Vladimir Stojanović

3 MATHEMATISKOP 3

ZBIRKA REŠENIH ZADATAKA

ZA PRVI RAZRED SREDNJIH ŠKOLA

(osmo izdanje)

MATEMATISKOP

Vladimir Stojanović
MATHEMATISKOP 3
ZBIRKA REŠENIH ZADATAKA ZA PRVI RAZRED SREDNJIH ŠKOLA
Osmo izdanje

Recenzenti
Dr Ljubomir Protić
Dr Mirjana Đorić

Izdavač
MATEMATISKOP, Despota Olivera 6, Beograd
tel. (011)380-70-90, (011)2413-403, fax: (011)3087-958
www.matematiskop.co.rs
e-mail: office@matematiskop.co.rs

Za izdavača
Nada Stojanović, direktor

Urednik
Dr Pavle Miličić

Odobreno za upotrebu u I razredu srednjih škola od Ministarstva prosvete Republike Srpske, rešenjem broj 6-01-394/2000, do 24. 2. 2000.

Korekura
Autor

Priprema za štampu
Željko Hrček
zeljko.hrcek@gmail.com

CIP – Каталогизација у публикацији
Народна библиотека Србије, Београд

37.016:51(075.3)(076)

СТОЈАНОВИЋ, Владимир

Zbirka rešenih zadataka : za prvi razred srednjih škola / Vladimir Stojanović - 8. izd. - Beograd : Matematiskop, 2007 (Bor : Tercija). - 439 str. : graf. prikazi ; 24 cm. - (Mathematiskop ; 3)

Тираж 1.000. - Napomena uz tekst.

ISBN 978-86-7076-037-0

COBISS.SR-ID 143262732

Tiraž 1000
Štampa: TERCIJA, Bor

PREDGOVOR

Zbirka zadataka je napisana za učenike I razreda svih srednjih škola, svih usmerenja. Sadrži oko 5000 zadataka. Namenjena je učenicima svih kvaliteta i nastavnicima. Svi su zadaci rešeni, najveći deo konkretno, a manji deo sadrži uputstvo za rešavanje. Da bi se olakšalo korišćenje Zbirke i omogućilo postepeno proširivanje znanja, zadaci su razvrstani u četiri klase. Zadaci koje treba obrađivati u školama sa manjim programskim zahtevima (3 časa matematike nedeljno) označeni su sa $\triangle$ ispred rednog broja. U ostalim školama ti zadaci određuju nivo znanja za ocene 2 ili 3. Profesori će, prema situaciji u razredu odrediti koliki deo ovih zadataka treba znati za 2, a koliki deo za 3. Sa $\square$ ispred rednog broja označeni su zadaci za četvroku, a sa $\bigcirc$ za peticu. Zadaci sa takmičenja označeni su zvezdicom $*$.

U okviru svake teme zadaci su složeni po težini – od lakših ka težim. Svaka tema sadrži veliki broj sličnih zadataka (za uvežbavanje, pismene vežbe, pismene zadatke), ali je i raznovrsnost zadataka tolika, za sve ukuse, da ni učenici, ni nastavnici verovatno neće imati potrebe za dodatnom literaturom.

Pojedina poglavlja su označena zvezdicama. To su teme na kojima se ne insistira u programima za redovnu nastavu, ali se koiriste u dodatnoj nastavi, zatim u pripremama za takmičenja, a onome ko voli matematiku i za razonodu. To su upravo teme za kojima tragaju i nastavnici i učenici.

Kvalitetu zbirke su mnogo doprineli recenzenti, dr Mirjana Đorić i dr Ljubomir Protić, kao i dipl. mat. Bane Đurđevac, koji je rukopis pročitao pre štampanja. Na tome im se posebno zahvaljujem.

Da je knjiga lepa, uredna, pregledna i tehnički doterana, zaslužan je Željko Hrček, koji je u pripremi teksta za štampu uložio izuzetan trud i ugradio svoje izvanredno poznavanje kompjutera. Za toliki napor i ostvareni kvalitet bilo je potrebno mnogo više od običnog profersionalizma.

Najnovije izdanje se razlikuje od prethodnih, jer je usklađeno sa aktuelnim programima. Veliki deo gradiva je zbog toga izbačen. Međutim, u poglavlja koja su ostala dodat je veliki broj novih zadataka. Može se reći da je pred Vama jedna nova knjiga, bolja od onog MATHEMATISKOP-a 3 kojeg ste godinama uvažavali.

Autor

SADRŽAJ

PRVA GLAVA

1. LOGIKA

Iskaz je rečenica koja može biti samo *tačna* ili samo *netačna*.

Logičke konstante su $\top$ i $\bot$ (”te” i ”nete”) - tačno i netačno.

Istinitosna vrednost iskaza p označava se sa $\tau(p)$. Moguće je $\tau(p) = \top$ ili $\tau(p) = \bot$.

Negacija iskaza p je iskaz koji je tačan *ako i samo ako*[1)] je netačan iskaz p. Koristimo oznaku $\neg p$ ili $\overline{p}$. (Čitamo: *nije* p).

Konjunkcija iskaza p i q je iskaz koji je tačan ako i samo ako su tačna oba iskaza p i q. Oznaka je $p \wedge q$. (Čitamo: p i q.).

Disjunkcija iskaza p i q je iskaz koji je netačan ako i samo ako su netačna oba iskaza p i q. Oznaka je $p \vee q$. (Čitamo: p ili q).

Implikacija iskaza p i q je iskaz koji je netačan ako i samo ako je iskaz p tačan, a iskaz q netačan. Oznaka je $p \Rightarrow q$. (Ako p, *onda* q).

Ekvivalencija iskaza p i q je iskaz koji je tačan ako i samo ako p i q imaju jednake istinitosne vrednosti. Oznaka je $p \Leftrightarrow q$. (p ekvivalentno sa q).

Ovo su osnovne logičke operacije i njima odgovaraju sledeće istinitosne tablice

negacija

p	$\neg p$
$\top$	$\bot$
$\bot$	$\top$

konjunkcija

$\wedge$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\bot$

disjunkcija

$\vee$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\bot$

implikacija

$\Rightarrow$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\top$

ekvivalencija

$\Leftrightarrow$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\top$

Potreban i dovoljan uslov.

1) Iskazu $p \Rightarrow q$ odgovaraju sledeće rečenice:
   - *p povlači q*
   - *Iz p sledi q*
   - *Ako p, onda q*
   - *q, ako p*
   - *p je dovoljan uslov za q*
   - *q je potreban uslov za p.*
2) Iskazu $p \Leftrightarrow q$ odgovaraju rečenice:
   - *p povlači q i q povlači p*
   - *p je ekvivalentno sa q*
   - *Iz p sledi q i iz q sledi p*

[1)]Umesto *ako i samo ako* često se skraćeno piše *akko*.

- *q ako p i p ako q*
- *p ako i samo ako q*
- *p je potreban i dovoljan uslov za q.*

Ako su p i q iskazi, onda su iskazi takođe $\neg p$, $\neg q$, $p \wedge q$, $p \vee q$, $p \Rightarrow q$, $p \Leftrightarrow q$.

Tautologija je iskaz t koji je *uvek tačan*, nezavisno od istinitosnih vrednosti iskaza $p, q, \ldots, r$, koji obrazuju t.

Tautologije su *zakoni logičkog zaključivanja* i često se zapisuju kao: $\dfrac{p, q}{r}$, što znači $(p \wedge q) \Rightarrow r$, ili na primer: $\dfrac{p \Rightarrow q, q \Rightarrow r}{p \Rightarrow r}$, što znači $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$.

De Morganovi zakoni za konjunkciju i disjunkciju: $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$ i $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge q)$.

Kvantori:

1° *Univerzalni kvantor* je $\forall$ – čita se: *svaki, bilo koji, proizvoljan.* (Na primer: $(\forall x)t$, čita se: "*Za svaki x vredi t*").

2° *Egzistencijalni kvantor* je $\exists$ – čita se: *postoji, neki, ima bar jedan.* (Na primer: $(\exists x)t$, znači: "*Za neki x vredi t*").

3° Koristimo i kvantor $\exists_1$ – čita se: *postoji tačno jedan*, ili *postoji jedan i samo jedan.*

Negacije kvantora su: $\neg(\forall x)A \Leftrightarrow (\exists x)\neg A$ i $\neg(\exists x)A \Leftrightarrow (\forall x)\neg A$.

Elementi iskazne algebre

U rešavanju logičkih zadataka koristi se i izvesna analogija disjunkcije sa sabiranjem brojeva i analogija konjunkcije sa množenjem brojeva, kao i distributivnost konjunkcije prema disjunkciji (analogno distributivnosti množenja u odnosu na sabiranje brojeva). U iskaznoj algebri (*Bulovoj algebri iskaza*) koristimo tablice:

disjunkcija

A	B	$A+B$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

konjunkcija

A	B	$A \cdot B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

negacija

A	$\overline{A}$
1	0
0	1

Za disjunkciju koristimo znak $+$, za konjukciju znak $\cdot$ i za negaciju nadvučenu crtu. Za istinitosnu vrednost iskaza "tačan" oznaka je 1, a za "netačan" oznaka je 0. Tablica konjunkcije potpuno je identična običnoj tablici množenja, a tablica disjunkcije razlikuje se od obične tablice sabiranja samo u slučaju: $1 + 1 = 1$. (Kod običnog sabiranja je $1 + 1 = 2$)

1.1 OSNOVNE LOGIČKE OPERACIJE

1.1.1 Iskazi i formule

△ **1.** Odrediti istinitosne vrednosti iskaza:

a) 0 je prirodan broj; b) 1 je prost broj;

c) $NZS(2, 6) = 12$; d) $NZD(3, 18) = 3$.

△ **2.** Neka su 3 i 6 vrednosti redom promenljivih x i y. Da li su te vrednosti rešenja formula:

a) $(y-2)|(y+2)$; b) $NZS(x,x+2)=x(x+2)$;

c) $2x-y=y-2x$; d) $NZD(x,y)=1$.

△ **3.** Rešiti formulu na nekom skupu znači naći sve one vrednosti promenljive u tom skupu, za koje je formula tačna.

U skupu N rešiti po x i y formule:

a) $x+1<4$; b) $3|(x+1)$; c) $x\leq 0$; d) $x|6$;

e) $x+y=7$; f) $x+y<5$; g) $x^2+y^2<5$; h) $x+y<x$;

i) $x+y\geq x^2+y^2$; j) $\tau(2x\neq 8)=\perp$; k) $\tau(x+2y\leq 4)=\top$.

△ **4.** Umesto tačkica staviti odgovarajuće brojeve, tako da budu tačni iskazi:

a) ... je najmanji prirodan broj, b) ... je najveći negativan ceo broj,

c) ... nije ni pozitivan ni negativan broj.

1.1.2 Konjunkcija, disjunkcija, negacija

△ **5.** Odrediti istinitosne vrednosti sledećih iskaza:

a) $|-5|=-(-5)\wedge\sqrt{121}=11$;

b) $\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right):\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)=\frac{10}{3}\right]\wedge\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right):\frac{1}{4}-\frac{1}{5}=7\right]$.

△ **6.** Ako je $x,y\in N$, rešiti po x i y formule:

a) $x-1\leq 3\wedge\frac{x+3}{2x}\leq 1$; b) $x>3\wedge x+1=9$; c) $x|12\wedge 2|(x+1)$;

d) $2|x\wedge x\in\{1,\ 3,\ 5,\ 6,\ 7,\ 9,\ 11\}$; e) $x+y=7\wedge(x\leq 2\wedge x\in N)$;

f) $(2^{x+1}<20\wedge x\in N)\wedge x+y=-2$; g) $y-2x=0\wedge x-2y=-3$.

△ **7.** Utvrditi koji iskazi su tačni, a koji su netačni:

a) $(NZS(2,3)=6\wedge NZS(3,4)=12)\vee(NZD(6,8)=4\wedge NZD(3,2)=1)$;

b) $(3-(3-(-3))):3=1\vee(3-2)^2\leq(2-3)^3$;

c) $(2\leq 5\vee|-1|\geq 0\wedge-\left(\frac{2}{-5}\right)\geq-\frac{5}{2}$.

△ **8.** Odrediti najpre istinitosne vrednosti rečenica p, q, r, pa izračunati istinitosnu vrednost odgovarajuće formule:

a) $p:\frac{3}{5}-\frac{1}{2}=\frac{2}{3}:q:(-2)^2=-2^2;\ r:\ (a-b)^2=a^2-2ab+b^2;\ (p\vee r)\wedge(q\vee r)$;

b) $p:|-2|\geq|2|;\ q:(a-b)(a+b)=a^2-b^2;\ r:\perp\vee\top=\perp;\ p\vee(q\wedge r)$;

c) p: Bilo koji trougao može imati najviše dva prava ugla; q : Zbir dve stranice trougla veći je od treće stranice tog trougla; r : Zbir spoljašnjih uglova u trouglu jednak je zbiru unutrašnjih uglova trougla; $(q\wedge p)\vee(r\wedge q)$;

d) $p:\frac{1}{3}>-\frac{1}{2};\ q:\frac{1}{3}\geq\frac{1}{2};\ r:\frac{1}{3}:\frac{1}{2}=1,5;\ p\vee(r\wedge(q\vee p))$.

△ **9.** Neka su p, q, r i s sledeće rečenice:

$p:$ Zbir unutrašnjih uglova u trouglu je $180°$

$q:$ Simetrale stranica trougla seku se u jednoj tački

$r:$ Svaki trougao je centralno simetrična figura

$s:$ U svaki trougao može se upisati krug.

Odrediti istinitosne vrednosti sledećih iskaznih formula:

a) $(p \vee q) \wedge r$; b) $(p \wedge q) \vee r$; c) $((p \wedge q) \vee r) \vee s$; d) $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$;

e) $(p \vee q) \vee (r \wedge s)$; f) $(p \wedge q) \vee (r \wedge s)$; g) $(p \wedge (q \wedge (r \vee s)))$.

□ **10.** Sledeće formule rešiti po p, gde je $p \in \{\top, \bot\}$:

a) $\tau(\top \wedge p) = \top$; b) $\tau(p \wedge p) = \top$; c) $\tau(p \vee p) = \top$; d) $\tau(\top \vee p) = \bot$;

e) $\tau(p \vee p) = \bot$; f) $\tau((\top \wedge p) \wedge \top) = \top$; g) $\tau((\top \wedge p) \wedge p) = \top$;

h) $\tau((\bot \wedge p) \vee \bot = \bot$; i) $\tau((\top \vee p) \wedge p) = \top$; j) $\tau((p \wedge \top) \vee (p \vee \top)) = \bot$.

□ **11.** Uočimo rečenice:

a) Oba prirodna broja a i b su parna. b) Bar jedan od prirodnih brojeva a i b je paran. c) Bar jedan od prirodnih brojeva a i b je neparan. d) Oba prirodna broja a i b su neparna.

Koja od sledećih formula odgovara pojedinim od navedenih rečenica:

1) $a \in 2N + 1 \vee b \in 2N + 1$; 2) $a \in 2N \wedge b \in 2N$; 3) $a \in 2N \vee b \in 2N$,

4) $a \in 2N + 1 \wedge b \in 2N + 1$?

△ **12.** Izračunati:

a) $\top \wedge \top$; b) $\top \wedge \bot$; c) $\top \vee \bot$; d) $\top \vee (\top \wedge \bot)$; e) $\bot \vee (\bot \wedge \top)$;

f) $\bot \wedge (\top \vee \bot)$; g) $(\top \vee \top) \wedge (\bot \vee \bot)$; h) $(\top \wedge \top) \vee (\bot \wedge \bot)$;

i) $((\top \vee \bot) \wedge \bot)$; j) $(((\bot \wedge \bot) \vee \top) \wedge \top)$.

□ **13.** Dokazati jednakost:

a) $\tau(\top \vee p) = \top$; b) $\tau(\bot \vee p) = \tau(p)$; c) $\tau(\top \wedge p) = \tau(p)$;

d) $\tau(\bot \wedge p) = \bot$.

△ **14.** Sledeće rečenice kraće zapisati koristeći slova p i q i logičke znake $\wedge$, $\vee$, $\neg$:

a) nije p ili je q; b) nije: p ili q; c) p ili nije q; d) nije p ili nije q;

e) nije p i nije q; f) nije: p i q; g) nije: $p \vee q$ i: nije p ili je q.

△ **15.** Utvrditi da li se negacije zapisane u obliku:

a) $\neg(3 < 5)$; b) $\neg(5 = 2)$; c) $\neg(0 \in N)$; d) $\neg(5 \leq 4)$;

e) $\neg(3|4)$; f) $\neg(1 \notin N)$; g) $\neg(2 > 5)$; h) $\neg(6|8)$;

mogu i ovako napisati:

a) $3 > 5$; b) $5 \neq 2$; c) $0 \notin N$; d) $5 > 4$; e) $4|3$; f) $1 \in N$;

g) $2 \leq 5$; h) $6 \not| 8$. Koji su iskazi tačni?

△ **16.** Izračunati:

a) $\neg\bot \vee \bot$; b) $\neg(\top \vee \neg(\top \wedge \bot)$; c) $\neg(\top \wedge \top) \vee \neg)\bot \vee \bot)$;

d) $(\neg\bot \vee \neg(\top \vee \neg\top) \wedge \neg(\bot \wedge \neg\bot)$; e) $\neg(\neg\bot \vee \top) \wedge ((\neg\bot \wedge \top) \vee \neg(\neg\bot \wedge \top))$.

□ **17.** Dokazati da navedeni parovi formula imaju jednake istinitosne vrednosti za bilo koje istinitosne vrednosti iskaza p, q i r:

a) $\neg p \wedge \neg q$ i $\neg(p \vee q)$; b) $p \vee \neg q$ i $\neg(\neg(p \wedge q)$;

c) $p \wedge (q \vee r)$ i $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$.

1.1.3 Implikacija i ekvivalencija

△ **18.** Izračunati:
$(\top \Rightarrow \top) \wedge \bot$; $(\bot \Rightarrow \top) \vee \top$; $(\neg\top \Rightarrow \top) \Rightarrow (\top \Rightarrow \bot)$; $(\neg\top \vee \top) \Leftrightarrow (\top \Rightarrow \top)$;
$\neg(\top \Rightarrow \bot) \vee (\top \Leftrightarrow \bot)$; $(\top \vee \bot) \Rightarrow (\top \vee (\bot \Leftrightarrow \neg\top))$.

□ **19.** Neka promenljiva x uzima vrednost iz skupa $\{1, 2, 3\}$. Za svaku vrednost x utvrditi istinitosnu vrednost formula:

a) $(x > 1 \vee x > 2) \Rightarrow x > 3$; b) $(x|6 \vee x|8) \Rightarrow (x > 3 \wedge x > 2)$;

c) $(x > 1 \wedge x > 2) \Rightarrow x > 3$; d) $x|4 \Rightarrow x|2$.

○ **20.** Obrazovati istinitosne tablice formula:

a) $p \Rightarrow \neg p$; b) $p \vee q \Rightarrow p$; c) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow p$; d) $(p \vee q) \iff (q \vee p)$;

e) $((p \Rightarrow q) \Rightarrow r) \iff p)$; f) $((p \vee q) \Rightarrow (p \iff r)) \wedge (\neg p \iff r)$;

g) $p \vee (q \Rightarrow \neg r)$; h) $(p \vee \neg r) \iff (p \Rightarrow (q \wedge r))$.

