Ристо Малчески
Алекса Малчески
Слаѓана Брсаковска
Катерина Аневска
Методи Главче

МАТЕМАТИЧКИ ТАЛЕНТ 22

(збирка задачи за учениците од IV и V одделение)

Скопје, 2020

Одговорен уредник
проф. д-р Даниел Велинов

Рецензенти
проф. д-р Павел Димовски
проф. д-р Зоран Мисајлески

CIP - Каталогизација во публикација
Национална и универзитетска библиотека "Св. Климент Охридски", Скопје

373.3.016:51(076.12)

МАТЕМАТИЧКИ талент 22 : (збирка задачи за учениците од IV и V одделение) / Ристо Малчески ... [и др.]. - Скопје : Армаганка, 2020. - 178 стр. ; 25 см

Други автори: Алекса Малчески, Слаѓана Брсаковска, Катерина Аневска, Методи Главче. - Библиографија: стр. 176-178

ISBN 978-608-4904-46-5

1. Малчески, Ристо [автор] 2. Малчески, Алекса [автор] 3. Брсаковска, Слаѓана [автор] 4. Аневска, Катерина [автор] 5. Главче, Методи [автор]

COBISS.MK-ID 51665157

СОДРЖИНА

Предговор 5

I Аритметика и алгебра

I.1. Пресметувања 7

I.2. Бројни ребуси 9

I.3. Равенки 10

I.4. Дополнителни задачи 11

II Текстуални задачи

II.1. Броеви и цифри 13

II.2. Пазаруваме и пресметуваме пари 15

II.3. Времето е важно 18

II.4. Задачи со мерни броеви 23

II.5. Дополнителни задачи 26

III Геометрија

III.1. Отсечки 33

III.2. Триаголник 35

III.3. Квадрат и правоаголник 36

IV Логика и комбинаторика

IV.1. Венови дијаграмин 43

IV.2. Логички главоболки 44

IV.3. Занимливи броења 50

IV.4. Броења на геометриски фигури 52

IV.5. Дополнителни задачи 53

Решенија на задачите

I Аритметика и алгебра

I.1. Пресметувања 57

I.2. Бројни ребуси 62

I.3. Равенки 64

I.4. Дополнителни задачи 67

II Текстуални задачи

II.1. Броеви и цифри 73

II.2. Пазаруваме и пресметуваме пари 78

II.3. Времето е важно 84
II.4. Задачи со мерни броеви 97
II.5. Дополнителни задачи 104
III Геометрија
III.1. Отсечки 117
III.2. Триаголник 120
III.3. Квадрат и правоаголник 123
IV Логика и комбинаторика
IV.1. Венови дијаграми 141
IV.2. Логички главоболки 143
IV.3. Занимливи броења 157
IV.4. Броење геометриски фигури 162
IV.5. Дополнителни задачи 167
Литература 176

ПРЕДГОВОР

> Ниту едно истражување на човекот не може да се нарече вистинска наука ако не е поткрепено со математички доказ.
>
> Проблематична е веродостојноста на тврдењата во науките каде што нема примена на ниту една математичка дисциплина, т.е. кои не се поврзани со математиката.
>
> Леонардо да Винчи

Книгава *Математички талент* 22 е наменета за талентираните ученици по математика од четврто и петто одделение и е комплементарна со книгите Математички талент 1, 2, 13, 14 и 19, т.е. на извесен начин е дополнување на овие книги. Меѓутоа, сметаме дека оваа книга ќе биде интересна и за наставниците кои дел од своето слободно време го посветуваат на математички надарените ученици, како и за бројните вљубеници во математиката. Книгата, всушност, е збирка од 306 решени задачи во која во четири одделни дела се обработени алгебарски, аритметички, текстуални, логички, комбинаторни и геометриски, приспособени за учениците на возраст од десет до дванаесет години.

Како и во останатите книги од серијата *Математички талент*, така и во оваа книга природата на задачите содржани во неа е таква што тие се посебно интересни за комисиите кои ги спроведуваат математичките натпревари. Притоа, задачите не се систематизирани

според степенот на натпреварувањето, туку тие се распределени по области.

Рецензентите, д-р Павел Димовски и д-р Зоран Мисајлески, придонесоа со своите сугестии и забелешки да се подобри содржината на книгава, за што посебно им благодариме.

И покрај вложениот напор, не можеме да се ослободиме од впечатокот дека се можни значителни подобрувања на оваа збирка решени задачи, како и отстранување на евентуалните пропусти и грешки. Затоа, однапред сме благодарни на секоја добронамерна забелешка, критика и сугестија.

На крајот, ќе ни биде особена чест и задоволство ако оваа збирка придонесе учениците да навлезат во тајните на математиката, а посебно ако математиката им стане животна определба на некои од нив.

Скопје Авторите
јули, 2020 г.

I АРИТМЕТИКА И АЛГЕБРА

I.1. ПРЕСМЕТУВАЊА

1. Пресметај:
   а) $1000+100-100+1000$,
   б) $47+28-69+15+30$,
   в) $2\cdot 2\cdot 2\cdot 2+2\cdot 2\cdot 2$,
   г) $3\cdot 3\cdot 3\cdot 3+5\cdot 5\cdot 5+7\cdot 7+9$.

2. Пресметај ја вредноста на изразот:
   а) $185-(25+35):5$,
   б) $210+(24+16):8-96:6$,
   в) $133-(45-12):3+(21+14):7$.

3. Пресметај ја вредноста на изразот
   а) $900-792:6-2$,
   б) $210+16\cdot 8-96:8$,
   в) $133-33\cdot 3+12\cdot 7$.

4. Пресметај ја вредноста на изразот:
   $$3\cdot(120-24\cdot 5)+432\cdot(167-67)-352\cdot(28+72).$$

5. Пресметај ја вредноста на изразот:
   $$24:(0+4)+2010:(2+0+1+0)-2\cdot 0\cdot 1\cdot 0.$$

6. Пресметај:
   $$20130+2\cdot(480\cdot 4\cdot 14+30\cdot 44\cdot 16)-(5\cdot 80\cdot 43+19\cdot 400\cdot 3)\cdot 2$$

7. Пресметај ја вредноста на изразот:
   а) $(37-7\cdot 5)\cdot 14-4\cdot 6$,
   б) $(35-5\cdot 0):7+22:2$,

в) $327864\cdot 0\cdot 9+2015\cdot 2-5\cdot 403$.

8. Пресметај ја вредноста на изразот
$$[20+18+16+14+12+10-(19+17+15+13+11+9]\cdot$$
$$\cdot[10+12+14+16+18+20-(9+11+13+15+17+19)].$$

9. Пресметај ја вредноста на изразот
$$A=2+5+8+11+14+17+20+23+26+29-$$
$$-1-4-7-10-13-16-19-22-25-28.$$

10. Пресметај ја вредноста на изразот:
а) $(44:11+6)\cdot 9+10$,
б) $1762+1762\cdot(76\cdot 3-45\cdot 5)$,
в) $(228:4-128:4)\cdot 5-4\cdot 16-4\cdot 9$.

11. Пресметај ја вредноста на изразот:
а) $3+927:9-6+4$,
б) $(3+927):(9-6)+4$,
в) $3+927:9-6\cdot 4$.

12. Дадени се броевите
$$A=1+3+5+...+99 \text{ и } B=2+4+6+...+100.$$
Кој број е поголем и за колку?

13. Со колку нули завршува производот
$$1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot ...\cdot 97\cdot 98\cdot 99\cdot 100.$$

14. Определи ја цифрата на единиците на збирот
$$1+1\cdot 2+1\cdot 2\cdot 3+1\cdot 2\cdot 3\cdot 4+1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5+...+1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot ...\cdot 2011.$$

15. Секогаш со броевите a,b,c извршуваме едни исти операции, а добиениот резултат е d. Кој број треба да е запишан на местото на ѕвездичката?

a	b	c	d
5	4	9	9
6	3	6	18
3	0	9	27
9	4	6	*

16. Дамјан измислил нова операција $\bullet$, која ја определил со:
$$a \bullet b = (a+b):2.$$
Пресметај ја бредноста на изразот: $(3 \bullet 5) \bullet 10$.

17. Иван измислил нова операција
$$a \otimes b = 3a + ab.$$
Определи ја вредноста на изразот $5 \otimes (2 \otimes 3)$.

I.2. БРОЈНИ РЕБУСИ

18. На местото на секоја ѕвездичка може да се стави произволна цифра. Во кој случај секогаш се добива точно неравенство:
а) $\overline{1*4} < 154$, б) $997 > \overline{*97}$, в) $\overline{10*} < 110$,
г) $589 > \overline{5*9}$ д) $\overline{1*9} < 109$.

19. На местото на секоја ѕвездичка може да се стави произволна цифра. Во кој случај секогаш се добива точно неравенство:
а) $\overline{*41} < 99$, б) $\overline{3*9} > \overline{52*}$, в) $\overline{20*5} < \overline{2*95}$,
г) $\overline{*91} > \overline{18*}$, д) $\overline{1234*} < \overline{*2000}$.

20. Во бројниот ребус
$$\overline{abc} \cdot 3 = \overline{bbb}$$
на различните букви соодветствуваат различни цифри, а на исти букви исти цифри. Која цифра соодветствува на буквата a?

21. Реши го бројниот ребус:
$$\overline{**3} \cdot 8 = \overline{218*},$$
а потоа пресметај го производот на цифрите кои се наоѓаат на местата на ѕвездичките.

22. Реши го бројниот ребус
$$B + \overline{BEEE} = \overline{MUUU}$$

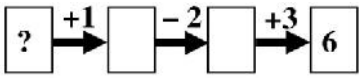
во кој на исти букви соодветствуваат исти цифри, а на различни букви соодветствуваат различни цифри.

23. Дешифрирај го бројниот ребус:
$$\overline{8c06}\cdot b=\overline{a4754}.$$

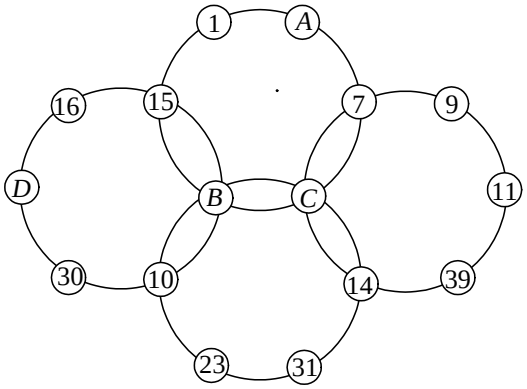
24. Дешифрирај го бројниот ребус:
$$\overline{*93*}+\overline{4*06}=\overline{78*4}.$$

I.3. РАВЕНКИ

25. Кој број треба да се запише на местото на прашалникот за да пресметувањата бидат точни.



26. Збирот на броевите запишани на секој од дадените четири прстени е еднаков на 90. Кои броеви се кријат на местата означени со буквите A, B, C и D?

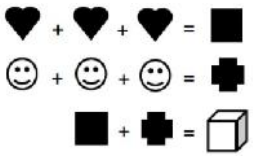


27. Реши ја равенката
$$(3x+8):4-2=7\cdot 18-18.$$

28. Реши ја равенката:
    а) $3x-190=5\cdot 19-9$,
    б) $5x-177=4\cdot 8+1$,
    в) $7x+52=23\cdot 9-8$,

29. Реши ја равенката
$$3x-31=445:5,$$

30. На различните фигури во шема равенствата соодветствуваат различни ненулти цифри. Која цифра соодветствува на коцката?



I.4. ДОПОЛНИТЕЛНИ ЗАДАЧИ

31. Кој е седмиот по ред број во низата 1, 4, 8, 13, 19, 26, __ .

32. Определи ги следните два броја во низата: 1, 3, 7, 15, 31, 63, ...

33. Определи го збирот на петтиот и деветтиот број во низата 1, 1, 1, 3, 5, 9, 17, ..., во која сите членови освен првите три се добиваат на еден ист начин.

34. Определи го деленикот ако количникот е 3 пати помал од деленикот и е 11 пати помал од делителот.

35. Бројот 2013 е формиран од четири последователни цифри (0, 1, 2 и 3) и е делив со 11. Која е последната цифра на следниот по големина број кој е делив со 11 и е формиран со четири последователни цифри.

36. Сите четирицифрени броеви, во кои цифрите 0, 1, 2 и 3 се среќаваат точно по еднаш, се запишани еден по друг во растечки редослед. Колку пати во тој запис се среќава групата 2013 од четири цифри во овој редослед?

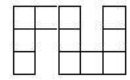
37. Пабло го собрал најголемиот трицифрен број, чиј збир на цифри е еднаков на 8, со најмалиот трицифрен број, чиј збир на цифри е 7. Кој број го добил Пабло?

38. Определи ја најголемата можна разлика на два петцифрени броја кои започнуваат со цифрата 7, а секоја следна цифра во нивниот запис е помала од цифрата која се наоѓа пред неа.

39. Со цифрите 5, 3, 9 и 0 се запишани најголемиот и најмалиот четирицифрен број во кои цифрите не се повторуваат. Определи ги нивниот збир и нивната разлика.

40. Определи ја разликата на збирот на сите непарни трицифрени и сите парни трицифрени броеви.

41. Со седум квадратни плочки може да се состави буквата П (цртеж долу лево), а со 11 квадратни плочки може да се состави буквата П два пати (цртеж долу десно).



На ваков начин се наредени 2011 плочки. Колку пати е составена буквата П.

42. По бројот 34 запиши го производот на неговите цифри, а потоа запиши го производот на последните две цифри итн. Определи ја 37-та цифра.

43. За натпреварување во спортски танци учениците од едно одделение формирале парови (момче,девојче), во кои броевите ги означувале според определено правило. Некои од паровите се: (3,7); (5,11); (9,19) и (10,21). Откриј го правилот и определи ги броевите на партнерите во паровите: (4,__) и (__, 15).

44. Најди го збирот на непарните трицифрени броеви чии цифри имаат производ 140.

45. Илина цртала сино, бело и црвено кругче во дадениот редослед. Какво кругче ќе нацрта Илина стотиот пат?

46. Во полињата на дадената лента допиши природни броеви во празните полиња, така што производот на било кои три последователни броеви е еднаков на 30. Колку решенија има задачата?

			5				

II ТЕКСУАЛНИ ЗАДАЧИ

II.1. БРОЕВИ И ЦИФРИ

1. Мила од цифрите 3, 7, 1, 9, 0 и 4 ги формирала најголемиот и најмалиот шестцифрен број употребувајќи ја секоја цифра точно еднаш, а потоа нивната разлика ја намалила 9 пати. Кој број го добила Мила?

2. Колку страници има книга која е нумерирана со 2775 цифри? (Првата страница се нумерира со бројот 1.)

3. Збирот на 4 броја е еднаков на 100. Збирот на првиот, третиот и четвртиот е еднаков на 65, а збирот на првиот, вториот и третиот е еднаков на 78. Одреди ги собироците, ако првиот собирок е за 10 помал од вториот.

4. Андреј во тетратката во ред ги запишува еден по друг природните броеви почнувајќи од бројот 1 па натаму. Тој запрел со пишување кога во тетратката за прв пат цифрата 9 била запишана двапати едно по друго. Колку цифри запишал Андреј?

5. Тетратка има 100 страници нумерирани од 1 до 100. Од неа се искинати 30 произволно избрани листови, и потоа е пресметан збирот на нумерираните броеви од преостанатите страници. Дали е можно овој збир да биде еднаков на 800?

6. Ана замислила еден број. Тој број го помножила со 7, потоа му додала 6, добиениот резултат го поделила со 5 и го добила бројот 53. Откриј кој број го змислила Ана!

7. За нумерирање на страниците на една книга се искористени 235 цифри, при што нумерирањето започнува со бројот 3.

Со колку трицифрени броеви е нумерирана оваа книга?

8. На секој од броевите 47, 53 и 62 е додаден еден ист број и се добиени три броја чиј збир е еднаков на 291. Кои се тие броеви?

9. Во својот дневник Елена претходно ги нумерирала првите неколку страници. Денес таа продолжила со нумерирањето и ги нумерирала од 13-тата до 128-та страница. Колку цифри денес испишала Елена?

10. Намаленикот е 4000, разликата е еднаква на производот на броевите 12 и 301. Определи го намалителот.

11. Андреј од најголемиот трицифрен број го одзел најголемиот едноцифрен број и добиената разлика ја поделил со најмалиот двоцифрен број. Кој број го добил Андреј?

12. Определи го збирот на најголемиот четирицифрен број и количникот на броевите 63042 и 21.

13. Андреј замислил еден број. Бројот го зголемил за 3, добиениот број го намалил три пати, потоа да добиениот број му додал 7 и добиениот збир го помножил со 5. На крајот на добиениот број му го додал најмалиот парен број и го добил бројот 67. Кој број го замислил Андреј?

14. Определи го двоцифрениот број кој ќе се зголеми 7 пати, ако меѓу неговите цифри се запише 0.

15. Сношти читав книга и ми останаа да прочитам уште 5 листови до последната 204 страница. Кој е збирот на броевите со кои се нумерирани последната прочитана страница и страницата по неа?

16. Определи го природниот број кој собран со збирот на своите цифри го дава бројот 2011.

17. Коцка за играње е последователно фрлена четири пати и секој пат паднал различен број точки. Дали збирот на паднатите точки може да биде:
    а) 11, б) 13, в) 15, г) 17, д) 19?

18. Збирот на три природни броја е 523. Првиот број е три пати помал од вториот, а третиот е најголемиот двоцифрен број. Кои се тие броеви?

II.2. ПАЗАРУВАМЕ И ПРЕСМЕТУВАМЕ ПАРИ

19. Андреј купил четири различни моливи. Сите моливи без првиот чинеле 42 денари, сите моливи без вториот чинеле 40 денари, сите моливи без третиот чинеле 38 денари и сите моливи без четвртиот чинеле 36 денари. Колку пари чинел секој од моливите?

20. Андреј имал 11 евра. Во книжарата еден молив чини 1 евро, едно пенкало чини 2 евра и еден нотез чини 5 евра. Андреј купил неколку моливи, уште толку пенкала и еден нотез. По колку моливи и пенкала купил Андреј?

21. Даме и Јане решиле да купат по една збирка задачи по математика за четврто одделение. На Јане му недостасувале 160 денари, а на Даме му недостасувале 40 денари. Затоа решиле да ги здружат парите и да купат една збирка. Но, и со здружени пари им недостасувале 20 денари за да ја купат збирката. Колку пари е цената на збирката и по колку пари имал секој од нив?

22. Три другари, Марко, Гоце и Даме, добиле на ,,Бинго” 1000000 денари. Ако при купувањето на ливчето Марко дал 15 денари, Гоце 16 денари и Даме 19 денари, како трите другари правилно ќе ја поделат добивката?

23. Филип купил 100 бонбони по цена 5 бонбони за 7 денари, а потоа сите ги продал по цена 2 бонбони за 3 денари. Колку денари заработил Филип?

24. Владо, Бобан и Кате имаат вкупно 600 денари. Ако Владо потроши половина од своите пари, Бобан две третини од своите пари, а Кате потроши четири петтини од своите пари, тогаш на секој ќе му остане еднаква сума пари. По колку пари имал секој од нив?

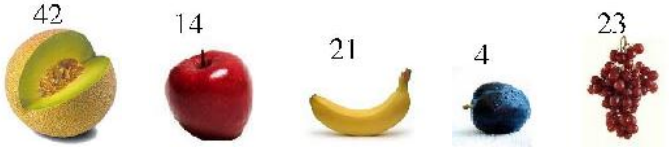
25. Драган, Боби и Мартин имаат заедно 12000 денари. Драган половина од своите пари ги поделил на два еднакви дела и ги дал на Боби и Мартин, а другата половна ја задржал за себе. Исто така постапил и Боби, а потоа и Мартин, после што тројцата пријатели имале ист износ, т.е. по 4000 денари кај себе. Колку пари има секој од нив на почетокот?

26. Ана сака да купи неколку моливи. Ако купи 6 моливи, ќе и останат 7 денари, а ако купи 10 моливи ќе и недостигаат 5 денари. Колку чини еден молив и колку денари имала Ана.

27. Таткото на своите 5 синови им дал 650 денари, и им рекол да си ги поделат така што секој од нив добие 30 денари помалку од непосредно постариот брат. Колку денари ќе добие секој син?

28. Банкнота од 100 денари треба да се раситни на монети од 2 и 5 денари, при што нивниот број е 32. Ако такво раситнување постои, колку монети од 2 и колку монети од 5 денари се употребени?

29. Цените на плодовите на долните цртежи се искажани во евро-центи.



Андреј за 1 евро купил неколку плодови. Кои плодови не ги купил Андреј?

30. Елеонора купила 3 кисели млека по цена од 75 денари за едно млеко, еден природен сок за кој платила 220 денари и 3 пакетчиња бисквити. Таа на продавачот му дала банкнота од 2000 денари, по што тој и вратил кусур од 1315 денари. Колку пари чини едно пакетче бисквити?

31. Една кутија сладолед чини колку 10 чоколади. Три кутии сладолед и пет чоколади чинат 1400 денари. Колку пари чини една кутија сладолед, а колку едно чоколадо?

32. Илина купила четири еднакви чоколади и ѝ преостанале 70 денари. За да купи 6 такви чиколади на Илина и недостасуваат 50 денари. Колку чини едно чоколадо? Колку пари имала Илина?

33. Андреј купил топка, шах и еден пар ролери, за што платил 190 евра. Пабло купил топка и два шаха и платил 160 евра. Колку платил Горјан кој купил една точка и два пара ролери?

34. Паричната единица на племето Кукулеле е зенг и 5 зенга се еднакви на 1 евро. Колку зенга е цената на една книга, која се продава за 11 евра и 40 евроценти?

35. Иван и Ѓорѓи имаат по 600 денари, Антонио има 500 денари, а Ратко и Стојан имаат по 400 денари. Сите пари ги поделиле така што сите имале еднакви суми пари. Колку пари добило секое дете?

36. За изградба на една зграда биле потребни 35 тони цемент. За превезување на цементот биле ангажирани два вида камиони: камион кој пренесува по 3 тони со цена 400 денари за една тура и камион кој пренесува 4 тони со цена 450 денари за една тура.

Секој од камионите бил максимално натоварен. Која е најмалата сума што може да се плати за пренесување на цементот?

II.3. ВРЕМЕТО Е ВАЖНО

37. Колку време најдолго може цифрата 5 без прекин да се појавува на дисплејот на електронски часовник?

38. Во понеделник, во 7 часот наутро градскиот часовник покажал точно време, но почнал да заостанува по 1 час на секои 7 часа. Во кој ден и во колку часот градскиот часовник за прв пат ќе покаже време кое е за 1 час повеќе од точното време?

39. Иван почнал да гледа некој филм во 20 часот и 20 минути. За време на филмот два пати имало прекин заради прикажување на реклами. Првиот прекин траел 3 минути а вториот 4 минути. Прикажувањето на филмот завршило во 22 часот и 37 минути. Колку време траел филмот без реклами?

40. Кога Марија се разбудила и погледнала во часовникот, утврдила дека поминала една четвртина од денонoќието. Првиот училишен час на Марија ќе и започне за 75 минути, а во училиштето таа ќе престојува 4 часа и 50 минути. Во колку часот Марија ќе тргне од училиштето накај дома?

41. Кога на 24. мај 2020 година во Лондон е 14 часот, во Скопје ќе бида 1 час покасно, а во Сан Франциско ќе биде 6 часот на истиот датум. Ана живее во Сан Франциско и навечер си легнува да спие во 21 часот. Колку часот е во Скопје, кога Ана си легнува да спие?

42. Една цевка за 3 часа полни $\frac{1}{5}$ од еден базен, а друга за 4 часа $\frac{1}{4}$ од истиот базен, а трета цевка за 6 часа полни $\frac{1}{3}$ од истиот базен. Која цевка го полни базенот најбрзо?

43. Дваесет и четири работници кои работат по 8 часа дневно завршуваат дадена работа за 12 дена. Колку работници ќе ја завршат истата работа за 16 дена, ако работат по 6 часа на ден? Секој работник за еден час завршува еднаков дел од работата.

44. Илија започнал да јаде ореви по ручекот во 12 часот. Во тој момент имал 64 ореви. Колку ореви му останале во 17 часот, ако на секој цел час Илија изедувал точно половина од оревите кои ги имал на почетокот на часот?

45. Андреј отишол на гости кај баба му и забележал дека часовникот покажува 18:30 часот. По 6300 секунди тој си тргнал дома и патувал до неговата куќа 2100 секунди. Во колку часот Андреј си тргнал дома, а во колку часот стигнал дома?

46. Ако Велко оди на училиште со велосипед, а од училипте се враќа печки, тогаш патот во двата правци го минува за 17 минути. Ако оди и се враќа со велосипед, тогаш патот во двата правци го минува за 10 минути. Колку време му е потребно на Велко пешки да отиде до училиште, а колку со велосипед?

47. Шест деца јадат 6 јаболка за 6 минути. Колку деца ќе изедат 80 јаболка за 48 минути?

48. Во една леа на еднакви растојанија се засадени цветови. Пчела лета од цвет нс цвет со постојана брзина и од првиот до седмиот цвет стигнува за 7 секунди. За колку секунди пчелата ќе прелета од првиот до тринаесеттиот цвет?

49. Ангела во 10 часот и 17 минути почнала да бојадисува јајца, при што постојано работи со иста брзина и за 6 минути бојадисува 10 јајца. Колку јајца бојадисала Ангела до 10 часот и 44 минути?

50. Од 06.01.2019 година заклучно до 08.07.2019 година без една седмица Андреј пливал секој ден. Колку дена пливал Андреј?

51. Во градскиот парк во права линија биле засадени дрва на еднакво растојание едно од друго. Калина тргнала на прошетка и растојанието од првото до осмото дрво го поминала за 8 минути. За колку минутитаа ќе го помине растојанието од првото до петнаесеттото дрво? (Калина одела со постојана брзина.)

52. Елена, Вангелина и Росана бојадисувале јајца. Елена за 40 минути бојадисува 12 јајца. Вангелина за 20 минути бојадисува 2 јајца помалку отколку што бојадисува Елена за истото време. Росана за еден час бојадисува 6 пати повеќе јајца отколку што бојадисува Вангелина за истото време. Колку јајца бојадисале трите девојчиња за 30 минути?

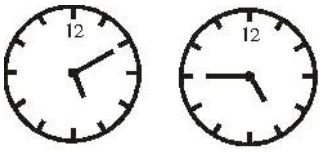
53. Автобус се движи по маршрута од 20 постојки кои една по друга се наоѓаат на еднакви растојанија. На секој псотојка автобусот престојува 1 минута, а во останатото време се движи со една иста брзина. Во 7:45 часот автобусот тргнал од првата постојка, а од петтата постојка тргнал во 8:25 часот. Во колку часот автобусот ќе стигне на последната постојка?

54. Во 18:00 Елена тргнала кон домот на нејзината другарка Марија, која имала роденден. Елена го поминала третина од патот и се сетила дека го заборавила поклонот. Таа пресметала дека ако продолжи ќе стигне 15 минути пред почетокот на забавата, па затоа решила да се врати по подарокот и веднаш тргнала назад. Во својата куќа се задржала 5 минути и тргнала кон домот на Марија. Таа пристигнала со 20 минути задоцнување. Во колку часот требало да почне забавата?

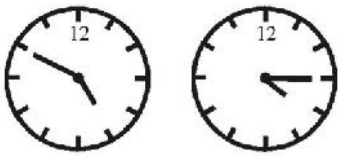
55. За оди пешки на работа и се враќа со свтомобил на Костадин му се потребни 1 час и 30 минути. Ако оди и се враќа со автомобил, тогаш на Костадин му се потребни 30 минути. За колку време Костадин ќе оди и ќе се врати пешки од работа? (Костадин постојано оди по ист пат, пешки се движи со постојана брзина и со автомобил се движи со друга постојана брзина.)

56. Тања отишла на роденден кај Маја 5 минути порано од Лиле и 3 минути покасно од Вања. Когасе било изедено, гостите почнале да си одат. Вања заминала прва, таа си отушла 2 минути пред Лиле и 5 минути по Тања. Колку минути повеќе престојувала на роденденот Тања од Лиле?

57. Двата часовника прикажани на цртежите работат точно, но се лошо наместени. Левиот часовник е поставен 15 минути понапред. Определи го точното време кога десниот часовник покажува 6 часот.



58. Двата часовника прикажани на цртежите работат точно, но се лошо наместени. Десниот часовник е поставен 10 минути поназад. Определи го точното време кога левиот часовник покажува 6 часот.



59. Мајката на Борче е три пати постара од Борче, а неговиот татко е четири години постар од мајката на Борче. Колку години има секој од нив, ако заедно имаат 88 години?

60. Семејството Стојановски има три сина: Никола, Ристе и Александар. Таткото Петар Стојановски има 35 години. Збирот на годините на трите деца е два пати помал од годините на мајката Елена, која има 5 години помалку од годините на таткото Петар. Минатата година најстариот син бил на возраст еднаква на збирот на годините од неговите браќа.
Колку години има мајката Елена? Колку години има најстариот син Александар? Ако Никола има три пати помалку години од Ристе, колку години има најмалиот од браќата?

61. Филип за роденден од баба му и дедо му добил 405 денари. Од баба му добил 3 пати повеќе пари од бројот на нејзините години, а од дедо му четири пати повеќе пари од бројот на неговите

години. Колку години има бабата, а колку дедото на Филип, ако се знае дека дедото е 5 години постар од бабата.

62. Дедото и внукот имаат заедно 65 години. Колку години има дедото, а колку внукот ако се знае дека внукот има толку месеци колку што дедото има години?

63. Во едно семејство има три деца, а таткото е повозрасен од мајката. Збирот на годините на таткото и мајката е шест пати поголем од најмалиот двоцифрен број во чиј запис нема нула. Второто по возраст дете е три пати постаро од најмалото дете. Минатата година збирот на годините на двете помлади деца бил еднаков на годините на најстарото дете, а сега збирот на годините на трите деца е два пати помал од годините на мајката. Збирот на годините на мајката и средното по возраст дете е еднаков на годините на таткото. Колку години има таткото?

64. Баба Марија има 60 години, а трите нејзини внуци имаат 5, 6 и 7 години. Колку години ќе има секој од внуците, кога збирот на нивните години ќе биде еднаков на годините на баба Марија?

65. Васко има 9 години, а братму Кирил е помал од него. Кога Кирил ќе има 8 години, Васко ќе има 10 години. Колку години има Кирил сега?
Решение. Со секоја изминатa година разликата на годините меѓу Васко и Кирил не се менува. Тоа значи дека Васко е постар од Кирил $10-8=2$ години, односно дека Кирил има $9-2=7$ години.

66. Збирот на годините на Андреј и Борис е 21, збирот на годините на Борис и Никола е 22, а збирот на годините на Андреј и Никола е 23. Колку години има секое од трите деца?

67. Во една година месецот мај имал 4 среди и 4 саботи. Во кој ден од годината бил 1. мај таа година?

68. Пред три години Пабло и неговите братучеди Андреј и Горјан заедно имале 11 години. Колку години тие заедно ќе имаат по пет години?

69. Ако први јануари е во понеделник, кој датум е во понеделникот на 36-тата седмица од таа година?

70. Три петоци во еден месец паднале на парни дати. Во кој ден од седмицата паднал 20-ти?

71. Кога Катерина имала 31 година, нејзината ќерка Елеонора имала 8 години, а сега Катерина е два пати постара од Елеонора. Колку години има сега Елеонора, а колку Катерина?

II.4. ЗАДАЧИ СО МЕРНИ БРОЕВИ

72. На една полица има три книги. Првата има 90, втората 110, третата 150 страници. Кориците на книгите се со еднаква дебелина и секоја од нив е дебела $2mm$. Колку милиметри се дебели книгите заедно ако се знае дека 10 страници имаат дебелина $1mm$?

73. Една круша има маса колку две праски. Една праска има маса колку осум сливи. Колку сливи имаат маса колку една круша?

74. Во камион со носивост $5t$ натоварени се 68 вреќи по $50kg$ брашно. Уште колку такви вреќи можат да се натоварат во камионот?

75. Јане го прашал Филип колку тежела рибата што ја уловил татко му. Филип одговорил: *Главата заедно со опашката има* $3\,kg$, *главата заедно со трупот има* $7\,kg$, *а трупот заедно со опашката има* $8\,kg$. Колку тежела рибата?

76. Едно куче, едно маче и едно зајаче имаат маса од 17 kg , две кучиња, едно маче и едно зајаче 29 kg , а две кучиња, три мачиња и едно зајаче 35 kg . Колкави се масите на едно куче, едно маче и едно зајаче ?

77. На градскиот пазар 3kg јаболка чинат исто колку 2kg круши, а 2kg круши чинат исто колку 1kg цреши. Ѓорѓи купил 5kg јаболка, Иван купил 3kg цреши, а Филип 3kg круши. Кој од нив потрошил најмногу пари?

78. Во една кошница има 20 круши со еднаква маса. Кошницата заедно со крушите тежи 5 kg . Андреј од кошницата извадил 10 круши, по што масата на кошницата со преостанатите круши била 3 kg . Определи ја масата на празната кошница?

79. Дедо Стојан има засадено компири на правоаголна површина со ширина 10 m и должина 72 m . Тој од еден квадратен метар откопал просечно по 10 kg компири. Четвртина од целото количество го продал на пазар, а половина од преостанатото количество го купиле 3 трговци и секој трговец купил еднакво количество компири. Колку килограми компири купил секој трговец одделно?

80. Два ученика се движат по правоаголно игралиште со периметар 36 m . Тие тргнале од едно исто место во спротивни насоки. До моментот кога прв пат се сретнале тие направиле еднаков број чекори, а должините на нивните чекори се 48 cm и 42 cm . Колку метри поминал секој ученик?

81. Патот меѓу градовите A и B е долг 120 km и Иван го минува за 2 часа. Со истата постојана брзина Иван патот меѓу градовите B и C го минува за 3 часа. Колку е долг овој пат?

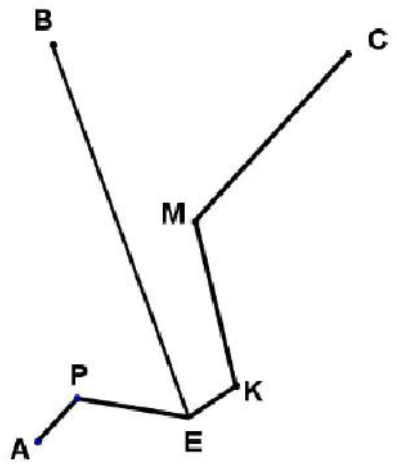
82. Автомобил за $2\,h\,30\,\text{min}$ минути поминува $190\,km$, а моторциклист поминува $13\,km$ за $10\,\text{min}$. Колку километри за $1\,h$ минува повеќе моторциклистот од автомобилот?

83. Кошница во која има 2 исти чоколади тежи $250\,g$. Истата кошница, но со 6 такви чоколади во неа, тежи $450\,g$. Колку чоколади треба да ставиме во кошницата за да вкупната тежина биде $650\,g$?

84. Елена тргнала од училиштето A и отишла во продавницата B. Во исто време Ратка тргнала од училиптето A кон продавицата C. Двете се движат со иста брзина. Која прва ќе стигне, ако

$$\overline{EK} = 1\,km,\ \overline{PE} = 2\overline{EK},$$
$$\overline{MC} = 2\overline{PE},\ \overline{AP} = \overline{EK},$$

Ратка од A до E изминува толку километри, колку од K до M, а растојанието BE е за $1\,km$ поголемо од растојанието $PEKM$.

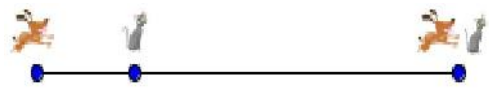


85. Пабло тргнал на прошетка во 8:00 часот. Тој пешачи 1 час и одмара половина час. Дома се вратил во 15:00 часот. За еден час Пабло поминувал $3\,km$. Колку километри пешачел Пабло?

86. Во еден двор живеат кокошки и пилиња. Познато е дека 2 кокошки и 100 јајца тежат колку 3 кокошки и 6 пилиња, а 1 кокошка тежи колку 2 пилиња и 20 јајца. Сите кокошки имаат иста тежина, сите пилиња имаат иста тежина и сите јајца имаат иста тежина. Колку пати е потешка една кокошка од едно пиле?

87. Едно јабоко тежи колку шест кајсии. Три кајсии тежат колку 8 ореви. Колку ореви тежат колку едно јаболко?

88. Куче видело мачка на $30\,m$ пред него и почнало да ја брка (цртеж десно). Мачката се движела по права линија и трчала по $7\,m$ во секунда, а кучето трчало по $10\,m$ во секунда. По колку секунди кучето ќе ја стаса мачката?



89. Во три сада има 153 литри млеко. Ако од првиот сад се прелеат во вториот 9 литри, а од вториот во третиот 5 литри, во трите сада ќе има еднакво количество млеко. Колку млеко има во секој сад?

II.5. ДОПОЛНИТЕЛНИ ЗАДАЧИ

90. Во едно училиште има 32 паралелки. Од нив 6 паралелки имаат по 29 ученика, 8 паралелки имаат по 30 ученика, 2 паралелки по 31 ученик, а останатите паралелки имаат по 32 ученика. Колку изнесува вкупниот број на ученици во училиштето?

91. Цвета имала кокошки. Осум кокошки неселе за една недела 32 јајца. Колку јајца ќе снесат за една недела девет кокошки?

92. Во едно детско летувалиште летувале деца во 4 смени. Во прва-та смена биле пријавени 128 ученици, а во втората смена 2 пати повеќе отколку во првата. Во третата смена се пријавиле за 69 ученици повеќе отколку во втората, а во четвртата смена 3 пати помалку отколку во првата и третата смена заедно. Но, во првата смена не дошле 5 деца, во втората 3 деца, а во четвртата смена 4 деца. Колку вкупно деца летувале во ова детско летувалиште?

93. Весела напишала еден ист збор три пати, при што буквата „а“ ја искористила девет пати. Колку пати ќе ја искористи буквата „а“ кога истиот збор ќе го напише седум пати.

94. Наставничката на секој ученик му дала по 2 јаболка и во кошницата останале 19 јаболка. Колку ученици и колку јаболка има, ако нивниот вкупен збир е 100?

95. Во овоштарникот на дедо Ване растат овошни дрвца и тоа: 240 дрвца кајсии, 260 дрвца праски и 130 дрвца јаболка. Учениците од одделението на малиот Ване, внукот на дедо Ване, на денот на дрвото дошле во овоштарникот и засадиле уште 75 дрвца кајсии, 126 дрвца праски и 142 дрвца јаболка.
    а) Колку ученици има во одделението на малиот Ване, ако секој ученик засадил по 7 овошни дрвца?
    б) По колку овошни дрвца од секој вид има во овоштарникот на дедо Ване?
    в) Колку вкупно овошни дрвца има во овоштарникот на дедо Ване?

96. На контролниот тест по математика наставникот поставил 30 задачи. Бројот на задачи кои точно ги решил еден ученик е за 20 поголем од бројот на задачите кои не ги решил. За секоја точно решена задача ученикот добива 8 поени, а за секоја нерешена или погрешно решена задача губи 3 поени. Колку вкупно поени освоил ученикот на контролниот тест по математика?

97. Учениците во петто одделение решавале тест по математика кој содржи 20 задачи. За секоја точно решена задача се добиваат 5 поени, а за секоја неточно решена или нерешена задача се губат по 3 поени.
    а) Колку задачи решил Иван, ако освоил 76 поени?
    б) Најмалиот број на поени потребни за оцена 5 е решението на равенката $8245 : x = 97$. Колку најмногу задачи може да погреши ученик ако сака сигурно да добие петка?

98. На две гранки се наоѓале 25 врапчиња. По извесно време, од првата прелетале на втората 5 врапчиња, а од втората во полето одлетале 7 врапчиња. Тогаш, на првата гранка останале два пати

повеќе врапчиња отколку на втората. Колку врапчиња имало на секоја гранка на почетокот?

99. Четири момчиња Андреј, Бојан, Васко и Гоце се колекционери на поштенски марки. Андреј има толку марки колку што имаат Бојан и Васко заедно, Гоце има пет пати помалку марки од Андреј, а Бојан четири пати повеќе од Васко. По колку марки има секое од момчињата, ако заедно тие имаат 5016 поштенски марки?

100. Ако учениците од едно одделение седнат по еден на столица, тогаш ќе недостасуваат 9 столици, но ако седнат по двајца на столица, тогаш 3 столици ќе останат празни. Определи ги бројот на столците и бројот на учениците.

101. Во четири натпревари еден кошаркарски тим постигнал вкупно 356 коша. Во првиот и вториот натпревар тимот постигнал 95 и 103 коша, соодветно, а во следните два натпревари тимот постигнал еднаков број коша. Колку коша постигнал тимот во четвртиот натпревар?

102. Андреј и Пабло требало да решат по еднаков број задачи. Првата седмица Андреј решил 97 задачи, а Пабло решил 160 задачи, па на Андреј му останало да решава 8 пати повеќе задачи отколку што му останало на Пабло. По колку задачи требало да реши секој од нив?

103. Капетанот, пред да тргне на пат, го зголемил екипажот за 20 нови морнари и му се обратил на својот заменик: „Треба да ги дополниме залихите со вода, бидејќи овие залихи кои ги имаме ќе ни бидат доволнисамо за две седмици.“ Колку членови е новиот екипаж на бродот, ако капетанот има намера на отворено море да бидат четири седмици?

104. Триесет ученици од 5 различни паралелки засадиле вкупно 40 дрвца, секој ученик најмалку по едно дрвце. Секои два ученика

од една иста паралелка засадиле еднаков број дрвца, а секои два ученика од различни одделенија засадиле различен број дрвца. Колку ученици засадиле по едно дрвце?

