$\begin{cases} b_0 = a_0 \\ b_1 - b_0\alpha = a_1 \\ b_2 - b_1\alpha = a_2 \\ \ldots\ldots\ldots, \\ b_{n-1} - b_{n-2}\alpha = a_{n-1} \\ r - b_{n-1}\alpha = a_n \end{cases} \quad \text{а оттука:} \quad \begin{cases} b_0 = a_0 \\ b_1 = a_1 + b_0\alpha \\ b_2 = a_2 + b_1\alpha \\ \ldots\ldots\ldots \\ b_{n-1} = a_{n-1} + b_{n-2}\alpha \\ r = a_n + b_{n-1}\alpha \end{cases} \qquad (6)$$

Равенствата (6) ни даваат можност непосредно да ги одредиме коефициентите на количникот $q(x)$ и остатокот r. При одредувањето коефициентите на $q(x)$ и остатокот r се служиме со следнава така наречена *Хорнерова шема:*

α	a_0	a_1	a_2	$\ldots$	a_{n-1}	a_n
	$b_0 = a_0$	$b_1 = a_1 + b_0\alpha$	$b_2 = a_2 + b_1\alpha$	$\ldots$	$b_{n-1} = a_{n-1} + b_{n-2}\alpha$	$r = a_n + b_{n-1}\alpha$

Во првиот ред на ова шема ги запишуваме коефициентите на полиномот $P(x)$, а во вториот ред — коефициентите на количникот $q(x)$.

При исполнувањето на вториот ред: во првата колона го пренесуваме коефициентот a_0 од првиот ред, а кој било друг коефициент b_k $(1 \leqslant k \leqslant n)$ го одредуваме кога кон бројот (a_k) што се наоѓа над него во првиот ред го додадеме производот од бројот α и претходниот коефициент b_{k-1} во вториот ред, т. е. $b_k = a_k + \alpha b_{k-1}$.

Задача: Да се одреди количникот и остатокот што се добиваат при делењето на полиномот $P(x) = 3x^4 - 2x^3 + 4x - 1$ со биномот $x - 2$.

Решение: Тука е $a = 2$. Ја составуваме шемата:

2	3	-2	0	4	-1
	3	4	8	20	39

Според тоа: $q(x) = 3x^3 + 4x^2 + 8x + 20$, а $r = 39$,
односно: $3x^4 - 2x^3 + 4x - 1 \equiv (x - 2)(3x^3 + 4x^2 + 8x + 20) + 39$

Врз основа на теоремата на Безу лесно можат да се докажат следниве теореми:

Теорема 1. *Разликата на два степена со еднакви природни показатели делива е со разликата на нивните основи,* т. е.

$$x^n - a^n \equiv (x - a) \cdot q(x)$$

Доказ: Според теоремата на Безу при делењето на полиномот $P_n(x) = x^n - a^n$ со $x - a$ добиваме остаток нула: $r = P_n(a) = a^n - a^n = 0$.

Со помош на Хорнеровата шема може да се одреди и количникот $q(x)$ на тоа делење:

a	1	0	0	0	....	0	0	$-a^n$
	1	a	a^2	a^3		a^{n-2}	a^{n-1}	0

Според тоа, ќе важи идентитетот:

$$x^n - a^n \equiv (x - a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \ldots + a^{n-2}x + a^{n-1})$$

Теорема 2. *Разликата на два степена со еднакви парни показатели делива е со збирот на нивните основи,* т. е. $x^{2k} - a^{2k} \equiv (x + a)\, q(x)$.

Навистина при делењето на полиномот $P(x) = x^{2k} - a^{2k}$ со $x + a$ добиваме остаток нула: $r = P(-a) = (-a)^{2k} - a^{2k} = a^{2k} - a^{2k} = 0$.

Со Хорнеровата шема може да се покаже дека важи идентитетот:

$$x^{2k} - a^{2k} \equiv (x + a)(x^{2k-1} - ax^{2k-2} + \ldots + a^{2k-2}x - a^{2k-1})$$

Теорема 3. *Збирот на два степена со еднакви непарни показатели делив е со збирот на нивните основи,* т. е.
$x^{2k+1} + a^{2k+1} \equiv (x + a)\, q(x)$.

Навистина, при делењето на полиномот $P(x) = x^{2k+1} + a^{2k+1}$ со $x + a$ се добива остаток нула

$$r = P(-a) = (-a)^{2k+1} + a^{2k+1} = -a^{2k+1} + a^{2k+1} = 0$$

А со помош на Хорнеровата шема може да се покаже дека важи идентитетот:

$$x^{2k+1} + a^{2k+1} \equiv (x + a)(x^{2k} - ax^{2k-1} + \ldots - a^{2k-1}x + a^{2k})$$

Аналогно можат да се докажат и следниве тврдења:

1.° Полиномот $x^{2k+1} - a^{2k+1}$ не е делив со биномот $x + a$,

2.° Полиномот $x^{2k} + a^{2k}$ не е делив ниту со $x + a$, ниту со $x - a$,

3.° Полинот $x^n + a^n$ не е делив со биномот $x - a$.

6. Провери дали полиномот $x^3 + x^2 - 17x + 15$ е делив со биномот: а) $x + 5$, б) $x - 1$, в) $x + 1$, г) $x - 3$.

7. Одреди го количникот $q(x)$ и остатокот $r(x)$ при делењето на полиномот $2x^4 + 11x^3 + 6x^2 - 21x - 2$ со $2x^2 + 5x - 1$.

8. Покажи дека полиномот $x^3 + a^3$ е делив со $x + a$, но не е делив со $x - a$.

9. Покажи дека полиномот $x^2 + a^2$ не е делив ниту со $x + a$, ниту со $x - a$.

10. Покажи дека полиномот $x^{2k+1} - a^{2k+1}$ е делив со $x - a$ и одреди го полиномот количник!

11. За кои вредности на a и b полиномот $x^3 + 3x^2 - 2x + a$ е делив со $x^2 + x + b$? Одреди го тоа со помош на методот на неопределени коефициенти!

12. Одреди го количникот и остатокот од делењето на полиномот $P(x) = 2x^4 - x^3 - 2x^2 + 3x + 1$ со $x - 3$.

13. Изврши го делењето на полиномите со остаток:

а) $(x^5 - 5x^4 + x^3 - 2x^2 + 3) : (x^2 - x + 1)$, б) $(x^7 - 1) : (x^4 + x^2 + 1)$,
в) $(x^5 + 1) : (x^3 + x + 1)$.

14. За кои вредности на k полиномот $x^3 + 4x^2 + kx + 15$ е делив со $x + 3$.

15. Одреди ја вредноста на полиномот $P(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - 3x + 5$ за $x = -3$ со помош на Хорнеровата шема!

16. Одреди ги коефициентите a и b на полиномот $P(x) = 2x^3 + x^2 + ax + b$, така што тој да биде делив со $x - 2$ и со $x - 3$.

17. Докажи дека полиномот $P(x) = (x + a + b)^3 - x^3 - a^3 - b^3$ е делив со $x + a$ и $x + b$.

18. Докажи дека полиномот $P(x) = (x + a)^5 + b^5$ е делив со $x + a + b$.

19. Каков треба да биде природниот број n за да биде бројот $11^n - 1$ делив со: а) 10, б) 12?

20. Докажи дека полиномот $P(x) = (x + a)^4 - b^4$ е делив со $x + a + b$!

21. Може ли дропката $\dfrac{x^5 + 3x^3 - x - 3}{x^7 - 2x^4 + 2x - 1}$ да се скрати со $x - 1$?

22. Одреди го остатокот од делењето на полиномот

$$x^{50} - x^{30} + 2x^{10} - 4 \text{ со } x^2 - 1.$$

§ 33. НАЈГОЛЕМ ЗАЕДНИЧКИ ДЕЛИТЕЛ НА ДВА ПОЛИНОМА. ЕВКЛИДОВ АЛГОРИТАМ

Нека се дадени два полинома:

$$A(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n$$

$$B(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + b_2x^{m-2} + \dots + b_{m-1}x + b_m$$

Ако секој од полиномите $A(x)$ и $B(x)$ е делив со некој полином $M(x) \not\equiv 0$, т. е. ако $A(x) = M(x) \cdot q_1(x)$ и $B(x) = M(x)\, q_2(x)$, тогаш за полиномот $M(x)$ велиме дека е *заеднички делител* на $A(x)$ и $B(x)$.

Два полинома можат да имаат и неколку различни заеднички делители, но само еден од нив ќе има највисок степен.

Дефиниција: *Најголем заеднички делител за полиномите $A(x)$ и $B(x)$ — кратко $D(A, B)$, се вика нивниот заеднички делител, што е од највисок степен.*

Два полинома, кои освен бројни делители немаат други заеднички делители, се викаат *заемно прости.*

Одредувањето на $D(A, B)$ го вршиме на ист начин како и Н. З. Д. на два природни броја. Тоа го вршиме така што полиномите прво ги разложуваме на неразложливи (прости) множители, а потоа го образуваме производот од сите нивни заеднички множители, што се од највисок степен.