○ **21.** Ako su p i q ma kakvi iskazi, odrediti istinitosnu vrednost sledećih iskaza:

a) $q \Rightarrow ((\top \Rightarrow p) \Rightarrow \top)$; b) $((p \wedge q) \wedge \bot) \Rightarrow ((p \vee q) \vee \top)$;

c) $(q \vee \neg q) \Rightarrow (p \wedge \neg p)$; d) $(\bot \Rightarrow (p \vee q)) \Rightarrow (\top \Rightarrow (p \wedge \neg p))$.

○ **22.** Neka je p proizvoljan iskaz. Dokazati da je tačno:

a) $\tau(\top \Rightarrow p) = \tau(p)$; b) $\tau(p \Rightarrow \top) = \top$; c) $\tau(\bot \Rightarrow p) = \top$.

□ **23.** Neka je sa $F(p)$ označena formula: $((\top \Rightarrow p) \Rightarrow \top) \Rightarrow p$. Izračunati: $F(\top)$, $F(\bot)$, $F(F(\top))$, $F(F(\bot))$.

1.2 POTREBAN I DOVOLJAN USLOV

△ **24.** Data je implikacija: $x = 1 \Rightarrow x^2 = 1$. Koje od navedenih rečenica opisuju datu implikaciju:

a) ako $x = 1$, onda $x^2 = 1$; b) ako $x^2 = 1$, onda $x = 1$;

c) $x^2 = 1$, ako $x = 1$; d) $x = 1$, samo ako $x^2 = 1$;

e) $x = 1$ je potreban uslov za $x^2 = 1$;

f) $x = 1$ je dovoljan uslov za $x^2 = 1$?

△ **25.** Data je formula: $x \in Z$. Koja od formula:

a) $x \in 2Z$; b) $x \in 2Z + 1$; c) $x \in Q$; d) x je prost broj;

e) $x \in \{-1, 0, 1\}$; f) x je rešenje jednačine $x^2 - 4 = 0$,
predstavljaju potreban, a koji dovoljan uslov datoj formuli?

□ **26.** Umesto tačkica staviti reči: *potreban*, ili *dovoljan*, ili *potreban i dovoljan*, tako da date rečenice imaju istinitosnu vrednost $\top$:

a) $x > 6$ je .... uslov za $x > 3$.

b) $x > 3$ je .... uslov za $x > 6$.

c) $x \in N$ je .... uslov za $x \in Z$.

d) $x = 0 \lor y = 0$ je .... uslov za $x \cdot y = 0$.

e) $x|15$ je .... uslov za $x|30$.

f) $x = 2 \lor x = -2$ je .... uslov za $x^2 = 4$.

g) $x \in Z$ je .... uslov za "x je prost broj".

□ **27.** Uočimo rečenicu: p : "Trougao je jednakokrak i nije jednakostraničan". Koja od navedenih rečenica je potreban i dovoljan uslov za rečenicu p:

a) uglovi trougla su jednaki; b) dve stranice trougla su jednake;

c) trougao ima tačno jednu osu simetrije;

d) trougao je centralno simetričan; e) jedan ugao trougla je prav?

1.3 TAUTOLOGIJE

△ **28.** Sastaviti istinitosne tablice za sledeće formule i utvrditi koje od njih su tautologije:

a) $(p \lor p) \Leftrightarrow p$; b) $(p \land \neg p) \Rightarrow p$; c) $(p \Rightarrow p) \Rightarrow p$;

d) $(p \Rightarrow p) \Leftrightarrow \neg p$; e) $p \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$.

□ **29.** Koristeći se istinitosnim tablicama, uverite se da su sledeće formule tautologije:

a) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \lor q)$; b) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$; c) $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$;

d) $p \Rightarrow (p \lor q)$; e) $(p \lor q) \land p \Leftrightarrow p$; f) $\big((p \land q) \lor p\big) \Leftrightarrow p$; g) $p \Rightarrow (q \lor p)$.

□ **30.** Koristeći se De Morganovim zakonima, dokazati da su sledeće formule tautologije:

a) $\neg(\neg p \lor q) \Leftrightarrow (p \land \neg q)$; b) $\neg(\neg p \land q) \Leftrightarrow (p \lor \neg q)$.

□ **31.** Koristeći De Morganove formule, odrediti negacije sledećih rečenica:

a) $2 = 2 \lor 2 \neq 2$; b) $2 > 0 \lor 3|6$; c) $2 \in \{1, 2\} \lor 3 \in \{1, 2\}$;

d) $3 = 3 \land 4 = 4$; e) $-2 < 1 \land -1 < 0$; f) $2 \in \{1, 2\} \land 1 \in \{1, 2\}$;

g) $2 \in N \land -3 \in Z$; h) $2|4 \land 4|8$; i) $2 < 3 \lor 3|6$.

□ **32.** Dokazati da su ekvivalentne formule, koristeći se istinitosnim tablicama:

a) $p \Rightarrow q$ i $\neg p \lor q$; b) $p \Leftrightarrow q$ i $(\neg p \lor q) \land (p \lor \neg q)$;

c) $(p \Rightarrow q) \land (q \Rightarrow p)$ i $p \Leftrightarrow q$; d) $\neg(p \Rightarrow q)$ i $p \land \neg q$; e) $\neg(p \Leftrightarrow q)$ i $\neg p \Leftrightarrow q$.

○ **33.** Za dokazivanje formule $A \Leftrightarrow B$ potrebno je i dovoljno dokazati sledeće implikacije:

a) $A \Rightarrow B$ i $B \Rightarrow A$; b) $A \Rightarrow B$ i $\neg A \Rightarrow \neg B$; c) $\neg A \lor B$ i $\neg B \lor A$. Dokazati.

○ **34.** Dokazati da su tautologije:

a) $p \Rightarrow p$ (zakon identiteta); b) $p \vee \neg p$ (zakon isključenja trećeg); c) $\neg(p \wedge \neg p)$ (zakon neprotivrečnosti); d) $\neg(\neg p) \Leftrightarrow p$ (zakon negacije negacije); e) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$ (zakon kontrapozicije); f) $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$ (zakon *verum ex quo libet* – istina iz bilo čega); g) $(p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$ (*modus ponens*); h) $((p \Rightarrow q) \wedge \neg q) \Rightarrow \neg p$ (*modus tollens*); i) $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ (zakon silogizma, odnosno zakon tranzitivnosti implikacije); j) $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$ i $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$ (De Morganovi zakoni).

○ **35.** Da je neka iskazna formula tautologija može se dokazati i *metodom svođenja na protivrečnost.* Na primer, dokažimo da je $p \Rightarrow (\neg p \Rightarrow q)$ tautologija. Pretpostavimo suprotno, tj. da nije tautologija, odnosno da je moguće da formula ima vrednost $\perp$. Na osnovu istinitosne tablice implikacije, to nastaje u slučaju $\tau(p) = \top$ i $\tau(\neg p \Rightarrow q) = \perp$. Tada bi na osnovu druge jednakosti, dakle ponovo na osnovu tablice implikacije, bilo: $\tau(\neg p) = \top$ i $\tau(q) = \perp$, tj. $\tau(p) = \perp$. Međutim, to protivreči pretpostavci da je $\tau(p) = \top$. Dakle, nije moguće da data formula ima vrednost $\perp$. Ona je prema tome tautologija. Dokaz je završen. Na sličan način, svođenjem na protivrečnost, ispitati da li su sledeće iskazne formule tautologije:

a) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg p \vee q)$; b) $(\neg p \vee q) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$; c) $p \Rightarrow (q \vee p)$;

d) $\neg(\neg p) \Rightarrow p$; e) $\neg(p \wedge \neg p) \Rightarrow p$; f) $p \Rightarrow (p \Rightarrow \neg q)$; g) $(p \vee q) \wedge p \Rightarrow (p \vee \neg q)$.

○ **36.** Izraziti osnovne logičke operacije preko implikacije i negacije. (Na primer: dokazati da je formula $p \wedge q \Leftrightarrow \neg(p \Rightarrow \neg q)$ tautologija, odakle zaključujemo da je $\neg(p \Rightarrow \neg q)$ zamena za $p \wedge q$). Mogu li se osnovne logičke operacije slično izraziti pomoću negacije i disjunkcije (odnosno pomoću negacije i konjunkcije)?

1.4 KVANTORI

△ **37.** Koristeći kvantore $\forall x$ i $\exists x$, načiniti formulske zapise rečenica:

a) *Postoji* prirodan broj manji od 5. b) *Bar jedan* od prirodnih brojeva je manji od 5. c) Svaki racionalan broj je realan broj. d) Svaki realan broj je pozitivan ili negativan, ili jednak nuli. e) Svaki realan broj pomnožen sa 1 jednak je samom sebi. f) Svi celi brojevi su parni ili neparni, g) Neki prirodni brojevi su parni, h) Svaki prirodan broj je ceo broj, i) Postoji prirodan broj koji je rešenje jednačine $2x - 4 = 0$. j) Svaki realan broj je rešenje jednačine $0 \cdot x = 0$. k) Svaki ceo broj je racionalan. l) Najmanje jedan prirodan broj je rešenje formule $x|6$. m) Svaki paran broj je ceo broj. n) Svaki prirodan broj je pozitivan broj o) Neki članovi skupa $2N$ su veći od 1000. p) Postoji član skupa $2N$ takav da je jednak 10.

Odrediti istinitosne vrednosti ovih iskaza.

△ **38.** Rečenicu: Za *svaki x iz skupa A postoji y iz skupa A, tako da je $x = y$,* formulom pišemo ovako: $(\forall x \in A)(\exists x \in A)\ x = y$. Ako za svaki par elemenata x, y skupa A važi: $x = y$, onda pišemo: $(\forall x \in A)(\forall y \in A)\ x = y$, ili $(\forall x, y \in A)\ x = y$. Zapisati upotrebom kvantora sledeće rečenice:

a) Zbir ma koja dva prirodna broja je prirodan broj. b) Proizvod svaka dva cela broja je ceo broj. c) Zbir realnih brojeva je komutativan. d) Od svakog prirodnog broja postoji veći prirodan broj. e) Za svaki ceo broj x postoji tačno jedan ceo broj y, tako da je $x + y = 5$. f) Za svaki ceo broj postoji manji ceo broj i postoji veći ceo broj. g) Za svaka dva prirodna broja postoji jedinstveni zbir koji je takođe prirodan broj.

△ **39.** Sledeći formulski zapis napisati rečima:
a) $(\exists x \in N)x = 1$; b) $(\exists x \in N)x > 5$; c) $(\exists x \in N)(x = 1 \lor x > 5)$;
d) $(\forall x)(x = 0 \lor x \neq 0)$; e) $(\forall x)(x \in Z \Rightarrow x \in Q)$; f) $(\exists x)(x \in Z \land x \in N)$.

□ **40.** Koja od sledećih formula je tačna:
a) $\neg(\forall x)(x < 2) \Leftrightarrow (\exists x)(x \geq 2)$; b) $\neg(\forall x)(x \neq 1) \Leftrightarrow (\exists x)(x = 1)$;
c) $\neg(\exists x)(x < 1 \land x > 3) \Leftrightarrow (\forall x)\neg(x < 1 \land x > 3)$;
d) $\neg(\exists x \in N)x^2$ je prost broj $\Leftrightarrow (\forall x \in N)x^2$ nije prost broj.

1.5 *DETEKTIVSKI ZADACI

Znanje iz matematičke logike iskoristićemo za rešavanje zadataka koji se sastoje u razrešavanju raznih komplikovanih situacija, ukrštenih izjava i jezičkih zavrzlama. Navešćemo nekoliko metoda za rešavanje ovakvih zadataka. Za sve probleme zajedničko je da svaka izjava, svaki podatak, predstavlja *iskaz*, dakle, uvek je *ili tačan ili netačan*. Neki od iskaza su konjunkcije, disjunkcije i sl. dvaju ili više iskaza. Umesto objašnjenja metoda rešićemo karakteristične primere.

1.5.1 Metoda uvođenja pretpostavke

41. *Filip, Luka* i *Mirko*, igrajući se u sobi, razbili su prozor. Vera je zbog toga bila ljuta i nijedan od trojice dečaka nije se usudio da prizna krivicu.

"Neko od vas laže", reče Vera.

Luka: "Mirko je slagao".

Mirko: "Znam da Filip neće da slaže".

Filip: "Laže Luka ili Mirko".

Vera je na osnovu ovih izjava zaključila ko je razbio prozor i krivcu ukinula džeparac za sledeći mesec.

Ko je razbio prozor?

Rešenje. Sigurno je da ne govore svi istinu, jer ako Luka ne laže, iz njegove izjave izlazi da laže Mirko. Takođe je nemoguće da svi lažu, jer, ako Luka laže, onda iz njegove izjave izlazi da Mirko nije slagao. Ko onda laže? Pođimo od Lukine izjave. Ako Luka govori istinu, onda Mirko laže, ako Luka laže, onda Mirko govori istinu. U oba slučaja izjava Filipova je disjunkcija oblika $\top \lor \bot = \top$. Dakle, Filip govori istinu. Prema tome, i Mirko je rekao istinu, pa je slagao samo Luka. Luka je razbio prozor. ♠

Postupajući slično, tj. uvodeći pretpostavku da je neki iskaz tačan ili netačan, analizom ostalih iskaza potvrditi pretpostavku ili je dovesti do protivrečnosti i tako rešiti sledeće zadatke.

42. *Aca, Miša* i *Rajko* čitaju "*Politiku*", "*Novosti*" i "*Sport*", i to svaki čita samo jedne od ovih novina. Upitali su Srboljupku, koja ih je videla sa novinama u rukama, da li se seća koje novine su čitala ova trojica. Ona je odgovorila: "*Aca* je čitao "*Politiku*", *Miša* nije čitao "*Novosti*", a *Rajko* nije čitao "*Politiku*". Pokazalo se da ju je sećanje izneverilo i da je odgovor bio tačan samo za jednog čitaoca.

Koje novine čitaju *Aca, Miša* i *Rajko*?

43. Za krađu prstena u robnoj kući osumnjičeni su *Zoran*, *Dušan* i *Nikola*, jer su se u vreme krađe našli u blizini vitrine sa nakitom. Islednik je postavio pitanje: "Ko je od vas trojice ukrao prsten?", Na to su ovi građani odgovorili: *Zoran*: "Ja nisam ukrao prsten. Ukrao ga je *Dušan*." *Dušan*: "Nikola nije ukrao prsten. Ni ja ga nisam ukrao", *Nikola*: "Ja nisam ukrao. Prsten je ukrao Zoran"..

Ispostavilo se da su dvojica oba puta rekli istinu, a da je jedan oba puta slagao. Ko je lopov?

44. Izvršeno je ubistvo. Sumnja je pala, na trojicu: Bucu, Denisa i Rizu. Na saslušanju kod islednika svaki je dao po dve izjave. Buca: "Ja to nisam učinio. *Denis* to nije učinio". *Denis*: "Buca to nije učinio. To je učinio Riza". *Riza*: "Ja to nisam učinio. To je učinio Buca." Dalje je utvrđeno sledeće. Ubistvo je učinilo samo jedno lice. Jedan od osumnjičenih, od svih poštovan deda, oba puta je rekao istinu. Drugi, poznati siledžija, oba puta je slagao. Treći, gotovo nepoznati građanin, jednom je rekao istinu, a jednom laž. Ko je izvršio ubistvo? Kako su se zvali deda, siledžija i malo poznati građanin?

1.5.2 Metoda tabela

45. Tri železničara *Arsić, Božić* i *Vasić*, rade u istoj brigadi kao *vozovođa*, *kondukter* i *ložač*. Njihova zanimanja nisu ovde obavezno navedena istim redom kao i njihova prezimena. U vozu koji opslužuje ova brigada nalaze se tri putnika iz tri grada, sa istim prezimenima: *drug Arsić*, *drug Božić* i *drug Vasić*. (Ispred prezimena putnika stavljena je reč "*drug*" da bi se ona razlikovala od prezimena železničara.) O šestorici navedenih ljudi znamo sledeće podatke:

1) *Drug Vasić* živi u *Beogradu*, 2) *Kondukter* živi u *Zagrebu*, 3) *Drug Božić* je već odavno zaboravio ono što je iz algebre učio u školi, 4) Putnik koji ima isto prezime kao *kondukter* živi u *Sarajevu*, 5) *Kondukter* i jedan od putnika, koji je inače stručnjak za matematičku fiziku, kupuju svakog jutra novine u istom kiosku, 6) *Arsić* uvek dobija partije bilijara koje u slobodno vreme ponekad igra sa *ložačem*. 7) *Ložač* i putnik iz *Zagreba* dogovorili su se da odigraju jednu partiju bilijara.

Odredite prezimena ložača i putnika iz Zagreba, koji igraju bilijar.

Rešenje. Date podatke upisaćemo u tabele (a) i (b). U prve kolone upišimo ispod Ž (železničari) i P (putnici) početna slova prezimena, a u prvu vrstu tabele (a) početna slova zanimanja i u prvu vrstu tabele (b) početna slova gradova u kojima žive putnici.

$Ž$	v	k	l
A			0
B			
V			

Tabela (a)

P	B	Z	S
A	0		
B	0		
V	1	0	0

Tabela (b)

Iz prvog uslova vidimo da drug Vasić živi u Beogradu. Stoga ćemo u drugoj tabeli poslednju vrstu ispuniti redom sa $1, 0, 0$[2] (jer drug Vasić ne živi ni u Zagrebu,

[2] 1 i 0 prema ranijem dogovoru označavaju *tačno* i *netačno*.

ni u Sarajevu). Prvu kolonu tabele (b) dopunićemo sa $0, 0$, jer drug Arsić i drug Božić ne žive u Beogradu. Iz uslova 6) vidimo da Arsić nije ložač, pa ćemo na kraju prve vrste tabele (a) upisati 0. Ovo se odmah može zaključiti iz datih uslova i to smo označili u tabelama (a) i (b).

Sada ćemo kombinovanjem datih uslova dobiti nove podatke za tabele. Iz uslova 5) vidimo da stručnjak za matematičku fiziku živi u isiom gradu sa kondukterom (kupuju novine u istom kiosku), tj. oba žive u Zagrebu (uslov 2). Ovaj stručnjak nije Božić, jer je prema 3) Božić odavno zaboravio algebru, a nije ni Vasić, jer je Vasić iz Beograda. Dakle, stručnjak za matematičku fiziku zove se Arsić i živi u Zagrebu. Unesimo ovaj podatak u tabelu (b_1). Sada se vidi da je drug Božić iz Sarajeva. Time je tabela (b_1) popunjena.

$\check{Z}$	v	k	l
A		0	0
B	0	1	0
V		0	

Tabela (a_1)

P	B	Z	S
A	0	1	0
B	0	0	1
V	1	0	0

Tabela (b_1)

Iz podatka 4) vidimo da se kondukter preziva Božić. Stoga kolonu ispod "k", popunimo redom sa $0, 1, 0$. Takođe ćemo u srednji red ove tabele staviti još dva puta 0. Sada se odmah iz tabele vidi da je Arsić vozovođa, a Vasić ložač (vidi tabelu (a_1)).