105. Кирил собрал 1050 топчиња и решил да ги распредели во кутии. Тој располагал со три вида кутии: големи, средни по големина и мали. Кирил имал вкупно 6 големи кутии и во некои од нив ставил точно по 6 средни по големина кутии. Во некои од средните кутии тој ставил точно по 6 мали кутии, а во секоја мала кутија Кирил ставил точно по 7 топчиња. Определи го најмалиот можен број кутии со кој располагал Кирил ако секоја мала кутија е ставена во средна и секоја средна кутија е ставена во голема кутија?

106. Пабло во четири пакети запакувал 60 чоколади така што во секој следен пакет има два пати повеќе чоколади отколку во претходниот. Колку чоколади има во последниот пакет?

107. На три полици во работната соба на Горјан има вкупно 36 книги. Кога од првата полица на втората полица се префрлени 4 книги, потоа од втората на третата полица се префрлени 5 книги, па од третата на првата полица се префрлени 2 книги, на секоја полица имало еднаков број книги. Колку книги имало на секоја полица на почетокот?

108. Горјан собирал коли и мотори, при што секоја играчка ја чувал грижливо во посебна кутија. На полицата имал 14 кутии, а во кутиите имало вкупно 40 тркала. Колку колички имал Горјан?

109. Во една детска градинка има 29 столчиња. Едни сточиња се со 3 ногалки, а други се со 4 ногалки. Столчињата имаат вкупно 98 ногалки. Колку столчиња со 3 ногалки има во оваа детска градинка?

110. Бабата Бисера направила еклери. Таа на Никола, за на екскурзија, му запакувала третина од еклерите. Никола сметал дека тоа

се многу еклери за на екскурзија, па вратил во послужавникот 4 еклери. Потоа, бабата Бисера на Стојан му четвртина од преостанатите еклери и уште два еклера. На крајот во послужавнкот останале 19 еклери. Колку еклери направила баба Бисера?

111. Вервериците Чип и Дејл заедно собрале 60 лешници. На секои три лешници донесени од Чип, Дејл додавал уште два лешници. Колку лешници собрал Чип, а колку Дејл?

112. На почетната постојка во автобусот се качиле неколку особи. На првата постојка се симнале 2 патника и се качиле 9 други патници. На втората постојка се симнале 14 и се качиле 7 патници. На третата постојка слегле половината од патниците и во автобусот останале 11 патници. Колку патници биле на почетокот во автобусот?

113. Од понеделник до недела Андријана требало да решава секој ден по 10 задачи. Меѓутоа, за да одмара во сабота и недела, таа предвидениот број задачи го решила од понеделник до петок, решавајќи секој ден еднаков број задачи. По колку задачи решавала секој ден?

114. Павел засадил овошна градина со 252 дрвја распоредени подеднакво во 9 реда, а Пабло засадил овошна градина со 8 реда и во секој ред имало по 3 дрвја повеќе отколку во редовите во градината на Павел. Колку дрвја засадиле Павел и Пабло?

115. Андреј и Пабло купиле вкупно 192 чоколади и сокчиња. Тие на Горјан му дале 39 чоколади и три пати помалку сокови од чоколади. Потоа им останал еднаков број чоколади и сокчиња, кои ги поделиле подеднакво. По колку чоколади и по колку сокчиња добиле Пабло и Андреј?

116. Ако земам две бомбониери со по 20 бомбони, ќе ми недостасуваат 4 бомбони за да ги почестам гостите. Колку бомбониери со по 9 бомбони треба да земам за ди почестам гостите и за мене да остане точно една бомбона?

117. Баба Павлина има 2 бели, една кафеава и 3 црни кокошки. Тие несат јајца на многу специфичен начин. Секоја бела кокошка неси по 3 јајца преку еден ден. Кафеавата кокошка неси по едно јајце седмично. Црните кокошки несат јајца секој ден, така што едната неси 2 јајца, а двете по едно јајце. Во понеделник сите кокошки снесле јајца. Баба Павлина ги собрала во една кошница и потоа во кошницата ги ставала сите јајца собрани таа седмица. Колку јајца имало во кошницата на крајот од седмицата?

118. Ана и Пабло решавале задачи за натпревар во текот на еден ист период. Ана решила 24 задачи и тоа по 4 задачи во текот на еден час. Пабло решавал секој час по 2 задачи повеќе од Ана. Колку задачи решиле заедно?

119. Иван одгледува зајаци. Ако во секој кафез стави по 6 зајаци, тогаш за еден кафез ќе недостигаат 2 зајака, а ако во секој кафез стави по 5 зајаци, тогаш 3 зајаци нема да бидат сместени во кафез. Колку зајаци одгледува Иван?

120. Група од 29 деца чека во ред за да купи сладолед. Елена е точно меѓу Ана и Мирјана. Зад Ана има двапати повеќе деца, одколку пред Мирјана. На кое место е Ана во редот?

121. Во две кошници има вкупно 92 јаболка. Ако од првата во втората кошница преместиме 24 јаболка, тогаш во двете кошници ќе има еднаков број јаболка. Колку јаболка има во секоја кошница?

122. Во три кошници имало вкупно 60 јајца. Во првата кошница имало црвени, во втората жолти и во третата зелени јајца. Марија зела 6 црвени, 8 жолти и 4 зелени јајца, по што во секоја од трите кошници останал еднаков број јајца. Колку јајца имало во секоја кошница на почетокот?

123. Марија во таблата за јајца по грешка ставила 30 варени и неварени јајца. За да открие колку варени и колку неварени јајца има таа ги вртела јајцата на масата. Притоа ако јајцето е варено тоа

се врти 8 пати, а ако не е варено се врти 3 пати. Сите 30 јајца се завртиле 210 пати. Колку варени јајца имало во таблата, а колку неварени?

III ГЕОМЕТРИЈА

III.1. ОТСЕЧКИ

1. Отсечката AB со точката S е поделена на два дела кои се разликуваат за $8\ cm$. Најди ја должината на отсечката, ако покусиот дел е трипати помал од подолгиот дел.

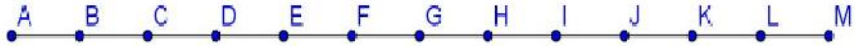
2. Должината на отсечката AB е за $2cm$ поголема од должината на отсечката CD. Ако должината на отсечката CD се зголеми 3 пати, а должината на отсечката AB се зголеми за $10cm$, ќе се добијат еднакви отсечки. Колкави се должините на отсечките AB и CD?

3. Точките A, B, C и D се распоредени на една права така што $\overline{AB} = 2\ cm$, $\overline{AC} = 5\ cm$ и $\overline{BD} = 1\ cm$, Определи ја должината на отсечката CD.

4. Пистата AD е долга $400\ m$ (види цртеж). Определи ја должината на делот BC ако $\overline{AC} = 265\ m$ и $\overline{BD} = 256\ m$.

5. Определи го збирот на должините на сите отсечки прикажани на цртежт десно.

6. Ако сите точки се на еднакви растојанија една од друга, определи кои точки се на едно исто растојание од една од крајните точки на отсечката и од нејзината средина.

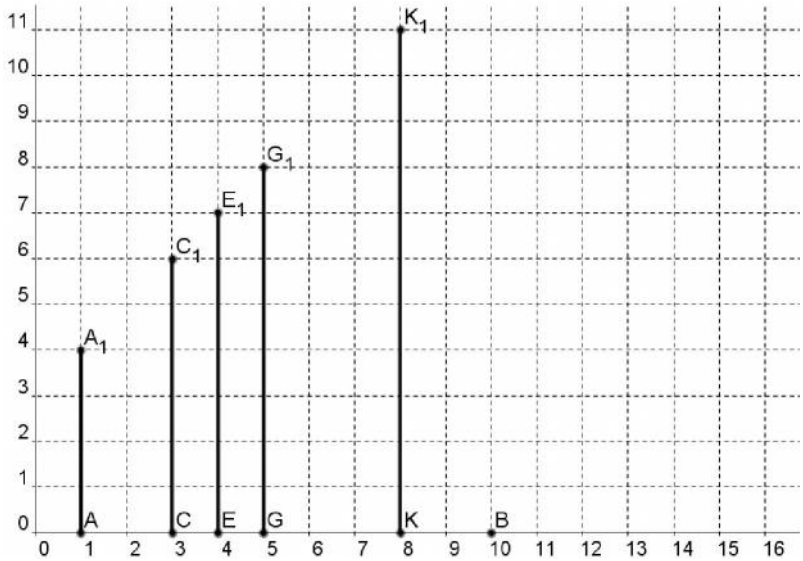


7. Во права алеја се засадени 9 елки кои се на растојание $7\,m$ една од друга. Колку е долга алејата, ако се знае дека елки има на нејзиниот почеток и на нејзиниот крај?

8. Во права алеја на растојание една од друга $80\,cm$ се засадени елки. Растојанието од првата до последната елка е еднакво на $17\,m\,60\,cm$. Колку елки се засадени во алејата?

9. Кибритени чкорчиња, секое со должина $3\,cm$, се редат едно по друго по права линија така што растојанието меѓу левиот крај на најлевото чкорче и десниот крај на најдесното чкорче е еднакво на $1\,m$. Колку чкорчиња најмногу може да се постават, ако растојанието меѓу соседните чкорчиња не е помало од $2\,cm$.

10. На долниот цртеж отсечките се нацртани според определено правило. Отсечката BB_1 не е нацртана. Определи ја нејзината должина.



III.2. ТРИАГОЛНИК

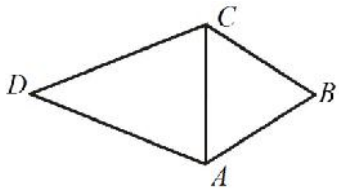
11. Должините на страните на триаголникот ABC се $54mm$, $39mm$ и $47mm$, а должините на страните на триаголникот KLM се $8cm$, $4cm$ и $5cm$. Кој од нив има поголема обиколка (периметар)?

12. Должината на кракот на рамнокрак триаголник е три пати поголема од должината на неговата основа. Определи ги должините на основата и кракот, ако периметарот на триаголникот е $42\,m$.

13. Андреј исекол 9 еднакви рамностранни триаголници, секој со периметар $15\,cm$. Тој триаголниците ги наредил еден до друг така што добил голем рамностран трисголник. Определи го периметарот на добиениот рамностран триаголник.

14. За триаголникот ABC е познато дека
$$\overline{AB}+\overline{BC}=53\,cm,\ \overline{AC}+\overline{BC}=60\,cm \text{ и } \overline{AC}+\overline{AB}=57.$$
Определи ги должините на страните на триаголникот ABC.

15. Периметарот на фигурата $ABCD$ е еднаков на $1628\,m$, а периметарот на рамностраниот триаголник ABC е еднаков на $984\,m$. Определи периметарот на рамнокракиот триаголник ACD.



16. Над страните на еден триаголник со периметар $18\,cm$ од надворешната страна се конструирани рамностранни триаголници. Определи го периметарот на добиената фигура.

III.3. КВАДРАТ И ПРАВОАГОЛНИК

17. Учителката по математика на учениците им ја задала следнава задача: „*Нацртајте точно* 5 *правоаголници,* 3 *квадрати,* 4 *правоаголни триаголници и* 7 *рамнокраки триаголници (без фигурите да имаат заеднички страни).*“ Андреј нацртал најмал можен број фигури, но во целост ги запазил поставените услови. Колку фигури нацртал Андреј?

18. Квадрат и рамностран триаголник имаат еднакви периметри. Страните им се разликуваат за толку колку што е најмалиот парен број. Пресметај ги страните на квадратот и триаголникот и нивниот периметар.

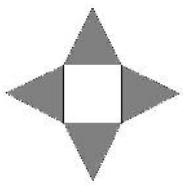
19. Определи ја должината на страната на рамностран триаголник чиј периметар е два пати помал од периметарот на правоаголник со должина $14\,cm$ и ширина $7\,cm$.

20. Даден е квадрат чиј периметар е еднаков на периметарот на триаголник со должина на страна $12\,cm$. Определи ја плоштината на квадратот.

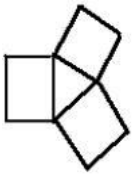
21. Периметарот на квадратот е еднаков на периметарот на рамнокрак триаголник со основа $8\,cm$ и крак $12\,cm$.
    Определи ја плоштината на квадратот.

22. Збирот на периметрите на квадрат и рамностран тиаголник е еднаков на $216\,cm$. Страната на триаголникот е за $2\,cm$ поголема од страната на квадратот. Определи ги плоштината на квадратот и периметарот на триаголникот.

23. Обоените триаголници се рамностранни. Периметарот на добиената фигура е еднаков на $24\,cm$. Определи ја плоштината на квадратот.

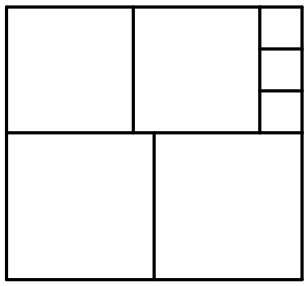


24. Фигурата прикажана на цртежот десно е формирана од рамностран триаголник и три квадрати. Нејзиниот периметар е еднаков на $36\,cm$. Определи ја плоштината на едниот од трите квадрати.



25. Миле имал правоаголен картон со страни $55\,cm$ и $20\,cm$. Тој правоаголникот го расекол на квадрати со периметар $20\,cm$. Колку квадрати Миле добил?

26. Правоаголник е поделен на 7 квадрати (види цртеж). Ако периметарот на најмалиот квадрат е $2\,cm$, колкав е периметарот на почетниот правоаголник.



27. Продавница е во форма на квадрат со страна 7 метри. Во продавницата треба да се постави статуа со квадратна основа со страна од 1 метар. Дали може преостанатот дел од продавницата да се покрие со 4 правоаголници со страни 3 и 4 метри. (Правоагониците не смее да се расекуваат).

28. Определи го збирот на периметрите на сите различни правоаголници кои што можат да се образуваат од девет квадрати со должина на страна $1\,cm$ (при конструкција на правоаголниците не е задолжително да учествуваат сите квадрати).

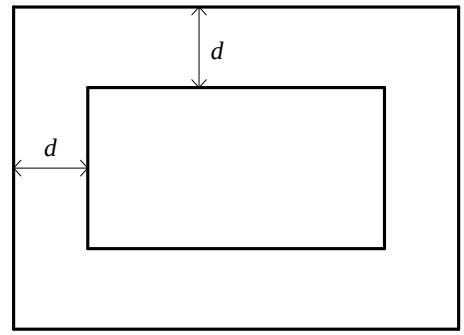
29. Колку метри бодликава жица е потребно за да се огради нива долга $50\,m$, а широка $30\,m$, ако оградата е составена од три реда бодликава жица?

30. Ако една страна на квадратот се зголеми два пати, а другата се зголеми за $22mm$, се добива правоаголник чиј обиколка (периметар) е за $2000mm$ поголема од обиколката (периметарот) на квадратот. Колкава е должината на страната на дадениот квадрат?

31. Ширината на правоаголникот е $12\,cm$ и е помала од должината. За колку сантиметри треба да се наголеми ширината за да се добие квадрат со периметар еднаков на $52\,cm$.

32. Збирот од должините на страните на правоаголникот е $40\,cm$. Едната страна на правоаголникот е 4 пати подолга од другата.
а) Определи ги должините на страните на правоаголникот.
б) Дали може, со 3 паралелни прави, дадениот правоаголник да се подели на 4 еднакви квадрати?
в) За колку сантиметри се разликува збирот од должините на страните на делбен квадрат од збирот од должините на страните на правоаголникот?

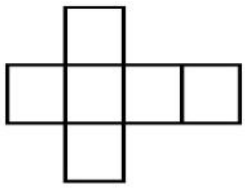
33. Тревна патека обиколува правоаголно асфалтно игралиште со димензии $36\,dm$ и $12\,m$ (цртеж десно). Ширината d на патеката е еднаква на четвртината од полупериметарот на игралиштето. Колку метри жица е потребно да се огради тревната патека од игралиштето, ако тоа се заобиколи со 5 реда на жица? Колку столбови се потребни за да се прицврсти оградата, ако растојанието меѓу било кои два соседни столба е $6\,dm$?



34. Димитар има два квадратни картони кои имаат страни $3\,cm$ и $4\,cm$. Дали може од нив, со сечење, да формира квадрат без да отфрли материјал? Во случај на потврден одговор, колку е страната на тој квадрат?

35. Правоаголник со доина $9\,cm$ и ширина $3\,cm$ подели го на 8 квадрати кои не мора да имаат различни должини на страни. Пресметај го збирот на периметрите на делбените квадрати.

36. Фигурата прикажана на цртежот десно се сотои од шест еднакви квадрати и нејзиниот периметар е еднаков на $84\,cm$. Определи ја плоштината на оваа фигура.



37. Периметарот на правоаголник со страна $20\,cm$ е еднаков на периметарот на квадрат со страна $15\,cm$. Определи ја плоштината на правоаголникот.

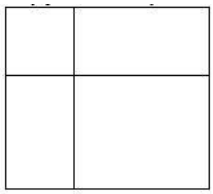
38. Периметарот на еден правоаголник е еднаков на периметарот на квадрат со плоштина $36\,cm^2$. Должините на страните на правоаголникот изразени во сантиметри се два последователни непарни природни броја. Определи ја плоштината на овој правоаголник.

39. Мравка оди по патека, која формира квадрат $ABCD$ со должина на страна $14\,cm$. Мравката тргнала од точката A во насока $B-C-D$ итн. и изминала $7\,m\,2\,cm$, по што застанала да се одмори. На која страна на квадратот мравката застанала да се одмори?

40. Околу зграда со правоаголна основа, чија должина е $26\,m$, а ширина е $15\,m$, на растојание $5\,m$ од зградата е подигната ограда. Определи ја плоштината на неизградената заградена површина.

41. Збирот на најголемите шест различни непарни двоцифрени броеви е еднаков на периметарот на еден квадрат изразен во сантиметри. Определи ја плоштината на овој квадрат.

42. Квадрат е поделен на два квадрати и два правоаголника (цртеж десно). Периметарот на едниот квадрат е еднаков на $36\,cm$, а плоштината на еден од правоаголниците е еднаква



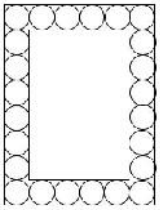
на $144\,cm^2$. Определи ги плоштината на другиот квадрат и периметарот на почетниот квадрат.

43. Должината на едната страна на еден правоаголник е $300\,mm$ и таа е шест пати подолга од другата страна. Определи ги периметарот и плоштината на овој правоаголник.

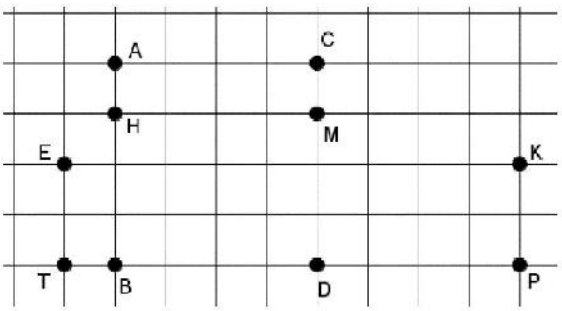
44. За оградување на дворно место во форма на правоаголник дедо Стојан искористил 56 метри жица. Должината на дворното место е три пати поголема од ширината. Определи ја плоштината на дворното место.

45. Правоаголник $ABCD$, со должини на страни $8\,cm$ и $6\,cm$, е поделен на два правоаголника. Едниот од нив ($ABKM$) има периметар кој е за $6\,cm$ помал од периметарот на правоаголникот $ABCD$. Определи ја плоштината на правоаголникот $ABKM$.

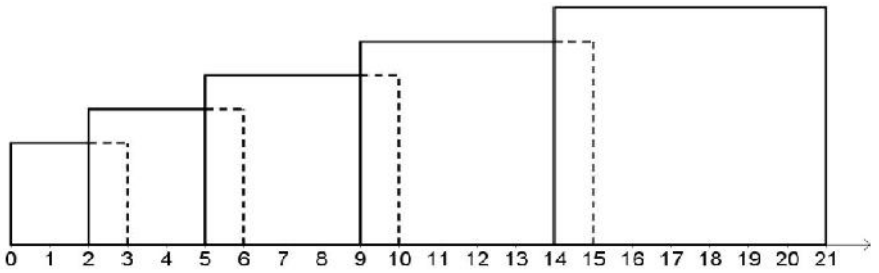
46. Михаела направила рамка за фотографии во форма на правоаголник со надворешни димензии $16\,cm$ и $12\,cm$ и на неа налепила кругови со радиус $1\,cm$ како што е прикажано на цртежот десно. Определи ги димензиите на најголемата фотографија која може да се стави во рамката.



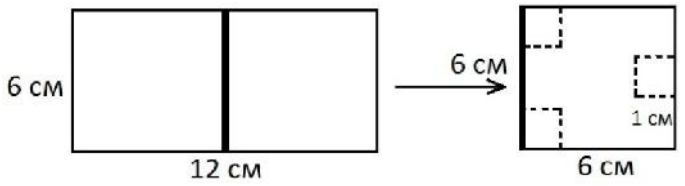
47. Означените точки на цртежот десно се темиња на правоаголници. Кој правоаголник има најголема плоштина? (Квадратот е правоаголник.)



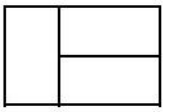
48. На низата квадрати се додадени од десно уште четири квадрати. Определи ја плоштината на делот од осмиот квадрат кој не се преклопува со соседните квадрати.



49. Правоаголен лист хартија со димензии $6\,cm$ и $12\,cm$ е превиткан по средината (на долниот цртеж по задебелената линија) и е добиен квадрат со должина на страна $6\,cm$. Потоа се отсечени три квадратчиња со должина на страна $1\,cm$, како што е прикажано на цртежот и листот е одвитка. Определи го периметарот на добиената фигура.

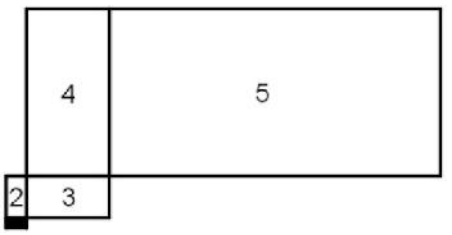


50. Три мали еднакви правоаголници се наредени како на цртежот десно и од нив е добиен еден голем правоаголник. Периметарот на големиот правоаголник е еднаков на $200\,cm$. Определи ја плоштината на големиот правоаголник.



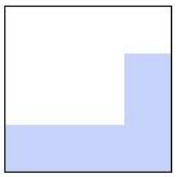
51. Должините на страните на еден правоаголник се $20\,cm$ и $13\,cm$, а на еден квадрат е $16\,cm$. Која фигура има поголем периметар, а која поголема плоштина?

52. Соња реди правоаголни плочки една до друга на начинот прикажан на цртежот десно. Таа почнува со црната плочка. Колкава е плоштината на седмата плочка, ако должина-



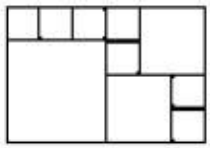
та на секоја плочка е два пати поголема од ширината, а должините на страните на црниот правоаголник се $1\,cm$ и $2\,cm$.

53. На цртежот десно е прикажан голем квадрат во кој се сместени два мали квадрати со плоштини $25\,cm^2$ и $4\,cm^2$. Определи го периметарот на сивата фигура.

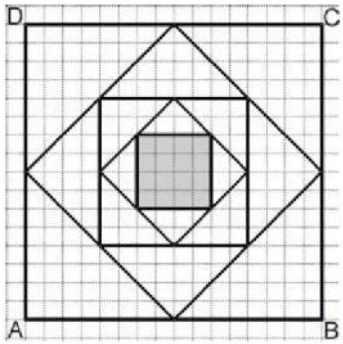


54. За колку сантиметри ќе се промени периметарот на правоаголник ако едната негова страна се намали за $12\,cm$, а другата се зголеми за $75\,cm$.

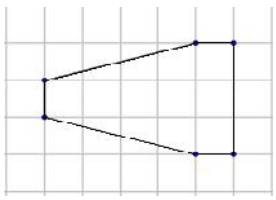
55. Правоаголник е составен од десет квадрати, при што најголемиот има периметар $24\,cm$ (цртеж десно). Определи ја плоштината на правоаголникот.



56. Плоштината на квадратот $ABCD$ е еднаква на 64. Определи ја плоштината на сивиот квадрат.



57. Колку пати плоштината на фигурата прикажана на цртежот десно е поголема од плоштината на едно квадратче?



IV ЛОГИКА И КОМБИНАТОРИКА

IV.1. ВЕНОВИ ДИЈАГРАМИ

1. Учениците од IV^a одделение членуваат во еколошката, литературната или математичката секција. Пет ученици членуваат во сите три секции, а девет ученици членуваат во по две секции. Во еколошката и литературната членуваат 8 ученици, и исто толку во литературната и математичката секција. Исто така, 20 ученици членуваат само во по една секција и тоа по 5 во еколошката и математичката секција. Колку ученици има во IV^a одделение?

2. Во едно училиште учат 100 ученици во петто одделение. Од нив 75 членуваат во математичката секција, 83 ученици се членови на музичката секција и 10 ученици не членуваат во ниту една од овие две секции. Колку ученици членуваат и во математичката и во музичката секција?

3. Подот на една сала има плоштина $32\,m^2$ и е покриен со 3 килими. Првиот килим има плоштина $15\,m^2$, вториот има плоштина $10\,m^2$ и третиот има плоштина $8\,m^2$. Секои два килима се препокриваат со $2\,m^2$, а $1\,m^2$ е покриен од трите килими. Колку метри квадратни од салата не се покриени со килими?

4. На една екскурзија со посета на музеј и изложба отишле 56 ученици. Во музеј биле 37 ученици, а изложбата ја разгледале 25 ученици. Понатаму, 18 ученици го посетиле и музејот и изложбата. Дали има ученици кои не ги посетиле ниту музејот ниту изложбата?

5. Во една фискултурна сала 16 од топките се шарени и 11 се топки за одбојка. Колку топки има во салата, ако 6 од топките за одбојка се шарени?

6. Во одделението на Горјан 26 ученици тренираат кошарка или одбојка. Од нив 19 тренираат кошарка, а 12 тренираат одбојка. Колку ученици се занимаваат и со двата спорта?

IV.2. ЛОГИЧКИ ГЛАВОБОЛКИ

7. Подреди ги следниве настани според редоследот на случување почнувајќи од настанот кој прв се случил:
   а) Трите ластовички истовремено полетале од јажето за простирање алишта.
   б) Една ластовичка слетала на јажето за просторање алишта.
   в) Баба Бојана го врзала јажето за простирање алишта.
   г) На јажето слетале уште две ластовички.

8. Во зградата на Андреј пет семејства имаат по 3 деца, при што две од нив имаат близнаци. Ако близнаците се само момчиња, колку најмногу девојчиња има меѓу децата на овие семејства?

9. Трите внуци на баба Марија се родени во еденист ден, но во различни години. За роденденот баба Марија подготвила три торти така што на едната ставила 2 свеќички, на другата 4 свеќички и на третата 5 свеќички. Колку години има Бојан, ако Иван е 2 години постар од Коста?

10. На вкупно 21 дете се разделени 200 ореви. Докажи дека како и да се разделени оревите, ќе постојат деца кои што добиле еднаков број ореви.

11. Ана, Бојан, Васко и Дијана се натпреваруваат во трчање на 400 метри. Ако Бојан го претекнеше Васко, тогаш Бојан ќе беше

втор. Ако Дијана на целта стигнеше пред Бојан, тогаш Бојан ќе беше последен. Кој победил во трката?

12. Ангел, Борис, Васил и Данчо се натпреварувале во трчање. Ангел на целта стигнал пред Борис, Васил стигнал по Данчо, а Борис стигнал пред Васил. Кој бил последен?

13. Една година месецот јуни имал 5 вторници и 5 среди. Во кој ден од седмицата бил 24. мај истата година?

14. Секое од четирите девојчиња Ана, Билјана, Василка и Галина има различен број чоколади и тоа најмалку 5, а најмног 8. Галина нема 8 чоколади. Бројот на чоколадите на Василка е парен број, а на Билјана е непарен број. Билјана има повеќе чоколади од Василка. Која има 8 чоколади?

15. На таблата се запишани броевите 9, 11, 13, 15, 17 и 19. Во секој чекор се бришат два од запишаните броеви и наместо низ се запишува збирот на избришаните два броја намален за 2. По неколку чекори на таблата ќе биде запишан еден број. Кој е тој број?

16. Андреј кажал дека на неговиот роденден имало повеќе од шест гости, на што Горјан забележал дека бројот на гостите бил поголем од 5. Колку гости имало на роденденот на Андреј, ако се знае дека точно една од дадените изјави е вистинита?

17. Андреј има најмалку 6 златници и сребреници. Познато е дека меѓу секои четири монети има барем еден златник и дека меѓу секои пет монети има барем еден сребреник. Колку најмногу монети може да има Андреј?

18. Сашо, Никола, Васко и Мишко се натпреварувале во скок во далечина. Сашо скокнал подалеку од Никола и Васко, а Никола скокнал поблиску од Васко, но подалеку од Мишко. Кој имал најкраток скок?

19. На меѓународен конгрес на математичари приуствувале 100 научници, од кои 60 се мажи и 40 жени, а 7 од нив се вегетаријанци. Половина од научниците се европејци, а другата половина се претставници на останатите континенти. Колку научници со сигурност се истовремено европејци и мажи, но не се вегаријанци?

20. Бременските музиканти Магарето, Кучето, Мачето и Петелот одат по патот во колона еден зад друг. Ако Магарето, кое е на почетокот на колоната, застане меѓу Кучето и Мачето, тогаш Мачето ќе биде на чело на колоната. Кој оди пред Петелот?

21. Марија има 13 цветови, 5 од кои се рози, а останатите се лалиња. Ако 6 цветови се бели, а останатите се црвени, колку најмалку лалиња се црвени?

22. Радица има 5 топчиња: плаво, црвено, жолто, зелено и лилјаково. Ги означила со броевите од 1 до 5. Броевите на жолтото и зеленото топче се парни. Потоа топчињата ги наредила во ред едно до друго по растечки редослед на броевите со кои ги означила. До црвеното има само едно топче – зеленото. Лилјаковото топче не е до зеленото. Определи ја бојата на јајцето означено со број 3.

23. Ана, Дима и Сијка учат во различни одделенија: прво, второ и трето. Дима и ученичката од трето одделение патуваат до училиште со еден и ист автобус. Ученичката од второ одделение живее во зградата на Дима, но повеќе сака да се дружи со Ана. Кое девојче во кое одделение учи?

24. Мартин фрлал две еднакви коцки за играње 3 пати. Забележал дека секогаш паѓа различна комбинација броеви точки, во која бројот на точките кои паднале на едната коцка е за 1 поголем од бројот на коцките кои паднале на другата коцка. Определи го најголемиот можен збир на точки кои паднале на двете коцки во трите фрлања.

25. Во еден месец понеделниците биле повеќе од вторниците, а неделите повеќе од саботите. Кој ден од седмицата е петтиот ден од тој месец?

26. На еден остров живеат само витези и лажливци. Витезите секогаш ја говорат вистината, а лажливците секогаш лажат. Тројца витези и тројца лажливци од островот учествувале во разговор во кој од четири соговорници биле искажани следниве четири тврдења: :
    1) „Тројца од нас се витези.“
    2) „Тројца од вас се лажливци.“
    3) „Двајца од вас се витези.“
    4) „Двајца од нас се витези.“

    Колку од овие тврдења со сигурност се искажани од лажливци?

27. На еден остров живеат витези, кои секогаш ја говорат вистината и лажливци, кои секогаш лажат. Еден патник сретнал три жители од островот и секој од нив го прашал колку од неговите сопатници се витези. Првиот одговорил: „Ниту еден“, а вториот одговорил „Еден“. Што одговорил третиот жител на островот?

28. Коста, Јане и Владимир засадиле дрвца: круша, јаболка и вишна. Секој засадил по едно дрво, чие име не започнува на иста буква како неговото име. Кој кое дрво го засадил?

29. Во чаша, шише, лонец и бокал се турени млеко, лимонада, чај и вода, во некој редослед. Познато е дека водата и млекото не се во чашата, садот со лимонадата се наоѓа меѓу лонецот и меѓу садот со чај, во бокалот нема ниту лимонада, ниту вода, а шишето се наоѓа блиску до бокалот и садот со млекото. Која течност во кој сад се наоѓа?

30. Во кутија има 5 црвени, 6 плави и 7 жолти топчиња. Топчињата гиизвлекуваме без да гледаме. Колку топчиња треба најмалку да извлечеме за да сме сигурни дека сме извлекле барем две топчиња со различни бои?

31. Секој од броевите од 1 до 20 е запишан на карта, а потоа картите се превртени со запишаните броеви надолу и се размешани. Колку карти најмалку треба да се изберат така што меѓу броевите запишани на избраните карти да има број чија цифра на единиците не е еднаква на 3 или 6?

32. екој од броевите од 1 до 50 е запишан на карта, а потоа картите се превртени со запишаните броеви надолу и се размешани. Колку карти најмалку треба да се изберат така што меѓу броевите запишани на избраните карти да има двоцифрен број.

33. Во кутија се наоѓаат 5 плави, 12 црвени, 7 жолти и 6 зелени топчиња. Колку топчиња, без гледање треба да извадиме од кутијата за да сме сигурни дека сме извадиле најмалку едно црвено топче?

34. Во една кутија има 30 црвени, 18 плави и 11 жолти топчиња. Без да гледаме извлекуваме топчиња. Колку топчиња треба да извадиме за да сме сигурни дека сме извадиле најмалку едно црвено топче?

35. Сашка имала 3 корпи со јаболка. Во корпите имало 12, 14 и 22 јаболка. Дозволено е Сашка да избере две корпи, од трите корпи кои ги имала, и да префрлува јаболка од едната во другата корпа. Притоа, мора да префрли од една во друга корпа што ги избрала онолку јаболка колку што има во корпата во која ги додава (префрла) јаболката. Сашка направила три префрлувања на опишаниот начин и во сите корпи имало еднаков број јаболка. Како Сашка го направила тоа?

36. Мартин има три канти од кои две собираат точно по $3l$ и $5l$, а во третата има $10\,l$ млеко. Тој со помош на трите канти треба да измери точно $4l$ млеко. Дали Мартин може тоа да го направи и како?

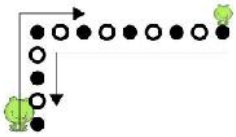
37. Располагаме со вага со која може да се измерат масите на точно две јаболка (ниту помалку, ниту повеќе). Кој е најмалиот број мерења со кој може да се измерат:
    а) три јаболка, б) четири јаболка, в) пет јаболка.

38. Располагаме со вага со која може да се измерат масите на точно тријаболка (ниту помалку, ниту повеќе). Кој е најмалиот број мерења со кој може да се измерат:
    а) четири јаболка, б) пет јаболка, в) шест јаболка.

39. На еден напревар по математика биле зададени 5 задачи, при што секоја задача се оценувала со различен број поени. Најлесната задача се оценувала со најмалку поени, потоа втората по тежина со повеќе поени итн. се додека се стигне до најтешката задача која се оценувала со најмногу поени. Андреј точно ги решил петте задачи, при што за двете најлесни задачи добил вкупно 4 поени, а за двете најтешки задачи добил вкупно 11 поени. Колку поени освоил Андреј на натпреварот?

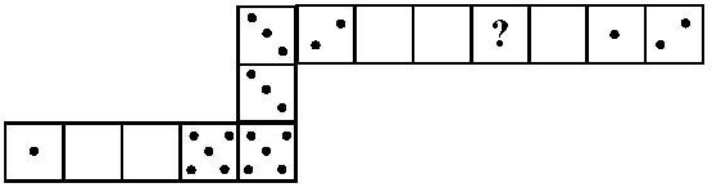
40. Во секој фудбалски натпревар победникот добива 3 бода, поразениот 0 бодови, а за нерешен резултат двата тима добиваат по 1 бод. Екипата *Пелистер* одиграла 7 натпревари, во кои дала вкупно 8 гола и примила вкупно 5 гола. Колку најмногу и колку најмалку бодови може да освои екипата *Пелистер* во овие 7 натпревари?

41. По камчињата на цртежот десно големата жаба скока преку едно камче, а малата жаба скока на секое камче. Колку камчиња ќе има меѓу двете жаби откако секоја од нив ќе направи по 4 скока?



42. Комплет „домина“ содржи 28 различни плочки (домина), кои според правилата на играта се редат една до друга така што бројот на точките од половината на едното домино е еднаков на бројот на точките од половината на другото домино. Седум

домина се наредени како што е прикажано на цртежот десно. Колку точки треба да има во полето со прашалникот така што збирот на сите точки на седумте плочки да е можно најмал при почитување на правилата на играта?



IV.3. ЗАНИМЛИВИ БРОЕЊА

43. Куќите во една улица се нумерирани од 1 од 100. Колку пати во броевите на куќите се јавува цифрата 7?

44. Колку има трицифрени броеви кои се читаат исто од лево кон десно и од десно кон лево?

45. Определи го бројот на двоцифрените броеви кои се четири пати поголеми од збирот на своите цифри.

46. За еден број ќе велиме дека е огледален ако исто се чита од лево – на десно и од десно – на лево. Определи го бројот на седумцифрените огледални броеви кои се запишуваат само со цифрите 0 и 1.

47. За еден двоцифрен број ќе велиме дека е *трио* ако едната од цифрите со кои е запишан е за 3 помала од другата цифра. Определи бројот на двоцифрените броеви кои не се *трио*.

48. Определи го бројот на шестцифрените броеви чии четири последователни цифри го формираат бројот 2019.

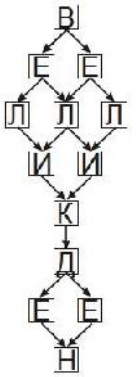
49. Определи го бројот на четирицифрените броеви чиј збир на цифри е еднаков на 3, а потоа подреди ги овие броеви по големина почнувајќи од најголемиот број.

50. Нина има кутија со картонски букви во која има 12 букви Н, 8 букви И и 9 букви А. Колку пати таа може со овие букви да го запише своето име?

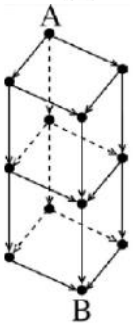
51. Дадени се броевите 60, 70, 5 и 4. На колку различни начини може да се изберат два од дадените броеви така што разликата меѓу нив е помала од 60?

52. На училишниот шаховски турнир учествувале десет ученици и секој ученик одиграл по една партија со секој друг ученик. Колку вкупно партии се одиграни на турнирот?

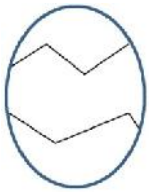
53. Во еден ресторан за ручек предлагаат 3 вида супи, 2 вида основно јадење и 3 вида десерт. На колку начини може дас се состави мени, кое вклучува супа, основно јадење и десерт?



54. На колку начини може да се прочита зборот Великден, ако се чита одгоре –надолу?



55. На колку различни начини може да се стигне од точката A до точката B, движејќи се по отсечките во насока која ја покажуваат стрелките?



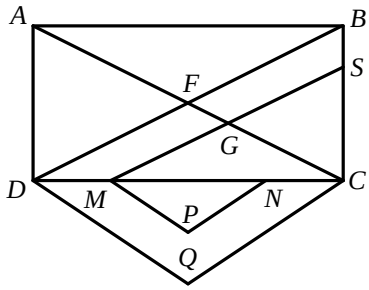
56. Имаме неограничен број јајца, поделени на три делови (цртеж десно). Располагаме со црвена, плава, зелена и жолта боја. Секој дел од јајцето треба да се бојадиса во точно една боја, а секое

јајце во барем две бои. Колку различни јајца може да се бојадисаат?

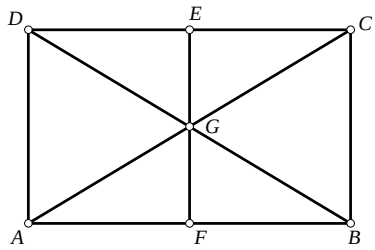
IV.1. БРОЕЊЕ ГЕОМЕТРИСКИ ФИГУРИ

57. Дадени се точките A, B, C, D од кои никои три не припаѓаат на иста права. Испиши ги сите агли на кои врвот им е некоја од дадените точки, а на краците припаѓаат две од преостанатите три точки. Потоа испиши ги сите отсечки формирани со овие 4 точки. Што има повеќе отсечки или агли?

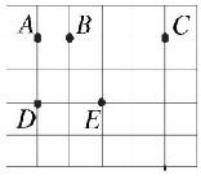
58. Колку триаголници има на цртежот. Испишете ги!



59. Што има повеќе на цртежот: отсечки или триаголници.

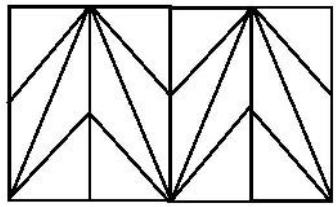


60. Преброј ги триаголниците, чии темиња се некои од точките A, B, C, D, E прикажани на цртежот десно.

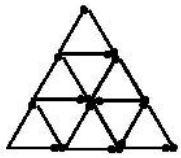


61. Колку триаголници се прикажани на цртежот десно?

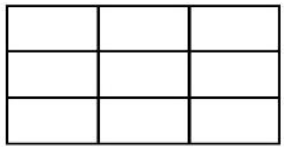
62. Колку триаголници содржи фигурата прикажана на цртежот десно.



63. Фигурата приажана на цртежот десно е составена од 18 кибритени чкорчиња, при што се добиени 13 триаголници: 9 мали, 3 средни (составени од по 4 мали) и 1 голем, чии страни содржат по 3 чкорчиња. Ако отстраниме едно од чкорчињата, колку триаголници со сигурност че останат?

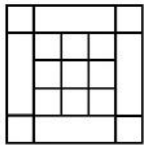


64. Колку правоаголници се содржани на цртежот десно?

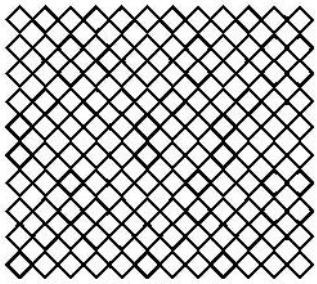


65. Колку квадрати и правоаголници се прикажани на цртежот десно?