Меѓутоа, разложувањето на дадените полиноми на множители често е сврзано со низа тешкотии. Тука ќе се запознаеме со една друга важна постапка за одредување на Н. З. Д. на два полинома — наречена *Евклидов алгоритам.* Прво ќе покажеме дека важи следнава:

Теорема: *Ако* $A(x) \equiv B(x) \cdot q(x) + r(x)$, *тогаш* $D(A, B) \equiv D(B, r)$

Доказ: Нека е $D(A,B) = M_s(x)$ — полином од степен s, а $D(B,r) = N_t(x)$ — полином од степен t.

Да го претпоставиме спротивното: $s \neq t$, т.е. $D(A,B) \not\equiv D(B,r)$

Бидејќи $D(A,B) = M_s(x)$, тоа $A(x) = M_s(x)\, q_1(x)$ и $B(x) = M_s(x)\, q_2(x)$, а од $r(x) \equiv A(x) - B(x)\, q(x)$, односно

$$r(x) \equiv M_s(x) \cdot q_1(x) - M_s(x)\, q_2(x)\, q(x) = M_s(x)\,[q_1(x) - q_2(x)\, q(x)]$$

гледаме дека $M_s(x)$ е делител и на $r(x)$, т.е. $M_s(x)$ ќе биде заеднички делител (но не мора да е и Н.З.Д). на полиномите $B(x)$ и $r(x)$

Оттука и од $D(B,r) = N_t(x)$ следува дека $s \leqslant t$.

Но, бидејќи $D(B,r) = N_t(x)$, тоа $B(x) = N_t(x) \cdot q_3(x)$ и $r(x) = N_t(x)\, q_4(x)$, а од

$$A(x) \equiv B(x)\, q(x) + r(x), \text{ односно } A(x) \equiv N_t(x)\, q_3(x)\, q(x) + \\ + N_t(x)\, q_4(x) = N_t(x)\,[q_3(x)\, q(x) + q_4(x)]$$

гледаме дека $N_t(x)$ е делител и на $A(x)$, т.е. тој е заеднички делител на $B(x)$ и $A(x)$

Оттука и тоа што $D(A,B) = M_s(x)$ следува дека $t \leqslant s$.

Од релациите $s \leqslant t$ и $t \leqslant s$ добиваме $s = t$. Според тоа, нашата претпоставка дека $s \neq t$, односно $D(A,B) \not\equiv D(B,r)$ не е точна. Останува да прифатиме дека е точна теоремата.

Евклидовиот алгоритам за одредување на $D(A, B)$ се состои во следново:

Нека се дадени полиномите $A_n(x)$ и $B_m(x)$, при што $n \geqslant m$.

Ако полиномот $A(x)$ е делив со $B(x)$, тогаш очигледно е дека $D(A, B) = B(x)$. Ако пак при делењето на $A(x)$ со $B(x)$ се добие остаток $r_1(x)$, тогаш вториот полином $B(x)$ го делиме со остатокот $r_1(x)$.

Ако $B(x)$ е делив со $r_1(x)$, тогаш $D(A, B) = r_1(x)$. Ако пак се добие втор остаток $r_2(x)$, тогаш првиот остаток $r_1(x)$ го делиме со вториот остаток $r_2(x)$, итн.

Тој процес на делење го продолжуваме сѐ додека делењето не заврши без остаток. Нека:

$$\left\{\begin{array}{l} A(x) = B(x)\ q_0(x) + r_1(x) \\ B(x) = r_1(x)\ q_1(x) + r_2(x) \\ r_1(x) = r_2(x)\ q_2(x) + r_3(x) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ r_{k-2}(x) = r_{k-1}(x)\ q_{k-1}(x) + r_k(x) \\ r_{k-1}(x) = r_k(x)\ q_k(x) \end{array}\right. \tag{1}$$

Тврдиме дека делителот напоследното делење, односно последниот остаток $r_k(x) \neq 0$ ќе биде бараниот најголем заеднички делител на полиномите $A(x)$ и $B(x)$, т. е. $D(A, B) = r_k(x)$.

Навистина, согласно горната теорема, имаме:

$$D(A,B) \equiv D(B,r_1) \equiv D(r_1,r_2) \equiv \dots \equiv D(r_{k-2},r_{k-1}) \equiv D(r_{k-1},r_k) = r_k$$

Очигледно е дека тој процес на делење по конечен број делења мора да доведе до остаток, што е идентички еднаков на нула, или до остаток од нулти степен; бидејќи секој нареден остаток во низата остатоци $r_1(x)$, $r_2(x)$, $r_3(x)$, ... е со понизок степен (барем за единица) од предходниот остаток.

Ако последниот остаток биде некоја константа (полином од нулти степен), тоа значи дека дадените полиноми се заемно прости.

Задача: Да се одреди Н.З.Д. на полиномите

$A(x) = x^5 - 2x^4 + 2x^3 - 3x^2 + x - 1$ и $B(x) = x^4 - x^3 + 2x^2 - x + 1$

Решение: Го делиме полиномот $A(x)$ со $B(x)$:

$$\begin{array}{l} (x^5 - 2x^4 + 2x^3 - 3x^2 + x - 1) : (x^4 - x^3 + 2x^2 - x + 1) = x - 1 \\ \underline{-x^5 \mp x^4 \pm 2x^3 \mp x^2 \pm x \qquad} \\ \quad -x^4 \qquad\quad 2x^2 \qquad -1 \\ \quad \underline{\mp x^4 \pm x^3 \mp 2x^2 \pm x \mp 1} \\ r_1(x) = \quad -x^3 \qquad\qquad -1 \end{array}$$

Потоа го делиме полиномот $B(x)$ со првиот остаток $r_1(x)$:

$$\begin{array}{l} (x^4 - x^3 + 2x^2 - x + 1) : (-x^3 - x) = -x + 1 \\ \underline{-x^4 - \qquad \pm x^2 \qquad\qquad} \\ \quad -x^3 + x^2 - x + 1 \\ \quad \underline{\mp x^3 \qquad \mp x \qquad} \\ r_2(x) = \qquad\qquad x^2 + 1 \end{array}$$

Сега го делиме првиот остаток $r_1(x)$ со вториот остаток $r_2(x)$·

$$\begin{array}{l} (-x^3 - x) : (x^2 + 1) = -x \\ \underline{\mp x^3 \mp x \qquad} \\ r_3(x) = 0 \end{array}$$

Бидејќи третиот остаток е идентички еднаков на нула, тоа

$$D(A, B) = r_2(x) = x^2 + 1$$

ЗАДАЧИ

Да се одреди најголемиот заеднички делител за полиномите:

23. $A(x) = x^3 + 8x^2 + 19x + 12$ и $B(x) = x^3 + 9x^2 + 26x + 24$,

24. $A(x) = x^5 + 6x^4 + 13x^3 + 14x^2 + 12x + 8$ и $B(x) = x^5 - 6x^3 - 6x^2 - 7x - 6$.

§ 34. НУЛИ НА ПОЛИНОМОТ. ПОЛИНОМНИ РАВЕНКИ

Нека е даден полиномот од n-ти степен

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n, \quad a_0 \neq 0 \tag{1}$$

Дефиниција: *Равенката од видот* $P_n(x) = 0$, односно

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0, \qquad (a_0 \neq 0) \tag{2}$$

се вика полиномна равенка од n-ти степен.

За различни вредности на x полиномот (1) добива различни вредности. Но, нас посебно ќе не интересираат оние вредности на x за кои полиномот (1) добива вредност нула.

Дефиниција 2. *Секоја вредност* $x = \alpha$, *за која* $P_n(\alpha) = 0$, *се вика нула на полиномот* $P_n(x)$.

На пример, бројот 2 е нула на полиномот $P(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 6$, бидејќи за $x = 2$ е $P(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2 - 6 = 0$

Очигледно е дека секоја нула на полиномот (1) всушност е корен на полиномната равенка (2).

Теорема 1. *Полиномот* $P(x)$ *е делив со* $x - \alpha$ *ако и само ако бројот* α *е нула на полиномот* $P(x)$, т. е. $P(\alpha) = 0$.

Доказ: Треба одделно да ги докажеме следниве две тврдења: 1.° Ако полиномот $P(x)$ е делив со $x - \alpha$, тогаш е $P(\alpha) = 0$, и обратно: 2.° Ако $P(\alpha) = 0$, тогаш $P(x)$ е делив со $x - \alpha$.

1.° Ако $P(x)$ е делив со $x - \alpha$, тогаш ќе важи идентитетот:

$$P(x) \equiv (x - \alpha) \cdot q(x)$$

Во тој случај за $x = \alpha$ имаме $P(\alpha) = (\alpha - \alpha)\, q(\alpha) = 0$

Значи, бројот α е нула на полиномот $P(x)$, штд.

2.° Нека бројот α е нула на полиномот $P(x)$, т. е. нека $P(\alpha) = 0$. Но, според теоремата на Безу, остатокот од делењето на $P(x)$ со $x - \alpha$ е еднаков на $r = P(\alpha)$. Бидејќи е $P(\alpha) = 0$, тоа ќе биде и $r = 0$. Според тоа, полиномот $P(x)$ е делив со биномот $x - \alpha$, штд.

Со тоа теоремата 1 е докажана, според која одредувањето на линеарните делители (фактори) на полиномот е еквивалентно на одредувањето на неговите нули. Затоа горнава теорема често ја викаме и *теорема за факторизација на полиномот*.