Dakle, Vasić i drug Arsić dogovorili su se da odigraju partiju bilijara. ♠

46. Posle završenog takmičenja na semaforu je objavljeno da su prva tri mesta zauzeli sledeći takmičari: 1. *Muja Ćamilović*, 2. *Cane Simić*, 3. *Novica Jerotić*. Posle kraćeg vremena spiker se izvinio gledaocima i objavio da je saopšteni redosled pogrešan. Zapravo, ni jedno ime ni prezime ne odgovaraju objavljenom redosledu takmičara, a takođe ni jedno ime ne odgovara napisanom prezimenu. Spiker je dodao da je pobedio *Simić*.

Odrediti tačan redosled takmičara, a imena i prezimena sastaviti kao što treba.

47. U svakom od četiri grada: Beogradu, Prištini, Podgorici i Novom Sadu rođen je i živi po jedan od izvesna četiri čoveka. Ni jedan od četvorice ne stanuje u mestu svojeg rođenja. Čovek rođen u Beogradu ne stanuje u Podgorici. Mesto stanovanja čoveka koji je rođen u Novom Sadu, ujedno je mesto rođenja čoveka koji stanuje u rodnom mestu čoveka koji stanuje u Prištini. Gde stanuje čovek rođen u Podgorici?

48. U jednoj školi ima tri odeljenja I razreda. Profesor *matematike* je razredni starešina u I_1, profesor *fizike* u I_2 i profesor *hemije* u I_3. U rukovodstvo matematičke sekcije razreda delegirano je po dva učenika iz svakog odeljenja. Imena tih učenika su: *Lela*, *Ljilja*, *Nada*, *Cane*, *Vlada* i *Mika*. Osim toga, znaju se sledeći podaci: 1) *Vlada* je igrao fudbal protiv odeljenja čiji je razredni starešina professor *hemije*. 2) *Mikin* razredni starešina ne predaje ni u *Canetovom*, ni u *Vladinom* odeljenju. 3) *Mika* ne poznaje nikog iz I_1. 4) *Nadin* razredni starešina je *matematičar*, a *hemiju* joj predaje *Ljiljin* razredni starešina.

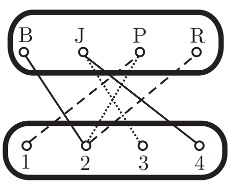
Na osnovu ovih podataka utvrdite iz kojeg odeljenja je *Lela*. Ako su *Mika* i *Lela* iz istog odeljenja, navesti imena delegata ostalih odeljenja.

1.5.3 Metoda grafova

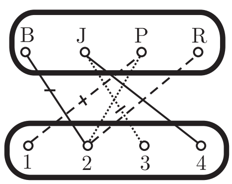
Podaci koje treba razvrstati često predstavljaju dva, tri ili više skupova čiji elementi su na neki način povezani. Pritom svakom elementu jednog skupa odgovara jedan i samo jedan elemenat drugog skupa, i obrnuto. Dati podaci otkrivaju neke od ovih veza, a mi treba da otkrijemo ostale. Crtanjem Ojler-Venovih dijagrama ovih skupova i povezivanjem odgovarajućih elemenata linijama ili strelicama dobijamo grafove. Zadate su nam neke linije ovih grafova, a naš zadatak je da ih kompletiramo ili da otkrijemo samo neke od nepoznatih linija. Pogledajmo na sledećim primerima kako se to može činiti.

49. Na turniru učestvuju četiri košarkaške ekipe: ”Partizan”, ”Jugoplastika”, ”Bosna” i ”Rabotnički”. Pre početka turnira treneri su dali sledeće prognoze. *Trener ”Partizana”*: ”Bosna” će biti druga, ”Jugoplastika” četvrta. *Trener ”Jugoplastike”*: ”Partizan” će biti prvi, ”Rabotnički” drugi. *Trener ”Bosne”*: ”Partizan” će biti drugi, ”Jugoplastika” treća. *Trener ”Rabotničkog”* nije želeo da daje prognozu. Na kraju se ispostavilo da je svaki trener pogodio poredak samo jedne ekipe. Znate li kakav je bio redosled ekipa na kraju turnira?

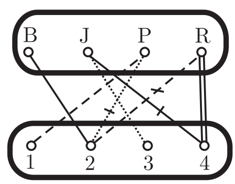
Rešenje. Nacrtajmo Ojler-Venove dijagrame skupa početnih slova naziva ekipa i skupa čiji su elementi redni brojevi mesta na tabeli. Zatim povežimo linijama elemente o kojima je reč u datim izjavama. (Puna linija predstavlja izjavu ”Partizanovog” trenera, a tačkama je označena izjava trenera ”Bosne”). Dobijamo graf prikazan na sl. 1. Pošto od svakog elementa polaze po dve linije, moraćemo po jednu eliminisati i zadržati samo one koje predstavljaju tačne iskaze.



Sl. 1



Sl. 2



Sl. 3

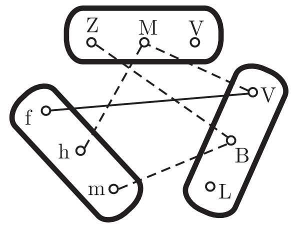
Pretpostavimo da je netačna izjava da je ”Bosna” druga. Stoga precrtajmo punu liniju koja spaja elemente B i 2. Ovu liniju ćemo označiti sa $B-2$. Tada je tačno $J-4$, pa sledi da je netačno $J-3$ (precrtaćemo odgovarajuću tačkastu liniju) Ako nije tačno $J-3$, onda je tačno $P-2$, a u tom slučaju treba precrtati $P-1$. Tako dobijemo graf na sl. 2. Ako je pretpostavka tačna, onda su drugo mesto osvojili ”Partizan” i ”Rabotnički”. Ovo nije moguće. Dakle, tačno je $B-2$, što povlači da treba precrtati $P-2$ i $R-2$, a takođe i $J-4$. Tako dobijemo ispravan graf na sl. 3. Vidimo da je ”Partizan” prvi, ”Bosna” druga i ”Jugoplastika” treća. Ostaje četvrto mesto za ”Rabotnički” (dopisana dvostruka linija na sl. 3). ♠

50. Tri prijatelja, *Zoran*, *Mika* i *Vlada*, profesori iz tri različita predmeta (*matematiku*, *fiziku* i *hemiju*), rade u školama u tri grada: *Loznici*, *Valjevu* i *Beogradu*. Poznato je sledeće. 1) *Zoran* ne radi u *Beogradu*, a *Mika* ne radi u *Valjevu*, 2) *Beograđanin* ne predaje *matematiku*, 3) Onaj koji radi u *Valjevu* predaje *fiziku*, 4) *Mika* ne predaje *hemiju*.

Koji predmet i u kom gradu predaje svaki od profesora?

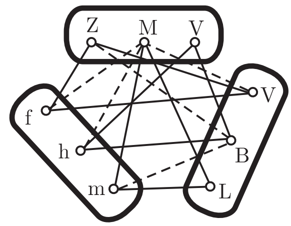
Rešenje. Prilikom ispunjavanja grafova koristićemo činjenicu da se svaki elemenat jednog skupa povezuje sa tačno jednim elementom drugog skupa. Pri tom se misli na *odgovarajuće* elemente. No, prilikom upisivanja datih podataka moramo upisati i činjenice da neki elementi nisu jedan drugom odgovarajući. Stoga ćemo se dogovoriti da *odgovarajuće elemente spajamo punim linijama*. Isprekidanim linijama spajaćemo dva elementa koji nisu odgovarajući jedan drugom. U skladu sa ovim dogovorom nacrtajmo Ojler-Venove dijagrame za postavljeni zadatak i upišimo odgovarajuće pune i isprekidane linije.

Ovde imamo tri skupa, čije elemente smo označili početnim slovima. Skup imena je $\{Z, M, V\}$, skup predmeta $\{f, h, m\}$ i skup gradova $\{B, V, L\}$. Svaki elemenat jednog skupa odgovara tačno jednom od elemenata iz drugog skupa. Na osnovu datih činjenica dobijamo graf prikazan na sl. 4. Tri odgovarajuća elementa iz tri data skupa obrazovaće trougao nacrtan punom linijom. Prema tome, rešenje na grafu biće tri trougla nacrtana punim linijama.



Sl. 4

Linije koje budemo povlačili označićemo krajnjim elementima. Pošto je MV isprekidana linija, to ne postoji trougao MVf sa punim linijama, pa je i linija fM isprekidana (ako M ne odgovara elementu V, ne može odgovarati ni elementu f). Pošto smo povukli isprekidane linije Mf i Mh, to linija Mm mora biti puna (ako elemenat M ne odgovara elementima f i h iz skupa predmeta, on mora odgovarati preostalom elementu m). Sada na isti način zaključujemo da je u trouglu MmB linija MB isprekidana, pa kako su ranije BZ i BM isprekidane, to linija BV mora biti puna (B i V su odgovarajući elementi). Nastavljajući dalje povlačenje linija po istim principima dobićemo potpuni graf na sl. 5. Odatle vidimo sledeće: 1) Zoran predaje fiziku u Valjevu, 2) Mika predaje matematiku u Loznici, 3) Vlada predaje hemiju u Beogradu. ♠



Sl. 5

51. *Milena*, *Dragica*, *Rajko* i *Ješo* rukovode *likovnom*, *muzičkom*, *dramskom* i *sportskom* sekcijom u svojoj školi. (Svako učestvuje u radu samo jedne sekcije). Svaki od pomenutih učenika uči tačno jedan od stranih jezika: *engleski*, *francuski*, *nemački* i *ruski*. Odrediti koji strani jezik uči svaki od ovih učenika i kojom sekcijom rukovodi, ako je poznato sledeće: a) Rukovodilac dramske sekcije ne uči ruski. b) Milena se ne bavi sportom, ni muzikom i ne uči engleski jezik. c) Rajko uči francuski jezik, ali se ne bavi sportom. d) Onaj koji uči nemački smatra da je pametno što nije član muzičke sekcije. e) Dragica ne voli ni sport, ni muziku i kaže da bi se ispisala iz škole ako bi je neko prisiljavao da uči ruski ili engleski jezik.

52. Četiri profesora: *Voja*, *Ljuba*, *Živko* i *Zvonko*, stari poznanici sa Prirodno-matičkog fakulteta, gde su studirali *fiziku*, *hemiju*, *matematiku* i *geografiju* (svaki po jedan predmet), sreli su se za vreme zimskog raspusta u Beogradu. Iz razgovora saznali su da predaju u srednjim školama u *Valjevu*, *Boru*, *Loznici* i *Nišu*. Jedan matematičar, koji je sedeo za susednim stolom, čuo je sledeće podatke. 1) Voja ne predaje ni hemiju, ni matematiku i nikad nije bio u Boru. 2) Živko predaje u Loznici, ali ne hemiju. 3) Ljuba je zaboravio hemiju, a kvadratne jednačine nije znao ni kad ih je učio u gimnaziji. 4) Nišlija priznaje da je i on zaboravio hemiju. 5) Valjevac predaje geografiju.

Na osnovu ovih podataka, koje ja zapisao i proučio, matematičar je saznao koji predmet i u kojem mestu predaje svaki od četiri prijatelja. Do kakvog je zaključka on došao?

1.5.4 Metoda negacije iskaza

Podrazumeva se da sve ličnosti koje se pominju u zadatku znaju matematičku logiku, pa u davanju odgovora greše ili ne greše, zavisno od toga da li su iskreni ili su "lažovi".

53. Neki putnik (dobar znalac matematičke logike) obreo se u gradu za koji ne zna da li je Šabac ili nije. Jedino zna da se nalazi u kraju u kojem svaki stanovnik uvek govori istinu, ili uvek laže. Kako će ovaj putnik od prvog građanina kojeg sretne saznati da li se nalazi u Šapcu? Na postavljena pitanja stanovnici odgovaraju sa "da" ili "ne".

Rešenje. Putnik zna za princip da je negacija laži istina. Stoga će prvom prolazniku postaviti pitanje: "*Ako bih te pitao da li se nalazim u Šapcu, šta bi mi ti odgovorio*". Ako dobije odgovor "Da", onda je u Šapcu. Odgovor "Ne" znači da putnik nije u Šapcu. Zašto je tako? Ako se putnik nalazi u Šapcu, a prolaznik govori uvek istinu, onda je odgovor jasno: "Da". Ako prolaznik uvek laže, on laže i da bi odgovorio sa "Ne", pa zbog toga kaže "Da". (On zna da bi odgovorio "Ne", ali ponovo laže, pa tako dobijamo potvrdan odgovor). Ovo je tzv. *negacija negacije.* Čitaocu prepuštamo da sam razjasni zašto odgovor "Ne" znači da putnik nije u Šapcu. ♠

54. Divljaci uhvate jednog istraživača, inače dobrog logičara, i zatvore ga u pećinu sa dva izlaza. Na svakom izlazu stajao je po jedan čuvar. Poglavica, videći da je istraživač dobronameran naučnik, odluči da mu pruži šansu da se spase i reče mu: "Jedan od izlaza vodi u slobodu, a jedan u kavez sa tigrovima. Možeš da pitaš stražare koji izlaz da izabereš. Samo vodi računa o tome da oni govore istinu samo kad su dobro raspoloženi, inače uvek lažu". Istraživač je pronašao pravo pitanje i spasao se. Šta je on pitao stražara?

55. U gradu *Istilažu* neki stanovnici *uvek lažu*, a neki *uvek govore istinu.* U taj grad stigne putnik, koji je znao za ovo. On naiđe na lice A koje je znalo njegov jezik i zamoli ga da mu bude tumač. Međutim, putnik nije znao kojoj vrsti građana pripada lice A. Stoga ga zamoli da ovaj zapita vozača taksija (lice B) da li on (vozač) govori istinu. Ovaj to učini i reče mu da je vozač odgovorio da uvek govori istinu. Na osnovu toga putnik je znao da li njegov tumač laže ili govori istinu.

Kojoj grupi stanovnika pripada lice A?

56. U jednom gradu postoje tri vrste stanovnika: koji uvek lažu (označimo ih sa L), koji uvek govore istinu (označimo ih sa I) i koji nekad lažu, a nekad govore istinu (označimo ih sa P). Za stolom sede tri stanovnika, i to jedan iz grupe L, jedan iz grupe I i jedan iz grupe P. Došljak, dobar logičar, znajući da su pred njim takvi stanovnici, postavio im je tri pitanja (svako pitanje jednom od trojice prisutnih – nije obavezno da budu različita lica), na koja je svaki put dobio odgovor "Da", ili "Ne". Na osnovu ovih odgovora došljak je utvrdio ko je L, ko je I i ko je P. Objasnite kako je došljak uspeo da odredi kojoj vrsti pripada svaki od prisutnih.

1.5.5 Metoda iskazne algebre

Koristeći istinitosne tablice logičkih operacija i navedene važeće zakone i oznake, možemo rešavati detektivske zadatke gotovo formalnim računanjem. Da bi se mogla koristiti ova metoda moramo prvo naučiti osnovne zakone matematičke logike, (asocijativnost, komutativnost i distributivnost logičkih operacija).

57. Na šahovskom turniru prva četiri mesta su zauzeli: *Aca*, *Jela*, *Muja* i *Spoma*. Na pitanje kako su se plasirali, pobednici su izjavili: *Aca*: "Jela je druga, Muja treći". *Jela*: "Muja je drugi, Aca četvrti". *Muja*: "Aca je treći, Spoma druga". Nezadovoljna svojim uspehom Spoma nije želela da daje izjave. Ostali su, sa namerom da zbune novinare, dali po jedan tačan i jedan netačan podatak, i tu svoju nameru su im na kraju otkrili. Među novinarima bio je jedan koji je znao matematičku logiku i u njegovom listu je objavljen tačan redosled takmičara. Kako je novinar odredio tačan redosled?

Rešenje. Sa J_2 označimo da je Jela zauzela drugo mesto, sa M_3 da je Muja zauzeo treće mesto, i slično. Tako dobijamo tri formule iz tri izjave: $J_2 + M_3 = 1$ $M_2 + A_4 = 1$, $A_3 + S_2 = 1$. (Koristimo osobinu: disjunkcija jednog tačnog i jednog netačnog iskaza je tačan iskaz: $\top \vee \perp = \perp \vee \top = \top$, ili $1+0=1$). Zatim, iskoristimo zakon distributivnosti konjunkcije prema disjunkciji: $(J_2 + M_3) \cdot (M_2 + A_4) = 1$, odakle je: $J_2 \cdot M_2 + J_2 \cdot A_4 + M_3 \cdot M_2 + M_3 \cdot A_4 = 1$

Ovde je $J_2 \cdot M_2 = 0$ jer ne mogu i Jela i Muja biti drugi, pa je to konjunkcija oblika $\top \wedge \perp = \perp$. Takođe je $M_3 \cdot M_2 = 0$, jer ne može Muja biti i treći i drugi. Ostaje uslov: $J_2 \cdot A_4 + M_3 \cdot A_4 = 1$. Uzimajući u obzir i treću izjavu dobićemo: $(J_2 \cdot A_4 + M_3 \cdot A_4) \cdot (A_3 + S_2) = 1$, odakle je: $J_2 \cdot A_4 \cdot A_3 + J_2 \cdot A_4 \cdot S_2 +$ $M_3 \cdot A_4 \cdot A_3 + M_3 \cdot A_4 \cdot S_2 = 1$. Zaključujući kao u prethodnom slučaju, utvrdimo da je $J_2 \cdot A_4 \cdot A_3 = 0$, $J_2 \cdot A_4 \cdot S_2 = 0$ i $M_3 \cdot A_4 \cdot A_3 = 0$, pa ostaje: $M_3 \cdot A_4 \cdot S_2 = 1$. Dakle: Muja je treći, Aca četvrti, Spoma druga. Prva je Jela. ♠

58. Šahisti *Matulović*, *Šahović* i *Matanović* igrali su tromeč. Pobednik meča stiče pravo učešća na zonskom turniru za prvenstvo sveta. Ne čekajući da se završe prekinute partije, jedan novinar je javio svojoj redakciji da je prvi *Matulović*, *Matanović* nije prvi i da *Šahović* neće biti poslednji. Posle završetka prekinutih partija pokazalo se da je novinar pogodio uspeh samo jednog šahiste.

Kako je završen ovaj tromeč?

59. Na pitanje ko od pet učenika (Voja, Mirjana, Vlada, Nada i Jagoda) igra šah, dato je pet odgovora. 1) Ako Mirjana igra šah, onda ga i Voja igra. 2) Bar jedna od učenica, Nada ili Jagoda, igra šah. 3) Samo jedan od dečaka igra šah. 4) Što se tiče Nade i Vlade, oni ili oboje igraju, ili oboje ne igraju šah! 5) Ako Jagoda igra šah, onda Mirjana i Nada takođe igraju šah.

Svaki od datih odgovora je tačan. Odrediti koji od ovih pet učenika igraju šah.

60. Rada i njen muž Ramiz hoće da vode kćerke Anitu i Irenu u bioskop ili u pozorište. Dali su sledeće izjave: *Ramiz*: "Ja idem u pozorište ako i samo ako sa mnom ide Rada". *Anita*: "Irena je mnogo dosadna. Ja idem tamo gde ne ide Irena". *Irena*: "Ako Anita ide u pozorište, onda mama i ja idemo u bioskop". Na kraju su svi otišli ili u bioskop ili u pozorište. Međutim, pokazalo se da su Ramiz i Anita rekli istinu, dok je Irena slagala.