66. Определи го бројот на квадратите кои се прикажани на цртежот десно.



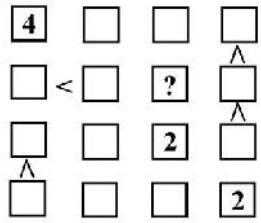
67. Колку мали квадратчиња се прикажани на цртежот десно?



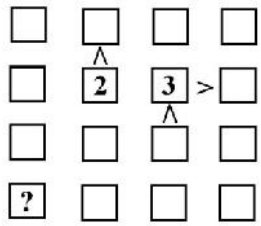
IV.5. ДОПОЛНИТЕЛНИ ЗАДАЧИ

68. Во секое крукче од цртежот треба да се запише еден од броевите 1, 2, 3, 4 и 5, така што збирот во трите вертикални крукчиња да биде еднаков на збирот на броевите во трите хоризонтални крукчиња. Колку решенија има задачата?

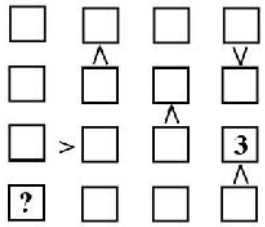
69. Во секое квадратче на цртежот десно треба да се стави по еден од броевите 1, 2, 3 или 4 така што броевите во секој ред и во секоја колона се различни и да важат знаците за помало и поголемо. Кој број треба да стои на местото на прашалникот?



70. Во секое квадратче на цртежот десно треба да се стави по еден од броевите 1, 2, 3 или 4 така што броевите во секој ред и во секоја колона се различни и да важат знаците за помало и поголемо. Кој број треба да стои на местото на прашалникот?



71. Во секое квадратче на цртежот десно треба да се стави по еден од броевите 1, 2, 3 или 4 така што броевите во секој ред и во секоја колона се различни и да важат знаците за помало и поголемо. Кој број треба да стои на местото на прашалникот?

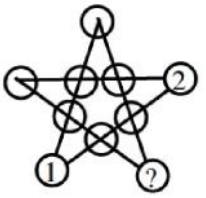


72. Броевите од 1 до 25 се запишани во квадратна табела 5×5 (види пример). Разгледуваме 12 збирови од по 5 броја во табелата: во петте реда, во петте колони и на двете дијагонали. Табелата ја нарекуваме парна, ако сите тие збирови се парни броеви, а непарна ако сите тие збирови се непарни броеви. Дали постои:

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

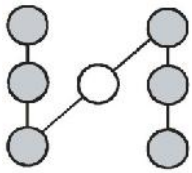
а) парна табела, б) непарна табела.

73. Во крукчињата на цртежот десно да се запише по еден од броевите 1, 2, 3 или 4 така што секоја линија ги содржи четирите броја. Два броја веќе се запишани. Кој број треба да се запише на местото на прашалникот така што ќе

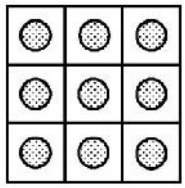


биде исполнет наведениот услов?

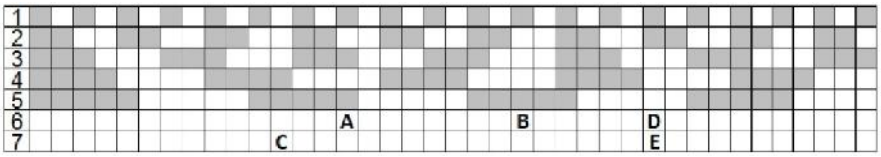
74. Броевите од 1 до 7 запиши ги во кругчињата на цртежот десно, во секое кругче по еден број, така што збирот на броевите запишани во кругчињата на секоја од рите линии е еднаков.



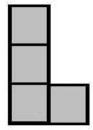
75. На цртежот десно е дадена табла со девет мали квадратчиња, на секое од кои има по еден жетон. Две квадратчиња се соседни ако имаа заедничка страна. Во определен момент секој жетон се преместува во соседно квадратче. Колку квадратчиња најмногу може да останат празни при тоа преместување?

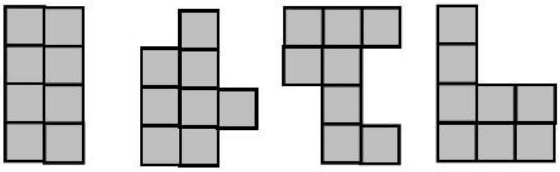


76. На долниот цртеж квадратчињата се обоени според определено правило. Кои букви ќе бидат во обоени квадратчиња?



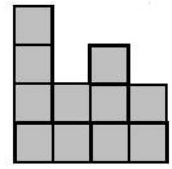
77. Колку од долните фигри може да се состават со две L тетрамина (види цртеж десно)?

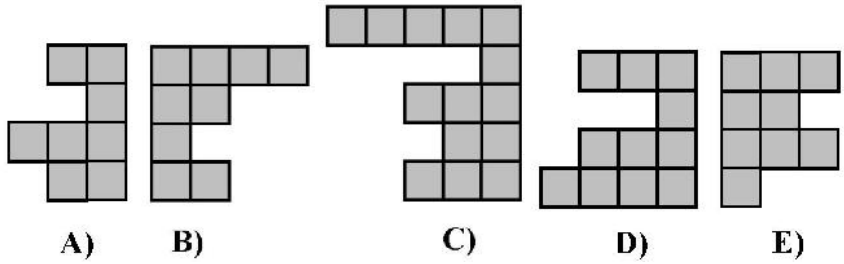




78. Картон со форма на правоаголник има димензии $35\,cm$ и $25\,cm$. Ако се искористи целиот картон кој е најмалиот број квадрати (со страни природни броеви), кои можат да бидат исечени од него?

79. Која од дадените фигури треба да се употреби за да со помош на фигурата прикажана на цртежот десно се состави квадрат?





80. Даден е правоаголник со страни $36\,cm$ и $26\,cm$. Од него отсекуваме квадрат со најголема можно страна. Од останатиот дел од правоаголникот повторно отсекуваме квадрат со најголема можна страна итн. Определи го бројот на пресекувањата.

РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИТЕ

I АРИТМЕТИКА И АЛГЕБРА

I.1. ПРЕСМЕТУВАЊА

1. Пресметај:
   а) $1000+100-100+1000$,
   б) $47+28-69+15+30$,
   в) $2\cdot 2\cdot 2\cdot 2+2\cdot 2\cdot 2$,
   г) $3\cdot 3\cdot 3\cdot 3+5\cdot 5\cdot 5+7\cdot 7+9$.

   Решение. а) Имаме:
   $$1000+100-100+1000=1000+(100-100)+1000$$
   $$=1000+1000=2000.$$
   б) Имаме
   $$47+28-69+15+30=75-69+15+30=6+15+30=51.$$
   в) Имаме
   $$2\cdot 2\cdot 2\cdot 2+2\cdot 2\cdot 2=16+8=24.$$
   г) Имаме
   $$3\cdot 3\cdot 3\cdot 3+5\cdot 5\cdot 5+7\cdot 7+9=81+125+49+9=264.$$

2. Пресметај ја вредноста на изразот:
   а) $185-(25+35):5$,
   б) $210+(24+16):8-96:6$,
   в) $133-(45-12):3+(21+14):7$.

   Решение. а) Имаме:
   $$185-(25+35):5=185-60:5=185-12=173.$$
   б) Имаме:
   $$210+(24+16):8-96:6=210+40:8-16=210+5-16=199.$$
   в) Имаме:
   $$133-(45-12):3+(21+14):7=133-33:3+35:7$$
   $$=133-11+5=127.$$

3. Пресметај ја вредноста на изразот

а) $900-792:6-2$,

б) $210+16\cdot 8-96:8$,

в) $133-33\cdot 3+12\cdot 7$.

Решение. а) Имаме:

$$900-792:6-2=900-132-2=768-2=766.$$

б) Имаме:

$$210+16\cdot 8-96:8=210+128-12=338-12=326.$$

в) Имаме:

$$133-33\cdot 3+12\cdot 7=133-99+84=34+84=118.$$

4. Пресметај ја вредноста на изразот:

$$3\cdot(120-24\cdot 5)+432\cdot(167-67)-352\cdot(28+72).$$

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned}3\cdot(120-24\cdot 5)+432\cdot(167-67)-352\cdot(28+72)&=\\ &=3\cdot(120-120)+432\cdot 100-352\cdot 100\\ &=0+43200-35200=8000.\end{aligned}$$

5. Пресметај ја вредноста на изразот:

$$24:(0+4)+2010:(2+0+1+0)-2\cdot 0\cdot 1\cdot 0.$$

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned}24:(0+4)+2010:(2+0+1+0)-2\cdot 0\cdot 1\cdot 0&=24:4+2010:3+0\\ &=6+670=676.\end{aligned}$$

6. Пресметај:

$$20130+2\cdot(480\cdot 4\cdot 14+30\cdot 44\cdot 16)-(5\cdot 80\cdot 43+19\cdot 400\cdot 3)\cdot 2$$

Решение. Со непосредно пресметување добиваме

$$\begin{aligned}20130+2\cdot(480\cdot 4\cdot 14+30\cdot 44\cdot 16)-(5\cdot 80\cdot 43+19\cdot 400\cdot 3)\cdot 2&=\\ &=20130+2\cdot(480\cdot 56+44\cdot 480)-(400\cdot 43+400\cdot 57)\cdot 2\\ &=20130+2\cdot 480\cdot 100-2\cdot 400\cdot 100\\ &=20130+96000-80000\\ &=20130+16000=36130.\end{aligned}$$

7. Пресметај ја вредноста на изразот:

а) $(37-7\cdot 5)\cdot 14-4\cdot 6$,

б) $(35-5\cdot 0):7+22:2$,

в) $327864\cdot 0\cdot 9+2015\cdot 2-5\cdot 403$.

Решение. а) Имаме:

$$(37-7\cdot 5)\cdot 14-4\cdot 6=(37-35)\cdot 14-24=2\cdot 14-24=28-24=4.$$

б) Имаме:

$$(35-5\cdot 0):7+22:2=(35-0):7+11=35:7+11=5+11=16.$$

в) Имаме:

$$327864\cdot 0\cdot 9+2015\cdot 2-5\cdot 403=0+4030-2015=2015.$$

8. Пресметај ја вредноста на изразот

$$[20+18+16+14+12+10-(19+17+15+13+11+9]\cdot$$
$$\cdot[10+12+14+16+18+20-(9+11+13+15+17+19)].$$

Решение. Имаме:

$$[20+18+16+14+12+10-(19+17+15+13+11+9]\cdot$$
$$\cdot[10+12+14+16+18+20-(9+11+13+15+17+19)]=$$
$$=(20-19+18-17+16-15+14-13+12-11+10-9)\cdot$$
$$\cdot(10-9+12-11+14-13+16-15+18-17+20-19)$$
$$=(1+1+1+1+1+1)\cdot(1+1+1+1+1+1)=6\cdot 6=36.$$

9. Пресметај ја вредноста на изразот

$$A=2+5+8+11+14+17+20+23+26+29-$$
$$-1-4-7-10-13-16-19-22-25-28.$$

Решение. Имаме:

$$A=2+5+8+11+14+17+20+23+26+29-$$
$$-1-4-7-10-13-16-19-22-25-28$$
$$=(2-1)+(5-4)+(8-7)+(11-10)+(14-13)+$$
$$+(17-16)+(20-19)+(23-22)+(26-25)+(28-28)$$
$$=1+1+1+1+1+1+1+1+1+1=10.$$

10. Пресметај ја вредноста на изразот:

а) $(44:11+6)\cdot 9+10$,

б) $1762+1762\cdot(76\cdot 3-45\cdot 5)$,

в) $(228:4-128:4)\cdot 5-4\cdot 16-4\cdot 9$.

Решение. а) Имаме:

$$(44:11+6)\cdot 9+10=(4+6)\cdot 9+10=10\cdot 9+10=90+10=100.$$

б) Имаме:

$$\begin{aligned}1762+1762\cdot(76\cdot 3-45\cdot 5)&=1762+1762\cdot(228-225)\\&=1762+1762\cdot 3=1762\cdot(1+3)\\&=1762\cdot 4=7048.\end{aligned}$$

в) Имаме:

$$\begin{aligned}(228:4-128:4)\cdot 5-4\cdot 16-4\cdot 9&=(57-32)\cdot 5-64-36\\&=25\cdot 5-100=125-100=25.\end{aligned}$$

11. Пресметај ја вредноста на изразот:

а) $3+927:9-6+4$,

б) $(3+927):(9-6)+4$,

в) $3+927:9-6\cdot 4$.

Решение. а) Имаме:

$$3+927:9-6+4=3+103-6+4=106-6+4=104.$$

б) Имаме:

$$(3+927):(9-6)+4=930:3+4=310+4=314.$$

в) Имаме:

$$3+927:9-6\cdot 4=3+103-23=106-24=82.$$

12. Дадени се броевите $A=1+3+5+...+99$ и $B=2+4+6+...+100$. Кој број е поголем и за колку?

Решение. Секој собирок во B е за 1 поголем од собирокот кој се наоѓа на истото место во A. Во A и во B има по 50 собироци. Значи поголем е бројот B и тоа за 50.

13. Со колку нули завршува производот

$$1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot ...\cdot 97\cdot 98\cdot 99\cdot 100.$$

Решение. Нула се добива секогаш кога се множат 2 и 5. Бројот на нулите во крајниот резултат е еднаков на бројот на множителите 5, бидејќи бројот на множителите 2 е поголем од бројот на множителите 5. Според тоа, задачата се сведува на наоѓање на бројот на множителите 5. Тие се по два во секоја десетка (на

пример, од 1 до 10 множители има во броевите 5 и 10, а од 11 до 20 во броевите 15 и 20), како и по уште еден дополнителен множител во броевите деливи со 25, т.е. во броевите 25, 50, 75 и 100. Според тоа, производот завршува на

$$2 \cdot 10 + 4 = 24 \text{ нули.}$$

14. Определи ја цифрата на единиците на збирот

$$1+1\cdot 2+1\cdot 2\cdot 3+1\cdot 2\cdot 3\cdot 4+1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5+...+1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot ...\cdot 2011.$$

Решение. Цифрата на единиците на првиот собирок е 1, цифрата на единиците на вториот собиерок $1\cdot 2=2$ е 2, цифрата на единиците на третиот собирок $1\cdot 2\cdot 3=6$ е 6, цифрата на единиците на четвртиот собирок $1\cdot 2\cdot 3\cdot 4=24$ е 4 и бидејќи почнувајќи од петтиот собирок па натаму имаме производ во кој се јавуваат броевите 2 и 5, добиваме дека почнувајќи од петтиот собирок па натаму цифрата на единиците на секој од овие собироци е 0. Според тоа, цифрата на единиците на збирот

$$1+1\cdot 2+1\cdot 2\cdot 3+1\cdot 2\cdot 3\cdot 4+1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5+...+1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot ...\cdot 2011$$

е еднаква на цифрата на единиците на збирот

$$1+1\cdot 2+1\cdot 2\cdot 3+1\cdot 2\cdot 3\cdot 4=1+2+6+24=33,$$

т.е. таа е 3.

15. Секогаш со броевите a,b,c извршуваме едни исти операции, а добиениот резултат е d. Кој број треба да е запишан на местото на ѕвездичката?

a	b	c	d
5	4	9	9
6	3	6	18
3	0	9	27
9	4	6	*

Решение. Имаме:

$$(5-4)\cdot 9=9,$$
$$(6-3)\cdot 6=18,$$
$$(3-0)\cdot 9=27,$$

па затоа за последниот ред на дадената табела треба да важи

$$(9-4)\cdot 6=30,$$

т.е. на местото на ѕвездичката треба да е запишан бројот 30.

16. Дамјан измислил нова операција $\bullet$, која ја определил со:

$$a \bullet b = (a+b):2.$$

Пресметај ја бредноста на изразот: $(3\bullet 5)\bullet 10$.

Решение. Имаме:

$$(3\bullet 5)\bullet 10=[(3+5):2]\bullet 10=(8:2)\bullet 10$$
$$=4\bullet 10=(4+10):2=14:2=7.$$

17. Иван измислил нова операција

$$a\otimes b=3a+ab.$$

Определи ја вредноста на изразот $5\otimes(2\otimes 3)$.

Решение. Имаме

$$5\otimes(2\otimes 3)=5\otimes(3\cdot 2+2\cdot 3)=5\otimes 12=3\cdot 5+5\cdot 12=15+60=75.$$

I.2. БРОЈНИ РЕБУСИ

18. На местото на секоја ѕвездичка може да се стави произволна цифра. Во кој случај секогаш се добива точно неравенство:

а) $\overline{1*4}<154$, б) $997>\overline{*97}$, в) $\overline{10*}<110$,

г) $589>\overline{5*9}$ д) $\overline{1*9}<109$.

Решение. Бидејќи $164>154$, $997=997$, $589<599$ и $119>109$ во случаевите а), б), г) и д) при замена на ѕвездичката со произволна цифра не се добива секогаш точно неравенство. Во случајот под в) цифрата на десетките на бројот 110 е поголема од цифрата на десетките на секој од броевите $\overline{10*}$, па затоа во овој случај секогаш се добива точно неравенство.

19. На местото на секоја ѕвездичка може да се стави произволна цифра. Во кој случај секогаш се добива точно неравенство:

а) $\overline{*41}<99$, б) $\overline{3*9}>\overline{52*}$, в) $\overline{20*5}<\overline{2*95}$,

г) $\overline{*91}>\overline{18*}$, д) $\overline{1234*}<\overline{*2000}$.

Решение. Бидејќи

$$141>99,\ 399<520,\ 2095=2095 \text{ и } 12345>12000$$

во случаевите а), б), в) и д) при замена на ѕвездичката со произволна цифра не се добива секогаш точно неравенство. Во случајот под г) цифрата на стотките на бројот $\overline{*91}$ е поголема или

еднаква од цифрата на стотките на бројот $\overline{18*}$, а цифрата на десетките на бројот $\overline{*91}$ е секогаш поголема од цифрата на десетките на бројот $\overline{18*}$, па затоа во овој случај секогаш се добива точно неравенство.

20. Во бројниот ребус

$$\overline{abc}\cdot 3=\overline{bbb}$$

на различните букви соодветствуваат различни цифри, а на исти букви исти цифри. Која цифра соодветствува на буквата a?

Решение. Од условот $\overline{abc}\cdot 3=\overline{bbb}$ последователно добиваме

$$3(100a+10b+c)=111b$$
$$100a+10b+c=37b$$
$$100a+c=27b.$$

Бидејќи бројот $100a+c$ треба да е делив со 27 ги разгледуваме броевите кои се поголеми од 100, се деливи со 27 и се помали или еднакви на $9\cdot 27=243$. Овие броеви се: 108, 135, 162, 189, 216 и 243. Од овие броеви само кај првиот цифрата на десетките е еднаква на 0 и тоа е единственото решение на задачата. Значи,

$$a=1, c=8,\ b=108:27=4 \text{ и } 148\cdot 3=444.$$

21. Реши го бројниот ребус:

$$\overline{**3}\cdot 8=\overline{218*},$$

а потоа пресметај го производот на цифрите кои се наоѓаат на местата на ѕвездичките.

Решение. Бидејќи $8\cdot 3=24$ цифрата на единиците на производот на двата броја е еднаква на 4. Според тоа, производот на броевите е 2184, па затоа првиот множител е $2184:8=273$. Значи, на местата на ѕвездичките се наоѓаат цифрите 2, 7 и 4 и нивниот производ е $2\cdot 7\cdot 4=56$.

22. Реши го бројниот ребус

$$B+\overline{BEEE}=\overline{MUUU},$$

во кој на исти букви соодветствуваат исти цифри, а на различни букви соодветствуваат различни цифри.

Решение. При собирање на два броја преносот од било која класа во било која класа не е поголем од 1. Според тоа, на буквата E соодветствува цифрата 9, бидејќи во спротивно нема да има пренос од класата на десетките во класата на стотките и ќе се добие $E = U$, што е противречност. Освен тоа на B и U соодветствуваат различни цифри, што значи дека цифрата која соодветствува на M е поголема од таа која соодветствува на B/ Единствена можност е $B = 1$ и $M = 2$. Конечно, $1 + 1999 = 2000$.

23. Дешифрирај го бројниот ребус:

$$\overline{8c06} \cdot b = \overline{a4754}.$$

Решение. Бидејќи цифрата на единиците на производот е 4, а цифрата на единиците на првиот множител е 6, заклучуваме дека едноцифрениот втор множител мора да е 9. Значи, $\overline{8c06} \cdot 9 = \overline{a4754}$. Понатаму, цифрата кај на стотките на производот немаме пренос од производот на десетките, па затоа цифрата на стотките на првиот множител е 3, односно $8306 \cdot 9 = \overline{a4754}$. Конечно, бараниот производ е $8306 \cdot 9 = 74754$.

24. Дешифрирај го бројниот ребус:

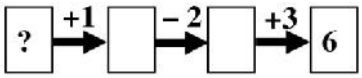
$$\overline{*93*} + \overline{4*06} = \overline{78*4}.$$

Решение. Бидејќи цифрата на единиците на вториот собирок е 6, за да цифрата на единиците на збирот е 4, потребно е цифрата на единиците на првиот собирпк да биде 8. Значи, имаме $\overline{*938} + \overline{4*06} = \overline{78*4}$, па затоа цифрата на десетките на збирот е 4, т.е. $\overline{*938} + \overline{4*06} = 7844$. Сега е јасно дека цифрата на стотките на вториот собирок е 9, па затоа

$$\overline{*938} + 4906 = 7844, \text{ т.е. } 2938 + 4906 = 7844.$$

I.3. РАВЕНКИ

25. Кој број треба да се запише на местото на прашалникот за да пресметувањата бидат точни.

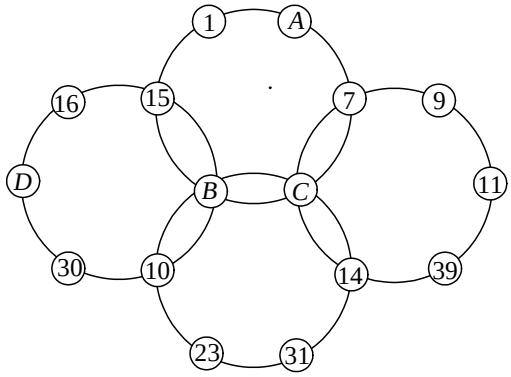


Решение. Одејќи одназад-нанапред треба да ги запишуваме броевите

$$6-3=3,$$
$$3+2=5,$$
$$5-1=4.$$

Значи на местото на прашалникот треба да се запише бројот 4.

26. Збирот на броевите запишани на секој од дадените четири прстени е еднаков на 90. Кои броеви се кријат на местата означени со буквите A, B, C и D?



Решение. Од десниот прстен добиваме

$$C=90-(7+9+11+39+14)=10$$

Од долниот прстен добиваме

$$B=90-(10+14+31+23+10)=2.$$

Од левиот прстен добиваме

$$D=90-(2+10+30+16+15)=17.$$

Од горниот прстен добиваме

$$A=90-(1+7+10+2+15)=55.$$

27. Реши ја равенката:

$$(3x+8):4-2=7\cdot 18-18.$$

Решение. Последователно добиваме:

$$(3x+8):4-2=7\cdot 18-18$$
$$(3x+8):4-2=6\cdot 18$$
$$(3x+8):4-2=108$$
$$(3x+8):4=110$$

$$3x+8=110\cdot 4$$
$$3x=440-8$$
$$x=432:3$$
$$x=144.$$

28. Реши ја равенката:

а) $3x-190=5\cdot 19-9$,

б) $5x-177=4\cdot 8+1$,

в) $7x+52=23\cdot 9-8$,

Решение. а) Имаме:

$$3x-190=5\cdot 19-9,$$
$$3x-190=95-9,$$
$$3x=190+86,$$
$$3x=276,$$
$$x=276:3,$$
$$x=72.$$

б) Имаме:

$$5x-177=4\cdot 8+1$$
$$5x-177=32+1$$
$$5x=177+33$$
$$5x=210$$
$$x=210:5$$
$$x=42.$$

в) Имаме:

$$7x+52=23\cdot 9-8$$
$$7x+52=207-8$$
$$7x=199-52$$
$$7x=147$$
$$x=147:7$$
$$x=21.$$

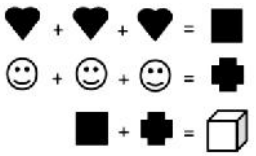
29. Реши ја равенката

$$3x-31=445:5,$$

Решение. Имаме:

$$3x-31=445:5,$$
$$3x=31+89$$
$$3x=120$$
$$x=120:3,$$
$$x=40.$$

30. На различните фигури во шема равенствата соодветствуваат различни ненултри цифри. Која цифра соодветствува на коцката?



Решение. Бидејќи квадратчето и крвчето соодветствуваат на збирови од по три еднакви ненултри цифри, заклучуваме дека единствена можност е тие да се еднакви на 3, 6 или 9. Ако се еднакви на 3 и 6 или на 6 и 9, тогаш збирот на вадратчето и крвчето ќе биде 12 или 15, што не е можно бидејќи коцката нема да биде цифра. Значи, на квадратчето и крвчето соодветствуваат цифрите 3 и 6. Затоа на коцката соодветствува цифрата 9.

I.4. ДОПОЛНИТЕЛНИ ЗАДАЧИ

31. Кој е седмиот по ред број во низата 1, 4, 8, 13, 19, 26, __ .
Решение. Разликата меѓу првиот и вториот број е 3, разликата меѓу третиот и вториот број е 4, разликата меѓу третиот и четвртиот број е 5, разликата меѓу петтиот и четвртиот број е 6, разликата меѓу шестиот и петтиот број е 7. Значи, разликата меѓу шестиот и седмиот број е 8, т.е. седмиот број е $26+8=34$.

32. Определи ги следните два броја во низата: 1, 3, 7, 15, 31, 63, ...
Решение. Ги пресметуваме разликите меѓу секои два соседни броја во дадената низа и добиваме

$$3-1=2,$$
$$7-3=4=2\cdot 2,$$
$$15-7=8=2\cdot 4,$$

$$31-15=16=2\cdot 8,$$
$$63-31=32=2\cdot 16.$$

Забележуваме дека секоја следна разлика е два пати поголема од претходната, па затоа следните два броја во низата ќе бидат:

$$63+2\cdot 32=63+64=127 \text{ и } 127+2\cdot 64=127+128=255.$$

33. Определи го збирот на петтиот и деветтиот број во низата 1, 1, 1, 3, 5, 9, 17, ..., во која сите членови освен првите три се добиваат на еден ист начин.

Решение. Забележуваме дека

$$1+1+1=3,$$
$$1+1+3=5,$$
$$1+3+5=9,$$
$$3+5+9=17.$$

Според тоа, почнувајќи од четвртиот член па натаму секој член на низата е еднаков на збирот на претходните три члена. Значи, осмиот член на низата е $5+9+17=31$, а деветтиот член на низата е $9+17+31=57$. Конечно, збирот на петтиот и деветтиот член на низата е $5+57=62$.

34. Определи го деленикот ако количникот е 3 пати помал од деленикот и е 11 пати помал од делителот.

Решение. Бидејќи количникот е 3 пати помал од деленикот, заклучуваме дека делителот 3. Но, количникот е 11 пати помал од делителот, па затоа количникот е $3\cdot 11=33$. Конечно, деленикот е $3\cdot 33=99$.

35. Бројот 2013 е формиран од четири последователни цифри (0, 1, 2 и 3) и е делив со 11. Која е последната цифра на следниот по големина број кој е делив со 11 и е формиран со четири последователни цифри.

Решение. Бидејќи го бараме следниот по големина број кој е делив со 11 природно е да земеме првите две цифри да се истите. Единствена можност е 2031, но овој број не е делив со 11. Следната проверка треба да ја направиме за броевите чии први две цифри се 21. Сега имаме четири можности и тоа: 2103, 2130,

2134 и 2143. Од овие четири броја само 2134 е делив со 11, т.е. $2134 = 11 \cdot 194$ и тоа е бараниот број. Значи, бараната цифра е 4.

36. Сите четирицифрени броеви, во кои цифрите 0, 1, 2 и 3 се среќаваат точно по еднаш, се запишани еден по друг во растечки редослед. Колку пати во тој запис се среќава групата 2013 од четири цифри во овој редослед?

Решение. Бројот 2013 е меѓу четирицифрените броеви со саканото својство и затоа групата 2013 во овој редослед се среќава барем еднаш. Да ја разгледаме групата од три цифри 201 во овој редослед. Доволно е да определиме колку пати таа се среќава во записот. Имаме два случаја. Првиот пат е во бројот 2013, кога со неа започнува формирање на четирицифрен број со саканото својство, а вториот пат е кога со неа завршува четирицифрен број со саканото својство. Тоа е можно само кај бројот 3201. Во записот по 3201 следува бројот 3210. Значи, во овој дел записот има вид 32013210 и тој очигледно ја содржи групата 2013. Значи, одговорот на прашањето е двапати.

37. Пабло го собрал најголемиот трицифрен број, чиј збир на цифри е еднаков на 8, со најмалиот трицифрен број, чиј збир на цифри е 7. Кој број го добил Пабло?

Решение. Најголемиот трицифрен број чиј збир на цифри е еднаков на 8 е 800. Најмалиот трицифрен број чиј збир на цифри е еднаков на 7 е 106. Имаме,

$$800 + 106 = 906.$$

Според тоа, Пабло го добил бројот 906.

38. Определи ја најголемата можна разлика на два петцифрени броја кои започнуваат со цифрата 7, а секоја следна цифра во нивниот запис е помала од цифрата која се наоѓа пред неа.

Решение. Цифрите кои може да се искористат при запишување на два броја се 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1 и 0. Бидејќи првите цифри и на двата броја се 7, а следните цифри во двата броја треба да се намалуваат најголемата разлика се добива ако од цифрите 6, 5, 4, 3, 2, 1 и 0 го составиме најголемиот и најмалиот можен

четирицифрен број во кој цифрите одејќи од лево на десно се намалуваат. Јасно, тоа се броевите 6543 и 3210. Значи, петцифрените броеви со најголемата можна разлика се 76543 и 73210 и нивната разлика е $76543-73210=3333$.

39. Со цифрите 5, 3, 9 и 0 се запишани најголемиот и најмалиот четирицифрен број во кои цифрите не се повторуваат. Определи ги нивниот збир и нивната разлика.

Решение. Најголемиот четирицифрен број запишан со цифрите 5, 3, 9 и 0, во кој цифрите не се повторуваа е 9530, а најмалиот е 3059. Разликата на двата броја е $9530-3059=6471$, а збирот на двата броја е $9530+3059=12589$.

40. Определи ја разликата на збирот на сите непарни трицифрени и сите парни трицифрени броеви.

Решение. Збирот на сите непарни трицифрени броеви е

$$A=101+103+105+107+...+997+999,$$

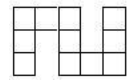
а збирот на сите парни трицифрени броеви е

$$B=100+102+104+106+...+996+998.$$

Според тоа, бидејќи имаме 450 парни и 450 непарни трицифрени броеви (999 броеви од кои 9 се едноцифрени и 90 се двоцифрени, па затоа $999-(9+90)=900$ се трицифрени и половината се парни, а другата половина се непарни) бараната разлика е

$$\begin{aligned}A-B&=101+103+...+997+999-(100+102+...+996+998)\\&=(101-100)+(103-102)+...+(997-996)+(999-998)\\&=1+1+1+...+1=450.\end{aligned}$$

41. Со седум квадратни плочки може да се состави буквата П (цртеж долу лево), а со 11 квадратни плочки може да се состави буквата П два пати (цртеж долу десно).



На ваков начин се наредени 2011 плочки. Колку пати е составена буквата П.

Решение. Бидејќи со 7 плочки се составува буквата П, а со 11 плочки уште еднаш се составува буквата П, заклучуваме дека за

секоја следна буква П ни се потребни $11-7=4$ нови плочки. Имаме:

$$(2011-7):4=2004:4=501,$$

што значи дека со 2011 плочки наредени на опишаниот начин буквата П е составена $501+1=502$ пати.

42. По бројот 34 запиши го производот на неговите цифри, а потоа запиши го производот на последните две цифри итн. Определи ја 37-та цифра.

Решение. Имаме:

$$34\underline{12248326}12248326\underline{12248326}...$$

Забележуваме дека по бројот 34 ја запишуваме групата од осум цифри 12248326 која последователно се повторува. Сега од

$$37-2=35=8\cdot 4+3$$

следува дека 37-та цифра е третата цифра во низата цифри која што се повторува, т.е. цифрата 2.

43. За натпреварување во спортски танци учениците од едно одделение формирале парови (момче,девојче), во кои броевите ги означувале според определено правило. Некои од паровите се: (3,7); (5,11); (9,19) и (10,21). Откриј го правилот и определи ги броевите на партнерите во паровите: (4,__) и (__, 15).

Решение. Од

$$2\cdot 3+1=7,\ 2\cdot 5+1=11,\ 2\cdot 9+1=19 \text{ и } 2\cdot 10+1=21,$$

Заклучуваме дека според правилото е: ако бројот на момчето е n, тогаш бројот на девојчето е $2n+1$. Значи, вториот број во првиот пар е $2\cdot 4+1=9$, а за бројот n во вториот пар важи $2n+1=15$, од каде добиваме $n=7$. Конечно, непознатите парови се: (4,9) и (7,15).

44. Најди го збирот на непарните трицифрени броеви чии цифри имаат производ 140.

Решение. Имаме:

$$140=10\cdot 14=2\cdot 2\cdot 5\cdot 7.$$

Следува бараните броеви имаат цифри 4, 5 и 7 и тие се

547, 574, 745, 754.

Оттука нивниот збир изнесува

$$547+574+745+754=2620.$$

45. Илина цртала сино, бело и црвено кругче во дадениот редослед. Какво кругче ќе нацрта Илина стотиот пат?

Решение. Бројот 100 може да се претстави во облик $3\cdot 33+1$. Значи, Илина во првите 99 цртања ќе ги нацрта синото, белото и црвеното кругче 33 пати последователно во дадениот редослед. Според тоа, во 100-тото цртање треба да нацрта сино кругче.

46. Во полињата на дадената лента допиши природни броеви во празните полиња, така што производот на било кои три последователни броеви е еднаков на 30. Колку решенија има задачата?

			5				

Решение. Постојат два начина на кои бројот 30 може да се претстави како производ на три природни броеви: $30=1\cdot 5\cdot 6$ или $30=2\cdot 3\cdot 5$. Во случајот $30=1\cdot 5\cdot 6$ имаме две можности:

5	6	1	5	6	1	5	6

5	1	6	5	1	6	5	1

Во случајот $30=2\cdot 3\cdot 5$ ги имаме уште следните две можности:

5	3	2	5	3	2	5	3

5	2	3	5	2	3	5	2

Значи, задачата има четири решенија.

II ТЕКСУАЛНИ ЗАДАЧИ

II.1. БРОЕВИ И ЦИФРИ

1. Мила од цифрите 3, 7, 1, 9, 0 и 4 ги формирала најголемиот и најмалиот шестцифрен број употребувајќи ја секоја цифра точно еднаш, а потоа нивната разлика ја намалила 9 пати. Кој број го добила Мила?

   Решение. Најголемиот шестцифрен број составен од дадените цифри, употребувајќи ја секоја цифра точно еднаш е бројот 974310, а најмалиот шестцифрен број е 103479. Кога нивната разлика

   $$974310 - 103479 = 870831,$$

   Мила ја намалила 9 пати, таа го добила бројот $870831 : 9 = 96759$.

2. Колку страници има книга која е нумерирана со 2775 цифри? (Првата страница се нумерира со бројот 1.)

   Решение. Едноцифрени броеви се 9, двоцифрени се 90 и за нив се потребни $2 \cdot 90 = 180$ цифри. Значи, за нумерирањесо три и повеќецифрени броеви ни остануваат $2775 - (9 + 180) = 2586$ цифри. Имаме 900 трицифрени броеви и како $2586 : 3 = 862$ заклучуваме дека книгата има $9 + 90 + 862 = 961$ страница.

3. Збирот на 4 броја е еднаков на 100. Збирот на првиот, третиот и четвртиот е еднаков на 65, а збирот на првиот, вториот и третиот е еднаков на 78. Одреди ги собироците, ако првиот собирок е за 10 помал од вториот.

   Решение. Ако a, b, c и d се првиот, вториот, третиот и четвртиот број соодветно, од условот на задачата имаме

   $$a + b + c + d = 100.$$

   Бидејќи $a + c + d = 65$, добиваме дека $b + 65 = 100$, односно $b = 35$. Од друга страна, од $a + b + c = 78$, добиваме $78 + d = 100$, т.е. $d = 22$. Бидејќи, $a + 10 = b$, добиваме $a = 35 - 10 = 25$. Сега е јасно дека $c = 18$.

4. Андреј во тетратката во ред ги запишува еден по друг природните броеви почнувајќи од бројот 1 па натаму. Тој запрел со пишување кога во тетратката за прв пат цифрата 9 била запишана двапати едно по друго. Колку цифри запишал Андреј?
Решение. По бројот 89 треба да се запише бројот 90, бидејќи тогаш за првпат цифрата 9 ќе биде запишана двапати едно по друго. До овој момент се запишани 9 едноцифрени и $89-9=80$ двоцифрени броеви за кои се искористени $80\cdot 2=160$ цифри. Според тоа, Андреј запишал $9+160+1=170$ цифри.

5. Тетратка има 100 страници нумерирани од 1 до 100. Од неа се искинати 30 произволно избрани листови, и потоа е пресметан збирот на нумерираните броеви од преостанатите страници. Дали е можно овој збир да биде еднаков на 800?
Решение. Најмалата можна вредност на сумата од нумерираните броеви на неискинатите страници е
$$1+2+3+\ldots+40=820>800.$$
Следува, не е можно овој збир да биде 800.

6. Ана замислила еден број. Тој број го помножила со 7, потоа му додала 6, добиениот резултат го поделила со 5 и го добила бројот 53. Откриј кој број го змислила Ана!
Решение. *Прв начин.* Нека бројот што го замислила Ана се означи со x. Тогаш, од условот во задачата се добива равенката $(7x+6):5=53$, од каде $x=37$.
Втор начин. Реализирајќи ги условите од задачата од назад кон напред се добива $(53\cdot 5-6):7=37$.

7. За нумерирање на страниците на една книга се искористени 235 цифри, при што нумерирањето започнува со бројот 3. Со колку трицифрени броеви е нумерирана оваа книга?
Решение. За нумерирање на страниците се искористени $9-2=7$ цифри и $90\cdot 2=180$ цифри. Според тоа, за нумерирање со трицифрените броеви се искористени $235-(7+180)=48$ цифри. Тоа значи дека за нумерирање на страниците на книгата се искористени $48:3=16$ трицифрени броеви.

8. На секој од броевите 47, 53 и 62 е додаден еден ист број и се добиени три броја чиј збир е еднаков на 291. Кои се тие броеви?
Решение. Нека на дадените бреви е додаден бројот x. Тогаш

$$(47+x)+(53+x)+(62+x)=291$$
$$3x+162=291$$
$$3x=291-162$$
$$3x=129$$
$$x=129:3=43.$$

Според тоа, новите броеви се:

$$47+43=90,\ 53+43=96 \text{ и } 62+42=105.$$

9. Во својот дневник Елена претходно ги нумерирала првите неколку страници. Денес таа продолжила со нумерирањето и ги нумерирала од 13-тата до 128-та страница. Колку цифри денес испишала Елена?
Решение. Елена испишала

$90-3=87$ двоцифрени и $128-99=29$ трицифрени броеви.

За испишување на овие броеви таа употребила

$$87\cdot 2+29\cdot 3=174+87=261 \text{ цифра.}$$

10. Намаленикот е 4000, разликата е еднаква на производот на броевите 12 и 301. Определи го намалителот.
Решение. Нека намалителот го означиме со x. Тогаш од условот на задачата добиваме

$$4000-x=12\cdot 301$$
$$x=4000-3612$$
$$x=388.$$

Значи, намалителот е еднаков на 312.

11. Андреј од најголемиот трицифрен број го одзел најголемиот едноцифрен број и добиената разлика ја поделил со најмалиот двоцифрен број. Кој број го добил Андреј?
Решение. Најголемиот трицифрен број е 999, најголемиот едноцифрен број е 9 и најмалиот двоцифрен број е 10. Значи, Андреј пресметувал:

$$(999-9):10=990:10=99$$

и го добил бројот 99.

12. Определи го збирот на најголемиот четирицифрен број и количникот на броевите 63042 и 21.

Решение. Најголем четирицифрен број е бројот 9999, а количникот на броевите 63042 и 21 е $63042:21=3002$. Според тоа, бараниот збир е $9999+3002=13001$.

13. Андреј замислил еден број. Бројот го зголемил за 3, добиениот број го намалил три пати, потоа да добиениот број му додал 7 и добиениот збир го помножил со 5. На крајот на добиениот број му го додал најмалиот парен број и го добил бројот 67. Кој број го замислил Андреј?

Решение. *Прв начин.* Задачата ќе ја решиме одејќи одназад нанапред. Пресметувањата се дадени во долната шема.

$$67 \xrightarrow{-2} 65 \xrightarrow{:5} 13 \xrightarrow{-7} 6 \xrightarrow{\cdot 3} 18 \xrightarrow{-3} 15 .$$

Втор начин. Нека замисленият број е x. Од условот на задачата ја добиваме равенката

$$(((x+3):3)+7)\cdot 5+2=67,$$

чие решение е $x=15$.

14. Определи го двоцифрениот број кој ќе се зголеми 7 пати, ако меѓу неговите цифри се запише 0.