Теорема 2. *Ако полиномот* $P(x)$ *има* k *различни нули:* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_k$, *тогаш* $P(x)$ *е делив со производот* $(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3) \ldots (x - \alpha_k)$

Доказ: Бидејќи α_1 е нула на полиномот $P(x)$, тогаш врз основа теоремата 1, имаме: $P(x) \equiv (x - \alpha_1)\, q_1(x)$. (3)

Бидејќи и α_2 е нула на $P(x)$, тоа ќе биде: $P(\alpha_2) = (\alpha_2 - \alpha_1)\, q_1(\alpha_2) = 0$.

Меѓутоа $\alpha_2 \neq \alpha_1$, затоа мора да е $q_1(\alpha_2) = 0$. Тоа значи дека α_2 е нула на полиномот $q_1(x)$, па затоа тој е делив со $x - \alpha_2$, т. е.

$$q_1(x) \equiv (x - \alpha_2)\, q_2(x) \tag{4}$$

Со замена на $q_1(x)$ од (4) во (3), добиваме:

$$P(x) \equiv (x - \alpha_1)\,(x - \alpha_2) \cdot q_2(x) \tag{5}$$

Бидејќи и α_3 е нула на полиномот $P(x)$, тоа:

$$P(\alpha_3) = (\alpha_3 - \alpha_1)\,(\alpha_3 - \alpha_2)\, q_2(\alpha_3) = 0$$

Но бидејќи $\alpha_3 \neq \alpha_2 \neq \alpha_1$, затоа мора да биде $q_2(\alpha_3) = 0$, а тоа значи дека α_3 е нула на полиномот $q_2(x)$, па затоа тој е делив со $x - \alpha_3$, т. е.

$$q_2(x) \equiv (x - \alpha_3)\, q_3(x) \tag{6}$$

Со замена на $q_2(x)$ од (6) во (5), добиваме:

$$P(x) \equiv (x - \alpha_1)\,(x - \alpha_2)\,(x - \alpha_3)\, q_3(x) \tag{7}$$

Ако оваа постапка ја продолжиме, ќе го добиеме идентитетот:

$$P(x) \equiv (x - \alpha_1)\,(x - \alpha_2)\,(x - \alpha_3) \dots (x - \alpha_k)\, q_k(x), \tag{8}$$

каде што $q_k(x)$ е полином од $(n - k)$-ти степен, чиј водечки коефициент е еднаков на a_0 (Зошто?). Со тоа теоремата 2 е докажана.

Пример: Броевите 2 и —3 се нули на полиномот

$$2x^4 + 2x^3 - 11x^2 + x - 6.$$

Ќе покажеме дека тој е делив со производот $(x - 2)\,(x + 3)$.

Решение: Дадениот полином прво ќе го поделиме со $x - 2$:

2	2	2	—11	1	—6
	2	6	1	3	0

Добиваме количник: $2x^3 + 6x^2 + x + 3$, т. е.

$$2x^4 + 2x^3 - 11x^2 + x + 3 \equiv (x - 2)\,(2x^3 + 6x^2 + x + 3)$$

Ако добиениот количник го поделиме со $(x + 3)$, наоѓаме:

—3	2	6	1	3
	2	0	1	0

нов количник: $2x^2 + 1$

Според тоа: $2x^4 + 2x^3 - 11x^2 + x - 6 \equiv (x - 2)\,(x + 3)\,(2x^2 + 1)$.

Теорема 3. *Ако полиномот $P(x)$, чиј степен е непоголем од n, добива вредност нула за $(n + 1)$ различни вредности на x, тогаш $P(x)$ е нула-полином.*

Доказ: Да претпоставиме спротивното: дека $P(x)$ не е нула-полином. Според условот на теоремата тој има степен непоголем од n. Но бидејќи броевите: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{n+1}$ се нули на $P(x)$, тоа согласно теоремата 2, тој е делив со производот $(x - \alpha_1)\,(x - \alpha_2)\,(x - \alpha_3) \dots (x - \alpha_{n+1})$, т.е.

$$P(x) \equiv (x - \alpha_1)\,(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_{n+1})\, q(x).$$

А тоа значи дека $P(x)$ има степен непомал од $n+1$. Гледаме, дојдовме во контрадикција со условот на теоремата. Тоа покажува дека нашата претпоставка дека $P(x)$ не е нула-полином не е точна. Според тоа, точно е тврдењето на теоремата.

Од теоремата 3 следува следнава:

Последица: *Ако полиномите $A(x)$ и $B(x)$, чии степени не се поголеми од n, добиваат еднакви вредности за $n+1$ различни вредности на x, тогаш тие имаат еднакви степени и соодветно еднакви коефициенти*, т. е. $A(x) \equiv B(x)$.

Доказ: Да ја разгледаме разликата $P(x) = A(x) - B(x)$. Согласно условот, полиномот $P(x)$ има степен што не е поголем од n и добива вредност нула за $(n+1)$ различни вредности на x. Тоа, според теоремата 3 разликата $P(x) = A(x) - B(x)$ е нула — полином, т. е. сите негови коефициенти се еднакви на нула. А тоа значи дека полиномите $A(x)$ и $B(x)$ имаат еднакви степени и соодветно еднакви коефициенти.

Според тоа: $P(x) = A(x) - B(x) \equiv 0$, односно $A(x) \equiv B(x)$.

Согласно дефиницијата 2, бројот α се вика *нула* на полиномот $P_n(x)$ ако $P_n(\alpha) = 0$. Видовме дека, ако α е нула на полиномот $P_n(x)$, тогаш тој е делив со $x - \alpha$. Меѓутоа, полиномот $P_n(x)$ понекогаш може да е делив не само со $x - \alpha$, туку и со $(x-\alpha)^k$, каде што $1 < k < n$. Во тој случај велиме дека бројот α е повеќекратна нула на полиномот $P_n(x)$.

Дефиниција 3. *За нулата $x = \alpha$ велиме дека е повеќекратна нула со кратност k, ако полиномот $P_n(x)$ е делив со $(x-\alpha)^k$, но не е делив и со $(x-\alpha)^{k+1}$.*

На пример, полиномот $P(x) = (x+2)(x-1)^3(x-3)^2$ има три нули: $x_1 = -2$, $x_2 = 1$ и $x_3 = 3$. Првата нула е еднократна, втората — трикратна, а третата — двократна.

Задача: Да се одреди $x = 2$ колку кратна нула е на полиномот

$$P(x) = x^5 - 6x^4 + 13x^3 - 14x^2 + 12x - 8$$

Решение: Го делиме полиномот $P(x)$ со $x - 2$:

2	1	−6	13	−14	12	−8
	1	−4	5	−4	4	0

Значи: $P(x) \equiv (x-2)(x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 4)$

Потоа го делиме количникот $q(x) = x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 4$ со $x - 2$:

2	1	−4	5	−4	4
	1	−2	1	−2	0

и добиваме $q(2) = 0$. Значи и $q(x)$ е делив со $x - 2$. Според тоа:

$$P(x) \equiv (x-2)^2 (x^3 - 2x^3 + x - 2)$$

Го делиме новиот количник $q_1(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$ со $x - 2$:

2	1	−2	1	−2
	1	0	1	0

Добиваме $q_1(2) = 0$. Значи и $q_1(x)$ е делив со $x - 2$. Гледаме, новиот количник $q_2(x) = x^2 + 1$ не е делив со $x - 2$, бидејќи $q_2(2) = 5$.

Оттука заклучуваме дека полиномот $P(x)$ е делив со $(x - 2)^3$, но не е делив со $(x - 2)^4$. Значи $x = 2$ е трикратна нула на $P(x)$ и пишуваме:

$$P(x) \equiv (x - 2)^3 (x^2 + 1)$$

§ 35. ОСНОВНА ТЕОРЕМА НА АЛГЕБРАТА

Нека е даден полиномот

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n, \ (a_0 \neq 0, n \geqslant 1) \tag{1}$$

односно полиномната равенка:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0, \ (a_0 \neq 0, \ n \geqslant 1) \tag{2}$$

со реални коефициенти.

Во претходниот параграф со теоремата 2 покажавме дека ако полиномот (1) има k различни нули $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_k$, тогаш тој е делив со производот $(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_k)$.

Меѓутоа, се поставува следново многу важно прашање: Во множеството на реалните броеви или во множеството на комплексните броеви дали постои барем еден број што е нула на полиномот (1), односно корен на полиномната равенка (2)?

Одговор на тоа важно прашање ни дава следнава така наречена:

Основна теорема на алгебрата[1]: *Секој полином $P(x)$ од ненулти степен во множеството на комплексните броеви има барем една нула,* односно:

Секоја полиномна равенка (2) со реални коефициенти има барем еден комплексен корен.

Доказот на ова теорема е подоста сложен и тој се дава во вишата алгебра. Ние тука ќе докажеме некои теореми, што се последици на основната теорема на алгебрата.

Теорема 1. *Секој полином $P_n(x)$ од n-ти степен (каде што $n \geqslant 1$) во множеството на комплексните броеви може да се разложи на n линеарни множители.*

Доказ: Според основната теорема на алгебрата, полиномот (4) во множеството **C** има барем една нула $x = \alpha_1$, па според тоа тој е делив со $x - \alpha_1$, т. е.

$$P_n(x) \equiv (x - \alpha_1) \ P_{n-1}(x) \tag{3}$$

[1]) Германскиот математичар К. Ф. Гаус (1777—1855) прв ја докажал строго ова теорема во својата докторска дисертација на свои 22 години, и по негово име таа често се вика Гаусова теорема. Тој дал неколку докази на ова теорема.