Odredite ko je išao u bisokop, a ko u pozorište.

DRUGA GLAVA

2. SKUPOVI

$S = \{x|\ S(x)\}$, znači isto što i: $S = \{x|\ x$ ima svojstvo $S(x)\}$ tj. S je skup svih elemenata *koji imaju svojstvo* $S(x)$.

Za skupove *prirodnih, celih, racionalnih, realnih* brojeva koristimo oznake redom: N, Z, Q, R.

Podskup A skupa S je skup koji zadovoljava uslov: $(\forall x)\ (x \in A \Rightarrow x \in S)$. Oznaka je $A \subset S$ ili $S \supset A$.

Jednakost dva skupa definiše se na sledeći način

$$A = B \Longleftrightarrow (\forall x) \quad (x \in A \Longleftrightarrow x \in B) \quad \text{ili} \quad (A = B \Longleftrightarrow (A \subset B \wedge B \subset A).$$

Postoji jedan i samo jedan *prazan skup.* To je skup koji nema elemenata. Prazan skup je matematička konstanta. Označavamo ga sa $\varnothing$.

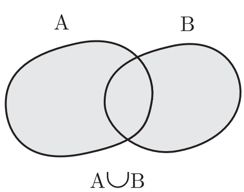
Unija dva skupa A i B je skup koji označavamo sa $A \cup B$ i to je: $A \cup B = \{x|\ x \in A \vee x \in B\}$.

Presek dva skupa A i B je skup koji označavamo sa $A \cap B$ i to je: $A \cap B = \{x|\ x \in A \wedge x \in B\}$.

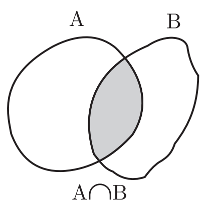
Ako je $A \cap B = \varnothing$, tada kažemo da su A i B *disjunktni (razdvojeni).*

Razlika skupa A i skupa B je skup koji označavamo sa $A \backslash B$ i to je: $A \backslash B = \{x|\ x \in A \wedge x \notin B\}$.

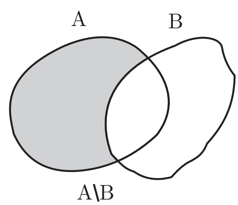
Grafička interpretacija pomoću tzv. *Ojler-Venovih dijagrama* (šrafirani delovi su redom: unija, presek, razlika) data je na slikama 6, 7 i 8.



Sl. 6



Sl. 7



Sl. 8

Komplement skupa A, skup označen sa A', definišemo kao: $A' = \{x|\ x \notin A\}$.

Komplement skupa A u *odnosu na* skup B, ako $A \subset B$, je: $C_B(A) = B \backslash A$.

Uređen par (uređena dvojka) je skup od dva elementa, recimo a i b, koji označavamo sa (a, b) i definišemo kao: $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$.

Jednakost dva uređena para karakteriše prirodu ovih skupova:

$$(a, b) = (c, d) \Longleftrightarrow (a = c \wedge b = d).$$

Dekartov proizvod dva skupa A i B, u oznaci $A \times B$ je

$$A \times B = \{(a,b)|\ a \in A \wedge b \in B\}.$$

Dekartov kvadrat skupa A je: $A^2 = A \times A = \{(a,b)|\ a, b \in A\}$.

Relacija između dva elementa a i b, $a \in A$, $b \in B$, je skup ρ, takav da je $\rho \subset A \times B \wedge (a,b) \in \rho$. Tada pišemo: $a\rho b$, što znači: a je u relaciji ρ sa b.

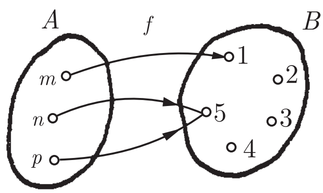
Od mogućih osobina relacije ρ definisanih na skupu A, $\rho \subset A \times A$, ističemo:

(R) refleksivnost	$(\forall x \in A)(x\rho x)$
(S) simetričnost	$(\forall x, y \in A)(x\rho y \Rightarrow y\rho x)$
(AS) antisimetričnost	$(\forall x, y \in A)(x\rho y \wedge y\rho x \Rightarrow x = y)$
(T) tranzitivnost	$(\forall x, y, z \in A)(x\rho y \wedge y\rho z \Rightarrow x\rho z)$

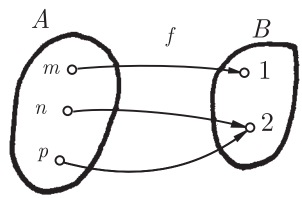
Relacija ekvivalencije je svaka relacija koja ima osobine R, S, T. Ona deli skup na disjunktne klase, a elementi jedne klase su svi jedni s drugim u relaciji. Oznaka za relaciju ekvivalencije je $\sim$ (tilda), a za *klasu ekvivalencije*: $C_x = \{y|\ x \sim y\}$.

Relacija poretka je svaka relacija koja se odlikuje osobinama R, AS, T.

Funkcija (*preslikavanje*) skupa A *u* skup B, $A \xrightarrow{f} B$, je podskup f Dekartovog proizvoda $A \times B$, koji se odlikuje osobinama: svakom elementu a skupa A odgovara tačno jedna uređena dvojka (a,b), $b \in B$, takva da $(a,b) \in f$, sl. 9. Koriste se označavanja: $f = \begin{pmatrix} m & n & p \\ 1 & 5 & 5 \end{pmatrix}$ i $f = \{(m,1),(n,5),(p,5)\}$. Skup A je *domen*, a skup B je *kodomen* funkcije f.



Sl. 9

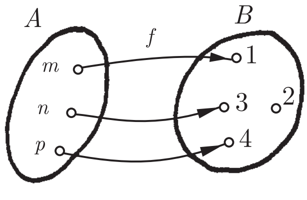


Sl. 10

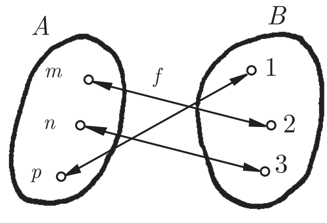
Elemenat $a \in A$ je *original* (*lik*), a elemenat $b \in B$ je *slika*. Činjenicu da je $(a,b) \in f$ označavamo sa $f(a) = b$. Skup slika označavamo sa $f(A)$.

Ako je $f(A) = B$, tada je f preslikavanje skupa A *na* skup B (sirjekcija), sl. 10.

Ako važi implikacija: $a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$, tada je f preslikavanje *jedan-jedan*, odnosno 1-1 (*injekcija*), sl. 11.



Sl. 11



Sl. 12

Ako je f preslikavanje *na* i *jedan-jedan*, sl. 12, onda je to *bijekcija* i postoji *inverzno* (*obratno*) preslikavanje skupa B na skup A. To označavamo sa $B = f^{-1}(A)$.

Ako je $f(A) = B$ i $g(B) = C$, tada se skup A preslikava na skup C *kompozicijom preslikavanja*: $g \circ f(A) = C$ (čita se: "*gof od A jednako C*"). Važi zakon asocijativnosti: $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

Svako preslikavanje skupa $A \times A$ u skup A naziva se *binarna operacija.* Dakle, ako za svaki x, $y \in A$ postoji $z \in A$, tako da $(x, y) \xrightarrow{*} z$, kažemo da je z *rezultat* primene operacije $*$ redom na x i y. Pišemo: $x * y = z$.

Operacija je *komutativna* ako za $\forall x$, $y \in A$ važi: $x * y = y * x$.

Operacija je *asocijativna* ako za $\forall x$, $y \in A$ važi: $x * (y * z) = (x * y) * z$.

Ako postoji $e \in A$, tako da za $\forall x \in A$, važi: $e*x = x*e = x$, tada je e *jedinični element* (*jedinica*) operacije $*$.

Ako za $\forall x \in A$ postoji $y \in A$, tako da je $x * y = y * x = e$, tada je y *inverzni elemenat* (*obrat*) eementa x u odnosu na jedinicu e. Inverzni elemenat označavamo i sa x^{-1}.

Skup snabdeven operacijom čini *algebarsku strukturu*, na primer: $(A, *)$

Algebarska struktura $(A, *)$ je *grupa*, ako se operacija $*$ odlikuje osobinama:

1° *Asocijativna* je, tj. važi jednakost: $x * (y * z) = (x * y) * z$, za bilo koju trojku elemenata $x, y, z \in A$.

2° U skupu A postoji *jedinični elemenat* e, tj. za svaki elemenat $x \in A$ važe jednakosti: $e * x = x * e = x$.

3° Za svaki elemenat $x \in A$ postoji *obrat* $x^{-1} \in A$, tj. za svaki elemenat $x \in A$ može se naći elemenat $x^{-1} \in A$, takav da važe jednakosti: $x*x^{-1} = x^{-1}*x = e$.

Ako je $*$ još i *komutativna* operacija, onda se $(A, *)$ naziva *komutativna* (*Abelova*) *grupa.*

Algebarska struktura $(R, +, \cdot)$ je *polje realnih brojeva* jer se odlikuje osobinama:

1° $a + b = b + a$ (komutativnost sabiranja)

2° $a + (b + c) = (a + b) + c$ (asocijativnost sabiranja)

3° $a + 0 = 0 + a = a$ (0 je neutralni (jedinični) elemenat sabiranja)

4° $a + (-a) = (-a) + a = 0$ (postojanje suprotnog (inverznog) elementa za sabiranje)

5° $a \cdot b = b \cdot a$ (komutativnost množenja)

6° $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ (asocijativnost množenja)

7° $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$ (postoji jedinični elemenat za množenje)

8° $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$, $a \neq 0$ (postojanje inverznog elementa za množenje)

9° $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ (distributivnost množenja u odnosu na sabiranje), gde su a, b, c, $(-a)$, a^{-1}, 1 i 0 realni brojevi, a R skup svih realnih brojeva.

2.1 OPERACIJE SA SKUPOVIMA

△ **61.** Za skup S, dat jednakošću: $S = \{x |\ F(x)\}$, kažemo da je *dat opisivanjem.* Data jednakost ističe da skup S sadrži samo one elemente x koji imaju svojstvo $F(x)$ (za koje je tačna formula $F(x)$).

Odrediti elemente skupova koji su dati opisivanjem:

a) $\{x |\ x \in N \wedge x > 2 \wedge x < 5\}$, b) $\{x |\ x|12 \wedge x \in N\}$;

c) $\{x |\ x \in N \wedge x < 5 \wedge x \neq 3\}$, d) $\{x |\ (x + 1)|9 \wedge x \in Z\}$;

e) $\{x |\ 10|x \wedge x|40 \wedge x \in N\}$, f) $\{x |\ x \in N \wedge x < 2 \wedge x \neq 1\}$.

△ **62.** Utvrditi koja od navedenih tvrđenja su tačna, a koja su netačna:
a) $1 \in N$, gde je N oznaka za skup prirodnih brojeva: b) $\varnothing = 0$;

c) $\varnothing \in \{\varnothing\}$; d) $\varnothing = \{0\}$; e) $\{a\} \in \{a, b, c\}$;

f) $\{1, 2, 3\} = \{1, 2, 3, 2, 1\}$; g) $\{x|\ x - 3 = 0\} \supset \{3\}$.

△ **63.** Koja od relacija $=$, $\subset$, $\supset$, važi između skupa A koji je dat navođenjem elemenata i skupa B koji je zadat opisivanjem.
a) $A = \{2\}$; $B = \{x|\ \ x - 2 = 0\}$;

b) $A = \{2, 4, 6, 8\}$, $B = \{x|\ x \in 2N \wedge x < 10\}$;

c) $A = \varnothing$, $B = \{x|\ x \in N \wedge x < 1\}$;

d) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{x|\ x \in N \wedge x|6\}$.

□ **64.** Na skupu $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ rešiti po x formule:
a) $\tau((x - 1)|6) = \top$; b) $\tau((x + 1)|(x + 3)) = \bot$, c) $\tau((x + 1)^2 \neq 2) = \top$.

□ **65.** Rešiti po x i y formule:
a) $x \in \{1, 2, 3, 4\}$; b) $2 \in \{1, x, 3, 4\}$; c) $\{1, 5\} \subset \{1, 2, x, 4, 10\}$;

d) $\{x\} \subset \{2, 5, 6\}$; e) $\{1, 5\} \in \{1, 2, x, 4, 10\}$;

f) $\{x, y\} \subset \{2, 5, 10\}$; g) $\{1, x, 2, y\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$.

△ **66.** Odrediti vrednosti promenljivih x, y tako da vredi:
a) $(x, y) = (2, 1)$; b) $\left(\dfrac{1}{x}, 1\right) = \left(1, \dfrac{y}{3}\right)$; c) $\left(\dfrac{x}{y}, y\right) = (2, 3)$;

d) $(x, y) = \left(3, \dfrac{y}{2}\right)$; e) $\left(1, \dfrac{1}{x}\right) = \left(1, \dfrac{1}{y}\right)$.

△ **67.** Odrediti $A \cap B$ ako je:
a) $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{a, e, i, o, u\}$; b) $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{2, 4, 6\}$;

c) $A = \{a|\ a$ je paran broj$\}$, $B = \{b|\ b$ nije ceo broj$\}$;

d) $A = \varnothing$, $B = N$; e) $A = \{a|\ 2|a\} = \{b|\ 0 < b < 5\}$;

f) $A = \{a|\ a \in N \wedge a \leq 3\}$, $B = \{b|\ b \in N \wedge b \geq 2\}$;

g) $A = \{a|\ a^2 - 4 = 0\}$, $B = \{b|b < 2\}$; h) $A = \{a|\ 2|a\}$, $B = \{b|\ 3|b\}$.

△ **68.** Rešiti formulu $\{1, 2, 3\} \cap X = \{2, 3\}$, ako je X podskup skupa $\{2, 3, 4, 5\}$.

△ **69.** Da li važi jednakost $\{0, 1, 2, 3, 4\} \cap X = \{1, 2\}$, ako je:
a) $X = \{3, 4\}$; b) $X = \varnothing$; c) $X = \{0, 1\}$;

d) $X = \{2, 3\}$; e) $X = \{0, 1, 2, 3\}$?

△ **70.** Dati su skupovi: $A = \{a|\ a|6 \wedge a \in N\}$, $B = \{1, 3, 5\}$,
$C = \{c|\ c \in Z \wedge c > 0 \wedge c < 8\}$. Odrediti:
a) $A \cup B$; b) $A \cap C$: c) $(A \cup B) \cap C$; d) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$;

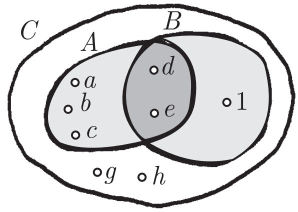
e) $(A \cup B) \cap (A \cup C)$; f) $((A \cup B) \cap C) \cap A$.

△ **71.** Dati su skupovi: $A = \{a|\ a^2 - 4 = 0\}$, $B = \{b|\ -3 < b < 3 \wedge b \in Z\}$,
$C = \{c|\ c \leq 7 \wedge c \in N\}$. Odredite skupove:

a) $(A\backslash B)\backslash C$; b) $(A\cup B)\backslash C$; c) $(A\backslash B)\cap(A\backslash C)$;

d) $(A\cap B)\backslash C$; e) $(A\cap B)\backslash(A\cap C)$.

△ **72.** Dati su skupovi $A=\{a|\ a|12\}$, $B=\{b|\ b|24\}$, $C=\{c|\ c|6\}$, $D=\{2,3,4\}$. Utvrditi da su A, C i D podskupovi skupa B i odrediti komplemente skupova A, C i D u odnosu na skup B.



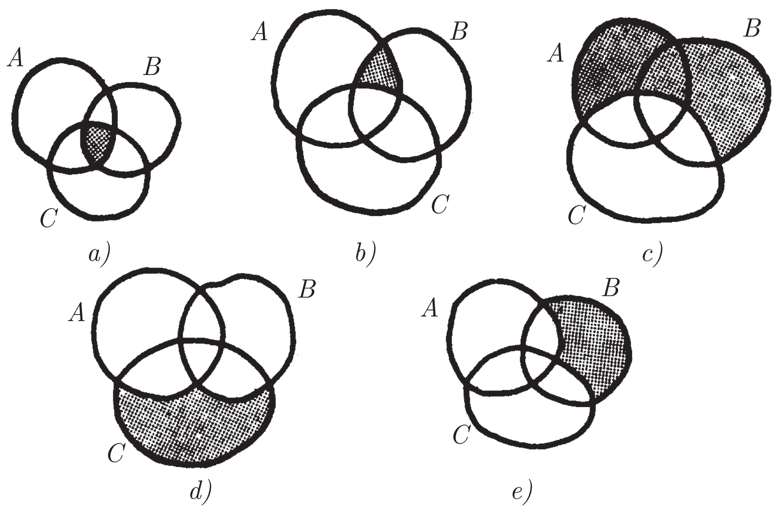
Sl. 13

△ **73.** Dati su dijagrami skupova A, B i C, sl. 13. Odrediti skupove: A, B, C, $A\backslash B$, $B\backslash A$, $C\backslash(A\cup B)$, $C_c(A)$, $C_c(B)$,
$C_c(A\cap B)$, $C_c(A\cup B)$.

□ **74.** Osenčene skupove na sl. 14 opisati pomoću skupova A, B i C:

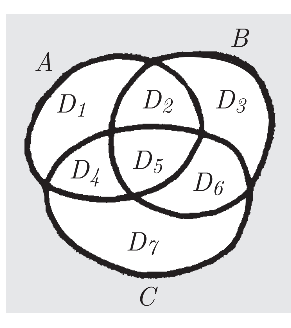
1) Koristeći se oznakama operacija $\vee$, $\wedge$ i relacija $\in$ i $\notin$;

2) Koristeći skupovne operacije.



Sl. 14

△ **75.** Na slici 15 je unija proizvoljnih skupova A, B, i C rastavljena na disjunktne skupove: $D_1, D_2, D_3, D_4, D_5, D_6, D_7$. Slično opisu u **zadatku 74**, opisati skupove $D_1, D_2, \ldots, D_7$.



Sl. 15

2) Iz dijagrama zaključujemo da je $A=D_1\cup D_2\cup D_4\cup D_5$. Koristeći slične jednakosti dokazati:

a) $(A\cup B)\backslash C=(A\backslash C)\cup(B\backslash C)$;

b) $(A\cap B)\backslash C=(A\backslash C)\cap(B\backslash C)$;

c) $A\backslash(B\cup C)=(A\backslash B)\cap(A\backslash C)$;

d) $A\backslash(B\cap C)=((A\backslash B)\cup(A\backslash C)$.

□ **76.** Dati su $card\ A = 26$, $card\ B = 29$, $card\ C = 33$, $card\ (A \cap B) = 14$, $card\ (A \cap C) = 16$, $card\ (B \cap C) = 18$, $card\ (A \cap B \cap C) = 16$. Koristeći dijagrame odrediti:

1) $card\ (A \setminus (B \cup C))$; 2) $card\ (B \setminus (A \cup C))$; 3) $card\ (C \setminus (B \cup A))$;

4) $card\ ((A \cap B) \setminus C)$; 5) $card\ ((B \cap C) \setminus A)$; 6) $card\ ((A \cap C) \setminus B)$.

b) Odrediti $card\ A$ i $card\ B$, ako je:

1) $card\ (A \setminus B) = 5 \land card(B \setminus A) = 6 \land card(A \cap B) = 3$;

2) $card\ (A \setminus B) = 4 \land card(B \setminus A) = 8 \land card(A \cup B) = 18$;

3) $card\ (A \setminus B) = 10 \land card(A \cap B) = 7 \land card(A \cup B) = 24$.