Решение. Нека бараниот двоцифрен број е $\overline{ab}=10a+b$. Тогаш добиениот број е трицифрен и тоа е бројот $\overline{a0b}=100a+b$. Од условот на задачата ја добиваме равенката

$$100a+b=7(10a+b),$$

т.е. равенката $30a=6b$, односно равенката $5a=b$. Но, a и b се цифри, при што $a\neq 0$, па затоа последната равенка има единствено решение $a=1, b=5$. Конечно, бараниот двоцифрен број е 15.

15. Сношти читав книга и ми останаа да прочитам уште 5 листови до последната 204 страница. Кој е збирот на броевите со кои се

нумерирани последната прочитана страница и страницата по неа?

Решение. Бидејќи 5 листови имаат $5\cdot 2=10$ страници, последната прочитана страница е нумерирана со бројот $204-10=194$. Првата по неа непрочитана страница е нумерирана со бројот 195. Значи, бараниот збир е $194+195=389$.

16. Определи го природниот број кој собран со збирот на своите цифри го дава бројот 2011.

Решение. Ако бројот е од видот $\overline{200a}$, тогаш треба да важи $2000+x+2+x=2011$, т.е. $2x=9$, што не е можно бидејќи 9 не е парен број. Ако бројот е од видот $\overline{19ab}$, тогаш

$$1900+10a+b+1+9+a+b=2011, \text{ т.е. } 11a+2b=101.$$

Но, a и b се цифри, па затоа единствено решение на последната равенка е $a=9$, $b=1$. Според тоа, во овој случај решение е бројот 1991. Ако бројот е од видот $\overline{18ab}$, тогаш

$$1800+10a+b+1+8+a+b=2011, \text{ т.е. } 11a+2b=202,$$

што не е можно бидејќи a и b се цифри. Конечно, единствено решение е бројот 1991.

17. Коцка за играње е последователно фрлена четири пати и секој пат паднал различен број точки. Дали збирот на паднатите точки може да биде:

а) 11, б) 13, в) 15, г) 17, д) 19?

Решение. При четирите фрлања паднале различни броеви, па затоа најголемиот можен збир на паднатите точки е $3+4+5+6=18$. Според тоа, збирот на падните точки не може да биде 19. За останатите четири случаи имаме:

$$1+2+3+5=12,$$
$$1+3+4+5=13,$$
$$1+3+5+6=15,$$
$$2+4+5+6=17.$$

18. Збирот на три природни броја е 523. Првиот број е три пати помал од вториот, а третиот е најголемиот двоцифрен број.

Кои се тие броеви?

Решение. Ако првиот број е x, тогаш вториот број е $3x$ и третиот број е 99. Така ја добиваме равенката

$$x+3x+99=523,$$

чие решение е $x=106$. Според тоа, бараните броеви се 99, 106 и 318.

II.2. ПАЗАРУВАМЕ И ПРЕСМЕТУВАМЕ ПАРИ

19. Андреј купил четири различни моливи. Сите моливи без првиот чинеле 42 денари, сите моливи без вториот чинеле 40 денари, сите моливи без третиот чинеле 38 денари и сите моливи без четвртиот чинеле 36 денари. Колку пари чинел секој од моливите?

    Решение. Ако ги собереме добиените суми, добиваме

    $$42+40+38+36=156 \text{ денари.}$$

    Во добиениот збир 156 секој молив учествува три пати, па затоа сите моливи чинат $156:3=52$ денари. Првиот молив чини $52-42=10$ денари, вториот $52-40=12$ денари, третиот $52-38=14$ денари и четвртиот $52-36=16$ денари.

20. Андреј имал 11 евра. Во книжарата еден молив чини 1 евро, едно пенкало чини 2 евра и еден нотез чини 5 евра. Андреј купил неколку моливи, уште толку пенкала и еден нотез. По колку моливи и пенкала купил Андреј?

    Решение. Бидејќи купил еден нотез, за купување на моливите и пенкалата му останале $11-5=6$ евра. Понатаму, еден комплет од молив и пенкало чини $1+2=3$ евра, што значи дека Андреј купил $6:3=2$ комплети, т.е. купил 2 молива и 2 пенкала.

21. Даме и Јане решиле да купат по една збирка задачи по математика за четврто одделение. На Јане му недостасувале 160 денари, а на Даме му недостасувале 40 денари. Затоа решиле да ги здружат парите и да купат една збирка. Но, и со здружени пари

им недостасувале 20 денари за да ја купат збирката. Колку пари е цената на збирката и по колку пари имал секој од нив?

Решение. На Даме му недостасувале 40 денари, а откако ги здружиле парите вкупно им недостасувале 20 денари. Според тоа, Јане имал $40-20=20$ денари. Значи, збирката чини $160+20=180$ денари. Јане на почетокот имал 20 денари, а Даме имал $180-40=140$ денари.

22. Три другари, Марко, Гоце и Даме, добиле на „Бинго" 1000000 денари. Ако при купувањето на ливчето Марко дал 15 денари, Гоце 16 денари и Даме 19 денари, како трите другари правилно ќе ја поделат добивката?

Решение. Ливчето за играта „Бинго" чини $15+16+19=50$ денари. Тогаш за еден вложен денар при купувањето на ливчето, од добивката се добива $1000000:50=20000$ денари. Значи Марко ќе добие $15\cdot 20000=300000$ денари, Гоце $16\cdot 20000=320000$ денари и Даме $19\cdot 20000=380000$ денари .

23. Филип купил 100 бонбони по цена 5 бонбони за 7 денари, а потоа сите ги продал по цена 2 бонбони за 3 денари. Колку денари заработил Филип?

Решение. Филип 100-те бонбони ги купил за $(100:5)\cdot 7=140$ денари, а за нив добил $(100:2)\cdot 3=150$ денари. Според тоа, Филип заработил $150-140=10$ денари.

24. Владо, Бобан и Кате имаат вкупно 600 денари. Ако Владо потроши половина од своите пари, Бобан две третини од своите пари, а Кате потроши четири петтини од своите пари, тогаш на секој ќе му остане еднаква сума пари. По колку пари имал секој од нив?

Решение. Нека x е сумата која им останала на секој од нив по трошењето. Владо потрошил половина, значи на почеток имал $2x$. Бобан потрошил две третини, му останала една третина, па на почеток имал $3x$. На Кате и останале една петтина од парите, значи на почеток имала $5x$. Сите заедно имале 600 денари,

односно $2x+3x+5x=600$, од каде $x=60$ денари. Значи, Владо имал 120 денари, Бобан 180 денари, а Кате 300 денари.

25. Драган, Боби и Мартин заедно имаат 12000 денари. Драган половина од своите пари ги поделил на два еднакви дела и ги дал на Боби и Мартин, а другата половна ја задржал за себе. Исто така постапил и Боби, а потоа и Мартин, после што тројцата пријатели имале ист износ, т.е. по 4000 денари кај себе. Колку пари има секој од нив на почетокот?

Решение. Задачата ќеја решиме одејќи од назад на напред. На крајот од поделбите на парите сите имале ист износ, односно 4000 ден. Пред поделбата на парите Мартин имал $4000\cdot 2=8000$ денари, а Драган и Боби $4000-4000:2=2000$ денари.

Пред Боби да го подели својот дел на начин како во задачата тој имал $2000\cdot 2=4000$, а Драган и Мартин имале

$$2000-2000:2=1000 \text{ и } 8000-2000:2=7000 \text{ денари,}$$

соодветно. Конечно на почетокот Драган имал $1000\cdot 2=2000$ денари, Боби имал $4000-1000:2=3500$ денари и Мартин имал $7000-1000:2=6500$ денари.

26. Ана сака да купи неколку моливи. Ако купи 6 моливи, ќе и останат 7 денари, а ако купи 10 моливи ќе и недостигаат 5 денари. Колку чини еден молив и колку денари имала Ана.

Решение. *Прв начин.* Нека едно моливче чини x денари. Тогаш, од условот на задачата имаме дека $6x+7=10x-5$, односно $4x=12$ или едно моливче чини $x=3$ денари. Ана имала $6\cdot 3+7=25$ денари.

Втор начин. За да Ана вториот пат купи $10-6=4$ повеќе, нејзе и се потребни уште $7+5=12$ денари (збирот на парите што е преостануваат при првото купување и парите што и недостасуваат при второто купување). Според тоа, еден молив чини $12:4=3$ денари, а Ана имала $6\cdot 3+7=25$ денари.

27. Таткото на своите 5 синови им дал 650 денари, и им рекол да си ги поделат така што секој од нив добие 30 денари помалку од непосредно постариот брат. Колку денари ќе добие секој син?

Решение. Нека парите кои ги добил најмалиот син ги означиме со x. Тогаш другите четири синови ќе добијат $x+30, x+60$, $x+90$, $x+120$. Значи

$x+x+30+x+60+x+90+x+120=650$, т.е $5x+300=650$,

односно $x=70$. Значи, синовите почнувајќи од најмалиот ќе добијат по 70, 100, 130, 160, 190 денари, соодветно.

28. Банкнота од 100 денари треба да се раситни на монети од 2 и 5 денари, при што нивниот број е 32. Ако такво раситнување постои, колку монети од 2 и колку монети од 5 денари се употребени?

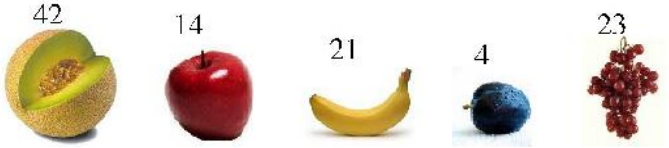
Решение. *Прв начин.* Ако избереме сите 32 монети да се по 2 денари, тогаш ќе имаме 64 денари, па банкнотата од 100 денари не е раситнета. Ако една монета од 32–те монети од 2 денари се замени со монета од 5 денари, сумата се зголемува за $5-2=3$ денари. Значи, сумата од 64 денари треба да ја зголемиме за $100-64=36$ денари. Според тоа, постапката на замена на монетата од 2 со монетата од 5 денари треба да ја повториме $36:3=12$ пати. Така би добиле 12 монети од по 5 денари и 20 монети од по 2 денари. Тоа е бараното раситнување.

Втор начин. Нека е x е бројот монети од 5 денари. Тогаш $32-x$ е бројот на монети од 2 денари. Така ја добиваме равенката:

$$5x+2(32-x)=100,$$

од каде $x=12$. Значи, имаме 12 монери од по 5 денари и $32-12=20$ монети од по 2 денари.

29. Цените на плодовите на долните цртежи се искажани во евроценти.



Андреј за 1 евро купил неколку плодови. Кои плодови не ги купил Андреј?

Решение. Петте плода заедно чинат $42+14+21+4+23=104$ евроценти, односно 1 евро и 4 центи. Андреј потрошил 1 евро, односно 100 евроценти, што значи дека тој не го купил подот кој чинел $104-100=4$ евроценти. Значи, Андреј не ја купил сливата.

30. Елеонора купила 3 кисели млека по цена од 75 денари за едно млеко, еден природен сок за кој платила 220 денари и 3 пакетчиња бисквити. Таа на продавачот му дала банкнота од 2000 денари, по што тој и вратил кусур од 1315 денари. Колку пари чини едно пакетче бисквити?

Решение. *Прв начин.* За купените производи Елеонора платила $2000-1315=685$ денари. Трите кисели млека и сокот заедно чинат $3\cdot 75+220=225+220=445$ денари. Значи, за бисквитите таа платила $685-445=240$ денари. Конечно, едно пакетче бисквити чини $240:3=80$ денари.

Втор начин. Ако едно пакетче бисквити чини x денари, тогаш од условот на задачата ја добиваме равенката

$$2000-(3\cdot 75+220+3x)=1315,$$

чие решение е $x=80$. Значи, едно пакетче бисквити чини 80 денари.

31. Една кутија сладолед чини колку 10 чоколади. Три кутии сладолед и пет чоколади чинат 1400 денари. Колку пари чини една кутија сладолед, а колку едно чоколадо?

Решение. Една кутија сладолед чини колку 10 чоколади, што значи дека 3 кутии сладолед чинат колку $3\cdot 10=30$ чоколади. Затоа 3 кутии сладолед и 5 чоколади чинат колку $30+5=35$ чоколади. Но тие чинат 1400 денари, што значи дека 1 чоколадо чини $1400:35=40$ денари. Според тоа, 1 кутија сладолед чини $10\cdot 40=400$ денари.

32. Илина купила четири еднакви чоколади и ѝ преостанале 70 денари. За да купи 6 такви чиколади на Илина и недостасуваат 50 денари. Колку чини едно чоколадо? Колку пари имала Илина?

Решение. Две чоколади чинат колку што изнесува збирот на парите кои и преостанале по купувањето на 4 чоколади и парите

кои и недостасуваат за да купи шест чоколади. Според тоа, две чоколади чинат $70+50=120$ денари. Значи, едно чоколадо чини $120:2=60$ денари. Илина купила 4 чоколади и ѝ преостанале 70 денари, што значи дека таа имала $4\cdot 60+70=310$ денари.

33. Андреј купил топка, шах и еден пар ролери, за што платил 190 евра. Пабло купил топка и два шаха и платил 160 евра. Колку платил Горјан кој купил една точка и два пара ролери?
Решение. Бидејќи за топка, шах и еден пар ролери Андреј платил 190 евра, заклучуваме дека 2 топки, 2 шаха и 2 пара ролери вкупно чинат $2\cdot 190=380$ евра. Но, 1 топка и 2 шаха вкупно чинат 160 евра, па затоа 1 топка и 2 пара ролери заедно чинат $380-160=220$ евра.

34. Паричната единица на племето Кукулеле е зенг и 5 зенга се еднакви на 1 евро. Колку зенга е цената на една книга, која се продава за 11 евра и 40 евроценти?
Решение. Едно евро има 100 евроценти и како 5 зенга чинат колку 1 евро, заклучуваме дека 1 зенг чини $100:5=20$ евроценти. Понатаму, 11 евра чинат $11\cdot 5=55$ зенга и како $40=2\cdot 20$ заклучуваме дека 40 евроценти чинат 2 зенга. Конечно 11 евра и 40 евроценти чинат $55+2=57$ зенга и тоа е цената на книгата изразена во паричната единица зенг.

35. Иван и Ѓорѓи имаат по 600 денари, Антонио има 500 денари, а Ратко и Стојан имаат по 400 денари. Сите пари ги поделиле така што сите имале еднакви суми пари. Колку пари добило секое дете?
Решение. *Прв* начин. Петте деца заедно имале
$$2\cdot 600+500+2\cdot 400=2500 \text{ денари.}$$
Бидејќи парите ги поделиле подеднакво, секое дете имало по
$$2500:5=500 \text{ денари.}$$
Втор начин. Ако Иван и Ѓорѓи му дадат по 100 денари на Ратко и Стојан, тогаш секој од нив ќе има по 500 денари, колку што има и Антонио. Значи, секое дете ќе има по 500 денари.

36. За изградба на една зграда биле потребни 35 тони цемент. За превезување на цементот биле ангажирани два вида камиони: камион кој пренесува по 3 тони со цена 400 денари за една тура и камион кој пренесува 4 тони со цена 450 денари за една тура. Секој од камионите бил максимално натоварен. Која е најмалата сума што може да се плати за пренесување на цементот?
Решение. При пренесување на цементот со камиони од 3 тона за 12 тони се плаќаат 1600 денари, а при пренесување со камионите од 4 тона за 12 тони се плаќаат 1350 денари. Значи, за да цементот се пренесе со најмала можна сума пари потребно е камионите кои пренусаваат 4 тони да се ангажираат најголем можен број пати. Понатаму, бидејќи $35 = 8 \cdot 4 + 3$, добиваме дека камионите од четири тони најмногу може да се ангажираат 8 пати, при што ќе се пренесат $8 \cdot 4 = 32$ тони, а за преостанатите 3 тони еднаш ќе ангажираме камион од 3 тони. Според тоа, најмалата сума која може да се плати за превоз на цементот е $8 \cdot 450 + 1 \cdot 400 = 4000$ денари.

II.3. ВРЕМЕТО Е ВАЖНО

37. Колку време најдолго може цифрата 5 без прекин да се појавува на дисплејот на електронски часовник?
Решение. На дисплејот цифрата 5 без прекин најдолго се појавува од 4:50 до 5:59. Од 4:50 до 4:59 изминуваат 10 минути, а од 5:00 до 5:59 изминуваат 60 минути. Значи, бараното време е $10 + 60 = 70$ минути.

38. Во понеделник, во 7 часот наутро градскиот часовник покажал точно време, но почнал да заостанува по 1 час на секои 7 часа. Во кој ден и во колку часот градскиот часовник за прв пат ќе покаже време кое е за 1 час повеќе од точното време?
Решение. За прв пат да покаже време кое е за 1 час повеќе од точното време часовникот треба да заостане 11 часа, за што тре-

ба да поминат $11\cdot 7=77$ часа. Бидејќи $77=24\cdot 3+5$, за тоа време ќе поминат 3 денонoќија и 5 часа, т.е. ќе биде 12 часот напладне во четврток.

39. Иван почнал да гледа некој филм во 20 часот и 20 минути. За време на филмот два пати имало прекин заради прикажување на реклами. Првиот прекин траел 3 минути, а вториот 4 минути. Прикажувањето на филмот завршило во 22 часот и 37 минути. Колку време траел филмот без реклами?
Решение. Од 22 ч и 37 мин. ги одземаме 20 ч и 20 мин, па добиваме 2 часа и 17 минути. Потоа од нив ќе ги одземеме $3+4=7$ минути кои се пауза за реклами, па добиваме дека филмот трае 2 часа и 10 минути.

40. Кога Марија се разбудила и погледнала во часовникот, утврдила дека поминала една четвртина од денонoќието. Првиот училишен час на Марија ќе и започне за 75 минути, а во училиштето таа ќе престојува 4 часа и 50 минути. Во колку часот Марија ќе тргне од училиштето накај дома?
Решение. Бидејќи $24:4=6$, во моментот кога Марија погледнала во часовникот било 6 часот. Првиот училишен час ќе и започне после 75 минути што значи во 7 часот и 15 минути.Таа во училиштето ќе престојува уште 4 часа и 50 минути, па ќе замине накај дома во
$$7h\,15\min+4h\,50\min=12h\,5\min.$$

41. Кога на 24. мај 2020 година во Лондон е 14 часот, во Скопје ќе бида 1 час покасно, а во Сан Франциско ќе биде 6 часот на истиот датум. Ана живее во Сан Франциско и навечер си легнува да спие во 21 часот. Колку часот е во Скопје, кога Ана си легнува да спие?
Решение. Кога на 24. мај во Лондон е 14 часот, во Скопје ќе биде 15 часот истиот ден. Од условот на задачата следува дека во Сан Франциско треба да поминат 9 часа за да биде 15 часа на 24. мај. Сега ако додадеме 9 часа на 21 часот ќе добиеме 6 часот наутро.

42. Една цевка за 3 часа полни $\frac{1}{5}$ од еден базен, а друга за 4 часа $\frac{1}{4}$ од истиот базен, а трета цевка за 6 часа полни $\frac{1}{3}$ од истиот базен. Која цевка го полни базенот најбрзо?

    Решение. Првата цевка за 3 часа полни $\frac{1}{5}$ од базенот, па за еден час ќе наполни $\frac{1}{15}$ од базенот, од каде имаме дека целиот базен првата цевка ќе го наполни за 15 часа. Втората цевка за еден час ќе наполни $\frac{1}{16}$ од базенот, па целиот базен ќе биде наполнет за 16 часа. Третата цевка за еден час ќе наполни $\frac{1}{18}$ од базенот, па целиот базен ќе биде наполнет за 18 часа. Значи, првата цевка го полни базенот најбрзо.

43. Дваесет и четири работници кои работат по 8 часа дневно завршуваат дадена работа за 12 дена. Колку работници ќе ја завршат истата работа за 16 дена, ако работат по 6 часа на ден? Секој работник за еден час завршува еднаков дел од работата.

    Решение. За завршување на работата се потребни

    $$24 \cdot 8 \cdot 12 = 2304 \text{ работни часа.}$$

    За 16 дена работејќи по 6 часа на ден еден работник ќе оствари $16 \cdot 6 = 96$ работни часа. Значи, во овој случај за завршување на работата се потребни $2304 : 96 = 24$ работници.

44. Илија започнал да јаде ореви по ручекот во 12 часот. Во тој момент имал 64 ореви. Колку ореви му останале во 17 часот, ако на секој цел час Илија изедувал точно половина од оревите кои ги имал на почетокот на часот?

    Решение. Од 12 до 13 часот Илија изел половина од оревите и му останале $64 : 2 = 32$ ореви. Во 14 часот му останале $32 : 2 = 16$ ореви. Во 15 часот му останале $16 : 2 = 8$ ореви. Во 16 часот му останале $8 : 2 = 4$ ореви и во 17 часот му останале $4 : 2 = 2$ ореви,

45. Андреј отишол на гости кај баба му и забележал дека часовникот покажува 18:30 часот. По 6300 секунди тој си тргнал дома и

патувал до неговата куќа 2100 секунди. Во колку часот Андреј си тргнал дома, а во колку часот стигнал дома?

Решение. Бидејќи $6300:60=105$ заклучуваме дека Андреј кај својата баба бил 105 минути. Значи, тој дома си тргнал по 1 час и 45 минути, односно во 20:15 часот. Понатаму, од $2100:60=35$ следува дека Андреј до дома патувал 35 минути. Конечно, тој дома простигнал во 20:50 часот.

46. Ако Велко оди на училиште со велосипед, а од училиште се враќа пешки, тогаш патот во двата правци го минува за 17 минути. Ако оди и се враќа со велосипед, тогаш патот во двата правци го минува за 10 минути. Колку време му е потребно на Велко пешки да отиде до училиште, а колку со велосипед?

Решение. Бидејќи кога Велко со велосипед оди во двата правци, патот го минува за 10 минути, заклучуваме дека за да отиде до училиште со велосипед нему му се потребни $10:2=5\ \text{min}$. Понатаму, кога Велко оди до училиште со велосипед, а се враќа пешки тој троши 17 минути, заклучуваме дека тој патот од дома до училиште го минува за $17-5=12\ \text{min}$.

47. Шест деца јадат 6 јаболка за 6 минути. Колку деца ќе изедат 80 јаболка за 48 минути?

Решение. Бидејќи 6 деца јадат 6 јаболки за 6 минути, заклучуваме дека 1 дете ќе изеде 1 јаболко за 6 минути. Од $48:6=8$ следува дека за 48 минути едно дете ќе изеде 8 јаболки. Од $80:8=10$ следува дека 80 јаболка се 10 пати повеќе од 8 јаболка, па затоа 10 деца ќе изедат 80 јаболка за 48 минути.

48. Во една леа на еднакви растојанија се засадени цветови. Пчела лета од цвет нс цвет со постојана брзина и од првиот до седмиот цвет стигнува за 7 секунди. За колку секунди пчелата ќе прелета од првиот до тринаесеттиот цвет?

Решение. Од првиот до седмиот цвет има шест растојанија меѓу два соседни цветови, колку што има и од седмиот до тринаесеттиот цвет. Пчелата од првиот до седмиот цвет прелетува за 7 секунди, што значи дека од седмиот до тринаесеттиот цвет ќе

прелета за 7 секунди. Значи, вкупното време за пчелата да прелета од првиот до тринаесеттиот цвет е $7+7=14$ секунди.

49. Ангела во 10 часот и 17 минути почнала да бојадисува јајца, при што постојано работи со иста брзина и за 6 минути бојадисува 10 јајца. Колку јајца бојадисала Ангела до 10 часот и 44 минути?
Решение. Ангела за 6 минути бојадисува 10 јајца, па бидејќи постојано работи со иста брзина, таа за $6:2=3$ минути бојадисува $10:2=5$ јајца. Ангела работела од $10:17$ до $10:44$, што значи дека таа работела $44-17=27$ минути. Конечно, бидејќи за 3 минути бојадисувала 5 јајца и $27=9\cdot 3$ таа за 27 минути ќе бојадиса девет пати повеќе јајца, т.е. ќе бојадиса $9\cdot 5=45$ јајца.

50. Од 06.01.2019 година заклучно до 08.07.2019 година без една седмица Андреј пливал секој ден. Колку дена пливал Андреј?
Решение. Годината не е престапна, па затоа Андреј како во периодот во кој пливал Андреј во јануари има 26 дена, во февруари има 28 дена, во март има 31 ден, во април има 30 дена, во мај има 31 ден, во јуни има 30 дена и во јули има 8 дена, добиваме дека Андреј пливал:
$$26+28+31+30+31+30+8-7=177 \text{ дена.}$$

51. Во градскиот парк во права линија биле засадени дрва на еднакво растојание едно од друго. Калина тргнала на прошетка и растојанието од првото до осмото дрво го поминала за 8 минути. За колку минути таа ќе го помине растојанието од првото до петнаесеттото дрво? (Калина одела со постојана брзина.)
Решение. Од првото до осмото дрво Калина поминала $8-1=7$ растојанија. Од првото до петнаесеттото дрво има $15-1=14$ растојанија. Бидејќи $14=2\cdot 7$, а Калина одејќи со постојана брзина 7 растојанија поминала за 8 минути, таа 14 растојанија ќе помине за $2\cdot 8=16$ минути.

52. Елена, Вангелина и Росана бојадисувале јајца. Елена за 40 минути бојадисува 12 јајца. Вангелина за 20 минути бојадисува 2 јајца помалку отколку што бојадисува Елена за истото време.

Росана за еден час бојадисува 6 пати повеќе јајца отколку што бојадисува Вангелина за истото време. Колку јајца бојадисале трите девојчиња за 30 минути?

Решение. Елена за 10 минути бојадисува $12:4=3$ јајца, а за 30 минути бојадисува $3\cdot 3=9$ јајца. Вангелина за 20 минути бојадисува $2\cdot 3-2=4$ јајца, што значи дека за 10 минути бојадисува $4:2=2$ јајца. Според тоа, Вангелина за 30 минути бојадисува $3\cdot 2=6$ јајца. Бидејќи Росана за еден час бојадисува 6 пати повеќе јајца отколку што бојадисува Вангелина за истото време, Росана за половина час, т.е. за 30 минути ќе бојадиса шест пати повеќе јајца отколку што бојадисува Вангелина за истото време. Значи, Росана за 30 минути бојадисува $6\cdot 6=36$ јајца. Конечно, за 30 минути трите девојчиња ќе бојадисаат $9+6+36=51$ јајце.

53. Автобус се движи по маршрутата од 20 постојки кои една по друга се наоѓаат на еднакви растојанија. На секој постојка автобусот престојува 1 минута, а во останатото време се движи со една иста брзина. Во 7:45 часот автобусот тргнал од првата постојка, а од петтата постојка тргнал во 8:25 часот. Во колку часот автобусот ќе стигне на последната постојка?

Решение. Од поаѓањето од првата до поаѓањето од петтата постојка поминале $8:25-7:45=40\ \text{min}$. Бидејќи автобусот на секоја постојка застанува 1 минута и еднаквите растојанија меѓу две последователни постојки ги поминува со една иста брзина, заклучуваме дека од поаѓањето од првата до поаѓањето од втората постојка поминуваат $40:4=10\ \text{min}$. Бидејќи од поаѓањето од првата до поаѓањето од дваесеттата постојка имаме 19 растојанија, а се бара времето на пристигнување на дваесеттата постојка заклучуваме дека тоа ќе биде $19\cdot 10-1=189\ \text{min}$ или $3\,h\,9\ \text{min}$ по 7:45 часот, што значи во 10:54 часот.

54. Во 18:00 Елена тргнала кон домот на нејзината другарка Марија, која имала роденден. Елена го поминала третина од патот и се сетила дека го заборавила поклонот. Таа пресметала дека ако продолжи ќе стигне 15 минути пред почетокот на забавата, па

затоа решила да се врати по подарокот и веднаш тргнала назад. Во својата куќа се задржала 5 минути и тргнала кон домот на Марија. Таа пристигнала со 20 минути задоцнување. Во колку часот требало да почне забавата?

Решение. Враќајќи се дома по подарокот Елена за патот и престојот во својот дом го потрошила времето за кое пресметала дека ќе стигне порано кај Марија и времето за кое таа стигнала со задоцнување. Тоа се вкупно $15+20=35$ минути, па како 5 минути се задржала во нејзиниот дом таа дополнително одела $35-5=30$ минути. За овие 30 минути таа дополнително поминала $\frac{1}{3}$ од патот враќајќи се дома и $\frac{1}{3}$ од патот до местото од кое тргнала кон својот дом. Значи за $\frac{2}{3}$ од патот Елена потрошила 30 минути, па затоа за $\frac{1}{3}$ од патот и се потребни $30:2=15$ минути. Според тоа, за целиот пат и се потребни $3\cdot 15=45$ минути. Ако Елена не се враќала дома таа ќе стигнела вп 18:45 часот, а тоа е 15 минути пред почетокот на забавата. Значи забавата била закажана во 19:00 часот.

55. Ако оди пешки на работа и се враќа со автомобил на Костадин му се потребни 1 час и 30 минути. Ако оди и се враќа со автомобил, тогаш на Костадин му се потребни 30 минути. За колку време Костадин ќе оди и ќе се врати пешки од работа? (Костадин постојано оди по ист пат, пешки се движи со постојана брзина и со автомобил се движи со друга постојана брзина.)

Решение. Бидејќи кога оди и се враќа со автомобил во двата правци му се потребни 30 минути, Костадин во еден правец оди за $30:2=15$ минути. Но, кога оди пешки и се враќа со автомобил тој троши 1 час и 30 минути, па затоа во еден правец тој пешки оди за 1 час и 15 минути. Конечно, за да печки отиде до работа и се врати дома, на Костадин му се потребни 2 часа и 30 минути.

56. Тања отишла на роденден кај Маја 5 минути порано од Лиле и 3 минути покасно од Вања. Кога се било изедено, гостите почнале

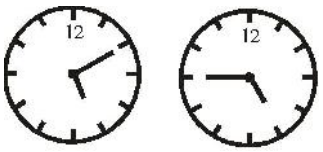
да си одат. Вања заминала прва, таа си отишла 2 минути пред Лиле и 5 минути по Тања. Колку минути повеќе престојувала на роденденот Тања од Лиле?

Решение. Од условот на задачата го имаме следниов распоред:

Вања $\underset{3\,\text{мин}}{\bullet\bullet\bullet}$ Тања $\underset{5\,\text{мин}}{\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet}$ Лиле ..... Вања $\underset{2\,\text{мин}}{\bullet\bullet}$ Лиле $\underset{3\,\text{мин}}{\bullet\bullet\bullet}$ Тања .

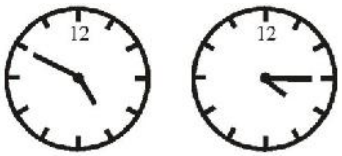
каде малите точки се периодот кога сите биле на роденден. Значи, Тања пристигнала 5 минути пред Лиле, а си заминала 3 минути по Лиле. Според тоа, Тања на роденденот престојувала 8 минути повеќе од Лиле.

57. Двата часовника прикажани на цртежите работат точно, но се лошо наместени. Левиот часовник е поставен 15 минути понапред. Определи го точното време кога десниот часовник покажува 6 часот.



Решение. Бидејќи левиот часовник е поставен 15 понапред, точното време кое треба да го покажуваат часовниците е 4:55 часот. Според тоа, десниот часовник, кој покажува 4:45 часот, заостанува 10 минути. Конечно, кога десниот часовник покажува 6:00 часот, точното време е 6:10 часот.

58. Двата часовника прикажани на цртежите работат точно, но се лошо наместени. Десниот часовник е поставен 10 минути поназад. Определи го точното време кога левиот часовник покажува 6 часот.



Решение. Бидејќи десниот часовник е поставен 10 минути поназад, точното време кое треба да го покажува часовникот е 4:25 часот. Според тоа, левиот часовник кој, кој покажува 4:50 часот, оди понапред за 25 минути. Конечно, кога левиот часовник покажува 6:00 часот, точното време е 5:35 часот.

59. Мајката на Борче е три пати постара од Борче, а неговиот татко е четири години постар од мајката на Борче.

Колку години има секој од нив, ако заедно имаат 88 години?

Решение. Ќе го означиме бројот на годините на Борче со x. Тогаш мајката на Борче има три пати повеќе години, односно $3x$ години, а таткото има четири години повеќе од мајката, односно има $3x+4$ години. Бидејќи вкупно имаат 88 години, добиваме

$$x+3x+(3x+4)=88\text{, т.е. } 7x+4=88.$$

Од тука $7x=84$, а $x=12$. Значи, Борче има 12 години, неговата мајка 36, а неговиот татко 40 години.

60. Семејството Стојановски има три сина: Никола, Ристе и Александар. Таткото Петар Стојановски има 35 години. Збирот на годините на трите деца е два пати помал од годините на мајката Елена, која има 5 години помалку од годините на таткото Петар. Минатата година најстариот син бил на возраст еднаква на збирот на годините од неговите браќа.

Колку години има мајката Елена? Колку години има најстариот син Александар? Ако Никола има три пати помалку години од Ристе, колку години има најмалиот од браќата?

Решение. *Прв начин.* Нека a, b, c, d и e се годините на Никола, Ристе и Александар, таткото Петар и мајката Елена, соодветно. Следува

$$d=35,\ e=30,\ 2(a+b+c)=30,\ c-1=a-1+b-1 \text{ и } b=3a.$$

Следува

$$a+b+c=15 \text{ и } a+b-c=1\text{, т.е. } a+b-c+2c=15,$$

односно $1+2c=15$, т.е. $c=7$. Оттука $a+b=8$ и $b=3a$, од каде имаме дека $a=2$ и $b=6$. Значи Никола има 2, Ристе 6, Александар 7, Петар 35 и Елена 30 години.

Втор начин. Таткото Петар има 35 години. Мајката Елена има 5 години помалку, односно 30 години. Збирот на годините на децата е два пати помал од годините на мајката и изнесува 15. Пред една година збирот на годините на децата бил 12 години. Тогаш најстариот син Александар имал два пати помалку години од збирот, односно 6 години. Следува Александар има 7 години и Никола и Ристе имаат заедно 8 години. Бидејќи Никола

има 3 пати помалку години од Ристе, значи Никола има 2, додека Ристе има 6 години.

61. Филип за роденден од баба му и дедо му добил 405 денари. Од баба му добил 3 пати повеќе пари од бројот на нејзините години, а од дедо му четири пати повеќе пари од бројот на неговите години. Колку години има бабата, а колку дедото на Филип, ако се знае дека дедото е 5 години постар од бабата.

Решение. Ако бабата на Филип има x години, дедото има $x+5$ години. За роденденот бабата му дала $3x$ денари, а дедото му дал $4x+20$ денари. Заедно тие му дале $7x+20$ денари. Според тоа

$$7x+20=405,$$
$$7x=385,$$
$$x=385:7=55.$$

Значи, бабата имала 55 години, а дедото имал 60 години.

62. Дедото и внукот имаат заедно 65 години. Колку години има дедото, а колку внукот ако се знае дека внукот има толку месеци колку што дедото има години?

Решение. *Прв начин.* Годината има 12 месеци, па дедото е постар од внукот 12 пати. Ако внукот има x години, тогаш дедото има $12x$ години, значи

$$12x+x=65,\ \ 13x=65;\ x=65:13;\ x=5,$$

т.е. внукот има 5 години, а дедото 60 години.

Втор начин. Годината има 12 месеци, па дедото е постар од внукот 12 пати.

$$1\cdot 12=12, \qquad 1+12<65,$$
$$2\cdot 12=24, \qquad 2+24<65,$$
$$3\cdot 12=36, \qquad 3+36<65,$$
$$4\cdot 12=48, \qquad 4+48<65,$$
$$5\cdot 12=60, \qquad 5+60=65,$$
$$6\cdot 12=72, \qquad 6+72>75.$$

Значи внукот има 5, а дедото 60 години.

63. Во едно семејство има три деца, а таткото е повозрасен од мајката. Збирот на годините на таткото и мајката е шест пати поголем од најмалиот двоцифрен број во чиј запис нема нула. Второто по возраст дете е три пати постаро од најмалото дете. Минатата година збирот на годините на двете помлади деца бил еднаков на годините на најстарото дете, а сега збирот на годините на трите деца е два пати помал од годините на мајката. Збирот на годините на мајката и средното по возраст дете е еднаков на годините на таткото. Колку години има таткото?

Решение. Најмалиот двоцифрен рој во чиј запис нема 0 е 11, што значи дека збирот на годините на таткото и мајката е $6 \cdot 11 = 66$. Од условот следува дека второто по возраст дете е 3 пати постаро од најмалото дете. Затоа годините на најстарото дете треба да се намалат за една година за да се добијат годините на најмалото дете зголемени 4 пати. Според тоа, годините на мајката треба да се намалат за 2 години за да се добијат годините на најмалото дете зголемени 16 пати. Годините на таткото се еднакви на збирот на годините на мајката и најмалото дете. Значи, годините на таткото треба да се намалат за 2 години, за да се добијат годините на најмалото дете зголемени 17 пати. За збирот на годините на мајката и таткото добиваме дека треба да се намали за 4 години за да се добијат годините на најмалото дете зголемеини за $16 + 19 = 35$ пати. Според тоа, годините на најмалото дете зголемени за 35 пати се еднакви на $66 + 4 = 70$. Значи, најмалото дете има $70 : 35 = 2$ години, второто по возраст дете има $3 \cdot 2 = 6$ години. Минатата година двете најмали деца имале $6 + 2 - 2 = 6$ години, колку што имало и најстарото дете, кое сега има 7 години. Трите деца имаат $2 + 6 + 7 = 15$ години. Мајката има $2 \cdot 15 = 30$ години и таткото има $66 - 30 = 36$ годи-ни.

64. Баба Марија има 60 години, а трите нејзини внуци имаат 5, 6 и 7 години. Колку години ќе има секој од внуците, кога збирот на нивните години ќе биде еднаков на годините на баба Марија?

Решение. Нека по x години збирот на годините на трите внуци е еднаков на годините на баба Марија.

Од условот на задачата следува равенката

$$60 + x = (x + 5) + (x + 6) + (x + 7),$$

од каде ја добиваме равенката

$$60 + x = 18 + 3x.$$

Решение на последната равека е $x = 21$. Според тоа, збирот на годините на внуците ќе биде еднаков на годините на баба Марија по 21 година и тогаш внуците ќе имаат 26, 27 и 28 години.

65. Васко има 9 години, а брат му Кирил е помал од него. Кога Кирил ќе има 8 години, Васко ќе има 10 години. Колку години има Кирил сега?

Решение. Со секоја измината година разликата на годините меѓу Васко и Кирил не се менува. Тоа значи дека Васко е постар од Кирил $10 - 8 = 2$ години, односно дека Кирил има $9 - 2 = 7$ години.

66. Збирот на годините на Андреј и Борис е 21, збирот на годините на Борис и Никола е 22, а збирот на годините на Андреј и Никола е 23. Колку години има секое од трите деца?

Решение. Во збирот $21 + 22 + 23 = 66$ двапати се собрани годините на секое од трите деца. Според тоа, збирот на годините на трите деца е еднаков на $66 : 2 = 33$. Значи, Никола има $33 - 21 = 12$ години, Андреј има $33 - 22 = 11$ години и Борис има $33 - 23 = 10$ години.

67. Во една година месецот мај имал 4 среди и 4 саботи. Во кој ден од годината бил 1. мај таа година?

Решение. Месецот мај има 31 ден. Имаме $31 = 4 \cdot 7 + 3$ и како таа година во овој месец имало 4 среди и 4 саботи, заклучуваме дека четирите цели недели во тој месец ги содржат четирите среди и четирите саботи и меѓу останатите последователни дена од месецот не смее да има среда или сабота. Јасно, тие три дена се недела, понеделник и вторник и се наоѓаат на почетокот на месецот. Значи, таа година 1. мај бил во недела.

68. Пред три години Пабло и неговите братучеди Андреј и Горјан заедно имале 11 години.

Колку години тие заедно ќе имаат по пет години?

Решение. Ако годините на тројцата пред три години се 11, тогаш бидејќи денес секој од нив е постар за 3 години, тие заедно ќе имаат $11+3\cdot 3=20$ години. Слично, по 5 години секој ќе биде постар за по 5 години, па затоа по 5 години тие заедно ќе имаат $20+3\cdot 5=35$ години.

69. Ако први јануари е во понеделник, кој датум е во понеделникот на 36-тата седмица од таа година?

Решение. Бидејќи $35\cdot 7=1=245+1=246$, во понеделникот во 36-тата седмица 246-тиот ден од годината.

Ако годината не е престапна, тогаш во првите осум месеци имаме од $31+28+31+30+31+30+31+31=243$ денови, па затоа понеделникот од 36-тата седмица е на 3. септември.

Ако годината е престапна, тогаш во првите осум месеци имаме од $31+29+31+30+31+30+31+31=244$ денови, па затоа понеделникот од 36-тата седмица е на 2. септември.

70. Три петоци во еден месец паднале на парни дати. Во кој ден од седмицата паднал 20-ти?

Решение. Бидејќи три петоци во месецот паднале на парни дати, добиваме дека мора два петоци да паднале на непарни дати. Значи месецот има повеќе од 28 дена. Ако првиот петок е на 1-ви, тогаш ја добиваме низата 1, 8, 15, 22, 29 и во оваа низа немаме три парни дати. Ако првиот петок е на 2-ри, тогаш ја добиваме низата 2, 9, 16, 23, 30 и овде имаме три парни дати. Ако првиот петок е на 3-ти, тогаш ја добиваме низата 3, 10, 17, 24, 31 и овде немаме три парни дати. Значи, во разгледуваниот месец петоците се на 2, 9, 16, 23 и 30. Тоа значи дека 20-ти во овој месец е во вторник.

71. Кога Катерина имала 31 година, нејзината ќерка Елеонора имала 8 години, а сега Катерина е два пати постара од Елеонора. Колку години има сега Елеонора, а колку Катерина?

Решение. Нека од моментот кога Катерина имала 31 години поминале x години.

Сега Катерина има $31+x$ години, Елеонора има $8+x$ години, па затоа важи

$$31+x=2(8+x).$$

Решение на последната равенка е $x=15$. Според тоа, Елеонора има $8+13=23$ години, а Катерина има $31+15=46$ години.