Врз основа пак на основната теорема на алгебрата и полиномот $P_{n-1}(x)$ во множеството **C** има барем една нула $x = \alpha_2$. Значи, тој е делив со $x - \alpha_2$, т. е.

$$P_{n-1}(x) \equiv (x - \alpha_2) P_{n-2}(x) \tag{4}$$

Со замена на $P_{n-1}(x)$ од (4) во (3) добиваме:

$$P_n(x) \equiv (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdot P_{n-2}(x) \tag{5}$$

Продолжувајќи ја ова постапка n пати, наоѓаме:

$$P_n(x) \equiv (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_n) \cdot P_0, \tag{6}$$

каде што P_0 е полином од нулти степен, т. е. некоја константа.

Бидејќи водечките коефициенти на полиномите: $P_{n-1}(x)$, $P_{n-2}(x), \ldots$ сите се еднакви на водечкиот коефициент a_0 на $P_n(x)$, тоа и $P_0 = a_0$. Според тоа идентитетот (6) го добива видот:

$$P_n(x) \equiv \alpha_0 (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_n), \tag{7}$$

каде што α_1, $a_2 \ldots$, α_n се нули на полиномот $P_n(x)$, а a_0 — неговиот водечки коефициент. Со тоа теоремата 1 е докажана.

Разбирливо е дека некои од нулите $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ на полиномот $P_n(x)$ можат да бидат и еднакви. Ако со $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ ги означиме различните нули на $P_n(x)$, а со $k_1, k_2, \ldots k_m$ кратноста на секоја од нив, тогаш идентитетот (7) го добива видот:

$$P_n(x) \equiv a_0 (x - \alpha_1)^{k_1} (x - \alpha_2)^{k_2} \ldots (x - \alpha_m)^{k_m} \tag{8}$$

каде што $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$

Теорема 2. *Секој полином $P_n(x)$ од n-ти степен (каде што $n \geqslant 1$) во множеството на комплексните броеви има точно n нули, при што секоја нула се брои толку пати, колку што е нејзината кратност.*

Доказ: Согласно теоремата 1 секој полином од n-ти степен може да се запише како производ од n линеарни множители:

$$P_n(x) \equiv \alpha_0 (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_n), \tag{7}$$

каде што $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ се нули на полиномот $P_n(x)$. Освен тие броеви никој друг број α различен од нив не може да биде нула на полиномот $P_n(x)$, бидејќи ниту еден од множителите на десната страна на (7) не станува еднаков на нула, па затоа ќе биде $P_n(\alpha) \neq 0$, штд.

Од теоремата 2 следуваат следниве две последици:

Последица 1. *Секоја полиномна равенка од n-ти степен во множеството на комплексните броеви има точно n корени, при што секој корен се брои толку пати, колку што е неговата кратност.*

Последица 2. *Полиномот $P_n(x)$ од n-ти степен во множеството на реалните броеви* **R**, *а исто и во множеството на рационалните броеви* **Q** *може да има најмногу n нули.*

Навистина, во множеството на комплексните броеви полиномот $P_n(x)$ има точно n нули. Но, помеѓу n-те комплексни нули на $P_n(x)$ се наоѓаат и сите реални, а исто и сите рационални нули на $P_n(x)$. Според тоа, бројот на реалните и рационалните нули на $P_n(x)$ не може да биде поголем од n.

Пример 1. Полиномот x^2+1 во множеството на комплексните броеви има две нули $x_1=i$ и $x_2=-i$ и може да се запише:

$$x^2+1=(x-i)(x+i)$$

Меѓутоа тој нема ниту една реална нула.

Пример 2. Полиномот x^3-1 во множеството **C** знаеме дека има три нули $x_1=1$, $x_2=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ и $x_3=\frac{-1-i\sqrt{2}}{2}$, од кои една е реална, а другите две — имагинарни.

Во множеството **C** тој може да се разложи на три линеарни множители:

$$x^3-1=(x-1)\left(x+\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)\left(x+\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)$$

§ 36. ОБОПШТЕНА ВИЕТОВА ТЕОРЕМА

Од идентитетот:

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n\equiv a_0(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n) \qquad (1)$$

ако го извршиме множењето на биномите во десната страна, кои се разликуваат само по вторите членови, го добиваме идентитетот:

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n\equiv a_0(x^n+c_1x^{n-1}+c_2x^{n-2}+\ldots+c_{n-1}x+c_n) \qquad (2)$$

Може да се докаже дека коефициентите $c_1, c_2 \ldots c_n$ ќе бидат еднакви на $c_1=-(x_1+x_2+\ldots+x_n)$

$$c_2=(x_1x_2+x_1x_3+\ldots+x_1x_n+x_2x_3+\ldots+x_{n-1}x_n)$$
$$c_3=-(x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+\ldots+x$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$c_n=(-1)^n x_1x_2x_3\ldots x_n$$

Ако ги приравниме коефициентите пред еднаквите степени на x во десната и левата страна на идентитетот (2), ги добиваме следниве равенства: $a_1=a_0c_1=-a_0(x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n)$

$$a_2=a_0c_2=a_0(x_1x_2+x_1x_3+\ldots+x_1x_n+x_2x_3+\ldots+x_{n-1}x_n$$
$$a_3=a_0c_3=-a_0(x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+\ldots+x_{n-2}x_{n-1}x_n$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_n=a_0c_n=(-1)^n a_0x_1x_2x_3\ldots x_n,$$

односно:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n=-\dfrac{a_1}{a_0} \\ x_1x_2+x_1x_3+\ldots+x_1x_n+x_2x_3+x_2x_4+\ldots+x_{n-1}x_n=\dfrac{a_2}{a_0} \\ x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+\ldots+x_{n-2}x_{n-1}x_n=-\dfrac{a_3}{a_0} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1x_2x_3\ldots x_n=(-1)^n\cdot\dfrac{a_n}{a_0} \end{cases} \qquad (3)$$

Равенствата (3), со кои се изразени зависностите меѓу нулите и коефициентите на полиномот $P_n(x)$, претставуваат обопштување на познатата *Виетова теорема* за нулите на квадратниот трином.

На пример, за квадратниот трином $x^2 + px + q$ Виетовите формули гласат: $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 x_2 = q$, а за полиномот од трет степен во сведен вид $x^3 + px^2 + qx + r$, тие ќе гласат:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -p, \quad x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = q, \quad x_1 x_2 x_3 = -r$$

Задача: Не решавајќи ја равенката $x^3 - 2x^2 + x - 3 = 0$, да се одреди збирот од квадратите на нејзините корени.

Решение: Нека x_1, x_2, x_3 се корени на дадената равенка. Според Виетовата теорема ќе биде:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 1, \\ x_1x_2x_3 = 3. \end{cases}$$

Од идентитетот

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1 x_3 + x_2x_3)$$

наоѓаме:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 2^2 - 2 \cdot 1 = 2$$

§ 37. ПОЛИНОМИ СО РЕАЛНИ КОЕФИЦИЕНТИ

Нека е даден полиномот

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n \tag{1}$$

Променливата x нека добие некоја дадена комплексна вредност $x = \alpha + \beta i$ (каде што $\beta \neq 0$). Тогаш полиномот $P(x)$ ќе добие некоја точно определена комплексна вредност $u + vi$, т. е. нека

$$P(\alpha + \beta i) = u + vi$$

Да видиме сега каква вредност ќе добие полиномот $P(x)$, ако променливата x добие вредност $\bar{x} = \alpha - \beta i$, — што е конјугирана на вредноста $x = \alpha + \beta i$.

Врз основа на својствата на конјугирано комплексните броеви:

1.° $\bar{z} + \bar{w} = \overline{z + w}$, 2.° $\bar{z} \cdot \bar{w} = \overline{z \cdot w}$ и 3.° $(\bar{z})^n = \overline{z^n}$, што ви се познати од минатата година, очигледно е дека: при замена на x со конјугираниот комлексен број $\bar{x}$ секој член a_kx^{n-k} на полиномот (1) ќе се замени со нему конјугираната комплексна вредност $a_k\overline{x^{n-k}}$. Според тоа, и полиномот $P(x)$ за вредноста $\bar{x} = \alpha - \beta i$ ќе добие вредност, што е конјугирана на вредноста за $x = \alpha + \beta i$, т. е. ќе биде:

$$P(\alpha - \beta i) = u - vi$$

Со тоа докажавме дека важи следнава:

Лема: *Во полиномот $P(x)$ со реални коефициенти при замена на некоја произволна вредност на променливата x со нејзе конјугираната вредност $\bar{x}$, тогаш и вредноста на полиномот $P(x)$ ќе се замени со нему конјугираната вредност $\overline{P(x)}$,* т. е. $P(\bar{x}) = \overline{P(x)}$.