○ **77.** Dati su skupovi $A = \{a |\ a|18 \land a \in N\}$, $B = \{b |\ b|30 \land b \in N\}$, $C = \{c |\ c|45 \land c \in N\}$. Odrediti skup X, koji zadovoljava sledeće uslove:

$$X \cap A = X,\ X \cap B = X \cap C = A \cap B \cap C,\ X \setminus B = X \setminus C \neq \varnothing$$

○ **78.** Skupovne identičnosti mogu se dokazivati pomoću tablica, sličnih istinitosnim tablicama, samo umesto $\top$ i $\bot$, tablice popunjavamo sa $\in$ i $\notin$. Pri tome koristimo ekvivalenciju, kojom se definiše jednakost dvaju skupova:

$$(A = B) \iff (\forall x)((x \in A) \Rightarrow (x \in B)) \land (\forall x)((x \in B) \Rightarrow (x \in A)).$$

Tako, na primer, za dokaz identičnosti $(A \cap B) \setminus C = A \cap (B \setminus C)$, načinićemo tablicu:

A	B	C	$A \cap B$	$B \setminus C$	$A \cap B \setminus C$	$A \cap (B \setminus C)$
$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$
$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$
$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$
$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$
$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$
$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$
$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$
$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$

Dve poslednje kolone, kao što vidimo, popunjene su na identičan način, što potvrđuje zadatu identičnost. Odavde zaključujemo da se može pisati bez zagrada: $A \cap B \setminus C$.

Slično navedenom primeru, dokazati sledeće skupovne identičnosti:

a) $A \cup A = A$ i $A \cap A = A$ (zakon idempotentnosti unije i preseka skupova);

b) $A \cup B = B \cup A$ i $A \cap B = B \cap A$ (zakon komutativnosti unije i preseka skupova);

c) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ i $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (zakoni distributivnosti);

d) $(A \cup B)' = A' \cap B'$ i $(A \cap B)' = A' \cup B'$, gde $'$ ("prim") označava komplement skupa (De Morganovi zakoni za skupove).

○ **79.** Skupovne jednakosti mogu se dokazivati na osnovu definicija skupovnih operacija i ekvivalencije kojom se definiše jednakost dva skupa. Na primer, jednakost

$(A \cup B')' = A' \cap B$ dokazujemo koristeći ekvivalenciju:

$$(A \cup B')' = A' \cap B \iff (\forall x)(x \in (A \cup B')' \Rightarrow x \in (A' \cap B)) \wedge$$
$$\wedge (\forall y)(y \in (A' \cap B) \Rightarrow y \in (A \cup B')'.$$

Prvi deo dokaza:

$$(\forall x)(x \in (A \cup B')' \Rightarrow x \notin (A \cup B') \Rightarrow x \notin A \wedge x \notin B' \Rightarrow x \in A' \wedge x \in B \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x \in (A' \cap B)).$$

Drugi deo dokaza:

$$(\forall y)(y \in (A' \cap B) \Rightarrow y \in A' \wedge y \in B \Rightarrow y \notin A \wedge y \notin B' \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y \notin (A \cup B') \Rightarrow y \in (A \cup B')').$$

Dokazati skupovnu jednakost $(B \backslash C) \cap A = (A \cap B) \backslash C$:

a) Koristeći dijagrame i disjunktne podskupove, kao u zadatku 75.

b) Koristeći tablice pripadnosti, kao u zadatku 78.

c) Koristeći definicije skupovnih operacija, kao što je učinjeno sa upravo dokazanim primerom.

□ **80.** Koja od navedenih skupovnih formula je tačna:

a) $A \cap B = B \Rightarrow A \subset B$; b) $A \cap B = A \Rightarrow A \subset B$;

c) $A \cup B = B \Rightarrow B \subset A$; d) $A \cup B = A \Rightarrow B \subset A$;

e) $A \subset B \Rightarrow B \backslash A = \varnothing$; f) $A \subset B \Rightarrow A \backslash B = \varnothing$; g) $A \backslash B = \varnothing \iff A \subset B$;

h) $A \cup B = A \iff A \subset B$; i) $A \cup \varnothing = \varnothing \iff A = \varnothing$.

○ **81.** Učenik je napisao na školskoj tabli redom prirodne brojeve od 1 do 1000. Prvo je izbrisao brojeve koji su deljivi sa 4 i brojeve koji su deljivi sa 6, a zatim i brojeve koji su deljivi sa 10. Koliko je brojeva ostalo na školskoj tabli?

□ **82.** U razredu ima 20 dečaka. Četrnaestorica imaju smeđe oči, petnaestorica imaju smeđu kosu, sedamnaestorica teže više od 60 kg, a osamnaestorica su viši od 165 cm. Dokazati da barem četvorica dečaka imaju sve navedene osobine.

□ **83.** Na Balkanskom kongresu matematičara svaki od 100 učesnika govori bar jedan od stranih jezika: engleski, francuski ili ruski. Ruski jezik govori 57 učesnika, ruski i francuski 28, engleski i francuski 34 a 5 učesnika govori samo francuski. Samo dva strana jezika govori 49 učesnika, a sva tri 11 učesnika. Odgovoriti

a) Koliko učesnika govori francuski jezik? b) Koliko učesnika govori samo engleski jezik? c) Koliko učesnika ne govori francuski jezik?

○ **84.** U školskom izveštaju dati su podaci o sportskim aktivnostima učenika: 50 % igra košarku, a 40 % rukomet. Svaki deseti učenik bavi se rukometom i fudbalom, 5 % bavi se sa sva tri sporta. Za fudbal nije zainteresovano 40 % učenika. 30 % učenika igra fudbal, a ne igra košarku, a 20 % igra rukomet, a za košarku se ne interesuje.

a) Koliko procenata učenika ove škole ne upražnjava ni jedan od navedenih sportova? b) Koliko procenata učenika upražnjava samo jedan sport?

∗ **85.** U nekom društvu matematičara svaki od njih se bavi bar jednom od sledećih grana matematike : algebrom, analizom, geometrijom ili logikom. Onaj koji se bavi algebrom ili logikom bavi se i analizom; onaj koji se bavi geometrijom bavi se i logikom; onaj koji se bavi analizom i geometrijom bavi se i algebrom. Kojom od ovih grana se bavi najviše, a kojom najmanje matematičara?

○ **86.** Uočimo skup $A = \{1, 2, 3\}$. Skup čiji su elementi svi podskupovi skupa A naziva se *partitivni skup* skupa A. To je skup

$$P(A) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}.$$

Naći partitivne skupove datih skupova:

a) $M = \{m, n\}$; b) $N = \varnothing$; c) $S = \{*, \circ, \square, \triangle\}$.

□ **87.** 1) Naći Dekartove proizvode dvaju datih skupova, $A \times B$ i $B \times A$:

a) $A = \{a\}$, $B = \{b, c, d\}$; b) $A = \{1, 3\}$, $B = \{2, 4, 6\}$;

c) $A = \{a, b\}$, $B = \{2, 3\}$.

Da li važi zakon komutacije za Dekartov proizvod, tj. da li važi jednakost: $A \times B = B \times A$?

2) Odrediti Dekartove kvadrate datih skupova:

a) $A = \{1\}$; b) $B = \{a, b\}$; c) $C = \{m, n, p\}$; d) $D = \{2, 4, 6, 8\}$.

2.2 BINARNE RELACIJE

△ **88.** Znak ρ zameniti jednim od znakova: $=$, $<$, $>$, $|$, tako da dati zapis postane tačna formula:

a) $2\rho 3$; b) $2\rho 2$; c) $1\rho(-1)$; d) $2\rho 4$; e) $2\rho\dfrac{1}{2}$; f) $x\rho 2x$, $x \in N$;

g) $(x-1)(x+1)\rho(x^2-1)$, gde je x realan broj, različit od 1 i -1,

h) $(x-1)(x-1)\rho(x-1)^2$, gde je x realan broj, različit od 1,

i) $(x+x)\rho 2x$, gde je x iz R i $x \neq 0$.

□ **89.** Na skupu $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ određena je relacija ρ, tako da $x\rho y$ – ako i samo ako je $x + y \equiv 0 \pmod 2$[3)]

1) Načiniti tablicu relacije ρ.

2) Rešiti formule:

a) $\tau(1\rho x) = \top$; b) $\tau(2\rho x) = \perp$;

c) $\tau(x\rho 3) = \perp$; d) $\tau(x\rho 6) = \top$, gde je $x \in A$.

△ **90.** Relacija ρ skupa $A = \{2, 4, 6, 8\}$ data je tablicom:

1) Odrediti:

a) $\tau(6\rho 2)$; b) $\tau(4\rho 4)$; c) $\tau(6\rho 8)$;

d) $\tau(8\rho 6)$; e) $\tau(2\rho 2)$.

2) Rešiti formule:

a) $\tau(2\rho x) = \perp$; b) $\tau(4\rho x) = \top$;

c) $\tau(6\rho x) = \top$; d) $\tau(8\rho x) = \perp$.

ρ	2	4	6	8
2	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$
4	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\perp$
6	$\top$	$\top$	$\perp$	$\perp$
8	$\top$	$\top$	$\top$	$\perp$

[3)] Čita se: "*$x + y$ kongruentno nuli, po modulu 2*", što znači da je $x + y$ deljivo sa 2, tj. pri deljenju sa 2 daje ostatak 0.

□ **91.** Koje su od relacija skupa R:

a) $=$; b) $>$; c) $<$; d) $\neq$; e) $\leq$; f) $\geq$; g) $|$ (se sadrži):

1° refleksivne, 2° simetrične, 3° antisimetrične, 4° tranzitivne?

Koja od navedenih relacija je relacija ekvivalencije, a koja je relacija poretka?

□ **92.** Relacija ρ skupa $A = \{1, 2, 3\}$ predstavljena je tablicom. Zbog čega ρ nije relacija ekvivalencije?

ρ	1	2	3
1	$\perp$	$\top$	$\top$
2	$\top$	$\perp$	$\top$
3	$\top$	$\top$	$\top$

○ **93.** Uočimo skup $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ i u njemu relaciju ρ definisanu ovako: $x \rho y$ *akko* $x - y \equiv 0 \pmod 3$, tj. *akko* x i y pri deljenju sa 3 daju isti ostatak.

a) Nacrtati graf relacije ρ, b) Dokazati da je ρ relacija ekvivalencije.

c) Odrediti klase ekvivalencije skupa A u odnosu na relaciju ρ.

○ **94.** U skupu $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ definisana je relacija ρ na sledeći način: $x \rho y$ *akko* $x \leq y$.

a) Dokazati da je ρ relacija poretka, tj. da je refleksivna, antisimetrična i tranzitivna.

b) Nacrtati graf relacije ρ. c) Načiniti tablicu relacije ρ.

□ **95.** Uočimo skup $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ i u njemu relaciju ρ, datu na sledeći način: $x \rho y$ *akko* $x|y$.

a) Dokazati da je ρ relacija poretka.

b) Nacrtati graf relacije ρ. c) Sastaviti tablicu relacije ρ.

d) Dokazati da je ρ relacija poretka na skupu N. Da li to važi za skup $Z \backslash \{0\}$?

○ **96.** Na skupu uređenih parova prirodnih brojeva definisana je relacija ρ:

a) $(x, y) \rho (x_1, y_1) \overset{\text{def}}{\iff} x + y_1 = x_1 + y$; b) $(x, y) \rho (x_1, y_1) \overset{\text{def}}{\iff} x \cdot y_1 = x_1 \cdot y$.

Dokazati da je ρ refleksivna, simetrična i tranzitivna relacija, tj. da je ρ relacija ekvivalencije.

2.3 PRESLIKAVANJA

△ **97.** Neka je $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a & b & c & d & a & b \end{pmatrix}$ preslikavanje skupa $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ na skup $\{a, b, c, d\}$. Odrediti:

a) $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$, $f(6)$;

b) Rešiti po x iz $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ formule: $f(x) = a$, $f(x) = b$, $f(x) = c$, $f(x) = d$.

△ **98.** Uočimo preslikavanje $f = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \end{pmatrix}$ skupa $\{a, b, c, d\}$ na samog sebe. Odrediti:

a) $f(a)$, $f(b)$, $f(c)$, $f(f(d))$;

b) Rešiti formule po x iz skupa $\{a, b, c, d\}$: $f(x) = a$, $f(f(x)) = b$, $f(f(f(x))) = d$,

△ **99.** Preslikavanje skupa A u skup B može se opisati slikom (grafom) uz dogovor da strelica ide od lika (elementa skupa A) ka slici (elementu skupa B), sl. 16.

1) Iz priložene slike odrediti:

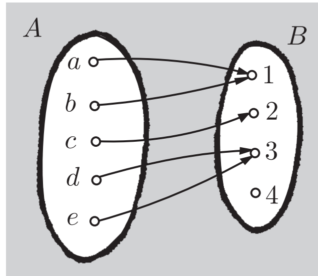
a) $f(a)$; b) $f(b)$; c) $f(c)$; d) $f(d)$;

e) $f(e)$.

2) Rešiti po x iz skupa $A = \{a, b, c, d, e\}$ formule:

a) $f(x) = 1$; b) $f(x) = 2$; c) $f(x) = 3$;

d) $f(x) = 4$.



Sl. 16

□ **100.** Odrediti sva preslikavanja skupa A u samog sebe, u slučajevima:

a) $A = \{a\}$; b) $A = \{a, b\}$.

○ **101.** Vrednost promenljive x u skupu R za koju je tačna formula $f(x) = x$, naziva se *nepokretna (fiksna) tačka* funkcije $f(x)$. Tako, na primer, nepokretna tačka funkcije $f(x) = 2x - 1$ je broj 1, jer je tačna formula $f(1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1$, tj. $f(1) = 1$. Ova se tačka dobije iz uslova $f(x) = x$, u ovom slučaju iz $2x - 1 = x$.

1) Odrediti, ukoliko postoje, nepokretne tačke funkcija:

a) $f(x) = 2x$; b) $f(x) = x$; c) $f(x) = 2x + 1$; d) $f(x) = x + 1$.

2) Ako sa f označimo preslikavanje skupa $A = \{a, b, c, d, e\}$ u samog sebe, odrediti nepokretne tačke preslikavanja u sledećim slučajevima:

a) $f = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ a & b & c & e & d \end{pmatrix}$; b) $f = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ a & b & c & d & e \end{pmatrix}$; c) $f = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ e & c & b & a & d \end{pmatrix}$

3) Ako je $A = \{1, 2, a, b\}$, odrediti sva preslikavanja skupa A u samog sebe tako da: a) svaki element skupa A bude nepokretna tačka, b) 1 i a budu nepokretne tačke, c) b bude nepokretna tačka, d) ne bude nepokretnih tačaka.

□ **102.** Koliko ima $1 - 1$ i *na* preslikavanja skupa A u samog sebe u slučaju:

a) A je $\{1, 2, 3, 4\}$; b) A je $\{1\}$; c) A je $\{1, 2\}$;

c) A je $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; e) A je $\{a, b, c, d\}$.

□ **103.** Uočimo funkciju $f = \begin{pmatrix} p & q & r \\ r & p & q \end{pmatrix}$ koja preslikava skup $A = \{p, q, r\}$ u samog sebe. Odrediti:

a) f^2, tj. $f \circ f$; b) f^3, tj. $f^2 \circ f$; c) f^4, tj. $f^3 \circ f$;

d) f^5, tj. $f^4 \circ f$; e) f^6, tj. $f^5 \circ f$;

○ **104.** Data je funkcija $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ koja preslikava skup $\{1, 2, 3\}$ na samog sebe. Rešiti po x (iz skupa N) sledeće formule:

a) $f^x = I$, gde je I identično preslikavanje, tj. $I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

b) $f^x = f$; c) $f^x = f^2$.

Uputstvo: Obrazovati f^n (n je $1, 2, 3, \ldots$) i utvrditi pravilo pomoću kog se može f^n svesti na f ili na f^2.

○ **105.** Odrediti $f \circ g$, (f i g su funkcije), ako je:

a) $f(x) = x$, $g(x) = x + 1$; b) $f(x) = x + 1$, $g(x) = x$;

c) $f(x) = x + 1$, $g(x) = x + 1$; d) $f(x) = x + 3$, $g(x) = x - 1$.

□ **106.** Data su preslikavanja $f = \begin{pmatrix} p & q & r & s \\ a & b & d & c \end{pmatrix}$, $g = \begin{pmatrix} p & q & r & s \\ b & a & c & d \end{pmatrix}$, $h = \begin{pmatrix} p & q & r & s \\ c & a & b & d \end{pmatrix}$, skupa $A = \{p, q, r, s\}$ na skup $B = \{a, b, c, d\}$. Odrediti inverzna preslikavanja f^{-1}, g^{-1} i h^{-1}, skupa B u skup A.

□ **107.** Data je linearna funkcija:

a) $f(x) = 2x - 1$; b) $f(x) = 3x - 2$; c) $f(x) = \frac{1}{2}x$; d) $f(x) = 1 - \frac{3}{4}x$.

Odrediti $f^{-1}(x)$, a zatim dokazati da je $(f^{-1} \circ f)(x) = x$ i $(f \circ f^{-1})(x) = x$.

○ **108.** Odrediti $f(x)$ ako je:

a) $f(2x + 1) = 3x - 2$; b) $f(x + 3) = x$; c) $f\left(\frac{x}{2} - 1\right) = \frac{2x}{3} + 1$;

d) $f(4x - 1) = \frac{1}{4}x + 1$; e) $f(2x) = \frac{x}{2}$; f) $f^{-1}(x) = x - 3$.

2.4 BINARNE OPERACIJE

△ **109.** Tablicama $\begin{array}{c|cc} * & p & n \\ \hline p & p & n \\ n & n & p \end{array}$ $\quad \begin{array}{c|cc} \circ & p & n \\ \hline p & p & p \\ n & p & n \end{array}$ definisane su operacije skupa $\{p, n\}$.

1) Izračunati vrednost izraza:

a) $p * n$; b) $n \circ n$; c) $(p * p) \circ (n * p)$; d) $p \circ (p * (n \circ (p * n)))$.

2) Rešiti po x (x iz $\{p, n\}$) jednačine:

a) $p * x = n$; b) $(p * x) * n = p$; c) $(n \circ x) \circ n = n$; d) $(p * x) \circ (n * x) = n$.

□ **110.** Dokazati da je komutativna operacija $*$ data tablicom $\begin{array}{c|ccc} * & a & b & c \\ \hline a & c & a & b \\ b & a & b & c \\ c & b & c & a \end{array}$.

Zatim, rešiti jednačine po x u skupu $\{a, b, c\}$.

a) $a * x = b$; b) $x * b = c$; c) $(a * x) * c = b$; d) $b * x = x$;

e) $a * x = x * b$; f) $(x * x) * a = b$; g) $a * x = x$.