II.4. ЗАДАЧИ СО МЕРНИ БРОЕВИ

72. На една полица има три книги. Првата има 90, втората 110, третата 150 страници. Кориците на книгите се со еднаква дебелина и секоја од нив е дебела $2mm$. Колку милиметри се дебели книгите заедно ако се знае дека 10 страници имаат дебелина $1mm$?
Решение. Секоја книга има по две корици, па затоа вкупниот број корици е шест, а нивната вкупна дебелина е $12mm$. Вкупниот број страници е

$$90+110+150=350.$$

Значи, вкупната дебелина на сите страници е

$$350:10=35mm.$$

Конечно, дебелината на сите три книги заедно е

$$12+35=47mm.$$

73. Една круша има маса колку две праски. Една праска има маса колку осум сливи. Колку сливи имаат маса колку една круша?
Решение. Ако една праска има маса колку осум сливи, тогаш две праски ќе имаат маса колку $2\cdot 8=16$ сливи. Бидејќи една круша има маса колку две праски, а две праски имаат маса колку 16 сливи заклучуваме дека една круша има маса колку 16 сливи.

74. Во камион со носивост $5t$ натоварени се 68 вреќи по $50kg$ брашно. Уште колку такви вреќи можат да се натоварат во камионот?
Решение. Во камионот можат да се натоварат $5000:50=100$ вреќи по $50kg$ брашно. Тогаш можат да се натоварат уште $100-68=32$ такви вреќи.

75. Јане го прашал Филип колкава е масата на рибата што ја уловил татко му. Филип одговорил: *Главата заедно со опашката има* $3\,kg$ *, главата заедно со трупот има* $7\,kg$ *, а трупот заедно со опашката има* $8\,kg$. Колкава е масата масата на рибата?

Решение. *Прв начин.* Ако ги собереме дадените маси, тогаш во збирот двапати ќе учествуваат масите на главата, на опашката и на трупот. Според тоа, масата на рибата е половина од пре-сметаниот збир.

Според тоа, ако x е масата на рибата, тогаш $x = 18 : 2 = 9\ kg$.

Втор начин. Нека *Г* е масата на главата, *О* е масата на опашката, а *Т* е масата на трупот. Од условите на задачата имаме:

$$G + O = 3, \quad G + T = 7, \quad T + O = 8.$$

Ако собереме леви и десни страни, добиваме:

$$G + O + G + T + T + O = 18,$$
$$2G + 2O + 2T = 18,$$
$$2(G + O + T) = 18.$$

Оттука $G + O + T = 9$, па рибата има маса $9\,kg$.

76. Едно куче, едно маче и едно зајаче имаат маса од $17\,kg$, две кучиња, едно маче и едно зајаче $29\,kg$, а две кучиња, три мачиња и едно зајаче $35\,kg$. Колкави се масите на едно куче, едно маче и едно зајаче ?

Решение. Во вториот збир на масите имаме едно куче повеќе отколку во првиот збир, па така разликата на масите од вториот збир и првиот збир ќе ни ја даде масата на едно куче, т.е едно куче тежи $29 - 17 = 12\,kg$. Во третиот збир имаме 2 мачиња повеќе отколку во вториот збир, па така масата на две мачиња ќе биде разликата $35 - 29 = 6\,kg$, од каде масата на едно маче е $3\,kg$. Конечно, масата на едно зајаче е $17 - (12 + 3) = 2\,kg$.

77. На градскиот пазар $3kg$ јаболка чинат исто колку $2kg$ круши, а $2kg$ круши чинат исто колку $1kg$ цреши. Ѓорѓи купил $5kg$ јаболка, Иван купил $3kg$ цреши, а Филип $3kg$ круши.

Кој од нив потрошил најмногу пари?

Решение. Бидејќи $3kg$ јаболка чинат исто колку и $2kg$ круши следува дека $15kg$ јаболка чинат исто колку и $10kg$ круши. Според ова $5kg$ јаболка (една третина од 15) чинат повеќе од $3kg$ круши (помалку од една третина од 10). Значи Ѓорѓи потрошил повеќе пари од Филип.

Понатаму бидејќи $3kg$ јаболка чинат исто колку и $1kg$ цреши следува дека $6kg$ јаболка ќе чинат исто колку $2kg$ цреши, па имаме дека $5kg$ јаболка чинат помалку од $2kg$ цреши, а тие чинат помалку од $3kg$ цреши. Значи Иван потрошил повеќе пари од Ѓорѓи. Според ова најмногу пари потрошил Иван.

78. Во една кошница има 20 круши со еднаква маса. Кошницата заедно со крушите тежи $5\,kg$. Андреј од кошницата извадил 10 круши, по што масата на кошницата со преостанатите круши била $3\,kg$. Определи ја масата на празната кошница?

Решение. Масата на десетте круши кои ги извадил Андреј е еднаква на $5-3=2\,kg$. Бидејќи крушите имаат еднаква маса, а во кошницата преостанале $20-10=10$ круши, нивната маса е еднаква на $2\,kg$. Конечно, масата на празната кошница е еднаква на $3-2=1\,kg$

79. Дедо Стојан има засадено компири на правоаголна површина со ширина $10\,m$ и должина $72\,m$. Тој од еден квадратен метар откопал просечно по $10\,kg$ компири. Четвртина од целото количество го продал на пазар, а половина од преостанатото количество го купиле 3 трговци и секој трговец купил еднакво количество компири. Колку килограми компири купил секој трговец одделно?

Решение. Компирите биле засадени на површина со плоштина $10\cdot 72=720\,m^2$. Бидејќи од секој метар квадратен биле набрани

просечно по $10\ kg$, дедо Стојан набрал $720 \cdot 10 = 7200\ kg$ компири. Тој на пазар продал $7200 : 4 = 1800\ kg$ и му останале

$$7200 - 1800 = 5400\ kg$$

компири. Трговците купиле половина од преостанатото количество, т.е. купиле $5400 : 2 = 2700\ kg$ компири. Според тоа, секој трговец купил по $2700 : 3 = 900\ kg$ компири.

80. Два ученика се движат по правоаголно игралиште со периметар $36\ m$. Тие тргналче од едно исто место во спротивни насоки. До моментот кога прв пат се сретнале тие направиле еднаков број чекори, а должините на нивните чекори се $48\ cm$ и $42\ cm$. Колку метри поминал секој ученик?

Решение. Имаме $36\ m = 3600\ cm$. Понатаму, кога двата ученика ќе направат по еден чекор тие заедно минуваат растојание од $48 + 42 = 90\ cm$. Според тоа, секој од двајцата ученици направил по $3600 : 90 = 40$ чекори. Значи, ученикот чиј чекор е долг $48\ cm$ поминал

$$40 \cdot 48 = 1920\ cm = 19\ m\ 20\ cm,$$

а ученикот чиј чекор е долг $42\ cm$ поминал

$$40 \cdot 42 = 1680\ cm = 16\ m\ 80\ cm.$$

81. Патот меѓу градовите A и B е долг $120\ km$ и Иван го минува за 2 часа. Со истата постојана брзина Иван патот меѓу градовите B и C го минува за 3 часа. Колку е долг овој пат?

Решение. За еден час Иван поминува $120 : 2 = 60\ km$. Според тоа, за три часа тој ќе помине $3 \cdot 60 = 180\ km$, што значи дека патот меѓу градовите B и C е долг $180\ km$.

82. Автомобил за $2\ h\ 30\ \text{min}$ минути поминува $190\ km$, а моторциклист поминува $13\ km$ за $10\ \text{min}$. Колку километри за $1\ h$ минува повеќе моторциклистот од автомобилот?

Решение. Бидејќи $2\ h\ 30\ \text{min} = 150\ \text{min} = 5 \cdot 30\ \text{min}$, автомобилот за $30\ \text{min}$ минува $190 : 5 = 38\ km$.

Според тоа, автомобилот за $1\,h$ минува $2\cdot 38=76\,km$. Моторциклистот за $1\,h$ минува $6\cdot 13=78\,km$.

Значи, за $1\,h$ моторциклистот минува повеќе $78-76=2\,km$ од автомобилот.

83. Кошница во која има 2 исти чоколади тежи $250\,g$. Истата кошница, но со 6 такви чоколади во неа, тежи $450\,g$. Колку чоколади треба да ставиме во кошницата за да вкупната тежина биде $650\,g$?

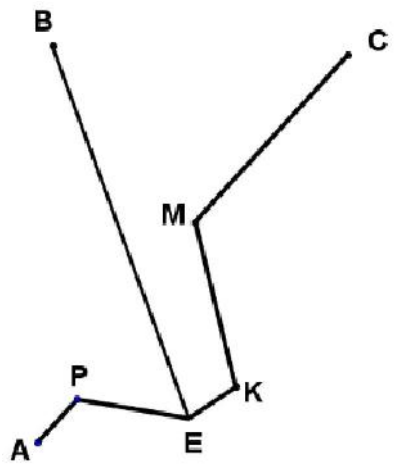
Решение. *Прв начин*. Четири чоколади тежат $450-250=200\,g$. Бидејќи кошница со 6 чоколади тежи $450\,g$, а $650-450=200\,g$ и тоа е тежината на 4 чоколади, во кошницата со 6 чоколади треба да ставиме уште 4 чоколади. Значи, кошница со $6+4=10$ чоколади тежи $650\,g$.

Втор начин. Четири чоколади тежт $450-250=200\,g$. Значи, едно чоколадо тежи $200:4=50\,g$. Оттука следува дека празната кошница тежи $250-2\cdot 50=150\,g$. Во кошница која тежи $650\,g$ чоколадите тежат $650-150=500\,g$. Тоа значи дека во оваа кошница треба да има $500:50=10$ чоколади.

84. Елена тргнала од училиштето A и отишла во продавницата B. Во исто време Ратка тргнала од училиштето A кон продавицата C. Двете се движат со иста брзина. Која прва ќе стигне, ако

$$\overline{EK}=1\,km,\ \overline{PE}=2\overline{EK},$$
$$\overline{MC}=2\overline{PE},\ \overline{AP}=\overline{EK},$$

Ратка од A до E изминува толку километри, колку од K до M, а растојанието BE е за $1\,km$ поголемо од растојанието $PEKM$.



Решение. Имаме,

$\overline{AP} = \overline{EK} = 1\,km$, $\overline{PE} = 2\overline{EK} = 2\,km$, $\overline{MC} = 2\overline{PE} = 4\,km$,

$\overline{KM} = \overline{AP} + \overline{PE} = 3\,km$,

$\overline{BE} = 1 + \overline{PE} + \overline{EK} + \overline{KM} = 1 + 2 + 1 + 3 = 7\,km$.

Според тоа, Ратка изминала пат долг:

$$\overline{AP} + \overline{PE} + \overline{EK} + \overline{KM} + \overline{MC} = 1 + 2 + 1 + 3 + 4 = 11\,km,$$

а Елена изминала пат долг

$$\overline{AP} + \overline{PE} + \overline{EB} = 1 + 2 + 7 = 10\,km.$$

Бидејќи Елена поминува пократок пат, а двете одат со иста брзина заклучуваме дека Елена побрзо ќе стигне до продавницата.

85. Пабло тргнал на прошетка во 8:00 часот. Тој пешачи 1 час и одмара половина час. Дома се вратил во 15:00 часот. За еден час Пабло поминувал $3\,km$. Колку километри пешачел Пабло?

Решение. Пабло пешачел од 8:00-9:00, од 9:30-10:30, од 11:00-12:00, од 12:30-13:30 и од 14:00-15:00.

Значи, тој пешачел точно 5 часа и притоа поминал $5 \cdot 3 = 15\,km$.

86. Во еден двор живеат кокошки и пилиња. Познато е дека 2 кокошки и 100 јајца тежат колку 3 кокошки и 6 пилиња, а 1 кокошка тежи колку 2 пилиња и 20 јајца. Сите кокошки имаат иста тежина, сите пилиња имаат иста тежина и сите јајца имаат иста тежина. Колку пати е потешка една кокошка од едно пиле?

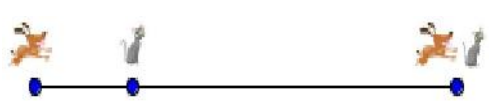
Решение. Од првиот услов следува дека 100 јајца тежат колку 1 кокошка и 6 пилиња. Од вториот услов следува дека 5 кокошки тежат колку 10 пилиња и 100 јајца. Но, 100 јајца тежат колку 1 кокошка и 6 пилиња, па затоа 5 кокошки тежат колку 1 кокошка и $6 + 10 = 16$ пилиња. Според тоа, 4 кокошки тежат колку 16 пилиња, па затоа 1 кокошка тежи колку 4 пилиња, т.е. 1 кокошка е 4 пати потешка од 1 пиле.

87. Едно јаболко тежи колку шест кајсии. Три кајсии тежат колку 8 ореви. Колку ореви тежат колку едно јаболко?

Решение. Бидејќи 3 кајсии тежат колку 8 ореви, $2 \cdot 3 = 6$ кајсии тежат колку $2 \cdot 8 = 16$ ореви.

Но, едно јаболко тежи колку 6 кајсии, па затоа едно јаболко тежи колку 16 ореви.

88. Куче видело мачка на $30\,m$ пред него и почнало да ја брка (цртеж десно). Мачката се движела по права линија и трчала по $7\,m$ во секунда, а кучето трчало по $10\,m$ во секунда. По колку секунди кучето ќе ја стаса мачката?



Решение. За една секунда куќето трча $10-7=3\,m$ повеќе од мачката, т.е. тоа со секоја измината секунда ја прстигнува мачката за $3\,m$. Мачката е на $30\,m$ пред кучето, што значи дека тоа ќеја стаса мачката по $30:3=10$ секунди.

89. Во три сада има 153 литри млеко. Ако од првиот сад се прелеат во вториот 9 литри, а од вториот во третиот 5 литри, во трите сада ќе има еднакво количество млеко. Колку млеко има во секој сад?

Решение. На крајот во секој сад има по $153:3=51$ литар млеко. Тоа значи дека на почетокот во првиот сад имало $51+9=60$ литри млеко, во третиот сад имало $51-5=46$ литри млеко и во вториот сад имало $153-(60+46)=153-106=47$ литри млеко.

II.5. ДОПОЛНИТЕЛНИ ЗАДАЧИ

90. Во едно училиште има 32 паралелки. Од нив 6 паралелки имаат по 29 ученика, 8 паралелки имаат по 30 ученика, 2 паралелки по 31 ученик, а останатите паралелки имаат по 32 ученика. Колку изнесува вкупниот број на ученици во училиштето?

Решение. Бројот на паралелки со 32 ученици е

$$32-6-8-2=16.$$

Вкупниот број на ученици е

$$6\cdot 29+8\cdot 30+2\cdot 31+16\cdot 32=174+240+62+512=988.$$

91. Цвета имала кокошки. Осум кокошки неселе за една недела 32 јајца. Колку јајца ќе снесат за една недела девет кокошки?
Решение. Ако осум кокошки за една недела снеле 32 јајца, тогаш една кокошка за една недела ќе снеси 4 јајца. Сега, девет кокошки за една недела ќе снесат $9 \cdot 4 = 36$ јајца.

92. Во едно детско летувалиште летувале деца во 4 смени. Во пр-вата смена биле пријавени 128 ученици, а во втората смена 2 пати повеќе отколку во првата. Во третата смена се пријавиле за 69 ученици повеќе отколку во втората, а во четвртата смена 3 пати помалку отколку во првата и третата смена заедно. Но, во прва-та смена не дошле 5 деца, во втората 3 деца, а во четвртата сме-на 4 деца. Колку вкупно деца летувале во ова детско летувалиште?
Решение. Во втората смена се пријавиле $128 \cdot 2 = 256$ ученици. Во третата $256 + 69 = 325$ ученици.
Во четвртата $(128 + 325) : 3 = 151$ ученици.
Значи вкупно летувале
$$(128 - 5) + (256 - 3) + 325 + (151 - 4) = 848 \text{ ученици.}$$

93. Весела напишала еден ист збор три пати, при што буквата „а“ ја искористила девет пати. Колку пати ќе ја искористи буквата „а“ кога истиот збор ќе го напише седум пати.
Решение. Од условот на задачата следува дека за да напише еден збор Весела буквата „а“ ја користи $9 : 3 = 3$ патил.
Значи, за да напише седум збора, таа букавата „а“ ќе ја искористи $7 \cdot 3 = 21$ пат.

94. Наставничката на секој ученик му дала по 2 јаболка и во кошницата останале 19 јаболка. Колку ученици и колку јаболка има, ако нивниот вкупен збир е 100?
Решение. Ако со x се означи бројот на ученици, тогаш во кошницата ќе има $2x + 19$ јаболка. Од условот дека вкупниот збир на ученици и јаболки е 100, се добива $x + 2x + 19 = 100$. Со решавање на равенката добиваме дека има 27 ученици и 73 јаболки.

95. Во овоштарникот на дедо Ване растат овошни дрвца и тоа: 240 дрвца кајсии, 260 дрвца праски и 130 дрвца јаболка. Учениците од одделението на малиот Ване, внукот на дедо Ване, на денот на дрвото дошле во овоштарникот и засадиле уште 75 дрвца кајсии, 126 дрвца праски и 142 дрвца јаболка.

а) Колку ученици има во одделението на малиот Ване, ако секој ученик засадил по 7 овошни дрвца?

б) По колку овошни дрвца од секој вид има во овоштарникот на дедо Ване?

в) Колку вкупно овошни дрвца има во овоштарникот на дедо Ване?

Решение. а) На денот на дрвото се засадени вкупно

$$75+126+142=343$$

овошни дрвца. Бидејќи секој ученик засадил по 7 дрвца, во одделението има $343:7=29$ ученици.

б) Има: $240+75=325$ дрвца кајсии, $260+126=386$ дрвца праски и $130+142=272$ дрвца јаболка.

в) Во овоштарникот има вкупно $325+386+272=983$ овошни дрвца.

96. На контролниот тест по математика наставникот поставил 30 задачи. Бројот на задачи кои точно ги решил еден ученик е за 20 поголем од бројот на задачите кои не ги решил. За секоја точно решена задача ученикот добива 8 поени, а за секоја нерешена или погрешно решена задача губи 3 поени. Колку вкупно поени освоил ученикот на контролниот тест по математика?

Решение. Бројот на нерешени задачи е $(30-20):2=10:2=5$ задачи. Тогаш, бројот на точно решени задачи е $30-5=25$ задачи. Бидејќи, за секоја точно решена задача ученикот добива 8 поени, а за секоја нерешена или погрешно решена задача губи 3 поени, вкупниот број на поени кои ги освоил ученикот е $8\cdot 25-3\cdot 5=200-15=185$ поени.

97. Учениците во петто одделение решавале тест по математика кој содржи 20 задачи. За секоја точно решена задача се добиваат 5

поени, а за секоја неточно решена или нерешена задача се губат по 3 поени.

а) Колку задачи решил Иван, ако освоил 76 поени?

б) Најмалиот број на поени потребни за оцена 5 е решението на равенката $8245 : x = 97$. Колку најмногу задачи може да погреши ученик ако сака сигурно да добие петка?

Решение. а) Нека е x е бројот решени задачи. Според условите на задачата, се добива следнава равенка: $5x - 3(20 - x) = 76$, чие решение е $x = 17$. Значи, Иван решил 17 задачи.

б) Имаме $8245 : x = 97$, од каде добиваме $x = 8245 : 97 = 85$. Бидејќи за секоја нерешена или неточно решена задача се губат по 3 поени, можни се следните случаи:

1) решени се сите 20 задачи и тогаш $20 \cdot 5 = 100$,

2) не е решена една задача и тогаш $19 \cdot 5 - 3 = 95 - 3 = 92$,

3) не се решени две задачи и тогаш $18 \cdot 5 - 2 \cdot 3 = 90 - 6 = 84 < 85$.

Значи, за сигурна петка може да се погреши најмногу една задача.

98. На две гранки се наоѓале 25 врапчиња. По извесно време, од првата прелетале на втората 5 врапчиња, а од втората во полето одлетале 7 врапчиња. Тогаш, на првата гранка останале два пати повеќе врапчиња отколку на втората. Колку врапчиња имало на секоја гранка на почетокот?

Решение. *Прв начин.* Кога во полето ќе одлетаат 7 врапчиња, вкупниот број на врапчиња на двете гранки ќе биде $25 - 7 = 18$ и тогаш според условот на задачата на првата гранка ќе има два пати повеќе врапчиња отколку на втората. Значи на втората гранка ќе има $18 : 3 = 6$ врапчиња, а на првата гранка ќе има $2 \cdot 6 = 12$ врапчиња. Според тоа, пред да одлетаат во полето 7 врапчиња од втората гранка, на неа имало $6 + 7 = 13$ врачиња. На почетокот, пред да прелетале од првата на втората гранка 5 врапчиња, на втората гранка имало $13 - 5 = 8$ врапчиња, а на првата гранка имало $12 + 5 = 17$ врапчиња.

Втор начин. На почетокот имало

$$2 \cdot ((25 - 7) : 3) + 5 = 2 \cdot (18 : 3) + 5 = 2 \cdot 6 + 5 = 12 + 5 = 17$$

врапчиња на првата гранка и

$$(25-7):3+7-5=18:3+7-5=6+7-5=8$$

врапчиња имало на втората гранка.

99. Четири момчиња Андреј, Бојан, Васко и Гоце се колекционери на поштенски марки. Андреј има толку марки колку што имаат Бојан и Васко заедно, Гоце има пет пати помалку марки од Андреј, а Бојан четири пати повеќе од Васко. По колку марки има секое од момчињата, ако заедно тие имаат 5016 поштенски марки?

Решение. Нека A, $Б$, B и $Г$ се бројот на марките што ги имаат Андреј, Бојан, Васко и Гоце соодветно. Според првиот услов на задачата, имаме $A=Б+B$, $A=5Г$, $Б=4B$. Тогаш, со замена се добива $A=Б+B=4B+B=5B$. Но $A=5Г$, па се добива дека Васко и Гоце имаат ист број марки, односно $B=Г$. Тогаш, според вториот услов

$$A+Б+B+Г=5016, \text{ т.е. } 5B+4B+B+B=5016.$$

Добиваме $11B=5016$, од каде $B=5016:11=456$, па $Г=456$, додека $A=5\cdot 456=2280$ и $Б=4\cdot 456=1824$. Значи, Андреј има 2280 марки, Бојан има 1824, а Васко и Гоце имаат по 456 поштенски марки.

100. Ако учениците од едно одделение седнат по еден на столица, тогаш ќе недостасуваат 9 столици, но ако седнат по двајца на столица, тогаш 3 столици ќе останат празни. Определи ги бројот на столците и бројот на учениците.

Решение. Нека y е бројот на столиците. Од условот на задачата следува дека во случајот кога седнува по еден ученик за бројот на учениците важи $y+9$, а во случајот кога седнуваат по двајца ученици за бројот на учениците важи $2(y-3)$. Според тоа, $y+9=2(y-3)$, од каде добиваме $y+9=2y-6$, т.е. $y=15$. Значи, имало 15 столици и $15+9=24$ ученици.

101. Во четири натпревари еден кошаркарски тим постигнал вкупно 356 коша. Во првиот и вториот натпревар тимот постигнал 95 и 103 коша, соодветно, а во следните два натпревари тимот постигнал еднаков број коша.

Колку коша постигнал тимот во четвртиот натпревар?

Решение. Во првите два натпревари тимот дал $103+95=198$ коша, па затоа во последните два натпревари постигнал $356-198=158$ коша. Според тоа, во третиот и четвртиот натпревар тимот постигнувал по $158:2=79$ коша.

102. Андреј и Пабло требало да решат по еднаков број задачи. Првата седмица Андреј решил 97 задачи, а Пабло решил 160 задачи, па на Андреј му останало да решава 8 пати повеќе задачи отколку што му останало на Пабло. По колку задачи требало да реши секој од нив?

Решение. Нека x е бројот на задачите кои му останале на Пабло. Тогаш на Андреј му останале $8x$ задачи. Бидејќи Андреј требало да го надополни бројот задачи кои помалку ги решил во првата седмица од Пабло, т.е. требало да реши $160-97=63$ задачи повеќе од Пабло, заклучуваме дека $8x-x=63$, од каде добиваме $x=9$. Според тоа, секој од нив требало да реши по $160+9=97+8\cdot 9=169$ задачи.

103. Капетанот, пред да тргне на пат, го зголемил екипажот за 20 нови морнари и му се обратил на својот заменик: „Треба да ги дополниме залихите со вода, бидејќи овие залихи кои ги имаме ќе ни бидат доволни само за две седмици.“ Колку членови е новиот екипаж на бродот, ако капетанот има намера на отворено море да бидат четири седмици?

Решение. Постојните залихи биле доволни за екипажот пред вработувањето на новите 20 морнари да бидат доволни за престој на отворено море во траење од четири седмици. Сега, истите тие залихи се доволни за престој од две седмици, што значи два пати пократко време. Тоа значи дека новите 20 морнари трошат половина од потребното количество вода, па затоа сега екипажот брои $2\cdot 20=40$ морнари.

104. Триесет ученици од 5 различни паралелки засадиле вкупно 40 дрвца, секој ученик најмалку по едно дрвце. Секои два ученика од една иста паралелка засадиле еднаков број дрвца, а секои два

ученика од различни одделенија засадиле различен број дрвца. Колку ученици засадиле по едно дрвце?

Решение. Бидејќи секој ученик засадил најмалку по едно дрвце, добиваме дека $40-30=10$ дрвца биле засадени од учениците кои засадиле повеќе од едно дрвце. Според тоа, бидејќи учениците од различните паралелки засадиле различен број дрвца, бројот 10 треба да се запише како збир на четири или повеќе различни ненулти броја. Единствена можност е $1+2+3+4=10$, што значи дека еден ученик засадил 2 дрвца, еден ученик засадил 3 дрвца, еден ученик засадил 4 дрвца, еден ученик засадил 5 дрвца и дваесет и шест ученици засадиле по 1 дрвце.

105. Кирил собрал 1050 топчиња и решил да ги распредели во кутии. Тој располагал со три вида кутии: големи, средни по големина и мали. Кирил имал вкупно 6 големи кутии и во некои од нив ставил точно по 6 средни по големина кутии. Во некои од средните кутии тој ставил точно по 6 мали кутии, а во секоја мала кутија Кирил ставил точно по 7 топчиња. Определи го најмалиот можен број кутии со кој располагал Кирил ако секоја мала кутија е ставена во средна и секоја средна кутија е ставена во голема кутија?

Решение. Во секоја мала кутија се ставени по 7 топчиња, што значи дека се искористени $1050:7=150$ мали кутии. Понатаму, малите кутии се распоредени по 6 во средни кутии, па затоа за распоредување на истите се употребени $150:6=25$ средни кутии. Но, средните кутии се стават по 6 во една голема кутија, па како $25=4\cdot 6+1$ добиваме дека средните кутии се ставени во 5 големи кутии. Според тоа, најмалиот потребен број средни кутии е $6\cdot 5=30$, што значи дека најмалиот можен број кутии со кои располага Кирил е $150+30+6=186$.

106. Пабло во четири пакети запакувал 60 чоколади така што во секој следен пакет има два пати повеќе чоколади отколку во претходниот. Колку чоколади има во последниот пакет?

Решение. Ако во првиот пакет има x чоколади, тогаш во вториот има $2x$, во третиот $4x$ и во четвртиот има $8x$ чоколади. Затоа

$$x + 2x + 4x + 8x = 60,$$
$$15x = 60,$$
$$x = 60 : 15 = 4.$$

Конечно, во последниот пакет има $8 \cdot 4 = 32$ чоколади.

107. На три полици во работната соба на Горјан има вкупно 36 книги. Кога од првата полица на втората полица се префрлени 4 книги, потоа од втората на третата полица се префрлени 5 книги, па од третата на првата полица се префрлени 2 книги, на секоја полица имало еднаков број книги. Колку книги имало на секоја полица на почетокот?

Решение. *Прв начин.* Задачата ќе ја решиме одејќи одназад-нанапред. По третото префрлање на секоја полица имало по $36 : 3 = 12$ книги. Значи, пред третото префрлање на третата полица имало $12 + 2 = 14$ книги, на втората полица имало 12 книги и на првата полица имало $12 - 2 = 10$ книги. Пред второто префрлање на третата полица имало $14 - 5 = 9$ книги, на втората полица имало $12 + 5 = 17$ книги и на првата полица имало 10 книги. Пред првото префрлање, т.е. на почетокот на третата полица имало 9 книги, на втората полица имало $17 - 4 = 13$ книги и на првата полица имало $10 + 4 = 14$ книги.

Втор начин. На крајот на секоја полица имало по $36 : 3 = 12$ книги. Од првата полица се земени 4 книги и се додадени 2 книги, што значи дека од првата полица се земени 2 книги, па затоа на неа на почетокот имало $12 + 2 = 14$ книги. Од втората полица се земени 5 книги и се додадени 4 книги, што значи дека од неа е земена 1 книга, па затоа на почетокот на неа имало $12 + 1 = 13$ книги. На третата полица се додадени 5 книги и од неа се земени 2 книги, што значи дека на неа се додадени 3 книги, па затоа на почетокот на третата полица имало $12 - 3 = 9$ книги.

108. Горјан собирал коли и мотори, при што секоја играчка ја чувал грижливо во посебна кутија. На полицата имал 14 кутии, а во кутиите имало вкупно 40 тркала. Колку колични имал Горјан?

Решение. Ако сите играчки се мотори, тогаш вкупниот број тркала ќе биде еднаков на $14 \cdot 2 = 28$. Бидејќи има $40 - 28 = 12$

тркала повеќе и кола има 2 тркала повеќе од мотор, заклучуваме дека Горјан има $12:2=6$ коли.

109. Во една детска градинка има 29 столчиња. Едни сточиња се со 3 ногалки, а други се со 4 ногалки. Столчињата имаат вкупно 98 ногалки. Колку столчиња со 3 ногалки има во оваа детска градинка?

Решение. Ако сите столчиња се со 3 ногалки, тогаш вкупниот број ногалки ќе биде $3\cdot 29=87$, т.е. ќе има $98-87=11$ ногалки помалку. Бидејќи секое столче со 4 ногалки има по една ногалка повеќе, заклучуваме дека во градинката има 11 столчиња со по 4 ногалки и $29-11=18$ столчиња со 3 ногалки.

110. Бабата Бисера направила еклери. Таа на Никола, за на екскурзија, му запакувала третина од еклерите. Никола сметал дека тоа се многу еклери за на екскурзија, па вратил во послужавникот 4 еклери. Потоа, бабата Бисера на Стојан му четвртина од преостанатите еклери и уште два еклера. На крајот во послужавнкот останале 19 еклери.

Колку еклери направила баба Бисера?

Решение. Задачата ќе ја решиме одејќи одназад-нанапред. На крајот останале 19 еклери и заедно со двата еклери кои бабата Бисера дополнително му ги дала на Стојан се $\frac{3}{4}$ од еклерите кои останале откако Никола вратил 4 еклери. Значи, во тој момент $\frac{3}{4}$ од еклерите се $19+2=21$ еклер, што значи дека $\frac{1}{4}$ од еклерите е еднаква на $21:3=7$ еклери. Според тоа, откако Никола вратил 4 еклери во послужавникот имало $4\cdot 7=28$ еклери. Сега, пред Никола да врати 4 еклери во послужавникот имало $28-4=24$ еклери и тоа се $\frac{2}{3}$ од еклерите кои ги направила бабата Бисера. Значи, $\frac{1}{3}$ од направените еклери е еднаква на $24:2=12$ еклери. Конечно, бабата Бисера направила $3\cdot 12=36$ еклери.

111. Вервериците Чип и Дејл заедно собрале 60 лешници. На секои три лешници донесени од Чип, Дејл додавал уште два лешници. Колку лешници собрал Чип, а колку Дејл?

Решение. Бидејќи на секои три лешници собрани од Чип, Дејл додавал по 2 лешници, тие во едно собирање заедно носеле по $3+2=5$ лешници. Значи, Чип и Дејл лешници носеле $60:5=12$ пати. Според тоа, Чип собрал $3\cdot 12=36$ лешници, а Дејл собрал $60-36=2\cdot 12=24$ лешници.

112. На почетната постојка во автобусот се качиле неколку патници. На првата постојка се симнале 2 патника и се качиле 9 други патници. На втората постојка се симнале 14 и се качиле 7 патници. На третата постојка слегле половината од патниците и во автобусот останале 11 патници. Колку патници биле на почетокот во автобусот?

Решение. Задачата ќе ја решиме одејќи одназад-нанапред. Пресметувањата се дадени во следнта шема:

$$11 \xrightarrow{\cdot 2} 22 \xrightarrow{+14} 36 \xrightarrow{-7} 29 \xrightarrow{+2} 31 \xrightarrow{-9} 22.$$

Значи, на почетокот во автобусот имало 22 патника.

113. Од понеделник до недела Андријана требало да решава секој ден по 10 задачи. Меѓутоа, за да одмара во сабота и недела, таа предвидениот број задачи го решила од понеделник до петок, решавајќи секој ден еднаков број задачи. По колку задачи решавала секој ден?

Решение. *Прв начин*. Во текот на седмицата Андријана требало да реши $7\cdot 10=70$ задачи. Таа задачите ги решила за пет дена, што значи дека дневно решавала по $70:5=14$ задачи.

Втор начин. Во саботата и неделата Андријана требало да реши $2\cdot 10=20$ задачи и овие задачи ги решил во првите пет дена. Значи, во текот на првите пет дена таа решавала повеќе по $20:5=4$ задачи.

Според тоа, од понеделникот до петокот Андријана дневно решавала по $10+4=14$ задачи.

114. Павел засадил овошна градина со 252 дрвја распоредени подеднакво во 9 реда, а Пабло засадил овошна градина со 8 реда и во секој ред имало по 3 дрвја повеќе отколку во редовите во градината на Павел. Колку дрвја засадиле Павел и Пабло?

Решение. Во секој ред Павел засадил по $252:9=28$ дрвја. Значи, Пабло во секој ред засадил по $28+3=31$ дрво. Според тоа, Пабло засадил $31\cdot 8=248$ дрвја, а двајцата заедно засадиле $252+248=500$ дрвја.

115. Андреј и Пабло купиле вкупно 192 чоколади и сокчиња. Тие на Горјан му дале 39 чоколади и три пати помалку сокови од чоколади. Потоа им останал еднаков број чоколади и сокчиња, кои ги поделиле подеднакво. По колку чоколади и по колку сокчиња добиле Пабло и Андреј?

Решение. Горјан добил 39 чоколади и $39:3=13$ сокчиња. Според тоа, на Андреј и Пабло им останале вкупно

$$192-(39+13)=192-52=140$$

чоколади и сокчиња. Бидејќи им останале еднаков број чоколади и сокчиња добиваме дека им останале $140:2=70$ чоколади и 70 сокчиња. Андреј чоколадите ги поделиле на два еднакви дела и истото го направиле со сокчињата, што значи дека секој добил по $70:2=35$ чоколади и по исто толку сокчиња.

116. Ако земам две бомбониери со по 20 бомбони, ќе ми недостасуваат 4 бомбони за да ги почестам гостите. Колку бомбониери со по 9 бомбони треба да земам за ди почестам гостите и за мене да остане точно една бомбона?

Решение. Од условот на задачата следува дека бројот на гостите е $2\cdot 20+4=44$. Значи, за да ги почестам гостите и за мене да остане точно една бомбона ми требаат $44+1=45$ бомбони. Една бомбониера има 9 бомбони, што значи дека ми требаат $45:9=5$ бомбониери.

117. Баба Павлина има 2 бели, една кафеава и 3 црни кокошки. Тие несат јајца на многу специфичен начин. Секоја бела кокошка неси по 3 јајца преку еден ден. Кафеавата кокошка неси по едно

јајце седмично. Црните кокошки несат јајца секој ден, така што едната неси 2 јајца, а двете по едно јајце. Во понеделник сите кокошки снесле јајца. Баба Павлина ги собрала во една кошница и потоа во кошницата ги ставала сите јајца собрани таа седмица. Колку јајца имало во кошницата на крајот од седмицата?

Решение. Во текот на таа седмица кафеавата кокошка снесла 1 јајце, црните кокошки снесле $7\cdot 4=28$ јајца и белите кокошки снесле $2\cdot(3+0+3+0+3+0+3)=24$ јајца. Според тоа, во кошницата на баба Павлина на крајот од седмицата имало

$$28+1+24=53 \text{ јајца.}$$

118. Ана и Пабло решавале задачи за натпревар во текот на еден ист период. Ана решила 24 задачи и тоа по 4 задачи во текот на еден час. Пабло решавал секој час по 2 задачи повеќе од Ана. Колку задачи решиле заедно?

Решение. Ана решила 24 задачи и тоа по 4 задачи во текот на еден час, што значи дека тие решавале задачи $24:4=6$ часа. Во овој период Пабло решавал по $4+2=6$ задачи на час, што значи дека тој решил $6\cdot 6=36$ задачи. Според тоа, Ана и Пабло вкупно решиле $24+36=60$ задачи.

119. Иван одгледува зајаци. Ако во секој кафез стави по 6 зајаци, тогаш за еден кафез ќе недостигаат 2 зајака, а ако во секој кафез стави по 5 зајаци, тогаш 3 зајаци нема да бидат сместени во кафез. Колку зајаци одгледува Иван?

Решение. Нека Иван има x кафези. Тогаш од првиот услов следува дека бројот на зајаците е $6x-2$, а од вториот услов следува дека бројот на зајаците е $5x+3$. Според тоа, $6x-2=5x+3$, од каде наоѓаме $x=5$. Значи, Иван зајаците ги сместувал во 5 кафези и имал $6\cdot 5-2=28$ зајаци.

120. Група од 29 деца чека во ред за да купи сладолед. Елена е точно меѓу Ана и Мирјана. Зад Ана има двапати повеќе деца, одколку пред Мирјана. На кое место е Ана во редот?

Решение. Можен редослед само на трите девојчиња е Ана, Елена, Мирјана или Мирјана, Елена, Ана.

Во првиот случај ако пред Мирјана има x деца, тогаш Ана е на $(x-1)$ – во место и зад неа има $29-(x-1)=30-x$ деца. Сега од условот на задачата следува $30-x=2x$, од каде добиваме $x=10$. Според тоа, Ана е на деветто место.

Во вториот случај ако пред Мирјана има x деца, тогаш Ана е на $(x+3)$ – то место и зад неа има $29-(x+3)=26-x$ деца. Сега од условот на задачата следува $26-x=2x$, т.е. $3x=26$. Последната равенка нема решение, бидејќи бројот 26 не е делив со 3.

Според тоа, Ана е на деветто место во редот за сладолед.

121. Во две кошници има вкупно 92 јаболка. Ако од првата во втората кошница преместиме 24 јаболка, тогаш во двете кошници ќе има еднаков број јаболка. Колку јаболка има во секоја кошница?

Решение. По преместувањето на јаболката во секоја кошница имало по $92:2=46$ јаболка. Според тоа, на почетокот во првата јаболка имало $46+24=70$ јабока, а во втората кошница имало $46-24=22$ јаболка.

122. Во три кошници имало вкупно 60 јајца. Во првата кошница имало црвени, во втората жолти и во третата зелени јајца. Марија зела 6 црвени, 8 жолти и 4 зелени јајца, по што во секоја од трите кошници останал еднаков број јајца. Колку јајца имало во секоја кошница на почетокот?

Решение. Марија зела $6+8+4=18$ јајца, што значи дека во кошниците останале $60-18=42$ јајца. Значи, во секоја кошница останале по $42:3=14$ јајца. Според тоа, на почетокот во првата кошница имало $14+6=20$ црвени јајца, во втората кошница имало $14+8=22$ жолти јајца и во третата кошница имало $14+4=18$ зелени јајца.

123. Марија во таблата за јајца по грешка ставила 30 варени и неварени јајца. За да открие колку варени и колку неварени јајца има таа ги вртела јајцата на масата. Притоа ако јајцето е варено тоа се врти 8 пати, а ако не е варено се врти 3 пати. Сите 30 јајца се

завртиле 210 пати. Колку варени јајца имало во таблата, а колку неварени?

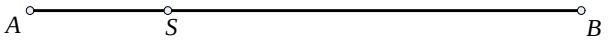
Решение. Ако сите јајца се варени. Тогаш вкупниот број завртувања ќе биде $30 \cdot 8 = 240$, што значи $240 - 210 = 30$ вртења повеќе. Бидејќи секое варено јајце прави $8 - 3 = 5$ вртења повеќе, за овие 30 вртења повеќе се потребни $30 : 5 = 6$ јајца. Според тоа, во таблата има 6 неварени и $30 - 6 = 24$ варени јајца.

III ГЕОМЕТРИЈА

III.1. ОТСЕЧКИ

1. Отсечката AB со точката S е поделена на два дела кои се разликуваат за $8\ cm$. Најди ја должината на отсечката, ако покусиот дел е трипати помал од подолгиот дел.

   Решение. Нека x и y се должините на деловите на кои е поделена отсечката. Од условот на задачата должините на

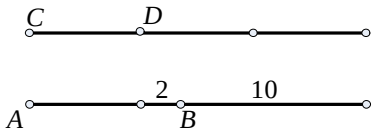
   

   делбените делови се x и $x+8$ (со други зборови $y=x+8$). Но, повторно од условот на задачата $x+8=3x$. Но тогаш $2x=8$, односно $x=8:2=4\ cm$. Значи должините на делбените делови се $4\ cm$ и $12\ cm$, а вкупната должина на отсечката е

   $$4\ cm+12\ cm=16\ cm.$$

2. Должината на отсечката AB е за $2cm$ поголема од должината на отсечката CD. Ако должината на отсечката CD се зголеми 3 пати, а должината на отсечката AB се зголеми за $10cm$, ќе се добијат еднакви отсечки. Колкави се должините на отсечките AB и CD?