Пример: Вредноста на полиномот $P(x) = x^2 - x + 3$ за $x = 2 + i$ и $x = 2 - i$, ќе биде:

$$P(2 + i) = (2 + i)^2 - (2 + i) + 3 = 4 + 4i + i^2 - 2 - i + 3 = 4 + 3i$$
$$\text{и } P(2 - i) = (2 - i)^2 - (2 - i) + 3 = 4 - 4i + i^2 - 2 + i + 3 = 4 - 3i$$

Теорема 1. *Ако полиномот $P(x)$ е со реални коефициенти и тој има една комплексна нула $x = \alpha + \beta i$ (каде што $\beta \neq 0$), тогаш и на неа конјугирано комплексниот број $x = \alpha - \beta i$ е исто така нула на $P(x)$.*

Доказ: Нека $P(\alpha + \beta i) = u + vi$, тогаш врз основа на лемата ќе биде $P(\alpha - \beta i) = u - vi$. Ако $\alpha + \beta i$ е нула на $P(x)$, тогаш $P(\alpha + \beta i) = u + vi = 0$, т. е. $u = v = 0$

Но тогаш и $\alpha - \beta i$ е исто така нула на $P(x)$, бидејќи

$$P(\alpha - \beta i) = u - vi = 0 - 0i = 0, \text{ штд.}$$

Може да се докаже дека: ако $\alpha + \beta i$ е k-кратна нула на $P(x)$, тогаш и $\alpha - \beta i$ е исто така k-кратна нула на $P(x)$.

Последица: *Секој полином со реални коефициенти од непарен степен има барем една реална нула.*

Задача: Да се состави полином со реални коефициенти со можно најнизок степен, што ќе има нули $\alpha_1 = 2$ и $\alpha_2 = 1 - 3i$

Решение: Врз основа на теоремата 1, бараниот полином $P(x)$, освен нулата $\alpha_2 = 1 - 3i$ мора да има и нула што е конјугирана на α_2, т. е. и $\alpha_3 = 1 + 3i$ ќе биде негова нула.

Меѓутоа за реалната нула $\alpha_1 = 2$ на неа конјугирана е истата нула, бидејќи $\bar{2} = 2$.

Според тоа, бараниот полином од најнизок степен ќе биде:

$$P(x) = (x - 2)(x - 1 + 3i)(x - 1 - 3i)$$

Ако се ослободиме од заградите добиваме: $P(x) = x^3 - 4x^2 + 14x - 20$.

Да ја докажеме уште следнава:

Теорема 2. *Секој полином $P_n(x)$ со реални коефициенти може да се разложи на неразложливи множители од прв и втор степен со реални коефициенти.*

Доказ: Согласно теоремата 1 (во § 35) полиномот $P_n(x)$ со реални коефициенти во множеството на комплексните броеви може да се разложи на n линеарни множители, т. е. $P_n(x) = a_0(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_n)$, каде што $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ се сите n нули (реални и имагинарни) на $P_n(x)$.

Да ги промениме ознаките на нулите. Со $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ да ги означиме сите реални нули на $P_n(x)$, а со $\beta_1 = u_1 + v_1 i$, $\overline{\beta_1} = u_1 - v_1 i \ldots \beta_e = u_e + v_e i$, $\overline{\beta_e} = u_e - v_e i$ — сите имагинарни нули на $P_n(x)$.

Притоа мора да биде $k + 2e = n$.

Очигледно е дека на секоја реална нула α_k ќе одговара по еден линеарен множител $x - \alpha_k$, на секој пар имагинарни нули β_e и $\overline{\beta}_e$ ќе одговара по еден множител: $(x - \beta_e)(x - \overline{\beta}_e)$, кој како што ќе видиме претставува квадратен трином со реални коефициенти.

Навистина: $(x - \beta_e)(x - \overline{\beta}_e) = (x - u_e - v_e i)(x - u_e + v_e i) = (x - u_e)^2 - (v_e i)^2 = x^2 - 2u_e + u_e^2 + v_e^2$

По таков начин, ако сите парови множители, што им одговараат на конјугирано комплексните нули на полиномот, ги замениме со на нив соодветните квадратни триноми со реални коефициенти, ќе добиеме:

$$P_n(x) = a_0(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_k)(x^2 - 2u_1 + u_1^2 + v_1^2) \ldots (x^2 - 2u_e + u_e^2 + v_e^2)$$

Со тоа теоремата 2 е докажана.

ЗАДАЧИ

25. Одреди ги корените на равенката $x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = 0$, ако се знае дека $x_1 x_2 = x_1 + x_2$

26. Одреди ги корените на равенката $x^3 - 7x - 6 = 0$, ако се знае дека $x_3 = 2x_1$

27. За кои вредности на a и b бројот 1 ќе биде двократна нула на полиномот $3x^5 - 4x^2 + ax + b$.

28. За кои вредности на a и b полиномот $ax^4 + bx^3 + 1$ ќе биде делив со $(x - 1)^2$. Во тој случај одреди ги корените на равенката $ax^4 + bx^3 + 1 = 0$.

29. Да се состави полином со реални коефициенти од најнизок степен, кој да има нули: $\alpha_1 = 2 - 3i$ и $\alpha_2 = -1 + i$.

30. Да се состави полином со реални коефициенти од најнизок степен, за кој $\alpha_1 = 1$ да е двократна нула, а $\alpha_2 = i$ да е трикратна нула.

31. Да се разложат на множители од прв и втор степен со реални коефициенти следниве полиноми: а) $x^3 + 1$, б) $x^6 - 1$, в) $x^4 + x^2 + 1$, г) $x^4 + 1$, д) $x^8 - 1$.

32. Да се реши равенката $x^4 + 4 = 0$, ако знаеме дека $1 - i$ е еден нејзин корен.

§ 38. ПОЛИНОМИ СО ЦЕЛИ КОЕФИЦИЕНТИ

За полиномот со цели коефициенти

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n \tag{1}$$

ќе покажеме дека важат следниве теореми:

Теорема 1. *Ако рационалниот број $x = \frac{p}{q}$, каде што целите броеви p и q се заемно прости и $q \geqslant 2$, е нула на полиномот $P(x)$ со цели коефициенти, тогаш q е делител на водечкиот коефициент a_0, а p е делител на слободниот член a_n на $P(x)$.*

Доказ: Ако $x = \frac{p}{q}$ е нула на полиномот (1), тогаш ќе биде:

$$a_0\left(\frac{p}{q}\right)^n + a_1\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + a_2\left(\frac{p}{q}\right)^{n-2} + \ldots a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right) + a_n = 0 \tag{2}$$

Со множење двете страни на равенството (2) со q^{n-1}, добиваме:

$$a_0 \cdot \frac{p^n}{q} + a_1 p^{n-1} + a_2 p^{n-2} \cdot q + \ldots + a_{n-1} p \cdot q^{n-2} + a_n \cdot q^{n-1} = 0, \tag{2'}$$

т.е. $$a_0 \cdot \frac{p^n}{q} = -(a_1 p^{n-1} + a_2 p^{n-2} \cdot q + \ldots + a_{n-1} p \cdot q^{n-2} + a_n q^{n-1}) \tag{3}$$

Бидејќи p, q, a_1, $a_2, \dots a_n$ се цели броеви, тоа изразот на десната страна на (3) е цел број. Значи и изразот $a_0 \cdot \frac{p^n}{q}$ е исто така цел број Но, p и q по услов се заемно прости броеви. Според тоа, тоа е возможно само ако водечкиот коефициент a_0 е делив со q, штд.

Ако двете страни на равенството (2') ги помножиме со $\frac{q}{p}$, добиваме:

$$a_0p^{n-1} + a_1p^{n-2} \cdot q + a_2p^{n-3}q^2 + \dots + a_{n-1}q^{n-1} + a_n \cdot \frac{q^n}{p} = 0$$

или $$a_n \cdot \frac{q^n}{p} = -(a_0p^{n-1} + a_1p^{n-2} \cdot q + a_2p^{n-3}q^2 + \dots + a_{n-1}q^{n-1}) \qquad (4)$$

Очигледно е дека десната страна на равенството (4) е цел број. Значи и левата страна $a_n \cdot \frac{q^n}{p}$ е исто така цел број, а тоа ќе биде само ако слободниот член a_n е делив со p, штд.

Со тоа теоремата е докажана.

Од неа непосредно следуваат и следниве две важни теореми:

Теорема 2. *Секоја рационална нула на полиномот $P(x)$ со цели коефициенти, чиј водечки коефициент е $a_0 = 1$, е цел број.*

Навистина, ако $a_0 = 1$, а q е делител на a_0, тогаш $q = \pm 1$. Според тоа, $\frac{p}{q}$ е цел број.

Теорема 3. *Секоја цела нула на полиномот $P(x)$ со цели коефициенти е делител на слободниот член.*

Доказ: Нека $x = \alpha$ е цела нула на полиномот $P(x)$ со цели коефициенти. Тогаш ќе биде:

$$a_0\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + a_2\alpha^{n-2} + \dots + a_{n-1}\alpha + a_n = 0,$$

односно: $a_n = -\alpha(a_0\alpha^{n-1} + a_1\alpha^{n-2} + \dots + a_{n-1})$

Бидејќи изразот во заградата е цел број, тоа бројот α е делител на a_n, штд.

Теоремите 1, 2 и 3 ни даваат практична можност за одредување на рационалните нули на полиномот со цели коефициенти, ако тој има такви нули. Да го илустрираме тоа на следниве примери:

Задача 1. Да се одредат рационалните нули на полиномот

$$P(x) = x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 4x + 6$$

Решение: Бидејќи полиномот е во сведен вид ($a_0 = 1$), тоа согласно теоремата 2 секоја негова рационална нула е цела. А согласно теоремата 3 дадениот полином, ако има цели нули, нив треба да ги бараме помеѓу делителите на слободниот член.