□ **111.** Neka je u skupu $S = \{1, 2, 3, 4, 6, 9\}$ definisana operacija $*$ na sledeći način: $x * y \overset{\text{def.}}{=} NZD(x, y)$ gde je NZD oznaka za najveći zajednički delilac.

a) Sastaviti tablicu operacije $*$.

b) Da li je skup S zatvoren u odnosu na operaciju $*$, tj. da li je za sve x, y iz S takođe $x * y$ iz S?

c) Da li je operacija $*$ komutativna, tj. da li za sve $x, y \in S$, važi formula $x * y = y * x$?

□ **112.** U skupu R definisane su operacije $*$ sledećim jednakostima:

a) $x * y = \dfrac{x}{y}$; b) $x * y = x(x+y)$; c) $x * y = \dfrac{xy}{x+y}$; d) $x * y = x - y$;

e) $x * y = x^2 + xy + y^2$.

Koja je od ovih operacija komutativna?

□ **113.** U skupu $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ definisane su operacije $*$ i $\circ$ na sledeći način: $x * y = \max(x, y)$, $(x \circ y) = \min(x, y)$[4)]

a) Sastaviti tablice operacija $*$ i $\circ$.

b) Dokazati da su operacije $*$ i $\circ$ komutativne.

○ **114.** Da li je algebarska struktura $(A, *)$ grupa ili Abelova (komutativna) grupa, ako:

1) $A = \{a, b, c\}$, a operacija $*$ data je tablicom desno?

2) operacije a, b, c, d, e su određene tablicama, a elementi skupa A su dati u prvoj levoj koloni tablica?

1)

$*$	a	b	c
a	c	a	b
b	a	b	c
c	b	c	a

2)

a	1	2
1	1	1
2	1	1

b	1	2
1	2	1
2	2	2

c	1	2
1	1	2
2	2	1

d	1	2
1	2	1
2	1	2

e	a	b	c
a	a	b	c
b	c	c	c
c	c	c	c

○ **115.** U skupu Q racionalnih brojeva definisane su operacije $\triangle$ i $\square$ na sledeći način: $x \triangle y = x + y + 1 \quad x \square y = xy + x + y$. Dokazati da je operacija $\square$ distrributivna u odnosu na operaciju $\triangle$, tj. da za racionalne brojeve x, y, z važe jednakosti:

$$x \square (y \triangle x) = (x \square y) \triangle (x \square z) \text{ i } (y \triangle z) \square x = (y \square x) \triangle (z \square x).$$

[4)] max je oznaka za najveći broj, a min za najmanji. Npr. $\max(2, 5) = 5$. (Videti uvod za 4. glavu).

TREĆA GLAVA

3. KOMBINATORIKA

3.1 PREBROJAVANJE KONAČNIH SKUPOVA

Svako preslikavanje skupa $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ na sebe samog je *permutacija* tog skupa.

Skup od n elemenata ima $1 \cdot 2 \cdots n = n!$ permutacija (čita se "en faktorijel").

Ako među elementima $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ima α jednakih među sobom, $\alpha \in N$, onda imamo *permutacije s ponavljanjem.* Njih ima $\dfrac{n!}{\alpha!}$.

Ako od n elemenata ima više grupa jednakih, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, $(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k \le n)$ broj permutacija je $\dfrac{n!}{\alpha_1! \cdot \alpha_2! \ldots \alpha_k!}$.

Svaki neprazan podskup skupa $\{a_1, a_2, \ldots a_m\}$ je *kombinacija* elemenata ovog skupa.

Kombinacije skupa $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ koje se sastoje od k elemenata, $k \le n$, nazivaju se kombinacijama k-te klase od n elemenata. Njih ima $\binom{n}{k}$, čita se: "*en nad ka*", a to iznosi: $C_n^k = \binom{n}{k} = \dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdots k} = \dfrac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$.

Izraz $\binom{n}{k}$ je tzv. *binomni koeficijent* i važi jednakost $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Permutovanjem kombinacija dobijamo *varijacije bez ponavljanja.* Njih ima $V_n = \binom{n}{k} \cdot k! = n(n-1)\cdots(n-k+1)$.

Permutacije, kombinacije i varijacije se nazivaju i *rečima* od elemenata skupa.

Varijacije k-te klase u kojima svaki elemenat može da se pojavi najviše k puta, nazivaju se varijacije *k-te klase s ponavljanjem.* Varijacija s ponavljanjem k-te klase od n elemenata ima: n^k.

Dva rasporeda za "okruglim stolom" su različiti ako makar jedan učesnik ima različitog levog ili desnog suseda.

Oko "okruglog stola" n osoba se mogu rasporediti na $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) = (n-1)!$ načina.

△ **116.** Načiniti sve permutacije od:
a) reči *RAK*; b) reči *RODA*; c) cifara 0, 1, 2, 3.

△ **117.** Koliko se četvorocifrenih brojeva sa različitim ciframa može načiniti od cifara: a) 1, 2, 3, 4; b) 0, 1, 2, 3; c) 0, 1, 2, 3, 4?.

△ **118.** Po dnevnom školskom rasporedu danas su predviđeni sledeći časovi: engleski jezik, istorija, matematika, fizika i biologija. Na koliko različitih načina je moguće načiniti dnevni raspored, ako je za danas predviđeno:
a) jedan čas matematike; b) dva časa matematike?

□ **119.** Koliko permutacija od elemenata 1, 2, 3, 4, 5, 6, počinje sa:
a) 5, b) 123; c) tri parne cifre?

△ **120.** U koliko se permutacija elemenata a, b, c, d, e elementi a i e nalaze na krajevima (na prvom i na poslednjem mestu)?

□ **121.** Tri bele kuglice (numerisane sa 1, 2, 3) i četiri crne (numerisane sa 4, 5, 6, 7) treba nanizati, tako da se boje slažu naizmenično. Na koliko se načina to može učiniti?

□ **122.** Po pet različito numerisanih belih, plavih, crvenih i žutih kuglica treba nanizati, tako da bilo koje četiri uzastopne kuglice budu različite boje. Na koliko načina je ovo moguće izvesti?

□ **123.** Napisati sve permutacije od elemenata $a\ a\ b\ b\ c$.

△ **124.** Napisati sve šestocifrene brojeve sa ciframa 111222.

△ **125.** Koliko različitih petocifrenih brojeva možemo napisati od cifara 1, 2, 2, 2, 3?

□ **126.** Na koliko raznih načina možemo rasporediti za okruglim stolom 4 dečaka i 4 devojčice, tako da svaka dva suseda budu različitih polova?

□ **127.** Koliko ima sedmocifrenih brojeva napisanih ciframa 0, 0, 0, 0, 1, 2, 3?

□ **128.** Koliko permutacija od elemenata 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4 počinje sa:
a) 22; b) 313; c) 1234?

□ **129.** Na koliko načina se mogu rasporediti u niz 4 crvene i 4 plave kuglice, tako da ne postoje tri uzastopne kuglice iste boje?

△ **130.** Načiniti sve kombinacije sa tri člana, čiji su elementi samoglasnici.

△ **131.** U razredu ima 28 učenika. Treba izabrati 3 učenika u rukovodstvo razredne zajednice. Na koliko načina je moguće izvršiti izbor rukovodstva?

△ **132.** U razredu ima 18 dečaka i 10 devojčica. Treba izabrati 2 dečaka i 1 devojčicu u rukovodstvo razredne zajednice. Na koliko je načina moguće izabrati rukovodstvo?

□ **133.** Na jednoj proslavi svih 20 učesnika rukovali su se međusobno. Koliko je bilo ukupno rukovanja?

□ **134.** Dušan je slavio rođendan i pozvao drugove i drugarice. Svi gosti su se rukovali sa Dušanom i međusobno. Jedan od gostiju prebrojao je sva rukovanja i utvrdio da je bilo 120 rukovanja. Koliko je gostiju imao Dušan?

△ **135.** Koliko se različitih trouglova može dobiti spajanjem temena proizvoljnog sedmougla?

□ **136.** Škola je raspisala konkurs za prijem 2 profesora matematike i 2 profesora engleskog jezika i za 3 radnika u računovodstvu. Na konkurs su se prijavili: 4 profesora matematike, 5 profesora engleskog jezika i 7 ekonomista za rad u računovodstvu. Na koliko različitih načina škola može izvršiti izbor radnika po konkursu?

○ **137.** Na polici su složene 4 plave, 3 crvene i 5 žutih knjiga, i to tako da su knjige iste boje jedna do druge. Na koliko načina se mogu rasporediti ove knjige?

○ **138.** U stroju su raspoređena 4 dečaka i 3 devojčice, ali tako da devojčice ne budu jedna do druge. Koliko se različitih rasporeda može izabrati?

○ **139.** Raspolažemo sa 6 različitih osnovnih boja. Ove boje možemo mešati uzimajući jednake količine osnovnih boja. Na taj način dobijamo još izvestan broj novih boja. Može li se ovim bojama premazati šahovska tabla, tako da svako njeno polje bude različito obojeno?

□ **140.** Od 10 ljudi treba izabrati delegaciju za kongres. Na koliko različitih načina to možemo učiniti?

○ **141.** Koliko različitih delilaca ima broj:
a) 20; b) 36; c) 210; d) $p_1 \cdot p_2 \ldots p_k$, gde su $p_1, p_2, \ldots, p_k$ različiti prosti brojevi.

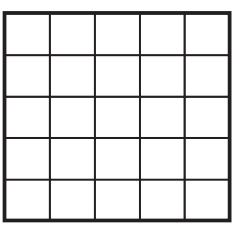
○ **142.** Od 20 karata za igru 4 su dame. Na koliko načina možemo prepoloviti ovaj špil karata i da pri tome u svakoj polovini karata budu po 2 dame?

△ **143.** Učionica ima pet prozora. Redari su zaduženi da otvaraju prozore radi provetravanja, svakog dana na drugi način. Svakog dana otvoren je najmanje jedan prozor. Koliko dana uzastopno je moguće otvarati prozore, a da se ne ponovi neka ranija kombinacija?

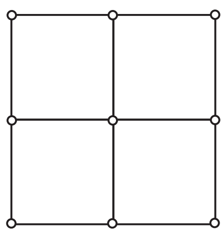
□ **144.** Dvoje filatelista menjaju marke. Prvi je spreman da menja četiri marke, od kojih svaka vredi 20 din. Drugi je spremio za menjanje pet maraka i svaka vredi po 10 din. Za svaku marku, dakle, prvi filatelista dobija u zamenu dve marke od drugog. Na koliko načina oni mogu da se menjaju?

□ **145.** a) Kvadrat stranice 5 cm podeljen je na kvadratne centimetre, sl. 17. Koliko pravougaonika možemo uočiti na ovoj slici? Koliko je među njima kvadrata?

b) Koliko se kvadrata može uočiti na šahovskoj tabli (sa 64 polja)?



Sl. 17



Sl. 18

○ **146.** Paralelogram je presečen sa dva skupa od po m pravih. Jedan skup je paralelan dvema stranicama, a drugi je paralelan drugim dvema stranicama paralelograma. Koliko se različitih paralelograma može uočiti na dobijenoj slici?

○ **147.** Od 12 srećaka lutrije, među kojima 4 dobijaju, kupujemo 6. Na koliko načina možemo u ovih 6 srećaka izvući bar jedan dobitak?

○ **148.** Trideset ljudi treba podeliti na tri grupe po deset ljudi. Koliko može biti različitih sastava grupa?

○ **149.** Četiri učenice su kupile osam bluza, svaka po dve. Na koliko su načina mogle da obave kupovinu ovih osam bluza?

○ **150.** Devet različitih predmeta treba podeliti na tri lica, i to jednom 2 predmeta, drugom 3 predmeta i trećem 4 predmeta. Na koliko raznih načina to možemo učiniti?

○ **151.** Lift u kom se nalaze jedan čovek, jedna žena i jedno dete može da se zaustavi na deset nivoa. Svaki od putnika izlazi na različitim spratovima. Na koliko se raznih načina može isprazniti lift? (Redosled zaustavljanja lifta je proizvoljan).

$*$ **152.** Na polici se nalazi 15 knjiga. Na koliko načina je moguće izabrati 6 knjiga, tako da nikoje dve od izabranih nisu na polici bile jedna do druge? Nije dozvoljeno menjati prvobitni raspored knjiga na polici.

$*$ **153.** U ravni je dato 9 tačaka koje su raspoređene kao na sl. 18. Koliko postoji trouglova kojima je jedno teme fiksiramo, a ostala dva biramo među osam preostalih tačaka?

△ **154.** Koliko se četvorocifrenih brojeva može napisati pomoću cifara: 1, 2, 3, 4, 5, 6, ako:

a) u svakom broju sve su cifre različite;

b) mogu da se ponavljaju cifre.

△ **155.** Pomoću cifara: 0, 1, 2, 3, 6, 8, 9, treba napisati sve četvorocifrene brojeve u čijem zapisu postoje tačno dve nule, zapisane jedna do druge (na primer 2006, 8400 i sl.). Koliko ima takvih brojeva?

□ **156.** Od cifara 1, 2, 3, 4, 5 treba sastaviti sve petocifrene brojeve sa različitim ciframa kod kojih se cifre 1, 2, 3 nalaze jedna uz drugu:

a) poređane po veličini; b) u proizvoljnom rasporedu.

Koliko ima ovakvih brojeva? Koliko je među njima takvih brojeva, kod kojih se cifre 4 i 5 nalaze ispred ostalih?

△ **157.** Na koliko načina mogu istovremeno šest lica da se smeste na šest, od devet pričvršćenih stolica?

△ **158.** Od cifara 0, 1, 3, 5, 7, 9 načinjeni su petocifreni brojevi sa pet različitih cifara koji nisu deljivi sa 10. Koliko ima takvih brojeva?

□ **159.** Koliko ima šestocifrenih brojeva sa različitim ciframa kojima su tri cifre parne, a tri neparne?

○ **160.** Koliko različitih desetocifrenih brojeva možemo napisati pomoću cifara 1, 2, 3, a da se cifra 3 upotrebi ravno dva puta?

△ **161.** Koliko se trocifrenih brojeva završava cifrom 4?

△ **162.** Koliko četvorocifrenih brojeva počinje cifrom 9?

△ **163.** Koliko petocifrenih brojeva ima zbir cifara 3?

△ **164.** Koliko se četvorocifrenih, a koliko petocifrenih brojeva može napisati pomoću cifara 0, 3, 6?

△ **165.** Koliko šestocifrenih brojeva počinje cifrom 7, a završava se cifrom 2? Koliko je među njima brojeva sa šest različitih cifara?

□ **166.** Od cifara 0, 1, 3, 5, 7 načinjeni su četvorocifreni brojevi sa različitim ciframa. Koliko je među njima deljivih sa 5?

□ **167.** Koliko različitih trocifrenih brojeva možemo sastaviti izostavljajući jednu od cifara: 1, 2, 2, 3 i permutovanjem preostalih?

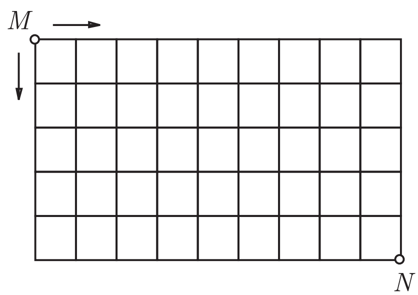
∗ **168.** Igraju se četiri košarkaške utakmice (utakmica se u košarci uvek završava pobedom jednog tima. U svakoj koloni listića sportske kladionice predviđaju se ishodi sve četiri utakmice. Koliko kolona najmanje treba popuniti da bi se sigurno bar u jednoj koloni pogodilo ne manje od tri ishoda?

∗ **169.** Poznato je da krokodil ima 68 zuba. Dokazati da među 16^{17} krokodila ne moraju da postoje dva sa istim rasporedom zuba.

○ **170.** Na koliko različitih načina možemo obojiti 6 strana kocke sa 6 raznih boja? Bojenje dveju kocki smatramo različitim, ako obrtanjem jedne kocke ne možemo dobiti raspored obojenih stranice istovetan sa drugom kockom.

∗ **171.** Za okrugli sto seli su 1. januara 5 državnika iz pet zemalja. Dogovarali su se o važnim stvarima i zasedali su svakog dana, ali svaki put u drugom rasporedu. Savetovanje je završeno onog dana, kada su iscrpene sve mogućnosti različitog raspoređivanja državnika. Kada je to bilo?

∗ **172.** Iz tačke M u tačku N, na sl. 19, može se stići idući po horizontalnim i vertkalnim linijama u smeru strelice. Na koliko načina je to moguće izvesti?



Sl. 19

○ **173.** Goran je dužan da u toku tri dana zasadi deset stabala, tako da svakog dana zasadi bar jedno drvo. Na koliko načina Goran može da rasporedi posao?

○ **174.** U pekari se prodaju pogačice, kifle, đevreci i krofne. Na koliko načina možemo kupiti sedam komada peciva?

○ **175.** Za okruglim stolom kralja Artura sedi 12 vitezova. Svaki od njih je u svađi sa svojim susedom. Treba izabrati 5 vitezova, da oslobode zarobljenu princezu. Na koliko se načina to može učiniti, tako da su među izabranim vitezovima svi među sobom u slozi?

○ **176.** Ogrlica u obliku zatvorenog lanca, načinjena je od numerisanih alki, i to 5 srebrnih i 5 platinskih. Ove alke su povezane naizmenično, tako da su svake dve uzastopne alke od različitih metala.

a) Na koliko raznih načina može biti načinjena ova ogrlica?

b) Koliko je različitih ogrlica ako alke nisu numerisane?

c) Koliko je različitih ogrlica ako ima 20 srebrnih i 20 platinskih nenumerisanih alki. (Nenumerisane alke od istog metala se ne razlikuju međusobno).

$*$ **177.** Mreža autobuskih linija u gradu formirana je na sledeći način: 1° Od svake stanice do ma koje druge stanice može se doći bez presedanja. 2° Ma za koji par linija A i B postoji jedna stanica na kojoj se može preći s jedne linije na drugu. 3° Na svakoj liniji postoje tačno tri stanice. Koliko linija ima u gradu?

$*$ **178.** Na jednom takmičenju učestvuje pet lica: A, B, C, D, E. Jedno lice je unapred dalo prognozu plasmana: $ABCDE$, ali nije pogodilo mesto ni jednog učesnika, niti je pogodilo međusobni poredak bilo koje dvojice učesnika koji su zauzeli dva uzastopna mesta. Drugo lice je prognoziralo plasman $DAECB$ i tačno je pogodilo mesta dvojice učesnika i za dva para učesnika pogodilo je njihov međusobni poredak. Kakav je bio tačan redosled takmičara?

$*$ **179.** Svaki grad u nekoj državi je povezan direktnim avionskim linijama sa tri druga grada. Iz svakog grada se može leteti u bilo koji drugi grad sa najviše jednim presedanjem. Koliko najviše gradova može biti u toj državi?

○ **180.** Grad ima 2000 raskršća, a u svakom od njih sastaju se po tri ulice. Postoji autobuska linija, koja prolazi kroz svako raskršće tačno jedanput. Odlučeno je da se u svakoj ulici zasade stabla samo jedne od ovih vrsta drveća: kesten, breza i lipa. Dokazati da je to moguće učiniti tako da se u svakom raskršću sastaju tri drvoreda različitih vrsta.

ČETVRTA GLAVA

4. REALNI BROJEVI

Ako je $a \geq b$, onda je $\max(a,b) = a$.

Ako je $x \leq y$, onda je $\min(x,y) = x$.