   Решение. Од цртежот е јасно дека кога отсечката CD ќе ја зголемиме 3 пати, тогаш сме ја зголемиле за 2 нејзини должини и тоа зголемувањето е $2+10=12cm$. Значи, $\overline{CD}=12:2=6cm$, а $\overline{AB}=6+2=8cm$.

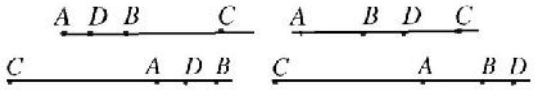
   

3. Точките A,B,C и D се распоредени на една права така што $\overline{AB}=2\ cm$, $\overline{AC}=5\ cm$ и $\overline{BD}=1\ cm$, Определи ја должината на отсечката CD.

   Решение. Точките A,B,C и D се расположени на една права, но е дадено во кој распоред. Нека B е расположена десно од A и $\overline{AB}=2\ cm$. За точката C има две можности: да е лево или

десно од A. Од $\overline{AC} = 5\,cm$ следува дека овие две можности се како на долните цртежи

Од $\overline{BD} = 1\,cm$ следува дека се можни четири случи (по два за секој од горните два случаја):



За секој од овие случаи соодветно се добива

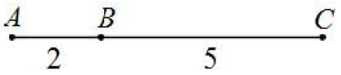
$$\overline{CD} = 4\,cm,\ \overline{CD} = 2\,cm,\ \overline{CD} = 6\,cm \text{ и } \overline{CD} = 8\,cm.$$

4. Пистата AD е долга $400\,m$ (види цртеж). Определи ја должината на делот BC ако $\overline{AC} = 265\,m$ и $\overline{BD} = 256\,m$.

Решение. Имаме,

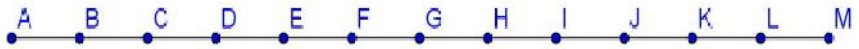
$$2\overline{BC} = \overline{AC} - \overline{AB} + \overline{BD} - \overline{CD}$$
$$\overline{BC} = \overline{AC} + \overline{BD} - (\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD})$$
$$\overline{BC} = \overline{AC} + \overline{BD} - \overline{AD}$$
$$\overline{BC} = 265 + 256 - 400 = 521 - 400 = 121\,m.$$

5. Определи го збирот на должините на сите отсечки прикажани на цртежт десно.



Решение. Имаме, $\overline{AB} = 2, \overline{BC} = 5$ и $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC} = 2 + 5 = 7$, па затоа бараниот збир е $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC} = 2 + 5 + 7 = 14$.

6. Ако сите точки се на еднакви растојанија една од друга, определи кои точки се на едно исто растојание од една од крајните точки на отсечката и од нејзината средина.



Решение. Дадени се тринаесет точки такви што соседните точки се еднакво оддалечени една од друга. Тоа значи дека средина на

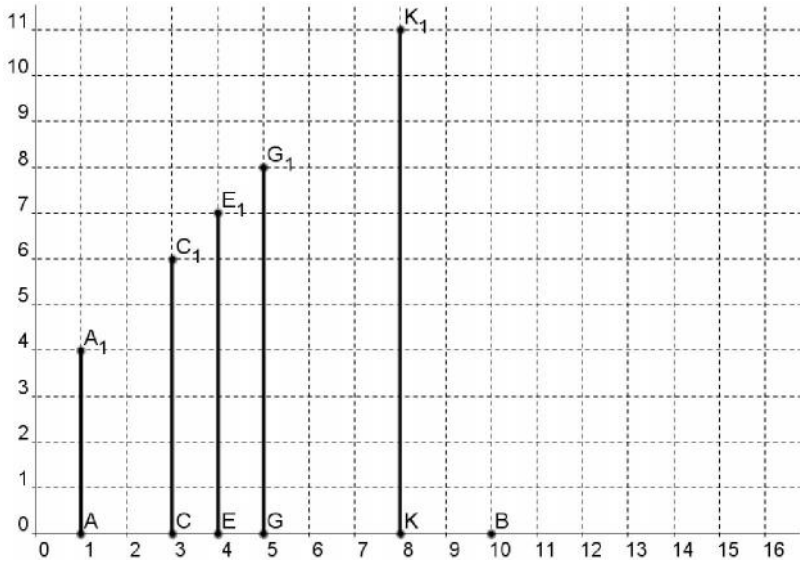
отсечката AM е седмата точка по ред, односно точката G. Точките кои се еднакво одалечени од еден од краевите на отсечката AM и од нејзината средина G се средините на отсечките AG и GM, т.е. точките D и J.

7. Во права алеја се засадени 9 елки кои се на растојание $7\,m$ една од друга. Колку е долга алејата, ако се знае дека елки има на нејзиниот почеток и на нејзиниот крај?
Решение. Меѓу деветте елки има $9-1=8$ растојанија од по $7\,m$. Според тоа, алејата е долга $8\cdot 7=56\,m$.

8. Во права алеја на растојание една од друга $80\,cm$ се засадени елки. Растојанието од првата до последната елка е еднакво на $17\,m\,60\,cm$. Колку елки се засадени во алејата?
Решение. Во $17\,m\,60\,cm=1760\,cm$ има $1760:80=22$ растојанија од $80\,cm$. Бидејќи на почетокот на алејата има елка, а потоа на секои $80\,cm$ е засадена по една елка заклучуваме дека бројот на засадените елки е $1+22=23$.

9. Кибритени чкорчиња, секое со должина $3\,cm$, се редат едно по друго по права линија така што растојанието меѓу левиот крај на најлевото чкорче и десниот крај на најдесното чкорче е еднакво на $1\,m$. Колку чкорчиња најмногу може да се постават, ако растојанието меѓу соседните чкорчиња не е помало од $2\,cm$.
Решение. Ако поставиме x чкорчиња со должина $3x$, а меѓу чкорчињата ќе имаме $x-1$ растојание чија вкупна должина не е помала од $2(x-1)$. Растојанието меѓу левиот крај на најлевото чкорче и десниот крај на најдесното чкорче ќе биде најмалку
$$3x+2(x-1)=5x-2$$
и тоа мора да е помало од $1\,m=100\,cm$. Значи, $5x-2<100$, од каде добиваме дека може да се постават најмногу 20 чкорчиња. Имено,
$$5\cdot 20-2=98<100,\ \text{а}\ 5\cdot 21-2=103>100.$$

10. На долниот цртеж отсечките се нацртани според определено правило. Отсечката BB_1 не е нацртана. Определи ја нејзината должина.



Решение. Првата отсечка има должина $4=3+1$, третата отсечка има должина $6=3+3$, четвртата $7=3+4$ итн. Значи, правилото е должината на отсечката е еднаква на нејзиниот реден број зголемен за 3. Отсечката BB_1 е десетта по ред, што дека нејзината должина е $3+10=13$.

III.2. ТРИАГОЛНИК

11. Должините на страните на триаголникот ABC се $54mm$, $39mm$ и $47mm$, а должините на страните на триаголникот KLM се $8cm$, $4cm$ и $5cm$. Кој од нив има поголема обиколка (периметар)?

Решение. Обиколката на триаголникот ABC е

$$54+39+47=140mm=14cm,$$

а обиколката на триаголникот KLM е

$$8+4+5=17cm.$$

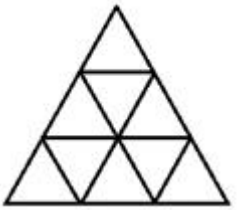
Значи, триаголникот KLM има поголема обиколка.

12. Должината на кракот на рамнокрак триаголник е три пати поголема од должината на неговата основа. Определи ги должините на основата и кракот, ако периметарот на триаголникот е $42\,m$.

Решение. Нека должината на основата е x. Тогаш должината на кракот е $3x$, па затоа $x+2\cdot 3x=42$, т.е. $x=6\,m$. Според тоа, должината на основата е $6\,m$, а должината на кракот е $3\cdot 6=18\,m$.

13. Андреј исекол 9 еднакви рамностранни триаголници, секој со периметар $15\,cm$. Тој триаголниците ги наредил еден до друг така што добил голем рамностран трисголник. Определи го периметарот на добиениот рамностран триаголник.

Решение. Од деветте еднакви рамностранни триаголници Андреј го составил триаголникот прикажан на цртежот десно. Според тоа, должината на страната на големиот триаголник е три пати поголема од должината на страната на триаголниците од кои е составен. Значи, ако должината на страната на малите триаголници е a, тогаш должината на страната на големиот триаголник е $3a=15\,cm$. Конечно, периметарот на големиот триаголник е еднаков на $3\cdot 15=45\,cm$.



14. За триаголникот ABC е познато дека

$$\overline{AB}+\overline{BC}=53\,cm,\ \overline{AC}+\overline{BC}=60\,cm \text{ и } \overline{AC}+\overline{AB}=57.$$

Определи ги должините на страните на триаголникот ABC.

Решение. Ако ги собереме дадените равенства, добиваме:

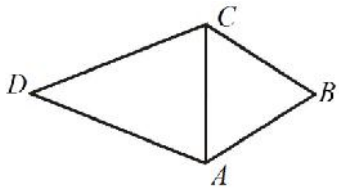
$$2(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{AC})=53+60+57$$
$$2(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{AC})=170$$
$$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{AC}=85.$$

Според тоа,

$$\overline{AB}=85-(\overline{BC}+\overline{AC})=85-60=25\,cm,$$
$$\overline{BC}=85-(\overline{AB}+\overline{AC})=85-57=28\,cm,$$

$$\overline{AC} = 85 - (\overline{AB} + \overline{BC}) = 85 - 53 = 32\ cm.$$

15. Периметарот на фигурата $ABCD$ е еднаков на $1628\ m$, а периметарот на рамностраниот триаголник ABC е еднаков на $984\ m$. Определи периметарот на рамнокракиот триаголник ACD.



Решение. *Прв начин.* Должината на страната на рамностраниот триаголник ABC е еднаква на $984 : 3 = 328\ m$. Според тоа, должината на кракот на рамнокракиот триаголик ACD е еднаква на

$$(1628 - 2 \cdot 328) : 2 = (1628 - 656) : 2 = 972 : 2 = 486\ m.$$

Значи, периметарот на рамнокракиот триаголник ACD е еднаков на

$$2 \cdot 486 + 328 = 972 + 328 = 1300\ m.$$

Втор начин. Должината на страната на рамностраниот триаголник ABC е еднаква на $984 : 3 = 328\ m$. Според тоа, периметарот на рамнокракиот триаголник ACD е еднаков на

$$1628 - 328 = 1300\ m.$$

16. Над страните на еден триаголник со периметар $18\ cm$ од надворешната страна се конструирани рамностран триаголници. Определи го периметарот на добиената фигура.

Решение. Над секоја страна на дадениот триаголник се наоѓаат по две страни на добиената фигура кои имаат еднаква должина како и страната над која е конструиран рамностраниот триаголник. Ако a, b, c се должините на страните на дадениот триаголник, тогаш од $a + b + c = 18$ следува дека периметарот на добиената фигура е еднаков на

$$2a + 2b + 2c = 2(a + b + c) = 2 \cdot 18 = 36\ cm.$$

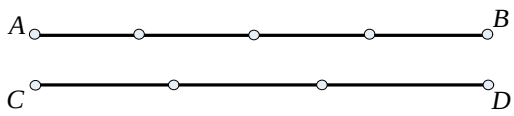
III.3. КВАДРАТ И ПРАВОАГОЛНИК

17. Учителката по математика на учениците им ја задала следнава задача: „*Нацртајте точно* 5 *правоаголници,* 3 *квадрати,* 4 *правоаголни триаголници и* 7 *рамнокраки триаголници (без фигурите да имаат заеднички страни).*“ Андреј нацртал најмал можен број фигури, но во целост ги запазил поставените услови. Колку фигури нацртал Андреј?

Решение. Ако се земе предвид дека квадратите се правоаголници, а рамнокраките поравоаголни триаголници се рамнокраки триаголници заклучуваме дека Андреј нацртал $7+5=12$ фигури и ги запазил сите услови. На пример, тој нацртал 3 квадрати со стана $a=3\,cm$, 2 правоаголници со страни $a=4\,cm, b=2\,cm$, три правоаголни триаголници со страни кај правиот агол $a=b=3\,cm$ и 4 рамнокраки триаголници со страни $a=2\,cm$, $b=c=4\,cm$.

18. Квадрат и рамностран триаголник имаат еднакви периметри. Страните им се разликуваат за толку колку што е најмалиот парен број. Пресметај ги страните на квадратот и триаголникот и нивниот периметар.

Решение. *Прв начин.* Нека отсечката AB го претставува периметарот на квадратот, а отсечката CD периметарот на триаголникот. Тогаш, овие две отсечки се еднакви и AB е поделена на четири еднакви дела, а CD на три еднакви дела (види цртеж). Значи, секој од трите делови на отсечката CD е поголем од секој од четирите делови на отсечката AB, т.е. страната на триаголникот е поголема од страната на квадратот, а од условот на задачата имаме дека таа е поголема за 2 мерни единици. Од последново следува дека една од отсечките на отселката AB има должина колку што изнесува зголемувањето во секоја од трите отсечки на отсечката CD, односно страната на квадратот е $3\cdot 2=6$ мерни единици, па



страната на триаголникот ќе биде $6+2=8$ мерни единици. Тогаш, периметарот е $4\cdot 6=3\cdot 8=24$ мерни единици.

Втор начин. Нека a е должината на страната на квадратот, а b должината на страната на триаголникот. Бидејќи нивните периметри се еднакви, имаме дека $4a=3b.$ Од последното равенство, следува дека $b>a,$ па според условот имаме $b=a+2$. Тогаш, со замена во равенството за периметарот, се добива $4a=3(a+2)$, односно $4a=3a+6$, од каде страната на квадратот е $a=6$ мерни единици, а страната на триаголникот е $b=8$ мерни единици. Тогаш, периметарот е $4\cdot 6=3\cdot 8=24$ мерни единици.

19. Определи ја должината на страната на рамностран триаголник чиј периметар е два пати помал од периметарот на правоаголник со должина $14\,cm$ и ширина $7\,cm$.

Решение. Периметарот на правоаголникот е

$$(14+7)\cdot 2=21\cdot 2=42\,cm.$$

Значи периметарот на рамностраниот триаголник е

$$42:2=21\,cm,$$

па затоа должината на неговата страна е $21:3=7\,cm$.

20. Даден е квадрат чиј периметар е еднаков на периметарот на триаголник со должина на страна $12\,cm$. Определи ја плоштината на квадратот.

Решение. Периметарот на рамностраниот триаголник е еднаков на $3\cdot 12=36\,cm$. Според тоа, должината на страната на квадратот е $a=36:4=9\,cm$. Конечно, плоштината на квадратот е

$$P=a\cdot a=9\cdot 9=81\,cm^2.$$

21. Периметарот на квадратот е еднаков на периметарот на рамнокрак триаголник со основа $8\,cm$ и крак $12\,cm$. Определи ја плоштината на квадратот.

Решение. Периметарот на рамнокракиот триаголник е еднаков на $8+2\cdot 12=32\,cm$. Според тоа, должината на страната на квадратот кој има еднаков периметар со триаголникот е $32:4=8\,cm$.

Конечно, плоштината на квадратот е еднаква на $8 \cdot 8 = 64\ cm^2$.

22. Збирот на периметрите на квадрат и рамностран тиаголник е еднаков на $216\ cm$. Страната на триаголникот е за $2\ cm$ поголема од страната на квадратот. Определи ги плоштината на квадратот и периметарот на триаголникот.

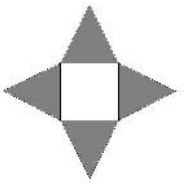
Решение. Нека страната на квадрот е x. Тогаш страната на триаголникот е $x+2$, па затоа

$$4x + 3(x+2) = 216.$$

Решението на последната равенка е $x = 30\ cm$. Според тоа, должината на страната на квадратот е $30\ cm$, а должината на страната на триагоникот е $32\ cm$.

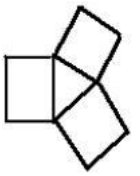
Значи, периметарот на триаголникот е еднаков на $3 \cdot 32 = 96\ cm$, а плоштината на квадратот е еднаква на $30 \cdot 30 = 900\ cm^2$.

23. Обоените триаголници се рамностранни. Периметарот на добиената фигура е еднаков на $24\ cm$. Определи ја плоштината на квадратот.



Решение. Периметарот на дадената фигура е еднаков на збирот на 8 страни на еднакви рамностранни триаголници. Според тоа, должината на страната на рамностраните триаголници е еднаква на $24:8 = 3\ cm$. Значи, плоштината на квадратот е еднаква на $3 \cdot 3 = 9\ cm^2$.

24. Фигурата прикажана на цртежот десно е формирана од рамностран триаголник и три квадрати. Нејзиниот периметар е еднаков на $36\ cm$. Определи ја плоштината на едниот од трите квадрати.



Решение. Страните на рамностраниот триаголник се еднакви, па затоа страните на трите квадрати се еднакви. Дадената фигура има $3 \cdot 3 = 9$ страни, што значи дека должината на страната на квадратите е $36:9 = 4\ cm$. Конечно, плоштината на еден квадрат е еднаква на $4 \cdot 4 = 16\ cm^2$.

25. Миле имал правоаголен картон со страни $55\ cm$ и $20\ cm$. Тој правоаголникот го расекол на квадрати со периметар $20\ cm$. Колку квадрати Миле добил?

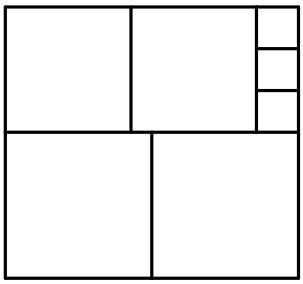
Решение. Периметарот на делбените квадрати е $L = 20\ cm$. Ако страната на делбениот квадрат е a, тогаш од равенката $4a = 20$, добиваме $a = 5\ cm$.

Страната со должина $55\ cm$ на правоаголниот картон може да се подели на $55:5=11$ дела со должина $5\ cm$. Страната со должина $20\ cm$ може да се раздели на $20:5=4$ дела со должина $5\ cm$.

Според тоа, правоаголниот картон со страни $55\ cm$ и $20\ cm$ може да се раздели на $11\cdot 4 = 44$ квадратни парчиња со периметар $20\ cm$.

Значи, Миле добил 44 квадратни парчиња.

26. Правоаголник е поделен на 7 квадрати (види цртеж). Ако периметарот на најмалиот квадрат е $2\ cm$, колкав е периметарот на почетниот правоаголник.



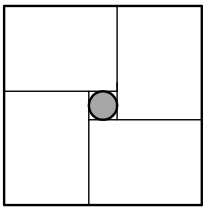
Решение. Периметарот на најмалиот квадрат е $2\ cm$, па должината на неговата страна е $\frac{1}{2}\ cm$. Тоа значи дека должината на страна од вториот по големина квадрат е $\frac{3}{2}\ cm$. Должината на едната страна на правоаголникот е еднаква на збирот на должините на страните на два средни и еден мал квадрат, т.е. таа е еднаква на $\frac{1}{2}+\frac{3}{2}+\frac{3}{2}=\frac{7}{2}cm$. Должината на страната на големиот квадрат е еднаква на половина од најдената должина на страната на правоаголникот, односно на $\frac{7}{4}\ cm$. Значи, должината на другата страна на правоаголникот е еднаква на $\frac{3}{2}+\frac{7}{4}=\frac{6}{4}+\frac{7}{4}=\frac{13}{4}\ cm$.

Конечно, периметарот на правоаголникот е еднаков на

$$2(\frac{7}{2}+\frac{13}{4})=2(\frac{14}{4}+\frac{13}{4})=2\cdot\frac{27}{4}=\frac{27}{2}\,cm\,.$$

27. Продавница е во форма на квадрат со страна 7 метри. Во продавницата треба да се постави статуа со квадратна основа со страна од 1 метар. Дали може преостанатот дел од продавницата да се покрие со 4 правоаголници со страни 3 и 4 метри. (Правоаголниците не смее да се расекуваат).

Решение. Јасно, секој од правоаголниците мора да го поставиме во едно од темињата на квадратот. Понатаму, бидејќи должината на страната на квадратот е $7=4+3$, заклучуваме дека секои два правоаголници мора да се допираат со различни страни. Според тоа, покривањето треба да се направи така што статуата ќе се постави во средина на продавницата, а правоаголниците по два на секоја страна на квадратот како што е прикажано на цртежот десно.



28. Определи го збирот на периметрите на сите различни правоаголници кои што можат да се образуваат од девет квадрати со должина на страна $1\,cm$ (при конструкција на правоаголниците не е задолжително да учествуваат сите квадрати).

Решение. Нека a и b се должините на страните на соодветниот правоаголник. Ако $a=1$, тогаш $b\in\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Ако $a=2$, тогаш $b\in\{2,3,4\}$. Ако пак $a=3$ тогаш $b=3$. Сега, бараниот збир е еднаков на

$$A=2(1+1)+2(1+2)+2(1+3)+2(1+4)+2(1+5)+2(1+6)+2(1+7)$$
$$+2(1+8)+2(1+9)+2(2+2)+2(2+3)+2(2+4)+2(3+3)=156$$

29. Колку метри бодликава жица е потребно за да се огради нива долга $50\,m$, а широка $30\,m$, ако оградата е составена од три реда бодликава жица?

Решение. Периметарот на оградата е еднаков на

$$2(50+20)=140\,m\,.$$

Значи, за да се огради нивата со три реда бодликава жица се потребни $3 \cdot 140 = 420\ m$ бодликава жица.

30. Ако една страна на квадратот се зголеми два пати, а другата се зголеми за $22mm$, се добива правоаголник чиј обиколка (периметар) е за $2000mm$ поголема од обиколката (периметарот) на квадратот. Колкава е должината на страната на дадениот квадрат?

Решение. Ако страната на почетниот квадрат се означи со a, тогаш страните на правоаголникот се $2a$ и $a+22$. Збирот на двете страни на правоаголникот со должина $2a$ е колку што е периметарот на квадратот. Според тоа, збирот на должините на другите две страни, со должина $a+22$, изнесува $2000mm$. Значи,

$$2a + 44 = 2000,$$
$$2a = 1956,$$
$$a = 1956 : 2 = 978mm.$$

31. Ширината на правоаголникот е $12\ cm$ и е помала од должината. За колку сантиметри треба да се наголеми ширината за да се добие квадрат со периметар еднаков на $52\ cm$.

Решение. Бидејќи $53 : 4 = 13\ cm$, должината на страната на квадратот е $13\ cm$. Значи, должината на правоаголникот $13\ cm$, па затоа неговата ширина треба да се зголеми $13 - 12 = 1\ cm$.

32. Збирот од должините на страните на правоаголникот е $40\ cm$. Едната страна на правоаголникот е 4 пати подолга од другата.

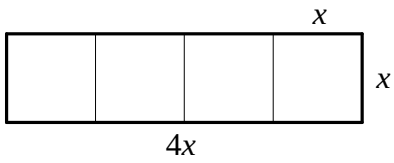
а) Определи ги должините на страните на правоаголникот.

б) Дали може, со 3 паралелни прави, дадениот правоаголник да се подели на 4 еднакви квадрати?

в) За колку сантиметри се разликува збирот од должините на страните на делбен квадрат од збирот од должините на страните на правоаголникот?

Решение. а) Имаме:

$$x + x + 4x + 4x = 40,$$



$10x = 40$,

$x = 4\ cm$.

Едната страна е долга $16\ cm$, а другата $4\ cm$.

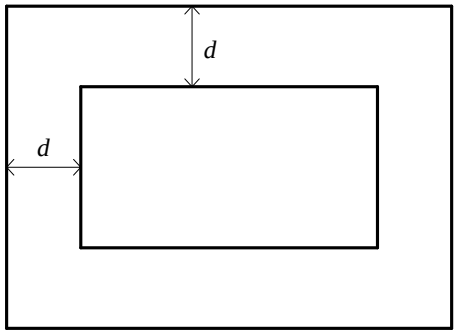
б) Може, страната на секој квадрат е долга по $4\ cm$.

в) Збирот на страните на делбен квадрат е

$$4 + 4 + 4 + 4 = 16\ cm,$$

па затоа тој е помал за $40 - 16 = 24\ cm$ од збирот на страните на правоаголникот.

33. Тревна патека обиколува правоаголно асфалтно игралиште со димензии $36\ dm$ и $12\ m$ (цртеж десно). Ширината d на патеката е еднаква на четвртината од полупериметарот на игралиштето. Колку метри жица е потребно да се огради тревната патека од игралиштето, ако тоа се заобиколи со 5 реда на жица? Колку столбови се потребни за да се прицврсти оградата, ако растојанието меѓу било кои два соседни столба е $6\ dm$?



Решение. Имаме $12\ m = 120\ dm$. Ширината на патеката е

$$d = (120 + 36) : 4 = 39\ dm.$$

Значи едната страна на тревникот е долга $2 \cdot 39 + 120 = 198\ dm$, а другата е долга $2 \cdot 39 + 36 = 114$.

За оградување на еден ред ограда на тревникот е потребно:

$$2(198 + 114) + 2(120 + 36) = 624 + 312 = 936\ dm.$$

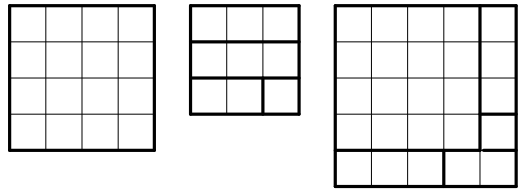
Бидејќи е потребно да се обиколи 5 пати, потребно е

$$5 \cdot 936 = 4680\ dm = 468\ m \text{ жица.}$$

За прицврстување на внатрешната ограда на тревникот се потребни: $312 : 6 = 52$ столбови, а за прицврстување на надворешната оградата на тревникот се потребни $624 : 6 = 104$ столбови. Конечно, за целата ограда се потребни $52 + 104 = 156$ столбови.

34. Димитар има два квадратни картони кои имаат страни $3\,cm$ и $4\,cm$. Дали може од нив, со сечење, да формира квадрат без да отфрли материјал? Во случај на потврден одговор, колку е страната на тој квадрат?

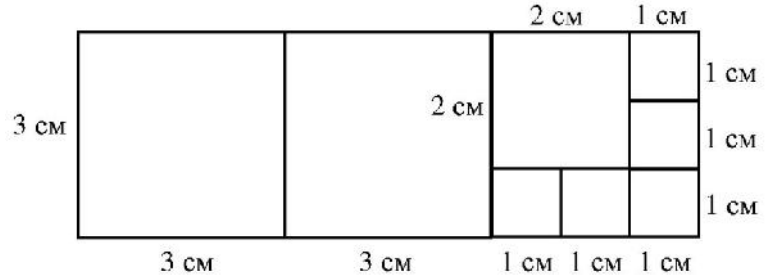
Решение. Димитар може да состави квадрат со должина на страната од $5\,cm$. Квадратот со страна $3\,cm$ ќе го раздели на



правоаголници со страни $1\,cm$ и $3\,cm$, еден правоаголник со страна $1\,cm$ и $2\,cm$ и еден квадрат со страна $1\,cm$. Нив ќе ги додаде на квадратот со страна $4\,cm$ како на цртежот.

35. Правоаголник со должина $9\,cm$ и ширина $3\,cm$ подели го на 8 квадрати кои не мора да имаат различни должини на страни. Пресметај го збирот на периметрите на делбените квадрати.

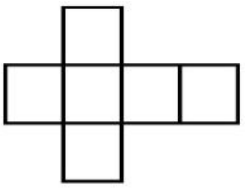
Решение. Бидејќи ширината на правоаголникот е $3\,cm$ најголемиот делбен квадрат може да има должина на страна еднаква на $3\,cm$. Почнувајќи од левата страна да одделиме два квадрати со должини на страни $3\,cm$. Со тоа правоаголникот е поделен на три квадрати со должини на страни $3\,cm$. Третиот квадрат ќе го поделиме така што во горниот лев агол ќе одделиме квадрат со страна $2\,cm$, а останатиот дел ќе го поделиме на четири квадрати со должина на страна $1\,cm$ (цртеж долу). Така дадениот правоаголник го поделивме на осум квадрати.



Збирот на периметрите на делбените квадрати е еднаков на

$$4\cdot 3+4\cdot 3+4\cdot 2+4\cdot 1+4\cdot 1+4\cdot 1+4\cdot 1+4\cdot 1=$$
$$=12+12+8+4+4+4+4+4$$
$$=52\ cm.$$

36. Фигурата прикажана на цртежот десно се сотои од шест еднакви квадрати и нејзиниот периметар е еднаков на $84\ cm$. Определи ја плоштината на оваа фигура.



Решение. Периметарот на дадената фигура се состои од 14 должини на страната на еднаквите квадрати. Според тоа, должината на страната на квадратите е $84:14=6\ cm$. Плоштината на еден квадрат е еднаква на $6\cdot 6=36\ cm^2$, а на целата фигура е еднаква на $6\cdot 36=216\ cm^2$.

37. Периметарот на правоаголник со страна $20\ cm$ е еднаков на периметарот на квадрат со страна $15\ cm$. Определи ја плоштината на правоаголникот.

Решение. За периметарот на квадратот добиваме

$$L_{kv}=4\cdot 15=60\ cm.$$

Ако втората страна на правоаголникот е a, тогаш

$$L_{pr}=2(a+20),$$

па затоа $2(a+20)=60$, од каде добиваме $a=10\ cm$. Конечно, плоштината на правоаголникот е

$$P_{pr}=20a=20\cdot 10=200\ cm^2.$$

38. Периметарот на еден правоаголник е еднаков на периметарот на квадрат со плоштина $36\ cm^2$. Должините на страните на правоаголникот изразени во сантиметри се два последователни непарни природни броја. Определи ја плоштината на овој правоаголник.

Решение. Од $a\cdot a=36$ следува дека должината на страната на квадратот е $a=6\ cm$. Според тоа, периметарот на квадратот, т.е.

периметарот на правоаголникот е еднаков на $4 \cdot 6 = 24\,cm$. Ако должините на страните на правоаголникот се b и c, тогаш $2(b+c) = 24$, односно $b+c = 12$. Бидејќи $12 = 1+11 = 3+9 = 5+7$, заклучуваме дека должините на страните на правоаголникот се $5\,cm$ и $7\,cm$. Конечно, неговата плоштина е $P = ab = 35\,cm^2$.

39. Мравка оди по патека, која формира квадрат $ABCD$ со должина на страна $14\,cm$. Мравката тргнала од точката A во насока $B-C-D$ итн. и изминала $7\,m\,2\,cm$, по што застанала да се одмори. На која страна на квадратот мравката застанала да се одмори?

Решение. Мравката изминала $7\,m\,2\,cm = 702\,cm$. Периметарот на квадратот е еднаков на $4 \cdot 14 = 56\,cm$ и од $702 = 56 \cdot 12 + 30$ заклучуваме дека мравката дванаесет пати го обоколила квадратот и поминала уште $30\,cm$. Но, $30 = 2 \cdot 14 + 2$, што значи дека тргнувајќи од темето A мравката поминала уште две страни и застанала на третата страна, односно на страната CD.

40. Околу зграда со правоаголна основа, чија должина е $26\,m$, а ширина е $15\,m$, на растојание $5\,m$ од зградата е подигната ограда. Определи ја плоштината на неизградената заградена површина.

Решение. Бидејќи зградата е со правоаголна основа, заклучуваме дека оградата околу зградата ќе има правоаголна форма со должина $26 + 2 \cdot 5 = 36\,m$ и ширина $15 + 2 \cdot 5 = 25\,m$. Плоштината на местото заградено со оградата е $36 \cdot 25 = 900\,m^2$, а плоштината на основата на зградата е $26 \cdot 15 = 390\,m^2$. Плоштината на неизградената заградена површина е $900 - 390 = 510\,m^2$.

41. Збирот на најголемите шест различни непарни двоцифрени броеви е еднаков на периметарот на еден квадрат изразен во сантиметри. Определи ја плоштината на овој квадрат.

Решение. Најголемите шест непарни пдвоцифрени броеви се: 99, 97, 95, 93, 91 и 89. Нивниот збир е

$$99+97+95+93+91+89=(99+89)+(97+91)+(93+91)$$
$$=188+188+188=3\cdot 188=564.$$

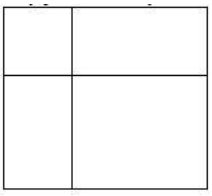
Според тоа, должината на страната на квадратот е

$$564:4=141\,cm,$$

па затоа неговата плоштина е

$$141\cdot 141=19881\,cm^2.$$

42. Квадрат е поделен на два квадрати и два правоаголника (цртеж десно). Периметарот на едниот квадрат е еднаков на $36\,cm$, а плоштината на еден од правоаголниците е еднаква на $144\,cm^2$. Определи ги плоштината на другиот квадрат и периметарот на почетниот квадрат.



Решение. Периметарот на едниот квадрат е еднаков на $36\,cm$, па затоа должината на неговата страна е еднаква на $36:4=9\,cm$. Но, плоштината на еден од правоаголниците е $144\,cm^2$, па затоа должината на другата негова страна е еднаква на $144:9=16\,cm$. Според тоа, плоштината на другиот квадрат е еднаква на $16\cdot 16=256\,cm^2$. Сега, страната на почетниот квадрат е еднаква на $9+16=25\,cm$, па затоа неговиот периметар е $4\cdot 25=100\,cm$.

43. Должината на едната страна на еден правоаголник е $300\,mm$ и таа е шест пати подолга од другата страна. Определи ги периметарот и плоштината на овој правоаголник.

Решение. Должината на едната страна на дадениот правоаголник е $300:10=30\,cm$, а должината на другата страна е $30:6=5\,cm$. Според тоа, плоштината на правоаголникот е еднаква на $30\cdot 5=150\,cm^2$, а неговиот периметар е еднаков на $2\cdot(30+5)=2\cdot 35=70\,cm$.

44. За оградување на дворно место во форма на правоаголник дедо Стојан искористил 56 метри жица. Должината на дворното мес-

то е три пати поголема од ширината. Определи ја плоштината на дворното место.

Решение. Нека ширината на дворното место е x. Тогаш неговата должина е $3x$, па затоа за периметарот добиваме

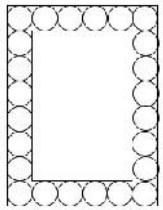
$$2(x+3x)=8x.$$

Периметарот е еднаков на должината на употребената жица, што значи $8x=56$, т.е. $x=7\,m$. Според тоа, ширината на дворното место е $7\,m$, а неговата должина е $3\cdot 7=21\,m$. Конечно, плоштината на дворното место е еднаква на $7\cdot 21=147\,m^2$.

45. Правоаголник $ABCD$, со должини на страни $8\,cm$ и $6\,cm$, е поделен на два правоаголника. Едниот од нив ($ABKM$) има периметар кој е за $6\,cm$ помал од периметарот на правоаголникот $ABCD$. Определи ја плоштината на правоаголникот $ABKM$.

Решение. Ако должината на страната AB е еднаква на $8\,cm$, тогаш бидејќи периметарот на правоаголникот $ABKM$ е за $6\,cm$ помал од периметарот на правоаголникот $ABCD$, добиваме дека должината на страната BK е за $6:2=3\,cm$ помала од должината на страна BC која е еднаква на $6\,cm$. Значи, должините на страните на правоаголникот $ABKM$ се $8\,cm$ и $6-3=3\,cm$, па неговата плоштина е еднаква на $8\cdot 3=24\,cm$.

Ако должината на страната AB е еднаква на $6\,cm$, тогаш бидејќи периметарот на правоаголникот $ABKM$ е за $6\,cm$ помал од периметарот на правоаголникот $ABCD$, добиваме дека должината на страната BK е за $6:2=3\,cm$ помала од должината на страна BC која е еднаква на $8\,cm$. Значи, должините на страните на правоаголникот $ABKM$ се $6\,cm$ и $8-3=5\,cm$, па неговата плоштина е еднаква на $6\cdot 5=30\,cm$.

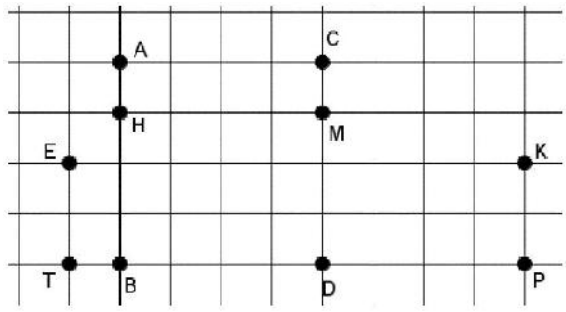


46. Михаела направила рамка за фотографии во форма на правоаголник со надворешни димензии $16\,cm$ и $12\,cm$ и на неа налепила кругови со ра-

диус $1\,cm$ како што е прикажано на цртежот десно. Определи ги димензиите на најголемата фотографија која може да се стави во рамката.

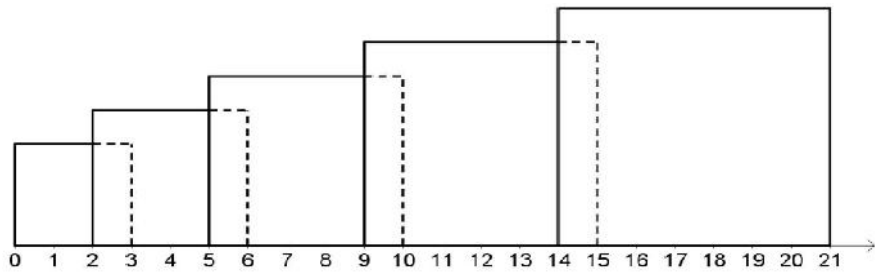
Решение. Дијаметарот на кружницата со радиус $1\,cm$ е еднаков на $2\,cm$. Последното значи дека ширината на рамката е еднаква на $2\,cm$, а тоа значи дека димензиите на внатрешниот правоаголник на рамката се за $2+2=4\,cm$ помали од димензиите на надворешниот правоаголник. Според тоа, димензиите на внатрешниот правоаголник се $16-4=12\,cm$ и $12-4=8\,cm$ и тоа се димензиите на најголемата фотографија која може да се стави во рамката.

47. Означените точки на цртежот десно се темиња на правоаголници. Кој правоаголник има најголема плоштина? (Квадратот е правоаголник.)



Решение. Точките означени на цртежот се темиња на правоаголниците $TPKE$, $BDMH$, $HMCA$ и $BDCA$, чии плоштини се еднакви на $9\cdot 2=18$, $4\cdot 3=12$, $4\cdot 1=4$ и $4\cdot 4=16$, соодветно. Според тоа, правоаголникот $TPKE$ е со најголема плоштина.

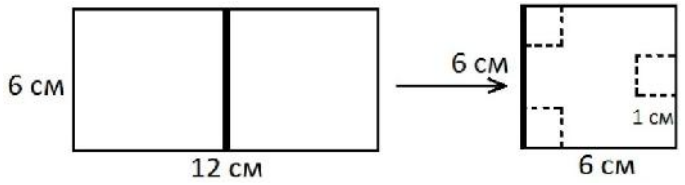
48. На низата квадрати се додадени од десно уште четири квадрати. Определи ја плоштината на делот од осмиот квадрат кој не се преклопува со соседните квадрати.



Решение. Осмиот квадрат се преклопува со седмиот и деветтиот квадрат. Лесно се гледа дека должината на страната на седмиот квадрат е еднаква на 9, должината на страната на осмиот квадрат е еднаква на 10 и должината на страната на деветтиот квадрат е еднаква на 11. Значи, плоштината на осмиот квадрат е $10 \cdot 10 = 100$, плоштината на правоаголникот во кој се преклопуваат седмиот и осмиот квадрат е $9 \cdot 1 = 9$ и плоштината на правоаголникот во кој се преклопуваат осмиот и деветтиот квадрат е $10 \cdot 1 = 10$. Конечно, плоштината на делот од осмиот квадрат кој не се преклопува со соседните квадрати е еднаква на

$$100 - (9 + 10) = 81.$$

49. Правоаголен лист хартија со димензии $6\,cm$ и $12\,cm$ е превиткан по средината (на долниот цртеж по задебелената линија) и е добиен квадрат со должина на страна $6\,cm$. Потоа се отсечени три квадратчиња со должина на страна $1\,cm$, како што е прикажано на цртежот и листот е одвитка. Определи го периметарот на добиената фигура.



Решение. Периметарот на почетниот правоаголник е еднаков на

$$2 \cdot (6 + 12) = 2 \cdot 18 = 36\,cm.$$

При отсекувањето на двете леви квадратчиња всушност отсекуваме правоаголници со страни $2\,cm$ и $1\,cm$, па затоа секој правоаголник периметарот на почетниот правоаголник го зголемува за $2\,cm$. При отсекувањето на десното квадратче ние од почетниот правоаголник отсекуваме две квадратчиња со страна $1\,cm$, па затоа секое квадратче периметарот на почетниот право-аголник го зголемува за $2\,cm$. Конечно, периметарот на добиената фигура е еднаков на

$$36 + 4 \cdot 2 = 44\,cm.$$

50. Три мали еднакви правоаголници се наредени како на цртежот десно и од нив е добиен еден голем правоаголник. Периметарот на големиот правоаголник е еднаков на $200\,cm$. Определи ја плоштината на големиот правоаголник.

Решение. Ако должината на пократката страна на малиот правоаголник е a, тогаш должината на подолгата страна е $2a$. Според тоа, должините на страните на големиот правоаголник се $2a$ и $a+2a=3a$. Значи, за неговиот периметар добиваме $2\cdot(2a+3a)=200$, од каде наоѓаме $2\cdot 5a=200$, т.е. $10a=200$. Од последната равенка добиваме $a=20\,cm$. Според тоа, должините на страните на големиот правоаголник се $2a=40\,cm$ и $3a=60\,cm$, па затоа неговата плоштина е еднаква на

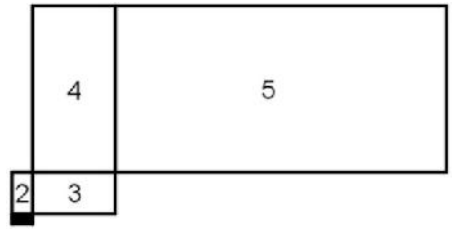
$$2a\cdot 3a=40\cdot 60=2400\,cm^2.$$

51. Должините на страните на еден правоаголник се $20\,cm$ и $13\,cm$, а на еден квадрат е $16\,cm$. Која фигура има поголем периметар, а која поголема плоштина?