Гледаме делители на слободниот член (6) се: ± 1, ± 2, ± 3, ± 6. Дали некој од тие броеви е навистина нула на дадениот полином испитуваме или со директна замена, или со помош на Хорнеровата шема.

Така наоѓаме: $P(1) = 4$, $P(-1) = 0$. Значи $x = -1$ е една нула на $P(x)$. Тогаш $P(x)$ е делив со $x + 1$:

-1	1	-2	-5	4	6
	1	-3	-2	6	0

Добиваме количник $x^3 - 3x^2 - 2x + 6$, т. е.

$$P(x) = (x + 1)(x^3 - 3x^2 - 2x + 6)$$

Натамошното испитување покажува дека и $x = 3$ е цела нула на $P(x)$.

Со делење на горниот количник со $x - 3$:

3	1	-3	-2	6
	1	0	-2	0

добиваме нов количник $x^2 - 2$, т. е. $P(x) = (x + 1)(x - 3)(x^2 - 2)$

Дадениот полином други цели нули нема (Зошто?).

Задача 2. Да се реши полиномната равенка:

$$3x^4 - 5x^3 - 11x^2 + 15x + 6 = 0 \tag{5}$$

Решение: Знаете дека: да се одредат корените на полиномната равенка (5) значи исто што и да се одредат нулите на полиномот со цели коефициенти:

$$P(x) = 3x^4 - 5x^3 - 11x^2 + 15x + 6 \tag{6}$$

Согласно теоремата 1 рационални нули на полиномот (6) можат да бидат дропките $x = \frac{p}{q}$, каде што p е делител на слободниот член, а q — делител на водечкиот коефициент на $P(x)$. Гледаме, слободниот член на полиномот (6) е еднаков на 6, а водечкиот коефициент — на 3. Затоа за p можни се следниве вредности: ± 1, ± 2, ± 3, ± 6, а за q можни се само вредностите: ± 1, ± 3.

Според тоа, цели рационални нули можат да бидат: ± 1, ± 2, ± 3, ± 6, а дробни рационални нули можат да бидат броевите $\pm \frac{1}{3}, \pm \frac{2}{3}$.

Прво испитуваме, кои од горниве броеви се цели нули на полиномот (6). Притоа откриваме дека $x_1 = 2$ е цела нула. Со делење на $P(x)$ со $x - 2$:

2	3	-5	-11	15	6
	3	1	-9	-3	0

добиваме количник $q(x) = 3x^3 + x^2 - 9x - 3$, т. е.

$$P(x) = (x - 2)(3x^3 + x^2 - 9x - 3)$$

Ако полиномот (6) има други рационални нули, тие мораат да бидат нули на количникот $q(x)$. Гледаме, за рационални нули на количникот доаѓаат само броевите: ± 3, и $\pm \frac{1}{3}$. Лесно се уверуваме дека од тие броеви, нула на количникот е само бројот $x_2 = -\frac{1}{3}$.

Со делење на $q(x)$ со $x + \frac{1}{3}$ добиваме нов количник $q_1(x) = 3x^2 - 9$.

Од $3x^2 - 9 = 0$ ги наоѓаме и преостанатите две нули $x_3 = \sqrt{3}$ и $x_4 = -\sqrt{3}$ на полиномот (6).

Нулите $x_1 = 2$, $x_2 = -\frac{1}{3}$, $x_3 = \sqrt{3}$ и $x_4 = -\sqrt{3}$ на полиномот (6) се бараните корени и на дадената полиномна равенка (5).

ЗАДАЧИ

33. Одреди ги рационалните нули на полиномите: а) $x^3 - x^2 - 8x + 6$, б) $3x^3 - 2x^2 - 6x - 4$, в) $x^3 + 7x^2 + 4x - 12$.

34. Да се решат равенките: а) $2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 = 0$,

б) $x^3 - 10x^2 + 23x - 14 = 0$, в) $x^4 + 2x^3 - 12x^2 - 38x - 24 = 0$,
г) $x^5 - 2x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 5x + 6 = 0$

Да се одредат рационалните корени на равенките:

35. а) $x^4 - 6x^2 - 3x - 2 = 0$, б) $3x^5 - 2x^4 + 5x + 8 = 0$,

36. а) $4x^4 + 3x^3 + 3x^2 - x - 1 = 0$, б) $2x^3 - 7x^2 + 4x + 4 = 0$.

37. Разложи ги полиномите на множители: а) $x^4 - x^3 + x + 1$,

б) $x^5 - 6x^3 - 6x^2 - 7x - 6$, в) $x^4 + x^3 - 11x^2 - 5x + 30$

38. Познато е дека $x = 1 + i$ е еден корен на равенката $3x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 4x - 2 = 0$. Одреди ги останатите три корени.

39. Кој услов треба да го задоволуваат коефициентите p, q и r на равенката $x^3 + px^2 + qx + r = 0$, така што за нејзините корени да важи релацијата: а) $x_1 + x_2 = x_3$, б) $x_1 x_2 = x_3$.

40. Одреди при кој услов равенката $x^3 + px + q = 0$ ќе има двократен корен.

§ 39. АЛГЕБАРСКО РЕШАВАЊЕ НА ПОЛИНОМНИТЕ РАВЕНКИ ОД III, IV И ПОВИСОК СТЕПЕН
(историски забелешки)

На крајот да направиме краток осврт на решавањето на полиномните равенки: $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$, (1
во кои левата страна е некој полином $P_n(x)$ од n-ти степен со реални коефициенти.

Да се реши полиномната равенка (1) значи да се одредат нулите на полиномот $P_n(x)$, кои се викаат нејзини корени. Решавањето на равенките е основна задача на алгебрата. Со неа се занимавале многу видни математичари уште од најстарите времиња.

Добро ви е позната формулата за корените на квадратните полиномни равенки: $a_0x^2 + a_1x + a_2 = 0$ $(a_0 \neq 0)$

Таа формула гласи: $x_{1/2} = \dfrac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_0}$

Во 16 век била откриена и формула за корените на кубната полиномна равенка: $a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$ $(a_0 \neq 0)$ (2)

Со смената $x = u - \dfrac{a_1}{3a_0}$ (3)

таа се трансформира во видот $u^3 + pu + q = 0$, (4)

каде што $p = \dfrac{a_2}{a_0} - \dfrac{a_1^2}{3a_0^2}$; $q = \dfrac{2a_1^3}{27a_0^3} - \dfrac{a_1a_2}{3a_0^2} + \dfrac{a_3}{a_0}$

Равенката (4) е попроста во однос на равенката (2), бидејќи во неа не фигурира квадратниот член на непознатата.

Корените на равенката (4) го имаат видот:

$$u=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} \qquad (5)$$

Фомулата (5) се вика *„Карданова формула“* по името на италијанскиот математичар Џ. Кардано (1501—1576), кој прв ја објавил во еден свој труд во 1545 год. Меѓутоа се смета дека формулата (5) прв ја докажал италијанецот Тартаљи во 1535 год., а постојат претпоставки дека таа му била позната и на Спицион дел Феро уште во 1511 год.

Потоа младиот италијански математичар Л. Ферари (1522—1565) — ученик на Кардано, открил формула за корените на општата полиномна равенка од IV степен: $a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0, \ (a_0 \neq 0)$ (6)

Добиените формули за корените на полиномните равенки од втор, трет и четврти степен покажуваат дека корените на тие равенки можеме да ги изразиме како функции од нивните коефициенти со помош на алгебарските операции (собирање, одземање, множење, делење, степенување и коренување). Таквиот метод на решавање на полиномните равенки се вика *алгебарско решавање* на тие равенки.

Од средината на 16 век до почетокот на 18-тиот век упорно се трагало да се откријат и соодветни формули за корените на полиномните равенки од петти и повисок степен ($n \geqslant 5$). Меѓутоа сите напори останале безуспешни. Причината на тој неуспех станала јасна дури по објавените трудови на математичарите П. Руфини, Абел и Галоа.

Италијанскиот математичар Паоло Руфини (1765—1822) — лекар по професија, во трудот „Општа теорија на равенките“ издаден во 1799 г. прв дал неполн доказ за тоа дека не е можно алгебарски да се решат полиномните равенки од пети степен во општ вид. Тој труд на Руфини останал неразбран од неговите современици.

Во 1822 год. виднииот норвешки математичар Нилс Хенрих Абел (1802—1829) дал строг доказ за неможноста алгебарски да се реши полиномната равенка од пети степен, т. е. дека корените на општата равенка од пети степен неможат да се изразат преку нејзините коефициенти со помош на алгебарските операции. Абел живеел во крајна мизерија, што придонела да заболее од туберкулозата и умрел на 27-годишна возраст.

Темелни проучувања на условите за решливоста на полиномните равенки од пети и повисок степен извршил генијалниот француски математичар Еварист Галоа (1811—1832), творец на современата алгебра и основоположник на теоријата на групите. Во борбата против кралскиот режим, тој на два пати, бил осудуван на затвор и многу млад — на 21 година е убиен на дуел, што бил грижливо подготвен од неговите политички противници. Со право се смета дека: Галоа е најмлад меѓу најголемите и најголем меѓу најмладите математичари во светот.