Apsolutna vrednost broja a je: $|a| = \max(a,-a)$.

Ako a, b, q, $r \in Z$ i $a = b \cdot q + r$, $0 \leq r < |b|$, $b \neq 0$, tada je q *količnik*, a r *ostatak deljenja* a sa b $(a : b)$. Ako je ostatak deljenja a sa b jednak nuli, tada je a *deljivo sa* b i pišemo $b|a$.

Za ceo broj a kažemo da je deljiv celim brojem b, $b \neq 0$, ako postoji ceo broj q, takav da je $a = b \cdot q$.

Ako a i b imaju isti ostatak deljenja sa m, onda je $(a-b)$ deljivo sa m. Tada kažemo da su a i b *kongruentni po modulu* m i pišemo: $a \equiv b \pmod{m}$ ili $a - b \equiv 0 \pmod{m}$.

Ako je $a \equiv b \pmod{m}$ tada je i $a^k \equiv b^k \pmod{m}$, $k \in N$.

Ako je $a \equiv r \pmod{m}$ i $b \equiv s \pmod{m}$ tada je i $a + b \equiv r + s \pmod{m}$, $a - b \equiv r - s \pmod{m}$, $a \cdot b \equiv r \cdot s \pmod{m}$.

Ako je $a \equiv b \pmod{m}$ i brojevi a i b su deljivi sa c, tada je $\dfrac{a}{c} \equiv \dfrac{b}{c} \left(\mathrm{mod} \dfrac{m}{d}\right)$, gde je d najveći zajednički delilac brojeva m i c.

Kriterijumi deljivosti. Broj je deljiv:

1° sa 2 ako mu je cifra jedinica 0, 2, 4, 6, 8.

2° sa 3 ako mu je zbir cifara deljiv sa 3.

3° sa 4 ako je sa 4 deljiv njegov dvocifreni završetak.

4° sa 5 ako mu je krajnja cifra 0 ili 5.

5° sa 8 ako je sa 8 deljiv njegov trocifreni završetak.

6° sa 9 ako mu je zbir cifara deljiv sa 9.

7° sa 11 ako se zbir cifara na parnim mestima i zbir cifara na neparnim mestima razlikuju za broj koji je deljiv sa 11.

Prirodan broj p, $p > 1$, je *prost* ili *prim broj* ako je deljiv samo sa 1 i sa p. Ostali prirodni brojevi veći od 1 su *složeni*.

Svaki složen broj se na jedinstven način *razlaže na proizvod prostih brojeva* (delilaca, činilaca): $a = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \ldots p_m^{k_m}$.

Najveći prirodan broj d takav da $d|a$ i $d|b$, $a, b, \in N$, je *najveći zajednički delitelj* brojeva a i b. Pišemo: $NZD\ (a,b) = d$ ili $D(a,b) = d$.

Ako je $NZD(a,b) = 1$, onda su a i b *uzajamno prosti* brojevi.

Najmanji broj s takav da $a|s$ i $b|s$, $a, b, s \in N$, naziva se *najmanji zajednički sadržalac* a i b. Pišemo: $NZS(a,b) = s$ ili $S(a,b) = s$.

Dirihleov princip: Ako $(n+1)$ predmeta treba rasporediti u n kutija, tada bar u jednu kutiju moramo staviti najmanje 2 predmeta.

Najveći ceo broj koji nije veći od realnog broja a naziva se *ceo deo od* a (*antje od* a) i označava se sa $[a]$. (Na primer: $[3,22]=3$, $[5]=5$, $[\sqrt{2}]=1$, $=[-2,3]=-3$.)

Racionalni deo od a je $\{a\}=a-[a]$.

$a:b$ je *prosta razmera*, $a\neq 0$ i $b\neq 0$. Pišemo i $\frac{a}{b}$.

$a:b:c:\cdots:t$ je *produžena razmera*, $a\neq 0$, $b\neq 0$, $c\neq 0,\ldots t\neq 0$.

Ako je $\frac{a}{b}=k$ i $\frac{c}{d}=k$, tada je $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ *prosta proporcija*. (Pišemo i $a:b=c:d$).

Ako je $\frac{a}{m}=k$, $\frac{b}{n}=k,\ldots,\frac{h}{u}=k$, tada je $\frac{a}{m}=\frac{b}{n}=\cdots=\frac{h}{u}$ *produžena proporcija*, koja se još označava i sa: $a:b:\cdots:h=m:n:\cdots:u$.

Ako je $a:c=c:b$, ili $c:a=b:c$, tada je c *geometrijska sredina* pozitivnih brojeva a i b i još je $c^2=a\cdot b$ i $c=\sqrt{ab}$.

Broj $c=\sqrt{a_1\cdot a_2\cdots a_k}$ je *geometrijska sredina* pozitivnih brojeva: $a_1,a_2,\ldots,a_k$.

Ako je $s=\frac{a+b}{2}$ onda je s *aritmetička sredina* brojeva a i b.

Broj $s=\frac{a_1+a_2+a_k}{k}$ je *aritmetička sredina* brojeva $a_1,a_2,\ldots,a_k$.

Za pozitivne brojeve $a,b,c\ldots$ važe nejednakosti između sredina:

$$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab},\quad \frac{a+b+c}{3}\geq\sqrt[3]{abc},\ldots,$$
$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}\geq\sqrt[k]{a\cdot a_2\cdots a_k}$$

Znak = važi samo ako su to sredine međusobno jednakih brojeva.

Procentni račun: $G:P=100:p$.

Promilni račun: $G:P=1000:p$.

Kamatni račun: $K:I=100:pg$ (g broj godina)
$K:I=1200:pm$ (m broj meseci)
$K:I=36000:pd$ (d broj dana)
(Računamo da svaki mesec ima 30 dana.)

4.1 NEKE OSOBINE REALNIH BROJEVA

△ **181.** Odrediti broj n, prirodan broj ili 0, takav da za date brojeve a i b važi uslov: $n\cdot a\leq b<(n+1)a$, ako je:

a) $a=3$, $b=10$; b) $a=17,2$, $b=12$; c) $a=\sqrt{2}$, $b=\sqrt{30}$.

△ **182.** Neka su date duži AB i CD, čije su dužine:

a) $d(A,B)=3$, $d(C,D)=25$; b) $d(A,B)=\frac{2}{3}$, $d(C,D)=3\frac{1}{2}$;

c) $d(A,B)=3,4$, $d(C,D)=\frac{29}{8}$; d) $d(A,B)=1,7$, $d(C,D)=6,8$;

e) $d(A,B)=\sqrt{2}$, $d(C,D)=3$.

Odrediti prirodan broj n, koji zadovoljava Arhimedovu aksiomu za realne brojeve, tj. koji zadovoljava uslov $n \cdot AB > CD$.

△ **183.** Odrediti na brojnoj osi tačke koje odgovaraju brojevima:

a) $\sqrt{2}$, -1, 0, 1, $-\sqrt{2}$, $\dfrac{5}{3}$; b) $\sqrt{10}$, $\sqrt{17}$, $\sqrt{13}$.

△ **184.** Utvrditi koje od navedenih rečenica su tačne:

a) Nije moguće za svaku duž AB i bilo koji prirodni broj n odrediti duž CD, takvu da je $AB = n \cdot CD$;

b) Svakom racionalnom broju odgovara tačno jedna tačka na brojnoj osi, što ne važi za iracionalne brojeve;

c) Svaka tačka brojne ose odgovara tačno jednom realnom broju.

□ **185.** Dokazati da je $\sqrt{3}$ iracionalan broj, tj. da se ne može predstaviti kao količnik dva uzajamno prosta cela broja.

□ **186.** Dokazati da je $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ iracionalan broj. Da li su iracionalni brojevi:

$$\sqrt{2} + 1, \quad 3\sqrt{2} - 2, \quad \sqrt{2} \cdot (\sqrt{2} - \sqrt{8}), \quad (\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)?$$

□ **187.** Da li je tačna rečenica: Ako su a i b iracionalni brojevi, onda je $a \cdot b$ takođe iracionalan broj. Dati obrazloženje.

△ **188.** U skupu N prirodnih brojeva vredi implikacija: $ab = ac \Rightarrow b = c$. Da li to isto važi i u skupovima Z, Q i R?

○ **189.** Date su algebarske strukture:

a) $(2Z, +)$; $b)$(2N+1,+); c) $(2Z + 1, +)$; d) $(2Z + 1, \cdot)$;

e) $(A, +)$, gde je $A = \{-1, 0, 1\}$; f) $(A, :)$, gde je $A = \{-1, 0, 1\}$;

g) $(A, \cdot)$, gde je $A = \{-1, 1\}$.

Koja od navedenih struktura predstavlja grupu?

○ **190.** Koristeći teoremu o suprotnom broju, teoremu o znaku proizvoda i aksiome polja realnih brojeva, dokazati formule:

a) $(-x - y)(-x - y) = (x + y)^2$; b) $(-x - y)(x + y) = -(x + y)^2$;

c) $(x - y)((x - y) + (y - x)) = 0$; d) $-x^2 + y^2 = -(x + y)(x - y)$.

○ **191.** Dokazati:

a) $x > 0 \wedge y > 0 \Rightarrow 3x + 5y > 0$; b) $x < 0 \wedge y > 0 \Rightarrow x^2 + y^2 > 0$;

c) $x < 0 \wedge y < 0 \Rightarrow -2x - 3y > 0$; d) $x > y \wedge x \cdot y > 0 \Rightarrow \dfrac{1}{x} < \dfrac{1}{y}$;

e) $x < y \Rightarrow x < \dfrac{x + y}{2} < y$.

△ **192.** Dati su skupovi $A = \{x |\ x \in N \wedge 2 < x < 10\}$,

$B = \{x |\ x \in Z \wedge (x < -1 \vee x > 5\}$, $C = \{x |\ x \in R \wedge 0 < x \leq \sqrt{2}\}$,

$D = \{x |\ x \in Q \wedge -\sqrt{3} \leq x \leq 3\}$, $E = \{x |\ x \in R \wedge 2 \leq x < 10\}$.

Koji od navedenih skupova je ograničen: a) sa donje strane; b) s gornje strane?

△ **193.** Dati su skupovi: $A = \{x|\ x \in N \wedge 5 < x < 7\}$,

$$B = \{x|\ x \in Z \wedge -1 < x < 1\}, \quad C = \left\{x|\ x \in Q \wedge -\frac{1}{3} < x < \frac{4}{5}\right\},$$

$$D = \{x|\ x \in Q \wedge 0 < x \leq \sqrt{5}\};\ E = \{x|\ x \in R \wedge -1 < x \leq \sqrt{3}\}.$$

Odrediti gornju i donju među ovih skupova.

○ **194.** Dokazati da između svaka dva racionalna broja postoji racionalan broj (tj. da je skup racionalnih brojeva *svuda gust*).

□ **195.** Dokazati da u skupu Z celih brojeva vredi:

a) Ako je zbir dva cela broja paran broj, njihova razlika je takođe paran broj.

b) Ako je zbir dva cela broja neparan broj, njihova razlika je neparan broj.

c) Ako je zbir dva cela broja neparan broj, njihov proizvod je paran broj.

○ **196.** Apsolutna vrednost broja a je $\max\{a, -a\}$, a može da se definiše i kao: $|a| = \begin{cases} a, & a > 0 \\ 0, & a = 0 \\ -a & a < 0 \end{cases}$ Dokazati da je:

a) $\dfrac{a + |a|}{2} = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ 0, & a < 0 \end{cases}$; b) $\dfrac{a - |a|}{2} = \begin{cases} 0, & a \geq 0 \\ a, & a < 0 \end{cases}$;

c) $\dfrac{|a|}{a} = \begin{cases} 1, & a > 0 \\ -1, & a < 0 \end{cases}$.

○ **197.** Koristeći definiciju apsolutne vrednosti, dokazati jednakosti:

a) $|x| = |-x|$; b) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$; c) $\left|\dfrac{1}{x}\right| = \dfrac{1}{|x|}$, $x \neq 0$;

d) $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$, $y \neq 0$; e) $|x| = x\ \ \operatorname{sgn} x$, gde simbol $\operatorname{sgn} x$ određuje *znak broja* x. Preciznije: $\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$

○ **198.** Dokazati da je:

a) $|x| < a \Longleftrightarrow -a < x < a$, $a > 0$; b) $|x - b| < a \Longleftrightarrow b - a < x < b + a$, $a > 0$;

c) $|x + y| \leq |x| + |y|$; d) $|x + y| \geq |x| = |y|$.

△ **199.** Rešiti po x jednačine:

a) $|x| = 2$; b) $|x - 3| = 0$; c) $|2x - 3| = 1$;

□d) $|4x - 3| = x$; □e) $|x + 2| = x$; □f) $|x - 1| = |x|$.

○ **200.** Date izraze napisati bez simbola sgn i bez oznake za apsolutnu vrednost:

a) $|x + 1| - |x - 2| + \operatorname{sgn}(x)|3 - x| - \operatorname{sgn}(x + 1)$;

b) $|x + 1| \operatorname{sgn}(x) - x\ \operatorname{sgn}(x + 1)$; c) $|x| + x\ \operatorname{sgn}(x - 2) - 3\ \operatorname{sgn}(x + 1)$;

d) $x - 2\ \operatorname{sgn}(x + 1) + |x - 2|$; e) $3 - x - 2|x + 3| \operatorname{sgn}(x - 1) + |x - 2|$.

4.2 *CELI BROJEVI

201. Kako se sve broj 333 može napisati kao proizvod dva cela broja i da svaki činilac bude manji od 10?

202. Zbir dva prirodna broja je 288, a njihov najveći zajednički delilac je 36. O kojim brojevima je reč?

$*$ **203.** Cena olovke je ceo broj para. Ukupna cena za devet olovaka je veća od 11, a manja od 12 dinara, a ukupna cena za trinaest olovaka je veća od 15, a manja od 16 dinara. Kolika je cena jedne olovke?

204. Napisati milijardu u obliku proizvoda dva broja, tako da među ciframa tih brojeva nema nula.

205. Odrediti najmanji prirodan broj kojim treba pomnožiti 2520, da bi se dobio proizvod koji je tačan kvadrat prirodnog broja.

206. Koji je najmanji od svih brojeva n, takvih da je $1500n = k^3$, gde su n i k prirodni brojevi? Izračunati broj k.

207. Naći najmanji prirodan broj, koji pomnožen sa 2 postaje kvadrat, a pomnožen sa 3 postaje kub nekog drugog prirodnog broja.

$*$ **208.** Jedna porodica polazi ove godine na letovanje poslednjeg dana u mesecu, gde provodi ceo redovan godišnji odmor. Proizvod polovine njenog kućnog broja, datuma polaska na letovanje, rednog broja meseca povratka sa letovanja, broja dece u toj porodici i broja dana koje će provesti na letovanju (računajući i dan polaska) je 1452784. Odrediti datum završetka njihovog letovanja.

209. Na svakoj strani kocke napisan je po jedan broj, i to tako da je svaki aritmetička sredina četiri susedna broja. Dokazati da su svi napisani brojevi jednaki među sobom.

210. Proizvod dva dvocifrena broja zapisan je samo pomoću četvorki. O kojim brojevima je reč?

211. Proizvod dva trocifrena broja zapisuje se samo pomoću nekoliko cifara 7. O kojim trocifrenim brojevima je reč?

212. Na nekoliko listova papira napisani su brojevi $+1$ ili -1 (na svakom listiću po jedan broj). Zbir svih tih brojeva je 0, a njihov proizvod je 1. Dokazati da je broj listova deljiv sa 4.

213. Na tabli je napisano nekoliko pluseva i nekoliko minusa. Dozvoljeno je brisati bilo koja dva znaka, ali ako se brišu dva jednaka - umesto njih moramo upisati plus, a umesto dva različita znak minus. Dokazati da od redosleda brisanja ne zavisi koji će znak ostati poslednji (posle brisanja jedina dva preostala znaka).

214. Na krugu je raspoređeno nekoliko znakova *plus* i *minus*. Neka je p broj znakova *plus*, a m broj znakova *minus*, x broj onih znakova *plus* koji stoje jedan iza drugog, a y broj onih znakova *minus* koji stoje jedan iza drugog. Dokazati da je: $p - m = x - y$.

$*$ **215.** U kvadratnu tablicu 8×8, počev od gornjeg levog ugla, upisani su redom prirodni brojevi od 1 do 64. (Popunjavamo redom vrste: prvu, drugu itd.) U svakoj vrsti i koloni promenjen je znak na četiri mesta (na proizvoljan način), tako da sada imamo u svakoj vrsti i koloni 4 pozitivna i 4 negativna broja. Dokazati da je zbir brojeva u tablici jednak nuli.

∗ **216.** Neka je n prirodan broj. Dokazati da je broj $(n+1)(n+2)\dots(n+n)$ deljiv sa 2^n, a nije deljiv sa 2^{n+1}.

∗ **217.** a) Dokazati da razlika jednog trocifrenog broja i broja koji je napisan istim ciframa, ali u obrnutom poretku, ne može biti kvadrat prirodnog broja.

b) Naći uslov pri kome razlika jednog dvocifrenog broja i broja koji je napisan istim ciframa, ali u obrnutom poretku, predstavlja kvadrat prirodnog broja.

∗ **218.** Kvadrat celog broja završava se (u dekadnom zapisu) sa dve jednake cifre. Koje to cifre mogu da budu?

∗ **219.** Postoji li prirodan broj čiji je proizvod cifara jednak 528?

220. Koliko ima prirodnih brojeva manjih od 3000 čiji proizvod cifara je 210?

221. Broj a je dobijen tako što su prirodni brojevi od 1 do 101 dopisani jedan za drugim. Dokazati da je a složen broj. Da li je a kvadrat nekog prirodnog broja?

∗ **222.** Šestocifreni broj počinje cifrom 1. Ako se ta cifra premesti na poslednje mesto, dobija se broj koji je tri puta veći od polaznog. Naći taj broj.

223. Naći trocifreni broj $\overline{abc}$ (a, b, c su cifre), ako je četvorocifreni broj $\overline{abc1}$ tri puta veći od četvorocifrenog broja $\overline{2abc}$.

224. Dokazati da ne postoji ceo broj različit od nule koji postaje 2 puta veći kad mu se prva cifra premesti na poslednje mesto.

225. Naći četvorocifreni broj koji je kvdrat prirodnog broja i kod koga su prve dve cifre jednake među sobom i poslednje dve cifre jednake među sobom.

226. Dešifrovati množenja: $\overline{x3xx}\cdot 45=\overline{37x15x}$.

227. Dokazati da broj čije su sve cifre četvorke nije deljiv sa 8.

228. Dokazati da je broj $1000\dots0008$ (broj ima 2003 nula) deljiv sa 36. Da li je deljiv sa 72?

229. Odrediti cifre x i y tako da broj $\overline{1996xy}$ bude deljiv i sa 8 i sa 9.

230. Naći sve petocifrene brojeve oblika $\overline{34x5y}$, koji su deljivi sa 36.

∗ **231.** Odrediti sve prirodne brojeve n koji imaju osobinu da se, koristeći tačno jednom svaku od cifara $0,1,2,\dots,8,9$, mogu zapisati brojevi n^3 i n^4.

∗ **232.** Neka su $x_1,x_2,\dots,x_{1998}$ prirodni brojevi za koje je $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{1997}^2=x_{1998}^2$. Dokazati da su bar dva od tih brojeva parni.