Решение. Периметарот на квадратот е еднаков на $4\cdot 16=64\,cm$, а на правоаголникот е $2\cdot(20+13)=2\cdot 33=66\,cm$. Значи, правоаголникот има поголем периметар.

Плоштината на квадратот е еднаква на $16\cdot 16=256\,cm^2$, а на правоаголникот е $20\cdot 13=260\,cm^2$. Значи правоаголникот има поголема плоштина од квадратот.

52. Соња реди правоаголни плочки една до друга на начинот прикажан на цртежот десно. Таа почнува со црната плочка. Колкава е плоштината на седмата плочка, ако должината на секоја плочка е два пати



поголема од ширината, а должините на страните на црниот правоаголник се $1\,cm$ и $2\,cm$.

Решение. Должините на страните на втората плочка се $2\,cm$ и $4\,cm$.

Должините на страните на третата плочка се $4\,cm$ и $8\,cm$.

Должините на страните на четвртата плочка се $8\,cm$ и $16\,cm$.

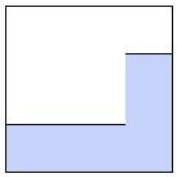
Должините на страните на петтата плочка се $16\,cm$ и $32\,cm$.

Должините на страните на шестата плочка се $32\,cm$ и $64\,cm$.

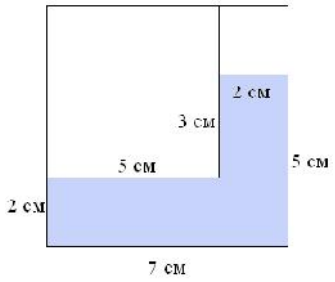
Должините на страните на седмата плочка се $64\,cm$ и $128\,cm$.

Според тоа, плоштината на седмата плочка е $64\cdot 128 = 8192\,cm^2$.

53. На цртежот десно е прикажан голем квадрат во кој се сместени два мали квадрати со плош-тини $25\,cm^2$ и $4\,cm^2$. Определи го периметарот на сивата фигура.



Решение. Плоштината на едниот квадрат е $25\,cm^2$ и бидејќи $5\cdot 5 = 25$ неговата страна е $5\,cm$. Плоштината на другиот квадрат е $4\,cm^2$ и бидејќи $2\cdot 2 = 4$ неговата страна е $2\,cm$. Затоа страната на големиот квадрат е $5+2=7\,cm$. Страните на сивата фигура се $7\,cm$, $702 = 5\,cm$, $2\,cm$, $5-2=3\,cm$, $5\,cm$ и $7-5=2\,cm$. Конечно, периметарот на сивата фигура е $7+5+2+3+5+2=24\,cm$.



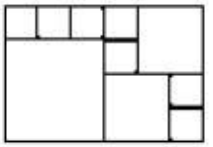
54. За колку сантиметри ќе се промени периметарот на правоаголник ако едната негова страна се намали за $12\,cm$, а другата се зголеми за $75\,cm$.

Решение. Нека должините на страните на почетниот правоаголник се a и b. Тогаш должините на страните на новиот правоаголник се $a-12$ и $b+75$. Периметарот на новиот правоаголник ќе биде

$$2(a-12+b+75)=2(a+b+63)=2(a+b)+126,$$

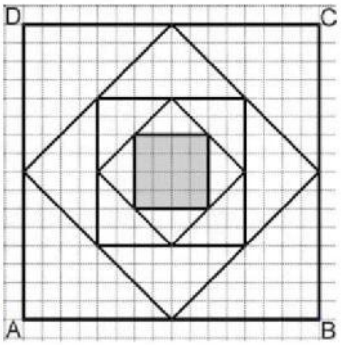
што значи дека тој ќе биде $126\,cm$ поголем од периметарот на почетниот правоаголник.

55. Правоаголник е составен од десет квадрати, при што најголемиот има периметар $24\,cm$ (цртеж десно). Определи ја плоштината на правоаголникот.



Решение. Должината на страната на големиот квадрат е еднаква на $24:4=6\,cm$. Според тоа, должината на страната на најмалите квадрати е еднаква на $6:3=2\,cm$. Значи, должината на страната на средниот квадрат е еднаква на $2\cdot 2=4\,cm$. Според тоа, должината на правоаголникот е еднаква на $6+4+2=12\,cm$, а неговата ширина е еднаква на $6+2=8\,cm$. Конечно, плоштината на правоаголникот е еднаква на $8\cdot 12=96\,cm^2$.

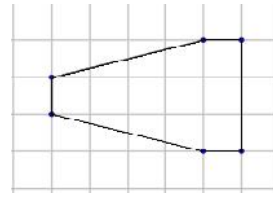
56. Плоштината на квадратот $ABCD$ е еднаква на 64. Определи ја плоштината на сивиот квадрат.



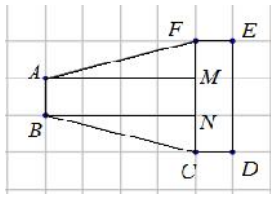
Решение. Квадратите се нацртани во квадратна мрежа со должина на квадратче x, при што должината на страната на квадратот $ABCD$ е еднаква на $16x$. Понатаму, должината на страната на вториот квадрат во квадратот $ABCD$ е $8x$, а должината на страната на сивиот квадрат е $4x$. Според тоа, бидејќи $16x=4\cdot 4x$ должината на страната на сивиот квадрат е 4 пати помала од должината на страната на квадратот $ABCD$.

Ако должината на страната на сивиот квадрат е a, тогаш должината на страната на квадратот $ABCD$ е $4a$. Значи, $4a\cdot 4a=64$, т.е. $16a\cdot a=64$, од каде добиваме дека плоштината на сивиот квадрат е $a\cdot a=4$.

57. Колку пати плоштината на фигурата прикажана на цертежот десно е поголема од плоштината на едно квадратче?



Решение. Да ги воведеме ознаките како на долниот цртеж лево.



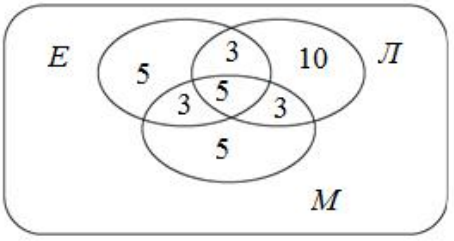
Тогаш правоаголникот $ABNM$ е составен од 4 квадратчиња, правоаголникот $CDEF$ е составен од 3 квадратчиња, а секој од триаголниците AMF и BNC е половина од правоаголник составен од 4 квадратчиња. Според тоа, плоштината на дадената фигура е еднаква на плоштината на $4+3+4=11$ квадратчиња.

IV ЛОГИКА И КОМБИНАТОРИКА

IV.1. ВЕНОВИ ДИЈАГРАМИ

1. Учениците од IV^a одделение членуваат во еколошката, литературната или математичката секција. Пет ученици членуваат во сите три секции, а девет ученици членуваат во по две секции. Во еколошката и литературната членуваат 8 ученици, и исто толку во литературната и математичката секција. Исто така, 20 ученици членуваат само во по една секција и тоа по 5 во еколошката и математичката секција. Колку ученици има во IV^a одделение?

   Решение. Ако дадените податоци од условот на задачата ги внесиме во Венов дијаграм го добиваме цртежот десно.

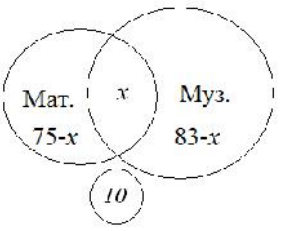
   Според тоа, во IV^a учат $3\cdot 5+3\cdot 3+10=34$ ученици.

2. Во едно училиште учат 100 ученици во петто одделение. Од нив 75 членуваат во математичката секција, 83 ученици се членови на музичката секција и 10 ученици не членуваат во ниту една од овие две секции. Колку ученици членуваат и во математичката и во музичката секција?

   Решение. Ако бројот на учениците кои членуваат и во двете секции го означиме со x, тогаш од условот на задачата го добиваме Веновиот дијаграм, па затоа

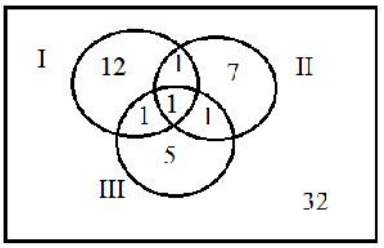
   $$(75-x)+x+(83-x)+10=100,$$

   од каде следува $x=68$. Според тоа, 68 ученици членуваат и во двете секции, 7 членуваат само во математичката секција и 15 ученици членуваат само во музичката секција.

3. Подот на една сала има плоштина $32\,m^2$ и е покриен со 3 килими. Првиот килим има плоштина $15\,m^2$, вториот има плоштина $10\,m^2$ и третиот има плоштина $8\,m^2$. Секои два килима се препокриваат со $2\,m^2$, а $1\,m^2$ е покриен од трите килими. Колку метри квадратни од салата не се покриени со килими?

Решение. Задачата ќе ја решиме со помош на Венов дијаграм. На цртежот десно со I, II, III се означени килимите, а во пресекот на множествата се плоштините во кои тие се препокриваат. Според тоа, килимите покриваат $12+7+5+1+1+1+1=28\,m^2$ од салата, па затоа непокриени ќе останат $32-28=4\,m^2$.



4. На една екскурзија со посета на музеј и изложба отишле 56 ученици. Во музеј биле 37 ученици, а изложбата ја разгледале 25 ученици. Понатаму, 18 ученици го посетиле и музејот и изложбата. Дали има ученици кои не ги посетиле ниту музејот ниту изложбата?

Решение. Од условот на задачата следува дека $37-18=19$ ученици го посетиле само музејот, а $25-18=7$ ученици ја посетиле само изложбата. Значи, музејот или изложбата ги посетиле $19+7+18=44$ ученици. Според тоа, $56-44=12$ ученици не ги посетиле ниту музејот ниту изложбата.

Забелешка. Задачата може да се реши со Венов дијаграм.

5. Во една фискултурна сала 16 од топките се шарени и 11 се топки за одбојка. Колку топки има во салата, ако 6 од топките за одбојка се шарени?

Решение. Во салата има $11-6=5$ топки за одбојка кои не се шарени. Вкупниот број топки е еднаков на збирот на топките кои се шарени и топките за одбојка кои не се шарени. Според тоа, во салата има $16+5=21$ топка.

Забелешка. Задачата може да се реши со Венов дијаграм.

6. Во одделението на Горјан 26 ученици тренираат кошарка или одбојка. Од нив 19 тренираат кошарка, а 12 тренираат одбојка. Колку ученици се занимаваат и со двата спорта?
Решение. Ако сите ученици тренираат само по еден од наведените спортови, тогаш во одделението треба да тренираат $19+12=31$ ученик. Бидејќи со спорт се занимаваат само 26 ученици, заклучуваме дека $31-26=5$ ученици се два пати броени и тоа се учениците кои се занимаваат со двата спорта.
Забелешка. Задачата може да се реши со Венов дијаграм.

IV.2. ЛОГИЧКИ ГЛАВОБОЛКИ

7. Подреди ги следниве настани според редоследот на случување почнувајќи од настанот кој прв се случил:
а) Трите ластовички истовремено полетале од јажето за простирање алишта.
б) Една ластовичка слетала на јажето за простирање алишта.
в) Баба Бојана го врзала јажето за простирање алишта.
г) На јажето слетале уште две ластовички.
Решение. Јасно, прв се случил настанот в), потоа настанот б), по што се случил настанот г) и на крајот се случил настанот а).

8. Во зградата на Андреј пет семејства имаат по 3 деца, при што две од нив имаат близнаци. Ако близнаците се само момчиња, колку најмногу девојчиња има меѓу децата на овие семејства?
Решение. Вкупниот број деца е $5\cdot 3=15$. Од нив со сигурност има $2\cdot 2=4$ момчиња. Значи, може да има најмногу $15-4=13$ девојчиња.

9. Трите внуци на баба Марија се родени во еден ист ден, но во различни години. За роденденот баба Марија подготвила три торти така што на едната ставила 2 свеќички, на другата 4 свеќички и на третата 5 свеќички.

Колку години има Бојан, ако Иван е 2 години постар од Коста?

Решение. Меѓу можните разлики на броевите 2, 4 и 5 само разликата меѓу 2 и 4 е еднаква на 2. Оттука следува дека Коста има 2 години, Иван има 4 години и Бојан има 5 години.

10. На вкупно 21 дете се разделени 200 ореви. Докажи дека како и да се разделени оревите, ќе постојат деца кои што добиле еднаков број ореви.

Решение. Ако сите деца добиле различен број ореви, тогаш треба да поделиме најмалку

$$0+1+2+3+4+5+6+...+15+16+17+18+19+20=$$
$$=(20+1)+(19+2)+(18+3)+...+(11+10)$$
$$=10\cdot 21=210.$$

Но, тоа е спротивно на претпоставката дека има вкупно 200 ореви.

11. Ана, Бојан, Васко и Дијана се натпреваруваат во трчање на 400 метри. Ако Бојан го претекнеше Васко, тогаш Бојан ќе беше втор. Ако Дијана на целта стигнеше пред Бојан, тогаш Бојан ќе беше последен. Кој победил во трката?

Решение. Бидејќи ако Дијана стигнеше на целта пред Бојан, тогаш Бојан ќе беше последен, заклучуваме дека Бојан на целта стигнал трет, а Дијана стигнала четврта. Потоа, бидејќи ако Бојан го претекнеше Васко, тогаш Бојан ќе беше втор, заклучуваме дека Васко на целта стигнал втор. Конечно, Васко е врор, Бојан е трет, Дијана е четврта, па заклучуваме дека Ана победила во трката.

12. Ангел, Борис, Васил и Данчо се натпреварувале во трчање. Ангел на целта стигнал пред Борис, Васил стигнал по Данчо, а Борис стигнал пред Васил. Кој бил последен?

Решение. Ангел пред Борис, што значи Ангел не е последен. Слично Борис стигнал пред Васил, па значи Борис не е последен. Останууваат Васил и Данчо, па како Васил стигнал по Данчо, заклучуваме дека Васил е последен.

13. Една година месецот јуни имал 5 вторници и 5 среди. Во кој ден од седмицата бил 24. мај истата година?
Решение. Месецот јуни има 30 дена, па за истиот има 5 вторници и 5 среди, треба да има четири полни недели и 29 и 30 јуни да се во вторник и среда, соодветно. Според тоа, 1. јуни е во вторник, што значи дека 31. мај е во понеделник, па затоа 24. мај, односно седум дена порано е во понеделник.

14. Секое од четирите девојчиња Ана, Билјана, Василка и Галина има различен број чоколади и тоа најмалку 5, а најмногу 8. Галина нема 8 чоколади. Бројот на чоколадите на Василка е парен број, а на Билјана е непарен број. Билјана има повеќе чоколади од Василка. Која има 8 чоколади?
Решение. Галина може да има 5, 6 или 7 чоколади. Василка може да има 6 или 8 чоколади. Билјана може да има 5 или 7 чоколади. Бидејќи Билјана има повеќе чоколади од Василка, заклучуваме дека можаната распределба е за Билјана 7, а Василка 6 чоколади. Според тоа, останува Галина да има 5 чоколади, а 8 чоколади има Ана.

15. На таблата се запишани броевите 9, 11, 13, 15, 17 и 19. Во секој чекор се бришат два од запишаните броеви и наместо низ се запишува збирот на избришаните два броја намален за 2. По неколку чекори на таблата ќе биде запишан еден број. Кој е тој број?
Решение. Збирот на броевите кои се запишани на таблата е
$$9+11+13+15+17+19=(9+19)+(11+17)+(13+15)$$
$$=28+28+28=3\cdot 28=84,$$
а сите чекори до добивање на еден број се 5. Бидејќи во секој чекор збирот на двата броја се намалува за 2, заклучуваме дека во петте чекори збирот на броевите ќе се намали за $5\cdot 2=10$. Конечно, на крајот на таблата ќе биде запишан бројот $84-10=74$.

16. Андреј кажал дека на неговиот роденден имало повеќе од шест гости, на што Горјан забележал дека бројот на гостите бил

поголем од 5. Колку гости имало на роденденот на Андреј, ако се знае дека точно една од дадените изјави е вистинита?

Решение. Не е можно на роденденот да има повеќе од 6 гости, бидејќи тогаш и двете изјави ќе бидат вистинити. Не е можно на роденденот да имало 5 или помалку гости, бидејќи тогаш и двете изјави нема да бидат вистинити. Останува единствената можност на роденденот да имало точмо 6 гости, при што изјавата на Горјан е вистинита, а изјавата на Андреј не е вистинита.

17. Андреј има најмалку 6 златници и сребреници. Познато е дека меѓу секои четири монети има барем еден златник и дека меѓу секои пет монети има барем еден сребреник. Колку најмногу монети може да има Андреј?

Решение. Сребрениците не може да се 4 или повеќе, бидејќи тогаш ќе има четири монети меѓу кои нема да има златник. Значи, Андреј може да има најмнгу 3 сребреници. На ист начин меѓу монетите не може да има 5 или повеќе златници, бидејќи тогаш ќе има 5 монети меѓу кои нема сребреник. Значи, златниците може да бидат најмногу 4. Според тоа, Андреј може да има најмногу 7 монети и тоа 4 златници и 3 сребреници.

18. Сашо, Никола, Васко и Мишко се натпреварувале во скок во далечина. Сашо скокнал подалеку од Никола и Васко, а Никола скокнал поблиску од Васко, но подалеку од Мишко. Кој имал најкраток скок?

Решение. Бидејќи Сашко скокнал подалеку од Васко, Васко скокнал подалеку од Никола и Никола скокнал подалеку од Мишко, заклучуваме дека редоследот бил Сашко, Никола, Васко и Мишко. Значи, Мишко имал најкраток скок.

19. На меѓународен конгрес на математичари приуствувале 100 научници, од кои 60 се мажи и 40 жени, а 7 од нив се вегетаријанци. Половина од научниците се европејци, а другата половина се претставници на останатите континенти. Колку научници со сигурност се истовремено европејци и мажи, но не се вегаријанци?

Решение. Треба да определиме најмал можен број на европејци и мажи, кои не се вегатиријанци. Да забележиме дека тоа е случајот кога сите жени и сите вегетаријанци се европејци. Бидејќи европејци има $100:2=50$, жени се 40 и вегетаријанци се 7, бараниот број е

$$50-(40+7)=3.$$

Значи, со сигурност 3 научници се истовремено европејци и мажи, но не се вегетаријанци.

20. Бременските музиканти Магарето, Кучето, Мачето и Петелот одат по патот во колона еден зад друг. Ако Магарето, кое е на почетокот на колоната, застане меѓу Кучето и Мачето, тогаш Мачето ќе биде на чело на колоната. Кој оди пред Петелот?
Решение. Магарето е на почетокот на колоната, па кога тоа ќе застане меѓу Кучето и Мачето, распоредот ќе биде Мачето, Магарето, Кучето и Петелот. Значи, распоредот е Магарето, Мачето, Кучето и Петелот, т.е. Кучето оди пред Петелот.

21. Марија има 13 цветови, 5 од кои се рози, а останатите се лалиња. Ако 6 цветови се бели, а останатите се црвени, колку најмалку лалиња се црвени?
Решение. Марија има $13-5=8$ лалиња. Најмалиот број црвени лалиња се добива ако сите бели цветови се лалиња, т.е. ако Марија има 6 бели лалиња. Значи, најмалку $8-6=2$ лалиња се црвени.

22. Радица има 5 топчиња: сино, црвено, жолто, зелено и лилјаково. Ги означила со броевите од 1 до 5. Броевите на жолтото и зеленото топче се парни. Потоа топчињата ги наредила во ред едно до друго по растечки редослед на броевите со кои ги означила. До црвеното има само едно топче – зеленото. Лилјаковото топче не е до зеленото. Определи ја бојата на топчето означено со број 3.
Решение. Јасно, топчето со број 3 не е жолто или зелено, бидејќи овие топчиња се означени со парни броеви. Бидејќи, зеленото топче е второ или четврто, а до црвеното топче е само

до зеленото заклучуваме дека црвеното топче е прво или петто. Значи, топчето со број 3 не е ниту црвено. Бидејќи зеленото и жолтото топче се означени со парни броеви, т.е. со броевите 2 и 4, ако лилјаковото топче е означено со број 3, тогаш тоа ќе биде до зеленото,што не е случај. Значи, топчето со број 3 не е и лилјаково, па останува тоа да е сино.

23. Ана, Дима и Сијка учат во различни одделенија: прво, второ и трето. Дима и ученичката од трето одделение патуваат до училиште со еден и ист автобус. Ученичката од второ одделение живее во зградата на Дима, но повеќе сака да се дружи со Ана. Кое девојче во кое одделение учи?

Решение. Јасно, Дима не учи ниту во второ, ниту во трето одделение, што значи дека таа учи во прво одделение. Понатаму, бидејќи ученичката од второ одделение живее во зградата на Дима, но повеќе сака да се дружи со Ана заклучуваме дека Ана не е во второ одделение. Според тоа, во второ одделение е Сијка, а Ана е во трето одделение.

24. Мартин фрлал две еднакви коцки за играње 3 пати. Забележал дека секогаш паѓа различна комбинација броеви точки, во која бројот на точките кои паднале на едната коцка е за 1 поголем од бројот на коцките кои паднале на другата коцка. Определи го најголемиот можен збир на точки кои паднале на двете коцки во трите фрлања.

Решение. Според условот на задачата бројот на паднатите точки во трите фрлања ќе биде најголем ако паднале броевите точки 6 и 5, 5 и 4, 4 и 3. Значи, најголемиот можен збир на точки кои паднале на двете коцки во трите фрлања е

$$6+5+5+4+4+3=27.$$

25. Во еден месец понеделниците биле повеќе од вторниците, а неделите повеќе од саботите. Кој ден од седмицата е петтиот ден од тој месец?

Решение. Во секој месец имаме по 4 седмици, што значи најмалку 4 саботи, 4 недели, 4 понеделници и 4 вторници. Бидејќи

понеделниците се повеќе од вторниците имаме 5 понеделници, а од исти причини и 5 недели. Според тоа, месецот има најмалку 30 дена. Понатаму, месецот не може да завршува во вторник, бидејќи тогаш бројот на понеделниците не може да е поголем од бројот од вторниците. Од иста причина месецот не може да почнува во сабота. Според тоа, месецот почнува во недела, а завршува во понеделник и само во овој случај се исполнети условите на задачата. Затоа петтиот ден во овој месец е четврток.

26. На еден остров живеат само витези и лажливци. Витезите секогаш ја говорат вистината, а лажливците секогаш лажат. Тројца витези и тројца лажливци од островот учествувале во разговор во кој од четири соговорници биле искажани следниве четири тврдења: :
    1) „Тројца од нас се витези.“
    2) „Тројца од вас се лажливци.“
    3) „Двајца од вас се витези.“
    4) „Двајца од нас се витези.“

    Колку од овие тврдења со сигурност се искажани од лажливци?

    Решение. Првото тврдење е точно и затоа не може да биде искажано од лажливец. Второто е вистиниото кога е искажано од витез, но не е вистинито кога е искажано од лажливец, па затоа не можеме со сигурност да тврдиме дека е искажано од лажливец. Третото тврдење е вистинито кога е искажано од витез, но не е вистинито кога е искажано од лажливец, па затоа не можеме со сигурност да тврдиме дека е искажано од лажливец. Третото тврдење не е вистинито, па затоа со сигурност е искажано од лажливец. Конечно, само едно од четирите тврдења со сигурност е искажано од лажливец.

27. На еден остров живеат витези, кои секогаш ја говорат вистината и лажливци, кои секогаш лажат. Еден патник сретнал три жители од островот и секој од нив го прашал колку од неговите сопатници се витези. Првиот одговорил: „Ниту еден“, а вториот одговорил „Еден“. Што одговорил третиот жител на островот?

Решение. Витезите ќе ги означиме со В, а лажливците со Л. За трите жители на островот по редоследот на нивните одговори имаме осум можности:

1) ВВВ, 2) ВВЛ, 3) ВЛВ, 4) ЛВВ,
5) ВЛЛ, 6) ЛВЛ, 7) ЛЛВ, 8) ЛЛЛ.

Ако првиот жител е В, тогаш од одговорот следува дека единствена можност е 5). Но, тоа значи дека вториот жител кажал вистина, што е противречност. Значи, првиот жител е Л. Тоа е можно само во 4), што значи дека третиот жител одговорил „Еден“.

28. Коста, Јане и Владимир засадиле дрвца: круша, јаболка и вишна. Секој засадил по едно дрво, чие име не започнува на иста буква како неговото име. Кој кое дрво го засадил?

Решение. Ќе пополниме табела во која во полињата во кои името во редот и името во колоната започнуваат со иста буква ќе ставиме знак $-$. Добиваме:

	круша	јаболко	вишна
Коста	–		
Јане		–	
Владимир			–

Сега за Коста имаме две можности, т.е. тој засадил јаболко или вишна. Во првиот случај лесно се добива табелата:

	круша	јаболко	вишна
Коста	–	+	–
Јане	–	–	+
Владимир	+	–	–

што значи дека Коста засадил јаболко, Јане засадил вишна и Владимир засадил круша.

Во вториот случај се добива табелата

	круша	јаболко	вишна
Коста	–	–	+
Јане	+	–	–
Владимир	–	+	–

што значи дека Коста вишна, Јане засадил круша и Владимир засадил јаболко.

29. Во чаша, шише, лонец и бокал се турени млеко, лимонада, чај и вода, во некој редослед. Познато е дека водата и млекото не се во чашата, садот со лимонадата се наоѓа меѓу лонецот и меѓу садот со чај, во бокалот нема ниту лимонада, ниту вода, а шишето се наоѓа блиску до бокалот и садот со млекото. Која течност во кој сад се наоѓа?

Решение. Ја цртаме табелата подолу и ја пополнуваме со информациите од условите на задачата, користејќи ги знаците + и –. Од условот „садот со лимонадата е меѓу лонецот и меѓу садот со чајот“ следува дека лимонадата и чајот не се во лонецот, а од услов „шишето е блиску до бокалот и садот со млекото“ следува дека млекото не е во шишето и бокалот. Во првиот ред на табелата се појавуваат 3 минуси, од што заклучуваме дека млекото е во лонецот, па ставаме знак плус и останатите полиња во колоната со лонецот. Понатаму, во четвртата колона има 3 минуси, што значи дека чајот е во бокалот. Потоа, без тешкотии ги пополнуваме преостанатите празни полиња. Значи, лимонадата е во чашата, а водата е во шишето.

	чаша	шише	лонец	бокал
млеко	–	–	+	–
лимонада	+	–	–	–
чај	–	–	–	+
вода	–	+	–	–

30. Во кутија има 5 црвени, 6 сини и 7 жолти топчиња. Топчињата гиизвлекуваме без да гледаме. Колку топчиња треба најмалку да извлечеме за да сме сигурни дека сме извлекле барем две топчиња со различни бои?

Решение. Ако извлечеме 7 топчиња, тогаш може да се случи сите 7 да се жолти. Но, ако извлечеме уште едно топче, т.е. вкупно 8 топчиња, тогаш со сигурност ќе имаме најмалку две

топчиња со различни бои. Значи, треба да извлечеме најмалку 8 топчиња.

31. Секој од броевите од 1 до 20 е запишан на карта, а потоа картите се превртени со запишаните броеви надолу и се размешани. Колку карти најмалку треба да се изберат така што меѓу броевите запишани на избраните карти да има број чија цифра на единиците не е еднаква на 3 или 6?
Решение. Меѓу запишаните броеви точно четири броја имаат цифра на единиците 3 или 6 и тоа се броевите: 3, 6, 13 и 16. Можно е при избирање на 4 карти да ги избереме картите на кои се запишани точно овие броеви. Сигурно цифрата на единиците на петтата карта нема да биде 3 или 6. Значи, треба да се изберат 5 карти.

32. Секој од броевите од 1 до 50 е запишан на карта, а потоа картите се превртени со запишаните броеви надолу и се размешани. Колку карти најмалку треба да се изберат така што меѓу броевите запишани на избраните карти да има двоцифрен број.
Решение. Имаме 9 едноцифрени броеви. Ако сите бидат избрани, тогаш е потребно да се избере уште една карта, за да сме сигурни дека меѓу броевите запишани на избраните карти има двоцифрен број. Според тоа, потребно е да се изберат најмалку 10 карти.

33. Во кутија се наоѓаат 5 сини, 12 црвени, 7 жолти и 6 зелени топчиња. Колку топчиња, без гледање треба да извадиме од кутијата за да сме сигурни дека сме извадиле најмалку едно црвено топче?
Решение. Бидејќи $5+7+6=18$, ако извадиме 18 топчиња може да се случи тие да се сини, жолти и зелени, т.е. да нема црвено топче. Но, ако извадиме 19 топчиња, тогаш меѓу нив сигурно ќе има најмалку едно црвено топче.

34. Во една кутија има 30 црвени, 18 сини и 11 жолти топчиња. Без да гледаме извлекуваме топчиња. Колку топчиња треба да изва-

диме за да сме сигурни дека сме извадиле најмалку едно црвено топче?

Решение. Ако извадиме 29 топчиња, тогаш бидејќи $29=18+11$ може да се случи сите топчиња да бидат сини и жолти. Но, ако извадиме 30 топчиња, тогаш од $18+11+1=30$ следува дека сигурно едно топче ќе биде црвено.

35. Сашка имала 3 корпи со јаболка. Во корпите имало 12, 14 и 22 јаболка. Дозволено е Сашка да избере две корпи, од трите корпи кои ги имала, и да префрлува јаболка од едната во другата корпа. Притоа, мора да префрли од една во друга корпа што ги избрала онолку јаболка колку што има во корпата во која ги додава (префрла) јаболката. Сашка направила три префрлувања на опишаниот начин и во сите корпи имало еднаков број јаболка. Како Сашка го направила тоа?

Решение. Прво Сашка ги избрала корпите со 22 и 14 јаболка. Од корпата во која има 22 јаболка префрлила 14 јаболка во корпата со 14 јаболка и по првото префрлување, во корпите има 8, 28 и 12 јаболка.

Вториот пат ги избрала корпите со 28 и 12 јаболка. Од корпата со 28 јаболка префрлила 12 јаболка во корпата со 12 јаболка. По второто префрлување во корпите има 16, 24 и 8 јаболка.

Третиот пат ги избрала корпите со 24 и 8 јаболка. Од корпата во која има 24 јаболка префрлила 8 јаболка во другата корпа. По третото фрлање во корпите има 16, 16 и 16 јаболка, т.е. еднаков број јаболка.

36. Мартин има три канти од кои две собираат точно по $3l$ и $5l$, а во третата има $10\,l$ млеко. Тој со помош на трите канти треба да измери точно $4l$ млеко. Дали Мартин може тоа да го направи и како?

Решение. Може. Од кантата со $10\,l$ ќе ја наполни кантата со $3\,l$. Потоа, млекото од кантата со $3\,l$ ќе го претури во кантата со $5\,l$. Повторно, од кантата со $10\,l$ ќе ја наполни кантата со $3\,l$. Од кантата со $3\,l$ ќе ја дополни кантата со $5\,l$. Во кантата со $3\,l$ ќе

остане $1\,l$. Млекото од кантата со $5\,l$ ќе го претури во кантата со $10\,l$. Преостанатиот $1\,l$ што е во кантата со $3\,l$ ќе го претури во цантата со $5\,l$. Сега празната канта од $3\,l$ ќе ја наполни и потоа ќе ја претури во кантата со $5\,l$ па во неа ќе има $4\,l$ млеко.

37. Располагаме со вага со која може да се измерат масите на точно две јаболка (ниту помалку, ниту повеќе). Кој е најмалиот број мерења со кој може да се измерат:
а) три јаболка, б) четири јаболка, в) пет јаболка.
Решение. а) Да ги означиме јаболката со броевите А, Б и В. Ги мериме јаболката А и Б. Со второто мерење ги мериме јаболката Б и В. Со третото мерење ги мериме јаболката В и А. Ако ги собереме добиените три маси, ќе ја добиме удвоената маса на трите јаболка. Конечно, добиениот збир го делиме со 2 и ја добиваме масата на трите јаболка. Значи, доволно се три мерења.
б) Со првото мерење ја наоѓаме масата на две јаболка, а со второто на другите две јаболка. Потоа добиените маси ги собираме. Значи доволни се две мерења.
в) Како под а) со три мерења ја наоѓаме масата на трите јаболка, па со четвртото мерење ја добиваме масата на другите две јаболка и добиените маси ги собираме. Значи, доволни се четири мерења.

38. Располагаме со вага со која може да се измерат масите на точно три јаболка (ниту помалку, ниту повеќе). Кој е најмалиот број мерења со кој може да се измерат:
а) четири јаболка, б) пет јаболка, в) шест јаболка.
Решение. а) Јаболката да ги означиме со буквите А, Б, В и Г. Во првото мерење добиваме маса на А, Б, В; во второто мерење на Б, В, Г; во третото мерење на В, Г, А; во четвртото мерење на Г, А, Б. Забележуваме дека секое јаболко во направените четири мерења се јавува три пати, па затоа ако ги собереме добиените маси и збирот го поделиме со 3, ќе ја добиеме масата на четирите јаболка. Значи, потребни се четири мерења.

б) Јаболката да ги означиме со А, Б, В, Г, Д. Во првото мерење ја добиваме масата на јаболката А, Б, В; во второ на јаболката Б, В, Г; во третото на јаболката В, Г, Д; во четвртото на јаболката А, Б, Д; во петтото на јаболката А, Г, Д. Забележуваме дека секое јаболко во направените пет мерења се јавува три пати, па затоа ако ги собереме добиените маси и збирот го поделиме со 3, ќе ја добиеме масата на петте јаболка. Значи, потребни се пет мерења.

в) Со едно мерење ја добиваме масата на три јаболка, а со друго мерење на другите три јаболка. Ако ги собереме добиените маси ја добиваме масата на шесте јаболка. Значи, потребни се две мерења.

39. На еден напревар по математика биле зададени 5 задачи, при што секоја задача се оценувала со различен број поени. Најлесната задача се оценувала со најмалку поени, потоа втората по тежина со повеќе поени итн. се додека се стигне до најтешката задача која се оценувала со најмногу поени. Андреј точно ги решил петте задачи, при што за двете најлесни задачи добил вкупно 4 поени, а за двете најтешки задачи добил вкупно 11 поени. Колку поени освоил Андреј на натпреварот?

Решение. Бидејќи за секоја задача бројот на поените е различен, а за првата и втората задача вкупно се освојуваат 4 поени, заклучуваме дека првата задача се вреднува со 1 поен, а втората задазча се вреднува со 3 поени. Понатаму, за четвртата бројот на поените сигурно е поголем или еднаков на 5 (зошто?), а збирот на поените за четвртата и петтата задача е 11, па заклучуваме дека четвртата задача се вреднува со 5 поени, а петтата со 6 поени. Последното значи дека третата задача се вреднува со 4 поени. Конечно, Андреј на натпреварот освоил

$$1+3+4+5+6=19 \text{ поени.}$$

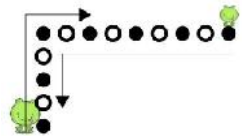
40. Во секој фудбалски натпревар победникот добива 3 бода, поразениот 0 бодови, а за нерешен резултат двата тима добиваат по 1 бод. Екипата *Пелистер* одиграла 7 натпревари, во кои дала вкупно 8 гола и примила вкупно 5 гола. Колку најмногу и колку

најмалку бодови може да освои екипата *Пелистер* во овие 7 натпревари?

Решение. За да победи една екипа *Пелистер* треба да даде барем еден гол повеќе од таа екипа. Затоа Пелистер не може да ги победи сите 7 натпревари, бидејќи тогаш разликата меѓу дадените и примените голови ќе биде поголема или еднаква на 7, а таа во случајов е $8-5=3$. Екипата Пелистер не може да има 6 победи и 1 нерешен резултат, бидејќи тогаш разликата меѓу дадените и примените голови треба да биде поголема или еднаква на 6. Ако Пелистер има 6 победи со резултат 1:0 и 1 пораз со резултат 2:5, тогаш тој освојува 18 бодови, а во сите преостанати случаи освојува помалку бодови.

Бидејќи бројот на постигнатите голови е поголем од бројот на примените заклучуваме дека *Пелистер* има најмалку една победа. Варијантата 1 победа и 6 порази не е можна бидејќи во тој случај *Пелистер* треба да прими најмалку 6 гола, што не е случај. Значи, Пелистер има барем 4 бода и оваа варијанта е можна со резултати: 5 загубени натпревари со 0:1, една победа со 8:0 и еден нерешен резултат 0:0.

41. По камчињата на цртежот десно големата жаба скока преку едно камче, а малата жаба скока на секое камче. Колку камчиња ќе има меѓу двете жаби откако секоја од нив ќе направи по 4 скока?

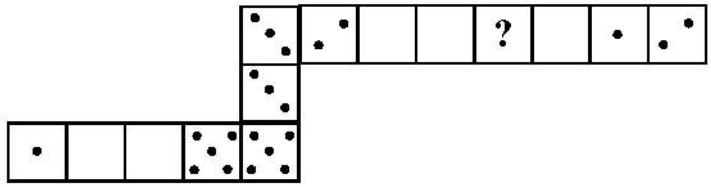


Решение. *Прв начин.* Големата жаба со еден скок прескокнува две растојанија, а малата жаба со еден скок прескокнува едно растојание. Бидејќи жабите скокаат во насока една кон друга, откако секоја од нив Ќе направи по 4 скока, тие ќе прескокнат вкупно $4\cdot(2+1)=12$. Но, меѓу камчињата на кои на почетокот се наоѓаат жабите има точно 12 растојанија, па затоа двете жаби ќе се најдат на исто камче. Значи, меѓу нив ќе има 0 камчиња.

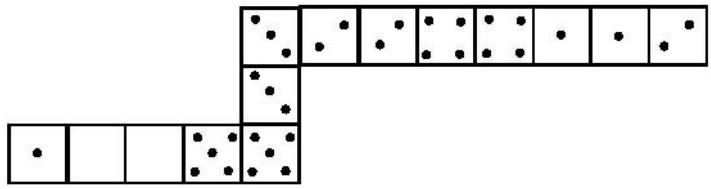
Втор начин. Со два скока големата жаба ќе се најде на аголното црно камче, а уште со два скока кон десно таа ќе се најде на средното хоризонтално црно камче. Малата жаба која скока кон

лево, со четири скока ќе се најде на средното хоризонтално црно камче. Според тоа, двете жаби ќе бидат на исто камче, т.е. меѓу нив ќе има 0 камчиња.

42. Комплет „домина“ содржи 28 различни плочки (домина), кои според правилата на играта се редат една до друга така што бројот на точките од половината на едното домино е еднаков на бројот на точките од половината на другото домино. Седум домина се наредени како што е прикажано на цртежот десно. Колку точки треба да има во полето со прашалникот така што збирот на сите точки на седумте плочки да е можно најмал при почитување на правилата на играта?



Решение. Недостасуваат доминатa $(2,x)$ и $(x,1)$. Случаите $x=1$ и $x=2$ не се можни, бидејќи тогаш доминото $(2,1)$ ќе учествува два пати во комбинацијата. Случајот $x=3$ исто така не е можен, бидејќи ќе се повторува доминото $(2,3)$. Случаите $x=4, x=5$ и $x=6$ се можни. Најмалиот збир се добива за $x=4$ и овој збир е 33 (види цртеж). Во останатите случаи збировите се 35 и 37



IV.3. ЗАНИМЛИВИ БРОЕЊА

43. Куќите во една улица се нумерирани од 1 од 100. Колку пати во броевите на куќите се јавува цифрата 7?

Решение. Броевите на куќите што ја содржат цифрата 7 се: 7, 17, 27, 37, 47, 57, 67, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 87, 97.

Во тие броеви таа се појавува вкупно 20 пати (двапати ја има во бројот 77).

44. Колку има трицифрени броеви кои се читаат исто од лево кон десно и од десно кон лево?

Решение. Бидејќи трицифрениот број треба да се чита исто од лево кон десно и обратно, значи дека првата и третата цифра треба да бидат еднакви, т.е. бројот е од облик $\overline{xyx}$. Прва цифра во трицифрен број не може да биде нула, па на место на x може да стои една од цифрите 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 или 9, т.е. вкупно 9 можности. Средната цифра y може да биде и нула, т.е. една од цифрите 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 или 9, значи вкупно 10 можности. Конечно, има вкупно $9 \cdot 10 = 90$ броеви кои се читаат исто од лево кон десно и од десно кон лево.

45. Определи го бројот на двоцифрените броеви кои се четири пати поголеми од збирот на своите цифри.

Решение. Според условот на задачата бараните броеви се деливи со 4 и се помали или еднакви на $4 \cdot (9+9) = 72$. Значи, тие се некои од броевите: 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, 46, 48, 52, 56, 60, 64, 68 и 72. Со непосредна проверка наоѓаме дека само броевите:

$$12 = 4 \cdot (1+2), \quad 24 = 4 \cdot (2+4), \quad 36 = 4 \cdot (3+6), \quad 48 = 4 \cdot (4+8)$$

го задоволуваат условот на задачата. Значи, постојат четири броја со саканото својство.

46. За еден број ќе велиме дека е огледален ако исто се чита од лево – на десно и од десно – на лево. Определи го бројот на седумцифрените огледални броеви кои се запишуваат само со цифрите 0 и 1.