Паралелно со иследувањето да се открие формула за корените на полиномните равенки од пети и повисок степен, биле вршени и други испитувања за изнаоѓање на разни нумерички и графички методи на решавање на полиномните равенки. Такви методи денес постојат и со нивна помош во состојба сме да ги одредиме сите корени на дадената полиномна равенка со која и да било степен на точност.

Формулата на Кардано, иако дава можност за алгебарско решавање на равенките од трет степен, е доста непогодна за практични потреби. Така на пример, за равенката $x^3 + 3x - 14 = 0$ лесно наоѓаме дека има еден цел корен $x = 2$, но по Кардановата формула:

$$x = \sqrt[3]{7 + \sqrt{50}} + \sqrt[3]{7 - \sqrt{50}}$$

за да го добиеме тој корен, треба да ја извршиме трансформацијата

$$\sqrt[3]{7 \pm \sqrt{50}} = 1 \pm \sqrt{2},$$

која не е така едноставна.

ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ

1. Нека се z и $\bar{z}$ два конјугирано комплексни броеви. Одреди го $Re(z)$, ако $Jm(z) = 2$, а $z \cdot \bar{z} = 13$.

2. Претстави ги во тригонометриска форма комплексните броеви:

а) $z_1 = 1 + i$, б) $z_2 = 1 + i\sqrt{3}$, в) $z_3 = 2 + \sqrt{3} + i$, $z_4 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

3. Претстави ги во тригонометриска форма комплексните броеви:

а) $z_1 = 1 - i\,\mathrm{tg}\,\alpha$, б) $z_2 = 1 + \sin\alpha + i\cos\alpha$, в) $z_3 = -3(\cos 30° - i\sin 30°)$

4. Одреди го множеството на сите точки $z = x + yi$ од комплексната рамнина што ги задоволуваат условите: а) $0 < |z| \leqslant 3$,

б) $\mathrm{Arg}\, z = \frac{\pi}{4}$, в) $|z| = 1$, г) $0 \leqslant \mathrm{Arg}\, z \leqslant \frac{\pi}{2}$, д) $0 \leqslant |z| \leqslant 5$ и $\mathrm{Arg}\, z \leqslant \pi$

5. Каков агол градат векторите што соодветствуваат на комплексните броеви $a + bi$ и $-b + ai$.

6. Одреди ја должината на отсечката што ги соединува точките, што им одговараат на броевите $-5 + 3i$ и $-2 - i$.

7. Утврди кој е потребен и доволен услов за да важи: $z^2 = (\bar{z})^2$

8. Докажи дека: За секој број $z \neq 0$ важи $\left|\frac{z}{\bar{z}}\right| = 1$

9. Докажи дека важи тврдењето: $|z| = 1 \Rightarrow \frac{1}{z} = \bar{z}$

10. Покажи дека за секој реален број x важат равенствата:

а) $\left|\frac{x + i}{x - i}\right| = 1$, б) $\left|\frac{1 + xi}{1 - xi}\right| = 1$

11. Пресметај ја вредноста на изразот: а) $|z| + z \cdot z$, ако $z = 1 - i$

б) $(z - \bar{z}) \cdot (1 + z \cdot \bar{z})$, ако $z = 1 - i\sqrt{2}$

12. Да се одреди модулот и аргументот на комплексниот број

$$z = \frac{1 + \cos\alpha + i\sin\alpha}{1 + \cos\alpha - i\sin\alpha}$$

13. Докажи дека за кои и да било комплексни броеви z_1 и z_2 важи неравенството: $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$

14. Покажи дека за кои и да било реални броеви x и y важи равенството:

$$\left|\frac{x + yi}{x - yi}\right| = 1$$

15. Докажи дека: три точки z_1, z_2, z_3 од комплексната рамнина ако лежат на една права, тогаш односот $\dfrac{z_2 - z_1}{z_3 - z_2}$ е реален број.

16. Како се расположени векторите што им соодветствуваат на комплексните броеви z_1 и z_2, ако: а) $|z_1 - z_2| = |z_1| - |z_2|$, б) $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$

17. Докажи ги равенствата: а) $|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$

б) $\sqrt{1 + i\sqrt{3}} + \sqrt{1 - i\sqrt{3}} = \sqrt{6}$ (Задача на Лајбниц)

18. Да се пресмета: а) $\dfrac{(1+i)^{n+2}}{(1-i)^n}$, б) $\dfrac{1 + i\,\mathrm{tg}\alpha}{1 - i\,\mathrm{tg}\alpha}$, в) $\left(\dfrac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i}\right)^8$.

19. Пресметај: а) $\sqrt{1 + i\sqrt{3}}$, б) $\sqrt[4]{\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i}$, в) $\left(\dfrac{2}{\sqrt{3} - i}\right)^3$

20. Реши ги равенките:

а) $x^2 - (1 + i)x + 2(1 + i) = 0$, б) $2x^2 - (5 - i)x + 3 + i = 0$

21. Со помош на Моавровата формула изрази ги $\cos 5\varphi$ и $\sin 5\varphi$ преку функциите $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$.

22. Правилен шестаголник впишан е во кружница со центар во координатниот почеток и радиус $r = 1$. Ако едно теме му лежи на:

а) реалната оска, б) имагинарната оска, одреди ги комплексните броеви што им одговараат на останатите темиња на шестаголникот.

23. Покажи дека коренот $\sqrt[2k+1]{-1}$ има само една реална вредност, а коренот $\sqrt[2k]{-1}$ — ни една реална вредност.

24. Докажи дека сите вредности на $\sqrt[n]{1}$ претставуваат степени на една од нив.

25. Докажи ги следниве тврдења: а) $z = 0 \Leftrightarrow |z| = 0$

б) $z_1 \cdot z_2 = 0 \Leftrightarrow (z_1 = 0$ или $z_2 = 0)$

26. Докажи ги тврдењата: а) $Re(iz) = -Jm(z)$, б) $Jm(iz) = Re(z)$

27. При кои услови ќе важат равенствата:

а) $|z + w| = |z| - |w|$, б) $|z - w| = |z| + |w|$

28. Докажи дека: Ако $n = ms$, тогаш производот од кој и да било m-ти корен од 1 и кој да било s-ти корен од 1 е n-ти корен од 1.

29. Покажи дека коренот $\sqrt[n]{z}$ $(z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi))$ има реални вредности само при услов $\dfrac{\varphi + 2k\pi}{n} = k\pi$. Врз основа на тоа покажи дека $\sqrt[n]{a + bi}$ $(a \neq 0,$ $b \neq 0)$ нема ниту една реална вредност!

30. Реши ги равенките: а) $3x^4 + 26x^2 - 9 = 0$,

б) $x^6 - 3x^3 + 2 = 0$, в) $x^6 - 19x^3 - 216 = 0$

31. а) $8x^6 + 7x^3 - 1 = 0$, б) $x^8 + 17x^4 + 16 = 0$

32. Во равенката $x^2 + px + k = 0$ параметрите p и k одреди ги така што тие да бидат и нејзини корени!

33. Одреди ги сите вредности на a, за кои равенките

$x^2 + x + a = 0$ и $x^2 + ax + 1 = 0$ ќе имаат заеднички корен.

34. Реши ги следниве системи равенки:

а) $\begin{cases} (x+y)^2 + (x-y)^2 = 82 \\ xy = 20 \end{cases}$ б) $\begin{cases} xy = 9 \\ \dfrac{x}{y} = \dfrac{y-5}{x-5} \end{cases}$

35. а) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0, \\ x + y = 1 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + xy - 10 = 0 \\ x + y = 5 \end{cases}$

36. а) $\begin{cases} xy + x + y = 5, \\ x + y = 3 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 5 \\ x + y = 5 \end{cases}$

37. а) $\begin{cases} (x-y)^2 + 2(x-y) = 3, \\ 2x^2 - y^2 = 7 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + y^2 = ax \\ x^2 + y^2 = by \end{cases}$

38. а) $\begin{cases} x + y = 4, \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 1 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + y = 12 \\ \dfrac{x^2}{y} + \dfrac{y^2}{x} = 18, \end{cases}$ в) $\begin{cases} x + xy + y = 27 \\ \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = \dfrac{5}{2} \end{cases}$

39. а) $\begin{cases} x^2 + y = 7 \\ x^2y = 12 \end{cases}$ б) $\begin{cases} (x^2 - y^2)\,xy = 180 \\ x^2 - xy - y^2 = -11 \end{cases}$

40. а) $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 7 \\ x^3 + y^3 = 35 \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{x+y}{y} = a \\ 1 + \dfrac{xy}{a+1} = a^2 \end{cases}$

41. а) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5a^2 \\ x + y = 3a \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + xy = a \\ y^2 + xy = b \end{cases}$

42. а) $\begin{cases} xy - \dfrac{x}{y} = a \\ xy - \dfrac{y}{x} = \dfrac{1}{a} \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + \dfrac{x^2}{y} = a \\ y + \dfrac{y^2}{x} = b \end{cases}$

43. а) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 160 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{3} \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{3}{2} \\ \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = \dfrac{5}{4} \end{cases}$

44. а) $\begin{cases} x + y = a \\ x^5 + y^5 = a^5, a \neq 0 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 8 \\ \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$

45. Ако еден двоцифрен број го поделиме со збирот од неговите цифри, ќе добиеме количник 4 и остаток 3. Ако пак тој број го поделиме со производот на неговите цифри, ќе добиеме количник 2 и остаток 5. Кој е тој број?

46. Од градовите A и B што се оддалечени еден од друг 360 km едновремено тргнале два воза во пресрет еден на друг. По нивната средба возот A за 2 часа стигнал во B, а возот од B стигнал во A после $4\frac{1}{2}$ часа. Одреди ги брзините на секој воз!

47. Од пристаништето A по течението на една река тргнале едновремено моторен чамец и еден сплав. Моторниот чамец поминал 48 km по течението на реката и се вратил пак во пристаништето A за 7 часа. Да се одреди сопствената брзина на моторниот чамец и брзината на течението на реката, ако е познато дека моторниот чамец го сретнал сплавот на растојание 12 km од пристаништето A.

48. Група ловџии го разделиле ловот на следниов начин: Првиот земал a зајци и n-ти дел од остатокот. Вториот зел $2a$ зајци и n-ти дел од новиот остаток, итн. Се установило дека целиот улов бил разделен подеднакво. Колку ловџии биле во групата и колку зајаци уловиле?

49. Да се решат следниве неравенки со една непозната:

а) $|x+1|+|x-3|>8$, б) $|x+1|+|x-3|<2$

50. а) $\left|x^2-2|x|+1\right|>1$, б) $x^2-3x+x|x+2|<5$

51. а) $\dfrac{3x^2-2x+7}{x^2-6x+5}<0$ б) $-4<\dfrac{x^2-2x+5}{x(3-x)+4}<-1$

52. а) $\dfrac{|2x-3|-|x|}{|3x+2|+x-2}\leqslant 5$ б) $\left||2x-1|-3\right|>2$

53. $x(x-3)(x^2-x-2)(x^2+x-12)>0$

54. Реши ги алгебарски и графички неравенките:

а) $|x^2-x-6|<2$, б) $|x^2-2x+3|>3$

55. За кои вредности на параметарот k квадратната неравенка

$3x^2-(2k+4)x+4k-1>0$ е задоволена за секое x?

56. За кои вредности на k, збирот од квадратите на корените на равенката $x^2+(k+2)x+k=0$ ќе биде минимален?

57. Да се испитаат корените на квадратната равенка

$x^2-2(k-1)x-(k^2-1)=0$ во зависност од промената на параметарот k.

58. За кои вредности на k равенката $(k+1)x^2-3kx+4k=0$ има реални корени поголеми од 1.

59. За кои вредности на параметарот p, триномот $x^2+p(2x+1)+2$ може да се разложи на линеарни множители со реални коефициенти?

60. За кои вредности на p неравенката $px^2+(p-1)x+p-1<0$ ќе биде задоволена за секоја вредност на x?

61. За кои вредности на параметарот k, неравенката:

а) $|x^2+kx+1|<2$, б) $kx^2+2x+1>0$ ќе биде задоволена за секоја вредност на x?

62. За кои вредности на параметарот k неравенката

$x^2+3kx+2k^2-1<0$ ќе има множество решенија $D=(0,1)$.

63. Еден кајак се спуштил по течението на една река на растојание 15 **km**, а потоа се вратил назад. Брзината на течењето на реката била 2 *km*/час. Во кои граници треба да се менува сопствената брзина на кајакот, за да го измине целиот пат од 4 до 5 часа?

Да се решат следниве ирационални равенки и неравенки:

64. а) $3x^2 + 15x = 2\sqrt{x^2 + 5x + 1} = 2,$ б) $\sqrt{a - \sqrt{a + x}} = x$

65. а) $\sqrt{x - \sqrt{1 - x}} + \sqrt{x} = 1,$ б) $x^2 - \sqrt{x^2 - 4} = 16$

66. а) $\sqrt{4 + x\sqrt{x^2 + 40}} = x + 2,$ б) $\sqrt{1 + x\sqrt{x^2 + 24}} = x + 1$

67. а) $\dfrac{\sqrt{a} - \sqrt{a + x}}{\sqrt{a} + \sqrt{a + x}} = \dfrac{a - x}{a + x},$ б) $\sqrt{\dfrac{x - 1}{x}} = \sqrt{x + 1} - 1$

68. а) $\sqrt{x - 9} = \dfrac{36}{\sqrt{x - 9}} - \sqrt{x},$ б) $\sqrt{x^2 + 5} = x + \dfrac{3}{\sqrt{x^2 + 5}}$

69. а) $\dfrac{\sqrt{2} - \sqrt{x}}{2 - x} = \dfrac{2}{\sqrt{2 - x}},$ б) $\dfrac{5 + \sqrt{25 - x^2}}{5 - \sqrt{25 - x^2}} = 4$

70. а) $\sqrt{x - \dfrac{1}{x}} - \sqrt{1 - \dfrac{1}{x}} = 1 - \dfrac{1}{x},$ б) $\sqrt{x} - \dfrac{4}{\sqrt{x + 2}} + \sqrt{x + 2} = 0$

71. а) $\sqrt{x^2 + 17} - \sqrt[4]{x^2 + 17} = 6,$ б) $\sqrt{1 - x} + \dfrac{1}{\sqrt{1 - x}} \geqslant 2$

72. а) $\sqrt{2 + \sqrt{x}} + \sqrt{2 - \sqrt{x}} < \sqrt{2},$ б) $\sqrt{4 - \sqrt{x^2 - 4}} > x$

73. а) $\sqrt{2 - \sqrt{3 + x}} < \sqrt{x + 4},$ б) $\sqrt{a + x} + \sqrt{a - x} > a$

74. Да се одредат коефициентите a и b на полиномот $x^3 - 2x^2 + ax + b$, така што тој да биде делив со $x - 1$, а при делењето со $x - 2$ да се добие остаток 4.

75. Докажи дека полиномот $P(x) = nx^{n+1} - (n + 1)x^n + 1$ е делив со $x - 1$ и одреди го количникот.

76. Одреди го остатокот од делењето на полиномот $P_n(x)$ (при $n \geqslant 2$) со $(x - \alpha)(x - \beta)$.

77. Одреди ги пареаметрите p и k така што полиномот $x^4 + px^2 + k$ биде делив со полиномот $x^2 + px + k$.

78. Покажи дека полиномот $P(x) = (x + 1)^{2n} - x^{2n} + 2x + 1$ е делив со $2x + 1$.

79. За кои вредности на a и b полиномот $x^6 + ax^2 + bx + 1$ е делив со $x^2 - 1$.

80. Да се одреди остатокот од делењето на полиномот
$P(x) = x^5 + 3x^4 - 2x^2 - 1$ со полиномот $\varphi(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$

81. Одреди го остатокот од делењето на полиномот
$$x^{50} + x^{40} + x^{30} + x^{20} + x^{10} + 1 \text{ со } x^2 + 1.$$

82. Докажи дека: Ако полиномот $P(x)$ со цели коефициенти има за $x = 0$ и $x = 1$ непарни вредности, тогаш тој нема цели нули.

83. Покажи дека: Ако α е цела нула на полиномот $P(x)$ со цели коефициенти, за кој било цел број k бројот $P(k)$ е делив со $(k - \alpha)$.

84. Да се реши равенката $x^3 - 21x^2 + 140x - 300 = 0$, ако се знае дека $x_3 = 2x_2$.

85. Состави равенка од најнизок степен со реални коефициенти, која да има корени: $x_1 = 1$, $x_2 = -i$, $x_3 = 1 + i$.

СОДРЖИНА

Глава I

ТРИГОНОМЕТРИСКА ФОРМА НА КОМПЛЕКСНИ БРОЕВИ

Глава II

НЕЛИНЕАРНИ РАВЕНКИ СО ЕДНА НЕПОЗНАТА

Глава III

СИСТЕМИ КВАДРАТНИ РАВЕНКИ СО ДВЕ НЕПОЗНАТИ

Глава IV

НЕРАВЕНКИ И СИСТЕМ КВАДРАТНИ НЕРАВЕНКИ СО ЕДНА НЕПОЗНАТА

Глава V

ИРАЦИОНАЛНИ РАВЕНКИ И НЕРАВЕНКИ

Глава VI

ПОЛИНОМИ

РОЗТ за учебници „Просветно дело" — Скопје
ул. „Иво Рибар Лола" б б. Градски ѕид, блок 4

*

За издавачот
МИХАИЛО ЌОРВЕЗИРОСКИ

*

Глигор Тренчевски

АЛГЕБРА
за III клас на математичко-физичка насока

*

Јазична редакција
ДУШАН ЦРВЕНКОВСКИ

*

Илустрации
ДИМИТАР ЕЛИМОВ

*

Технички уредник
ТРАЈКО ДИМОВСКИ

*

Корицата ја илустрира
РАДИЦА ПЕТРОВИЌ — ГИНОВСКА

*

Коректор
МИХАИЛО СЕРГЕЕВ

*

Ракописот е предаден во печат јуни 1977 година. Печатењето е завршено во декември 1977 година. Обем: 124 страни. Формат: 17 × 24 см. Тираж: 3 000 примероци. Книгава е отпечатена во Графичкиот завод „Гоце Делчев" — Скопје (3880).

Според писменото мислење на Републичкиот секретаријат за култура бр. 07-1475/2 од 10. XII. 1976 година овој производ е ослободен од плаќање данок на промет.