Решение. Првата цифра на бројот може да биде само 1, па затоа и последната цифра мора да биде само 1. За средната (четврта) цифра имаме 2 можностите. Тогаш за втората и третата цифра од лево – на десно имаме четири можности 00, 01, 10 и 11. Втората и третата цифра еднозначно ги определуваат петтата и

шестата цифра, бидејќи броевите се огледални. Според тоа, ако четвртата цифра е 0, тогаш имаме 4 огледални броја и ако четвртата цифра е 1 имаме 4 огледални броја. Конечно, вкупниот број барани броеви е $4+4=8$.

47. За еден двоцифрен број ќе велиме дека е *трио* ако едната од цифрите со кои е запишан е за 3 помала од другата цифра. Определи бројот на двоцифрените броеви кои не се *трио*.
Решение. Двоцифрените *трио* броеви се: 14, 41, 25, 52, 36, 63, 47, 74, 58, 85, 69, 96 и 30. Нивниот број е 13. Бидејќи имаме 90 двоцифрени броеви заклучуваме дека двоцифрени броеви кои не се *трио* има $90-13=77$.

48. Определи го бројот на шестцифрените броеви чии четири последователни цифри го формираат бројот 2019.
Решение. Бројот 2019 може да биде на почетокот, во средината и на крајот на шестцифрениот број. Во првиот случај шестцифрениот број е од видот $\overline{2019ab}$, каде $ab\in\{00,01,02,...,99\}$, па затоа во овој случај имаме 100 шестцифрени броеви. Во вториот случај шестцифрениот број е од видот $\overline{a2019b}$. Притоа за цифрата a имаме девет можности: 1, 2, 3, ..., 9, и за секој избор на цифрата a за цифрата b имаме десет можности: 0, 1, 2, 3, ..., 9. Според тоа, во овој случај имаме $9\cdot10=90$ шестцифрени броеви од бараниот вид. Во третиот случај шестцифрениот број е од видот $\overline{ab2019}$, каде $ab\in\{10,11,12,...,99\}$, па затоа вои овој случај имаме 90 шестцифрени броеви.
Конечно, имаме $100+90+90=280$ шестцифрени броеви од саканиот вид.

49. Определи го бројот на четирицифрените броеви чиј збир на цифри е еднаков на 3, а потоа подреди ги овие броеви по големина почнувајќи од најголемиот број.
Решение. Бидејќи $3=2+1=1+1+1$ броеви чиј збир на цифри е 3 се:
3000, 2100, 2010, 2001, 1200, 1020, 1002, 1110, 1101, 1011.

Според тоа, има 10 четирицифрени броја чиј збир на цифри е 3, а бараното подредување е прикажано погоре.

50. Нина има кутија со картонски букви во која има 12 букви Н, 8 букви И и 9 букви А. Колку пати таа може со овие букви да го запише своето име?

Решение. Ви секое запишување на своето име Нина двапати ја користи буквата Н и по еднаш секоја од буквите И и А. Бидејќи има 12 букви Н, таа со дадените букви може $12:2=6$ пати да го запише своето име.

51. Дадени се броевите 60, 70, 5 и 4. На колку различни начини може да се изберат два од дадените броеви така што разликата меѓу нив е помала од 60?

Решение. Дадените четири броја може по два броја да се групираат на шест начини и тоа: (70,60); (70,5); (70,4); (60,5); (60,4) и (5,4). Јасно, во четири од шесте случаи разликата меѓу двата броја е помала од 60.

52. На училишниот шаховски турнир учествувале десет ученици и секој ученик одиграл по една партија со секој друг ученик. Колку вкупно партии се одиграни на турнирот?

Решение. Секој од десетте ученици одиграл по една партија со секој од преостанатите девет ученици. При вакво броење секоја одиграна партија е броена два пати, бидејќи партијата која што ученикот A ја одиграл со ученикот B е истата партија која што ученикот B ја одиграл со ученикот A. Според тоа, на турнирот се одиграни $(10\cdot 9):2=90:2=45$ партии.

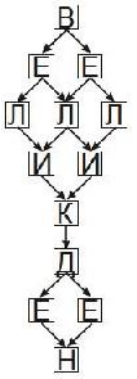
53. Во еден ресторан за ручек предлагаат 3 вида супи, 2 вида основно јадење и 3 вида десерт.

На колку начини може да се состави мени, кое вклучува супа, основно јадење и десерт?

Решение. Секој вид супа може да се комбинира со секој вид основно јадење, што значи дека супата и основното јадење може да се иберат на $3\cdot 2=6$ начини. Понатаму, за секој избор на супа

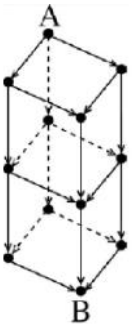
и основно мени имаме по 3 можности за избор на десерт, што значи дека менито може да се состави на $6 \cdot 3 = 18$ начини.

54. На колку начини може да се прочита зборот Великден, ако се чита одгоре –надолу?

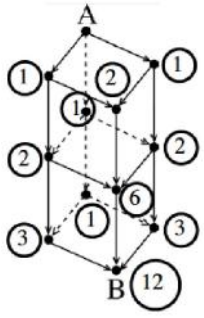


Решение. Буквата Е може да се прочита на 2 начина. Од левата буква Е буквата Л може да се прочита на два начина, при што кога одиме во лево буквата И може да се прочита на еден начин, а кога одиме десно буквата И може да се прочита на два начина. Значи, кога одиме преку левата буква Е до буквата И имаме 3 начини на читање. Сега, буквите К и Д ги читаме на еднинствен начин, а втората буква Е ја читаме на два начина. Според тоа, кога кај првата буквата Е одиме во лево имаме $3 \cdot 2 = 6$ начини на читање. Аналогно, ако кај првата буква Е одиме во десно имаме уште 6 начини на читање, што значи дека зборот Великден може да се прочита на $6 + 6 = 12$ начини.

55. На колку различни начини може да се стигне од точката A до точката B, движејќи се по отсечките во насока која ја покажуваат стрелките?



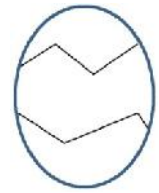
Решение. Во секоја крајна точка различна од точката A ќе го означиме бројот на патиштата по кои може да се стигне до неа.



Притоа броевите во точките до кои непосредно може да се стигне од точката A се еднакви на 1, а секој број во останатите точки е еднаков на збирот на броевите кои се запишани во точките од кои може да се стигне во соодветната точка. Така ја добиваме шемата прикажана на цртежот лево.

Според тоа, од точката A до точката B може да се стигне на 12 различни начини.

56. Имаме неограничен број јајца, поделени на три делови (цртеж десно). Располагаме со црвена, сина, зелена и жолта боја. Секој дел од јајцето треба да се бојадиса во точно една боја, а секое јајце во барем две бои. Колку различни јајца може да се бојадисаат?



Решение. Ако секој дел на јајцето е бојадисан со различна боја и ги користиме сите четири бои, тогаш сметајќи одгоре-надолу за првиот дел имаме 4 можности, за вториот 3 можности и за третиот 2 можности. Значи, во овој случај имаме $4\cdot 3\cdot 2=24$ различни јајца.

Ако користиме 2 бои, тогаш бидејќи на располагањеимаме 4 бои, двете бои можеме да ги избереме на $(4\cdot 3):2=6$ начини (црвена и сина, црвена и зелена, црвена и жолта, сина и зелена, сина и жолта, зелена и жолта). За секоја од овие 6 можности имаме по 6 различни начини на боење на јајцето. На пример, при боење со зелена (З) и жолта (Ж) боја начините на боење се дадени во следнава табела (деловите на јајцето се означени одгоре-надолу):

Прв	З	З	Ж	Ж	Ж	З
Втор	З	Ж	З	Ж	З	Ж
Трет	Ж	З	З	З	Ж	Ж

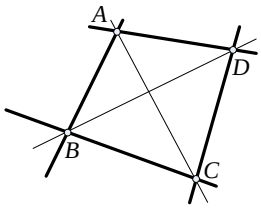
Значи, кога користиме точно две бои имаме $6\cdot 6=36$ различни јајца. Конечно, при дадените услови имаме $24+36=60$ различни обоени јајца.

IV.1. БРОЕЊЕ ГЕОМЕТРИСКИ ФИГУРИ

57. Дадени се точките A,B,C,D од кои никои три не припаѓаат на иста права. Испиши ги сите агли на кои врвот им е некоја од дадените точки, а на краците припаѓаат две од преостанатите три точки. Потоа испиши ги сите отсечки формирани со овие 4 точки. Што има повеќе отсечки или агли?

Решение. Има 12 агли:

$\measuredangle ABC, \measuredangle ABD, \measuredangle DBC, \measuredangle BCD, \measuredangle BCA, \measuredangle ACD,$
$\measuredangle CDA, \measuredangle CDB, \measuredangle BDA, \measuredangle DAB, \measuredangle DAC, \measuredangle CAB.$

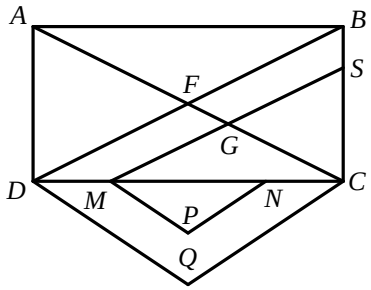


Има 6 отсечки:

$$AB, AC, AD, BC, BD, CD\ .$$

Значи има повеќе агли.

58. Колку триаголници има на цртежот. Испишете ги!



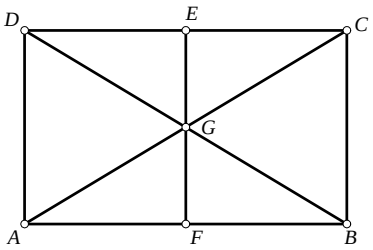
Решение. На цртежот се прикажани:

$\triangle ABC, \triangle ACD, \triangle DBC, \triangle DBA,$
$\triangle AFB, \triangle ADF, \triangle DFG, \triangle FBC,$
$\triangle MCG, \triangle GSC, \triangle MSC, \triangle MPN,$
$\triangle CDQ.$

.

Значи, има вкупно 13 триаголници.

59. Што има повеќе на цртежот: отсечки или триаголници.



Решение. На цртежот се прикажани отсечките:

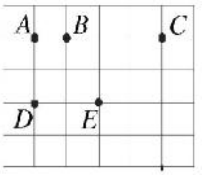
$$AD, BC, AF, FB, AB, AG,$$
$$GC, AC, DG, GB, DB, DE,$$
$$EC, DC, EG, GF, EF,$$

што значи има 17 отсечки. На цртежот се прикажани триаголниците:

$$AFG, ABC, AGB, AGD, ACD, BFG,$$
$$BAD, BGC, BCD, DGC, CGE, DEG,$$

што значи има 12 триаголници. Според тоа, има повеќе отсечки од триаголници.

60. Преброј ги триаголниците, чии темиња се некои од точките A, B, C, D, E прикажани на цртежот десно.



Решение. На цртежот десно се прикажани

триаголниците:

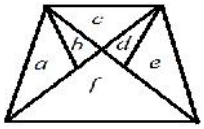
$$ABD, ABE, BCD, BCE, ACD, ACE, DEA, DEB, DEC,$$

што значи дека се прикажани 9 триаголници.

61. Колку триаголници се прикажани на цртежот десно?

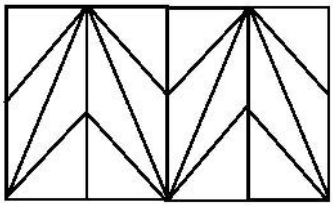
Решение. Да ги воведеме ознаките како на цртежот десно долу. Триаголниците кои се прикажани на цртежот се:

$$a, b, c, d, e, f, ab, bc, cd, de, abc, abd, cde, def.$$

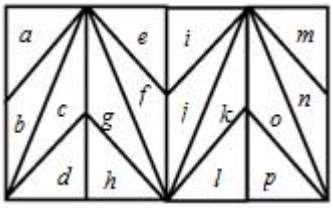


Според тоа, на дадениот цртеж се прикажани 14 триаголници.

62. Колку триаголници содржи фигурата прикажана на цртежот десно.



Решение. Малите триаголници ќе ги означиме со буквите од латиничната азбука, како што е оприкажано на цртежот долу лево.



На дадената фигура има се прикажани триголници составени од еден триаголник:

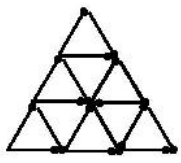
$$a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p$$

и нив ги има 16. Понатаму, прикажани се триаголници составеи од два триаголника:

$$ab, cd, ef, gh, ij, lk, mn, op, dh, ei, lp$$

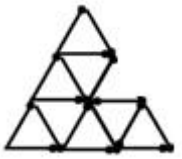
и нив ги има 11. Триаголници составени од четири триаголници се: $cdhg, efij.klpo$ и нив ги има 3. Лесно се гледа дека дадената фигура не содржи други триаголници. Според тоа, дадената фигура содржи $16+11+3=30$ триаголници.

63. Фигурата прикажана на цртежот десно е составена од 18 кибритени чкорчиња, при што се добиени 13 триаголници: 9 мали, 3 средни (составени од по 4 мали) и 1 голем, чии страни

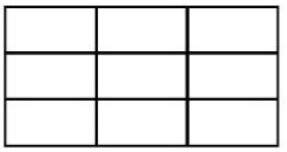


содржат по 3 чкорчиња. Ако отстраниме едно од чкорчињата, колку триаголници со сигурност ќе останат?

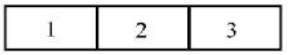
Решение. Со непосредна проверка се добива дека ако отстраниме едно од средните чкорчиња на страните на големиот триаголник, тогаш ќе имаме помалку 1 мал, 2 средни и 1 голем триаголник (цртеж десно). При отстранување на вакво чкорче се губат најмногу триаголници (провери). Значи, ако отстраниме едно чкорче, тогаш со сигурност ќе останат $13-4=9$ триаголници.



64. Колку правоаголници се содржани на цртежот десно?

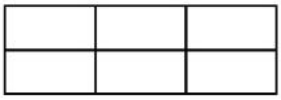


Решение. Да го разгледаме долниот цртеж.



На него се прикажани три правоаголници од три вида и тоа 3 мали (1, 2 и 3), 2 средни ($(1,2)$ и $(2,3)$) и еден голем составен од три мали правоаголници. Според тоа, вкупно добиваме 6 правоаголници.

Ќе ги пребројме правоаголниците прикажани на цртежот десно. Фигурата е составена од две фигури кои ги разгледавме на првиот цртеж. За секоја од двете фигури имаме по 6 правоаголници, т.е. вкупно 12 правоаголнци. Самата фигура можеме да ја разгледаме без хоризонталната средна линија и на тој начин добиваме уште 6 правоаголници. Според тоа, фигурата од вториот цртеж содржи $12+6=18$ правоаголници.

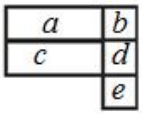


За пребројување на правоаголниците од цртежот од условот на задачата ќе ги искориртиме горните расудувања. Разгледаната фигура е составена од 1 фигура од првиот цртеж и една фигура од вториот цртеж, од каде $18+6=24$ правоаголници. Ако земеме предвид дека има уште една фигура од вториот цртеж од која веќе се броени правоаголниците од видовите од првиот цртеж добиваме уште 6 правоаголници. На крајот ја разгледуваме фи-

гурата која е добиена од 3 фигури од првиот цртеж со бришење на двете хоризонтални внатрешни линии. Така добиваме уште 6 нови правоаголници, па затоа вкупниот број правоаголници е $24+6+6=36$.

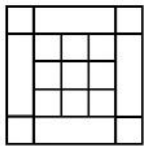
65. Колку квадрати и правоаголници се прикажани на цртежот десно?

Решение. Единечните квадрати и правоаголници да ги означиме како н цртежот лево.



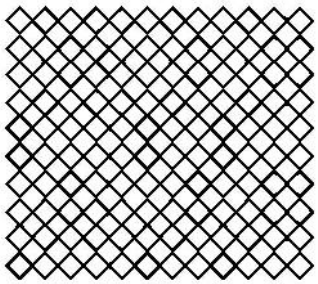
Значи, квадрати и правоаголници составени од една единечна фигура има 5 и тоа: a,b,c,d,e. Правоаголници составени од две единечни фигури има 5 и тоа: ab,ac,bd,cd,de. Квадрати составени од три единечни фигури има 1 и тоа: bde и квадрати составени од четири единечни фигури има 1 и тоа $abcd$. Според тоа, на цртежот се прикажани $5+5+1+1=12$ квадрати и правоаголници.

66. Определи го бројот на квадратите кои се прикажани на цртежот десно.



Решение. На дадениот цртеж се прикажани 13 квадрати кои може да се покријат со едно мало квадратче. Понатаму, имаме 4 квадрати кои може да се покријат со четири мали квадратчиња, 5 квадрати кои може да се покријат со девет мали квадратчиња, 4 квадрати кои може да се покријат со шестнаесет мали квадратчиња и 1 квадрат кој може да се покрие со дваесет и пет мали квадратчиња. Конечно, на цртежот вкупно се прикажани $13+4+5+4+1=27$ квадрати.

67. Колку мали квадратчиња се прикажани на цртежот десно?



Решение. На дадениот цртеж во првата, третата, петтата, седмата, итн. дваесет и третата колона се прикажани по 10 квадратчиња, а во втората, четвртата, шестата, итн. дваесет и втората колона се прикажани по 9 квадратчиња.

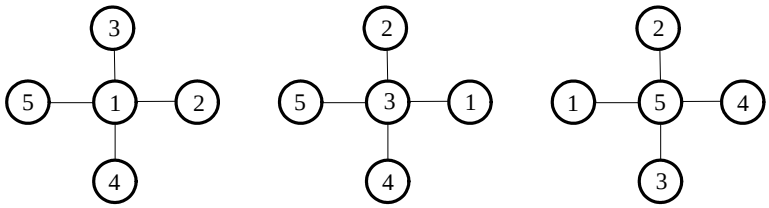
Значи, имаме 12 колони означени со непарни броеви и 11 колони означени со парни броеви. Конечно, на цртежот се прикажани вупно $12 \cdot 10 + 11 \cdot 9 = 219$ квадратчиња.

IV.5. ДОПОЛНИТЕЛНИ ЗАДАЧИ

68. Во секое крукче од цртежот треба да се запише еден од броевите 1, 2, 3, 4 и 5, така што збирот во трите вертикални крукчиња да биде еднаков на збирот на броевите во трите хоризонтални крукчиња. Колку решенија има задачата?

Решение. Од множеството $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ треба да се изберат две подмножества кои имаат празен пресек, така што збировите на елементите во секое од нив да се еднакви. Тоа може да се направи на следните начини:

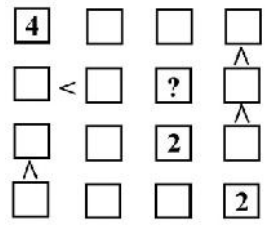
1° $\{3, 4\}$ и $\{2, 5\}$, 2° $\{1, 5\}$ и $\{2, 4\}$, 3° $\{4, 1\}$ и $\{3, 2\}$



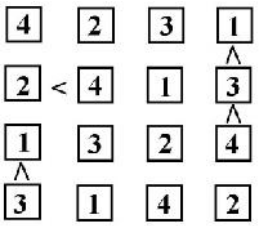
Притоа, во случајот 1° имаме збир $3+4+1=1+2+5$, во случајот 2° имаме збир $1+3+5=2+3+4$ и во третиот случај имаме збир $5+4+1=2+3+5$

Значи, задачата има три решенија.

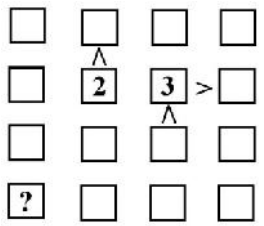
69. Во секое квадратче на цртежот десно треба да се стави по еден од броевите 1, 2, 3 или 4 така што броевите во секој ред и во секоја колона се различни и да важат знаците за помало и поголемо. Кој број треба да стои на местото на прашалникот?



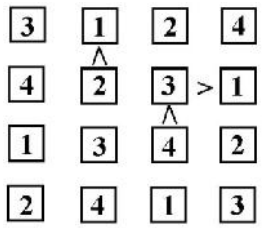
Решение. Ќе броиме од лево кон десно и од горе кон долу. Јасно, во четвртата колона одејќи одгоре-надолу треба да се запишат броевите 1, 3 и 4. Сега ако во првото квадратче од вториот ред се запише бројот 1, тогаш во второто треба да се запише бројот 4, а во третото бројот 2. Последното не е можно, бидејќи во тој случај во третата колона двапати ќе биде запишан бројот 2. Значи, во вториот ред одејќи од лево-надесно треба да се запишан броевите 2, 4 и 1. Сега е јасно дека последните два броја во прва колона е 1 и 3. Третиот број во четвртиот ред е 3 итн. Целосно пополнетата шема е дадена на горниот цртеж. Според тоа, на местото на прашалникот треба да стои бројот 1.



70. Во секое квадратче на цртежот десно треба да се стави по еден од броевите 1, 2, 3 или 4 така што броевите во секој ред и во секоја колона се различни и да важат знаците за помало и поголемо. Кој број треба да стои на местото на прашалникот?

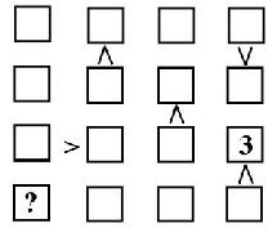


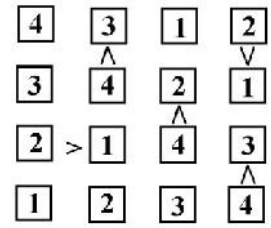
Решение. Ќе броиме од лево кон десно и од горе кон долу. Јасно во четвртото квадратче на вториот ред треба да се запише бројот 1, а во третото квадратче во третата колона бројот 4, кој број треба да се запише и во првото квадратче на вториот ред. Понатаму, во првото квадратче на втората колна мора да стои бројот 1, а за да во третиот ред нема два исти броја во третото квадратче на втората колона треба да се запише бројот 3 и во четвртото квадратче на оваа колона бројот 4. Сега, заради четвртата колона во првото квадратче на третиот ред мора да се запише бројот 1, а во четвртото квадратче на овој ред бројот 2. Заради третата колона во четвртото квадратче на четвртата колона мора да се запише бројот



3, па затоа на местото на прашалникот треба да се запише бројот 2. Целосно пополнетата шема е дадена на горниот цртеж.

71. Во секое квадратче на цртежот десно треба да се стави по еден од броевите 1, 2, 3 или 4 така што броевите во секој ред и во секоја колона се различни и да важат знаците за помало и поголемо. Кој број треба да стои на местото на прашалникот?





Решение. Ќе броиме од лево кон десно и од горе кон долу. Во четвртата колона во последното квадратче треба да се запише бројот 4, па затоа во првото и второто квадратче треба да се запишт броевите 2 и 1, соодветно. Сега во третата колона во второто и третото квадратче не може да се запишат броевите 1 и 3, па затоа во овие квадратчиња треба да се запишат броевите 2 и 4, соодветно. Понатаму, во третиот ред во првите две квадратчиња редоследно треба да се запишат броевите 2 и 1. Сега, заради вториот ред во второто квадратче на втората колона мора да се запише бројот, па затоа во првото квадратче на вториот ред мора да се запише бројот 3. Заради првиот ред, во првото квадратче на втората колона мора да се запише бројот 3, па затоа во четвртото квадратче на оваа колона мора да се запише бројот 2. Понатаму, во првото квадратче на втората колона не може да се запише бројот 3, па затоа во него треба да се запише бројот 1, а во четвртото квадратче на оваа колона бројот 3. Конечно, во првото квадратче на првата колона е бројот 4, а на местото на прашалникот е бројот 1.

72. Броевите од 1 до 25 се запишани во квадратна табела 5×5 (види пример). Разгледуваме 12 збирови од по 5 броја во табелата: во петте реда, во петте колони и на двете дијагонали. Табелата ја нарекуваме парна, ако сите тие збирови се парни бро-

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

еви, а непарна ако сите тие збирови се непарни броеви. Дали постои:

а) парна табела, б) непарна табела.

Решение. а) Збирот на сите броеви запишани во табелата е

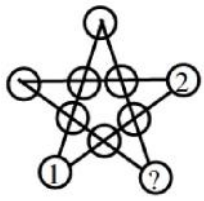
$$1+2+3+\ldots+23+24+25=(1+25)+(2+24)+\ldots+(12+14)+13$$
$$=12\cdot 26+13=325$$

што значи дека е непарен број. Ако претпоставиме дека постои парна табела, тогаш петте збирови на броевите запишани во секој од редовите ќе се парни броеви, па затоа и нивниот збир ќе биде парен број. Но, добиениот збир е збирот на сите броеви запишани во табела кој е непарен, што е противречност. Од добиената противречност следува дека не постои парна табела.

б) Да постои непарна табела. На пример сите непарни броеви, кои ги има 13, може да се распоредат на произволен начин во полињата кои во табелата на цртежот десно се означени со знакот +, а во празните полиња на произволен начин може да се распоредат парните броеви. Лесно се гледа дека секоја вака добиена табела е непарна (Зошто?).

+	+	+	+	+
	+	+	+	
+		+	+	
+				
	+			

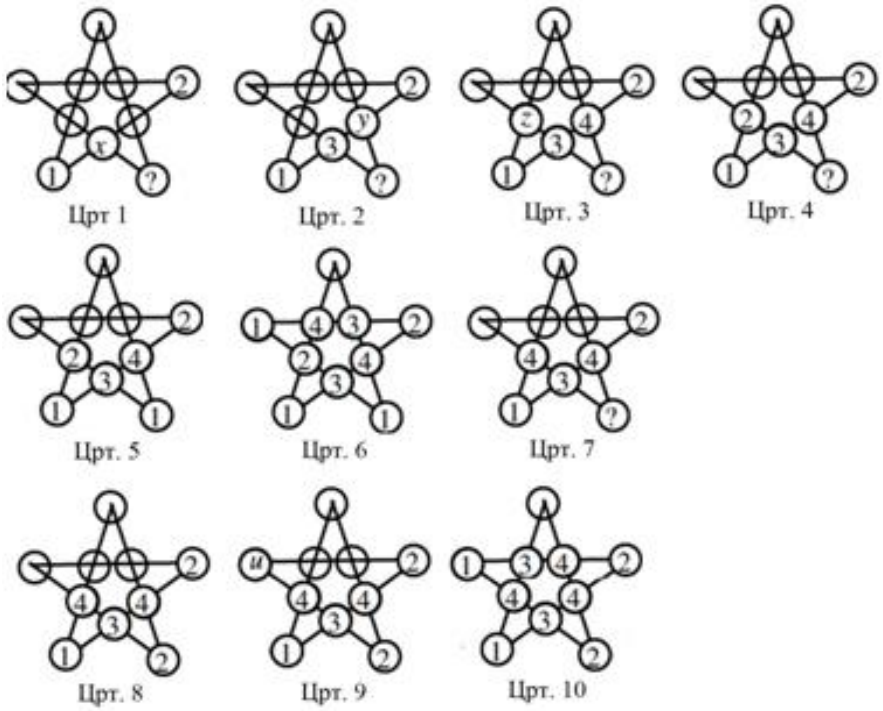
73. Во крукчињата на цртежот десно да се запише по еден од броевите 1, 2, 3 или 4 така што секоја линија ги содржи четирите броја. Два броја веќе се запишани. Кој број треба да се запише на местото на прашалникот така што ќе биде исполнет наведениот услов?



Решение. За кругчето x (цртеж 1) има две можности: $x=3$ или $x=4$.

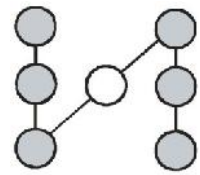
Нека $x=3$ (цртеж 2). Тогаш за кругчето y има единствена можност $y=4$. За кругчето z (цртеж 3) повторно има две можности $z=2$ или $z=4$. Нека $z=2$ (цртеж 4). Тогаш на местото на прашалникот мора да е бројот 1 (цртеж 5). На хоризонталната линија која на десната страна го содржи бројот 2 задолжително треба од десно на лево последователно да се постават броевите

3, 4 и 1, што доведува до противречност, бидејќи се појавува линија со две единици (цртеж 6). Заклучуваме дека случајот $z = 2$ не е можен. Нека $z = 4$ (цртеж 7). Сега на местото на прашалникот мора да се постави бројот 2 (цртеж 8). Понатаму, на местото на u (црт 9) мора да се постави бројот 1 и на хоризонталната линија од лево кон десно мора да се постават броевите 3 и 4 (цртеж 10).



Сега имаме линија со две четворки, што е противртечност. Според тоа, $x = 3$ не води кон решение. Аналогно се покажува дека за $x = 4$ не се добива решение. Конечно, задачата нема решение.

74. Броевите од 1 до 7 запиши ги во кругчињата на цртежот десно, во секое кругче по еден број, така што збирот на броевите запишани во крукчињата на секоја од трите линии е еднаков.



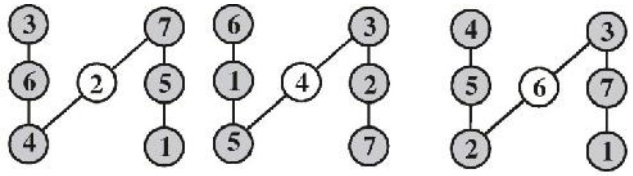
Решение. Збирот на броевите од 1 до 7 е 28. Збирот на броевите запишани во сивите кругчиња се добива како збир на два еднакви збира во вертикалните линии. Тоа значи дека тој збир е делив без остаток со 2. Ако во белото кругче ставиме еден од бревите 1, 3, 5 или 7, тогаш збирот на останатите шест броја ќе биде 27, 25, 23 или 21 и тој не е делив со 2. Значи, во белото крукче не може да се постави ниту еден од броевите 1, 3, 5 и 7.

Ако во белото крукче се постави бројот 2, тогаш збирот на броевите во секоја вертикална линија треба да биде $(28-2):2=13$.

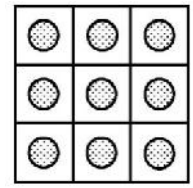
Ако во белото кругче се постави бројот 4, тогаш збирот на броевите во секоја вертикална линија треба да биде $(28-4):2=12$.

Ако во белото кругче се постави бројот 6, тогаш збирот на броевите во секоја вертикална линија треба да биде $(28-6):2=11$.

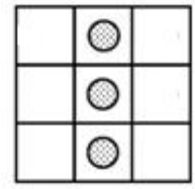
На долните цртежи се дадени по едно можно запишување за секој од трите случаи.



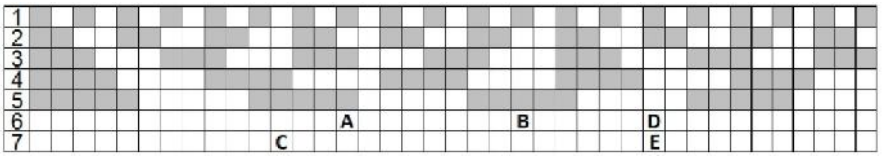
75. На цртежот десно е дадена табла со девет мали квадратчиња, на секое од кои има по еден жетон. Две квадратчиња се соседни ако имаа заедничка страна. Во определен момент секој жетон се преместува во соседно квадратче. Колку квадратчиња најмногу може да останат празни при тоа преместување?



Решение. Најмногу празни квадратчиња ќе имаме ако жетоните од првата и третата колона (редица) ги преместиме на втората колона (редица), а жетоните од втората колона (редица) останат на втората колона (редица). Во случајов на преместување во втората колона се добива распоредот, што значи дека најголемиот можен број празни квадратчиња е 6.

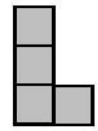


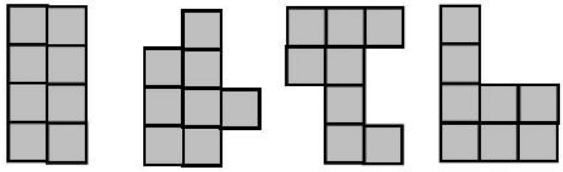
76. На долниот цртеж квадратчињата се обоени според определено правило. Кои букви ќе бидат во обоени квадратчиња?



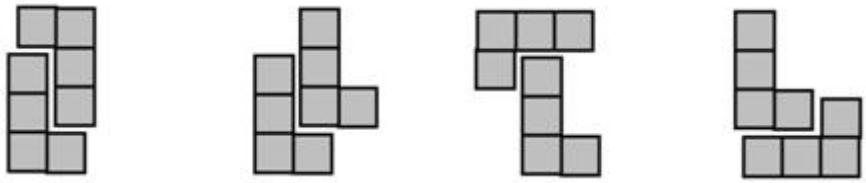
Решение. Во првиот ред последователно имаме 1 сиво, 1 бело, 1 сиво, 1 бело итн. квадратчиња. Во вториот ред последователно имаме 2 сиви, 2 бели, 2 сиви, 2 бели итн. квадратчиња. Во третиот ред последователно имаме 3 сиви, 3 бели, 3 сиви, 3 бели итн. квадратчиња. Во четвртиот ред последователно имаме 4 сиви, 4 бели, 4 сиви, 4 бели итн. квадратчиња. Во петтиот ред последователно имаме 5 сиви, 5 бели, 5 сиви, 5 бели итн. кавдратчиња. Значи, во шестиот ред треба последователно да имаме 6 сиви, 6 бели, 6 сиви, 6 бели итн. квадратчиња. Сега лесно се гледа дека во овој ред само буквите A и D ќе бидат во сиви квадратчиња. Во седмиот ред треба последователно да имаме 7 сиви, 7 бели, 7 сиви, 7 бели итн. квадратчиња. Лесно се добива дека во овој ред само буквата E е во сиво квадратче.

77. Колку од долните фигри може да се состават со две L тетрамина (види цртеж десно)?





Решение. За дадените четири фигури имаме:

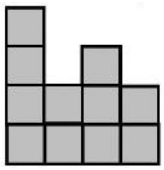


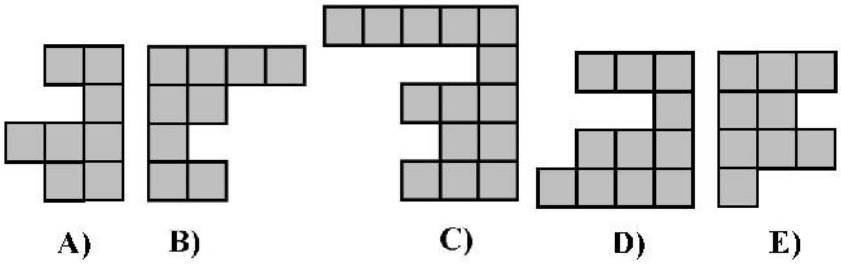
Според тоа, секоја од дадените фигури може да се состави со помош на две две L тетрамина.

78. Картон со форма на правоаголник има димензии $35\,cm$ и $25\,cm$. Ако се искористи целиот картон кој е најмалиот број квадрати (со страни природни броеви), кои можат да бидат исечени од него?

Решение. Најмалиот број квадрати се добива ако при секое сечење отсекуваме најголем можен квадрат. Во провото сечење ќе отсечеме квадрат со должина на страна $25\,cm$, по што ќе ни остане правоаголник со страни $25\,cm$ и $10\,cm$. Потоа од него отсекуваме два квадрати со страни $10\,cm$, по што ќе ни остане правоаголник со страни $10\,cm$ и $5\,cm$, кој го делиме на два квадрати со страни $5\,cm$. Според тоа, најмалиот можен број квадрати е $1+2+2=5$.

79. Која од дадените фигури треба да се употреби за да со помош на фигурата прикажана на цртежот десно се состави квадрат?





Решение. На страната на квадратот кој треба да се состави мора да има 4 или повеќе квадратчиња. Ако има четири квадратчиња, тогаш квадратот ќе содржи 16 квадратчиња, а ако има 5 квадратчиња, тогаш квадратот ќе има 25 квадратчиња. Според тоа, збирот на квадратчињата на дадената фигура и фигурата која треба да се употреби мора да биде 16 или 25. Дадената фигура има 11 квадратчиња, а фигурите прикажани на цртежите A), B), C), D), E) имаат 8, 9, 14, 11, 9 квадратчиња, соодветно. Според тоа, ако може со некоја од дадените фигури да се состави квадрат, тогаш тоа е само фигурата C) бидејќи само во овој случај се добива потребниот број квадратчиња.

80. Даден е правоаголник со страни $36\,cm$ и $26\,cm$. Од него отсекуваме квадрат со најголема можно страна. Од останатиот дел од правоаголникот повторно отсекуваме квадрат со најголема можна страна итн. Определи го бројот на пресекувањата.

Решение. При првото отсекување добиваме квадрат со страна $26\,cm$ и правоаголник со страни $26\,cm$ и $10\,cm$. При второто отсекување добиваме квадрат со страна $10\,cm$ и правоаголник со страни $16\,cm$ и $10\,cm$. При третото отсекување добиваме квадрат со страна $10\,cm$ и правоаголник со страни $10\,cm$ и $6\,cm$. При четвртото отсекување добиваме квадрат со страна $6\,cm$ и правоаголник со страни $6\,cm$ и $4\,cm$. При петтото отсекување добиваме квадрат со страна $4\,cm$ и правоаголник со страни $4\,cm$ и $2\,cm$. Конечно, при шестото отсекување добиваме два квадрати со страни $2\,cm$.

Според тоа, бројот на отсекувањата е 6.

ЛИТЕРАТУРА

1. Andrić, V.: Pripremni zadaci za matematička takmičenja, DMS, Beograd, 1991
2. Andrić, V.; Ilić, V.; Lazarević, B.; Tomić, I.: Primpremni zadaci za matematička takmičenja za učenike osnovnih škola, DMS, Beograd, 1988
3. Ilić, N. V.: Odabrani zadaci sa matematičkih takmičenja 5. i 6. razred, DMS, Beograd, 1991
4. Stojanović, V.: Vodić za šampione (pripreme takmičenja za IV, V i VI razred), Matematiskop, Beograd, 1999
5. Андрић, В.: Математика X (приручник за припремање за такмичење ученика основних школа од IV до VIII разред), Круг, Београд, 1996
6. Аневска, К., Гоговска, В. Пресметување плоштини со броење, Нумерус, Скопје, 2015
7. Аневска, К.: Кинеска игра танграм 1, Математилка искра 1, Скопје, 2020
8. Аневска, К.: Кинеска игра танграм 2, Математилка искра 2, Скопје, 2020
9. Аневска, К.: Кинеска игра танграм 3, Математилка искра 3, Скопје, 2020
10. Аневска, К.: Кинеска игра танграм 4, Математилка искра 4, Скопје, 2020
11. Аневска, К.: Кинеска игра танграм 5, Математилка искра 5, Скопје, 2020
12. Главче, М., Малчески, Р.: Движење по патеки и лавиринти, Нумерус, Скопје, 2015
13. Главче, М.: Забавни кибритчиња, Нумерус, Скопје, 2014
14. Главче, М.: Пет квадрати, а многу задачи, Нумерус, Скопје, 2016
15. Главче, М.: Пополнуваме тоа што недостасува, Нумерус, Скопје, 2014

16. Главче, М.: Пресметуваме збирови, Нумерус, Скопје, 2016
17. Главче, М.: Споредуваме и пресметуваме, Математичка искра, Скопје, 2020
18. Главче, М.: Цртаме без да го подигнеме моливот, Нумерус, Скопје, 2018
19. Главче. М.: Движење во лавиринти, Математичка искра 3, Скопје, 2020
20. Главче, М.: Прошетки по лавиринти, Математичка искра 5, Скопје, 2020
21. Златилов, В.; Тонова, Т.; Цветкова, И.; Пендалиева, В.: Математическа читанка (4 клас), Труд & прозорец, София, 2000
22. Косев, К.: Сборник от задачи по математика за изявени ученици в 4 клас, Модул, София, 1993
23. Косев, К.: Сборник от задачи по математика за изявени ученици в 5 клас, Модул, София, 1994
24. Лазаревић, Б.: Припремни задаци за математичка такмичења за ученике IV разреда основне школе, ДМС, Београд, 1990
25. Малчески, Р., Главче, М.: Занимливи броења, Нумерус, Скопје, 2019
26. Малчески, Р., Главче, М.: Решаваме бројни ребуси, Нумерус, Скопје, 2017
27. Малчески, Р.: Да размислуваме со „здрав разум“, Математичка искра 2, Скопје, 2020
28. Малчески, Р.: Нестандардни мерки за должина, Математичка искра 3, Скопје, 2020
29. Малчески, Р.: Право, лево и десно, Математичка искра 2, Скопје, 2020
30. Малчески, Р.: Редослед на случување на настани, Математичка искра 1, Скопје, 2020
31. Малчески, Р.: Решаваме задачи со броење коцки, Нумерус, Скопје, 2016
32. Малчески, Р.: Решавање задачи со Венови дијаграми, Нумерус, Скопје, 2003
33. Малчески, Р.: Редици од броеви, Математичка искра 4, Скопје, 2020

34. Малчески, Р.: Црвенкапа и загатките на волкот, Математичка искра 1, Скопје, 2020
35. Малчески, Р.: Малку поинакви пресметувања, Математичка искра 5, Скопје, 2020
36. Малчески, С.: Броиме коцки, Математичка искра 1, Скопје, 2020
37. Малчески, С.: Дополнуваме тоа што недостасува, Математичка искра 2, Скпје, 2020
38. Малчески, С.: Математика во правоаголна мрежа, Математилка искра 3, Скопје, 2020
39. Малчески, С., Главче, М.: Броиме патишта, Математичка искра 4, Скопје, 2020
40. Малчески, С.: Времето е важно, Математичка искра 5, Скопје, 2020
41. Раковска, Д.; Тонов, И. и др.: Математически състезания 4-7 клас, Регалия 6, София, 1993
42. Раковска, Д.; Тонов, И. и др.: Математически състезания 4-7 клас, Втора част, Регалия 6, София, 1995
43. Тюфекчиев, И.; Лесов, Х.: Задачи за извънкласна работа по математика в VI и V клас, СМБ, София, 1985
44. Христова, М.; Витанов, Т.; Миланова, Д.; Лозанов, Ч.: Клуб математика за всеки (5. клас), Анубис, София, 1998