233. Neki se broj u dekadnom sistemu zapisuje sa 300 jedinica i izvesnim brojem nula. Dokazati da taj broj ne može biti kvadrat prirodnog broja.

234. Odrediti najmanji četvorocifreni broj koji pri deljenju sa 3, 4, 5, 6 i 7 daje ostatak 2.

∗ **235.** Na stolu su knjige koje treba spakovati. Ako bismo ih pakovali po 4, 5 ili 6, svaki put bi ostale po dve knjige, a ako ih pakujemo po 7, sve će biti spakovane.

a) Koliko najmanje knjiga može biti na stolu?

b) Naći sva ostala rešenja za broj knjiga na stolu.

236. Odrediti sve prirodne trocifrene brojeve koji pri deljenju sa 7 daju ostatak 2, pri deljenju sa 9 daju ostatak 4 i pri deljenju sa 12 daju ostatak 7.

237. Pitali prodavca koliko ima jabuka u korpi. On je odgovorio:
"Ako ih brojim po dve, ili po tri, ili po četiri, ili po pet, ili po šest, uvek mi jedna pretekne (ostane). Ako ih brojim po sedam, ne ostaje mi ni jedna."
Koliko je bilo jabuka u korpi? Odrediti najmanji broj jabuka koji zadovoljava navedene uslove.

238. Milici, koja je starija od godinu dana, danas je rođendan, ali i njenom komšiji Zoranu. Maja je utvrdila da je dvocifreni broj, broj Zoranovih godina, deljiv brojem Miličinih godina i da će to važiti i za sledeća tri rođendana, ali ne i za četiri sledeća rođendana. Koliko godina imaju Milica i Zoran?

239. Odrediti sve trocifrene prirodne brojeve koji imaju zbir cifara jednak 10 i deljivi su sa 11.

$*$ **240.** Ako je n prirodan broj onda $n^2 - n + 2001$ nije deljivo sa 2002 ni za jedan prirodan broj n. Dokazati.

$*$ **241.** Od pet uzastopnih neparnih brojeva postoji jedan koji nije deljiv ni sa, 3 ni sa 5, ni sa 7. Dokazati.

$*$ **242.** Neka su celi brojevi a i b takvi da je proizvod $(16a + 17b)(17a + 16b)$ deljiv sa 11. Dokazati da je tada taj proizvod deljiv i sa 121.

243. Ako je n prirodan broj tada $n^2 + n + 1$ ne može biti deljivo sa 2004, a takođe ni sa 2005. Dokazati.

244. Nasumice je odabran 2001- cifren broj, koji je deljiv sa 9. Označimo sa a zbir cifara odabranog broja, zbir cifara broja a sa b. Koliki je zbir cifara broja b?

245. Dokazati da su 2 i 3 jedini par uzastopnih prirodnih brojeva, koji su još i oba prosti brojevi.

246. Dokazati da je prizvod tri uzastopna prirodna broja deljiv sa 504, ako je srednji broj kub prirodnog broja.

247. Elementi skupa $A = \{a, b, c\}$ su neki stepeni nekih prostih brojeva većih od 10. Dokazati da u skupu A postoje dva elementa takva da je njihov zbir ili razlika deljiv sa 5.

248. Naći jedan prost trocifren broj čiji je proizvod cifara 252.

249. Zadate su cifre a, b, c, d različite od nule. Pri odgovarajućem rasporedu ovih cifara dobija se najveći ili najmanji četvorocfreni broj. Dokazati da razlika ova dva četvorocifrena broja ne može biti prost broj.

250. Dokazati da ostatak pri deljenju prostog broja sa 30 nije složen broj.

251. Dokazati da svi prosti brojevi veći od 3 imaju oblik $6k - 1$ ili $6k + 1$ (k je prirodan broj). Dokazati da obrnuto tvrđenje ne važi.

252. Skup prostih brojeva je beskonačan skup. Dokazati.

253. Postoji li prost broj p, takav da su $3p+1$ i $5p+1$ takođe prosti brojevi?

* **254.** Odrediti sve proste brojeve p, takve da je takođe prost i broj
a) $3^p + p^3$; b) $p^2 + 14$.

* **255.** Odrediti prost broj p, ako su prosti i brojevi:
a) $8p^2 + 1$; b) $p^2 + 9$; c) $14p^2 + 1$;

d) $p + 2$ i $p + 4$; e) $p + 10$ i $p + 14$.

256. Ako su p i q prosti brojevi veći od 2, tada je $p^{2001} + q^{2000}$ složen. Dokazati.

257. Ako je p prost broj veći od 2, tada je $p^{1986} + 1987$ složen broj. Dokazati.

* **258.** Dokazati da ako je p prost broj, onda su $p^3 + 17$ i $p^2 + 17$ složeni brojevi.

259. Ako su p i $8p - 1$ prosti brojevi, tada je $8p + 1$ složen broj. Dokazati.

260. Ako su p i $8p^2 + 1$ prosti brojevi, onda je i $8p^2 - 1$ prost broj. Dokazati.

* **261.** Dokazati da postoji 15 uzastopnih prirodnih, složenih brojeva.

262. Dat je prost broj čije su sve cifre (u dekadnom zapisu) jednake 1. Dokazati da broj cifara mora biti prost. Važi li obrnuto?

* **263.** Dokazati da
a) ako je n ceo broj, svaki broj oblika $4n + 3$ ima prost delilac istog oblika;

b) svaki broj oblika $3n - 1$ deljiv je nekim prostim brojem istog oblika.

264. Postoji li prirodan broj n, takav da je zbir cifara broja n^2 jednak 1988?

265. Ako su a, b, c, d, e pet bilo kojih uzastopnih prirodnih brojeva, dokazati:
a) njihov zbir ne može biti prost broj;

b) zbir njihovih kvadrata ne može biti tačan kvadrat.

* **266.** Dokazati da se među 10 uzastopnih prirodnih brojeva uvek može naći jedan koji je uzajamno prost sa svakim od ostalih devet.

* **267.** a) Prirodan broj n ima tačno 80 različitih delilaca iz skupa prirodnih brojeva, uključujući brojeve 1 i n. Dokazati da je proizvod svih 80 delilaca broja n jednak n^{40}.

b) Prirodan broj n ima tačno 1983 različita činioca iz skupa prirodnih brojeva, uključujući brojeve 1 i n. Dokazati da je broj n potpun kvadrat.

268. Dokazati da se među 12 prirodnih brojeva mogu pronaći dva čija je razlika deljiva sa 11.

269. Kvadratna tablica sa 3×3 polja popuni se na proizvoljan način brojevima iz skupa $\{-1, 0, 1\}$. Zatim se izračunaju zbirovi brojeva u pojedinim vrstama i kolonama i u obe dijagonale. Dokazati da se među ovim zbirovima moraju naći bar dva jednaka.

270. Dokazati da se od 1000 celih brojeva može odabrati nekoliko brojeva, tako da njihov zbir bude deljiv sa 1000.

271. Dokazati da se među $n + 1$ različitih prirodnih brojeva manjih od $2n$ mogu izabrati tri takva broja, da jedan od njih bude jednak zbiru druga dva.

272. Goca zna da napiše samo cifru 1. Može li napisati broj deljiv sa 1999?

$*$ **273.** Petorica drugova ušli su u toku dana u jedan kafić da popiju sok. Svaki je ulazio tačno po dva puta. Poznato je da je svaki par od njih jedno vreme boravio zajedno u kafiću. Dokazati da su u nekom momentu najmanje trojica drugova bili zajedno u kafiću.

274. Iz skupa $S = \{1, 2, 3, \ldots, 24, 25\}$ odabrano je na prizvoljan način 17 različitih brojeva. Dokazati da među 17 odabranih brojeva postoje dva takva da je njihov proizvod jednak kvadratu nekog prirodnog broja.

275. Posmatrajmo niz brojeva: $6, 6^2, 6^3, \ldots, 6^n, \ldots$, i napišimo poslednje četiri cifre ovih brojeva: 0006, 0036, 0216, 1296, 7776, ... Dokazati da će posle izvesnog broja stepenovanja niz od četiri poslednje cifre postati periodičan.

276. Može li se naći stepen broja 3 koji se završava ciframa 0001?

$*$ **277.** Stranice i dijagonale konveksnog šestougla obojene su jednom od dve boje: plavom ili crvenom. Dokazati da se može uočiti bar jedan trougao čije su stranice iste boje.

$*$ **278.** Na nekom savetovanju učestvovalo je 17 naučnika iz raznih zemalja. Oni su se sporazumevali na engleskom, nemačkom i francuskom jeziku. Svaka dva učesnika sporazumevala su se među sobom samo na jednom određenom jeziku. Dokazati da se među učesnicima savetovanja mogu naći 3 naučnika, koji se sporazumevaju među sobom na jednom istom jeziku.

279. Na prvenstvu škole u rukometu učestvuje 8 ekipa, pri čemu svaka ekipa sa svakom igra po jednu utakmicu. Dokazati da u svakom trenutku takmičenja postoje bar dve ekipe sa jednakim brojem do tada odigranih utakmica.

280. Pet duži je konstruisano iz zajedničke tačke A. Zatim je iz nekih od slobodnih krajeva ovih duži (ne iz tačke A) konstruisano pet novih duži i to je ponovljeno nekoliko puta. Slađana je prebrojala krajeve duži i saopštila da ih ima 700. Utvrditi i obrazložiti da li je Slađana u brojanju načinila grešku.

281. Koliki je ostatak deljenja broja 2^{100} sa: a) 3; b) 5?

282. Koliki je ostatak deljenja:
a) $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 9 \cdot 10 : 11$; b) $3^{100} : 13$; c) $(1987^{1988} + 329^{1989}) : 331$?

283. Dokazati da su deljivi sa 10 brojevi:
a) $17^5 + 24^4 - 13^{21}$; b) $2^{16} + 3^{40} + 5^{39} + 2 \cdot 4^7$; c) $7^{10000} - 1$;

d) $7^{7^{7^7}} - 3$; e) $3^n + 3^{n+1} + 3^{n+2} + 3^{n+3}$, $n \in N$.

$*$ **284.** Broj $3^{105} + 4^{105}$ je deljiv sa 13, a nije deljiv sa 11. Dokazati.

$*$ **285.** Zmaj ima 1987 glava. Vitez može jednim udarcem mača odseći jednu, 17, 21 ili 33 glave, ali pri tome zmaju izrastu 10, 14, 0 ili 48 glava, redom. Može li vitez odseći sve zmajeve glave'?

$*$ **286.** Odrediti sve prirodne brojeve n za koje je broj $3(n^2 + n) + 7$ deljiv sa 5.

$*$ **287.** Nijedan od brojeva a, b, c, d i e nije deljiv sa 5. Dokazati da je zbir četvrtih stepena ovih brojeva deljiv sa 5.

288. Dokazati da je zbir kvadrata dva cela broja deljiv sa 7 ako i samo ako su oba broja deljiva sa 7.

289. Dokazati da $(a^2+b^2+c^2) \not\equiv 7 \pmod 8$, $a,b,c \in Z$.

290. a) Ako je p prost broj i ceo broj a nije deljiv sa p, tada brojevi a, $2a$, $3a, \dots, (p-1)a$ pripadaju različitim klasama kongruencije po modulu p. Dokazati.

b) Ako je p prost broj i ceo broj a nije deljiv sa p, onda je razlika $a^{p-1}-1$ deljiva sa p. (Mala Ferma-ova teorema). Dokazati.

291. Ako je p, $p > 5$, prost broj, onda je broj koji se piše pomoću $(p-1)$ jedinice deljiv sa p. Dokazati.

292. Ako su a^2 i b^2 prirodni brojevi tada je deljiv sa 5 ili njihov proizvod, ili njihov zbir, ili njihova razlika. Dokazati.

293. Dokazati da za *ceo deo broja* a, tj. $[a]$ važi:

a) $[n+x] = n+[x]$, za $n \in Z$; b) $\left[k\cdot\dfrac{a}{b}\right] \geq k\cdot\left[\dfrac{a}{b}\right]$, za $k \in Z$;

c) $a\left[\dfrac{b}{a}\right] \leq b$; d) $[-a] = \begin{cases} -[a], & a \in Z \\ -[a]-1, & a \notin Z \end{cases}$;

e) $[a+b] \geq [a]+[b]$; f) $a,b,c \in N \Rightarrow \left[\dfrac{\left[\dfrac{[a]}{b}\right]}{c}\right] = \left[\dfrac{a}{bc}\right]$.

294. Dokazati da postoji tačno $\left[\dfrac{N}{q}\right]$ prirodnih brojeva koji nisu veći od datog broja N, $N>0$, i koji su deljivi datim prirodnim brojem q, $q<N$. Zatim, dokazati da je najveći stepen prostog broja p kojim je deljiv $n!$ jednak:

$$\left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \cdots + \left[\frac{n}{p^m}\right], \text{ gde je } p^m \leq n \text{ i } p^{m+1} > n.$$

∗ **295.** a) Sa koliko nula se završava broj 60!?

b) Da li postoji prirodan broj n takav da se $n!$ završava sa 11 nula?

296. Izračunati zbir:

$$S = \left[\frac{x+1}{x}\right] + \left[\frac{x+2}{x+1}\right] + \cdots + \left[\frac{x+k}{x+k-1}\right], \text{ za } \frac{1}{2} < x < 1 \text{ i } k \in N.$$

∗ **297.** Dokazati da je $\left[a+\dfrac{1}{2}\right] = [2a]-[a]$.

∗ **298.** Za ma koji prirodan broj n izračunati zbir:

$$S = \left[\frac{n+1}{2}\right] + \left[\frac{n+2}{2^2}\right] + \left[\frac{n+2^2}{2^3}\right] + \cdots + \left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right] + \cdots$$

299. Odrediti sve prirodne brojeve n za koje važi jednakost

$$[\sqrt[3]{1}] + [\sqrt[3]{2}] + \cdots + [\sqrt[3]{n}] = 2n.$$

∗ **300.** Dokazati da za prirodne brojeve k, n, p važi:

a) $\left[\frac{k}{2}\right]+\left[\frac{k+1}{2}\right]=k$; b) $\left[\frac{k}{3}\right]+\left[\frac{k+1}{3}\right]+\left[\frac{k+2}{3}\right]=k$;

c) $\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n+1}{p}\right]+\cdots+\left[\frac{n+p-1}{p}\right]=n$.

4.3 PRIBLIŽNI BROJEVI

△ **301.** Izračunati odstupanje približne vrednosti a' od tačnog broja a ako:
a) a je 10, a' je 12; b) a je 0,35, a' je 0,5; c) a je 2,357, a' je 2,3;

d) a je 42,53726, a' je 42,54; e) a je 13,621, a' je 13,65.

△ **302.** Koliko je odstupanje približne vrednosti od tačnog broja ako je:
a) $5,32 \approx 5,5$; b) $37,963 \approx 3,8$; c) $4 \approx 3,78$; d) $\sqrt{1,21} \approx 1,21$;

e) $-8,873 \approx -8,9$; f) $1,6 \approx \frac{13}{8}$; g) $\sqrt{6,25} \approx \frac{12}{5}$?

△ **303.** U približnim jednakostima koje niže navodimo, tačan broj je zapisan sa leve strane znaka $\approx$. Odrediti granice apsolutne i relativne greške:
a) $4 \approx 5$; b) $100,235 \approx 100$; c) $2,5 \approx 2,436$; d) $2,7182 \approx 2,72$;

e) $-18,456 \approx -18,4$; f) $\frac{5}{8} \approx 0,6$.

Granice relativne greške dati na tri decimale. (Relativna greška je $\rho = \frac{\triangle}{a}$.)

□ **304.** Date su približne vrednosti sa granicama apsolutne greške:
$a = 2,35 \pm 0,05$; $b = 0,0372 \pm 0,0001$; $c = 15,382 \pm 0,012$; $d = 25 \pm 5$;
$e = 52 \pm 0,3$; $f = 6,5 \pm 0,6$; $g = 8,36 \pm 0,005$.

1) Koristeći dvojne nejednakosti, zapisati granice u kojima se kreću vrednosti datih približnih brojeva.

2) U svim slučajevima odrediti granice relativne greške na četiri decimale.

□ **305.** Izračunati približnu vrednost a' jednaku aritmetičkoj sredini granica i izračunati granice apsolutne greške (rezultate izraziti u obliku: $a = a' \pm \triangle$), ako:
a) $5 \le a \le 8$; b) $3,6 \le a \le 3,8$; c) $2,78 \le a \le 2,8$;

d) $15,383 \le a \le 15,384$.

□ **306.** Neka je $m \le a \le n$, gde je $m = 2,346 \pm 0,002$ i $n = 2,36 \pm 0,01$. Odrediti približnu vrednost broja a, kao aritmetičku sredinu granica i odrediti granicu relativne greške. Dobijenu granicu relativne greške izraziti u procentima.

△ **307.** Odrediti približnu vrednost broja kao aritmetičku sredinu granica
a) $1,4142 < \sqrt{2} < 1,4143$; b) $1,73205 < \sqrt{3} < 1,732051$.
Koliko sigurnih cifara ima nađena približna vrednost?

□ **308.** Dati su približni brojevi: $a = 2,35 \pm 0,01$, $b = 6,03 \pm 0,02$ i $c = 0,28 \pm 0,03$. Izračunati približne vrednosti i granice apsolutne greške izraza:
a) $a+b$; b) $a+b+c$; c) $a+b+2c$; d) $b-2a$; e) $a-5c$; f) $b-a-c$.

□ **309.** Približni brojevi a i b određeni su sa: $a = 8,35 \pm 0,01$ i $2,42 \leq b \leq 2,44$. Izračunati na 4 i na 2 decimale približne vrednosti i granice apsolutne greške izraza:

a) $a \cdot b$; b) $b \cdot (a - 2,3)$; c) $(a - 3,5)(b + 0,23)$.

○ **310.** Dati su približni brojevi: $8,71 \leq a \leq 8,75$, $b = 5,04 \pm 0,01$.

1) Izračunati približnu vrednost izraza $x = \dfrac{(2a - b) \cdot a}{b^2}$ i naći granicu apsolutne greške, koristeći se priloženom tabelom.

Uputstvo: Sa $\underline{p}$ označena je manja, a sa $\overline{p}$ veća približna vrednost broja. Na primer, u drugoj vrsti upisane su vrednosti: $\underline{p} = 5,03$, (to je: $5,04 - 0,01$) i $\overline{p} = 5,05$ (to je: $5,04 + 0,01$). Proizvode i količnike uzeti na 2 decimale.

2) Koristeći slične tabele, kao u slučaju prethodnog zadatka, izračunati približne vrednosti izraza (na dve decimale):

a) $x = \dfrac{b^2}{a - b}$; b) $x = (a - b)(a + b)$;

c) $x = a^2 - b^2$; d) $x = \dfrac{(a - b)^2}{a + b}$;

e) $x = \dfrac{(2b - a)(a - b)}{a + b}$.

	$\underline{p}$	$\overline{p}$
a		
b	5,03	5,05
$2a$		
$2a - b$		
$(2a - b) \cdot a$		
b^2		
x		

4.4 RAZMERE I PROPORCIJE

△ **311.** Date razmere dovesti na količnik dva uzajamno prosta broja:

a) $756 : 864$; b) $2\frac{1}{2} : 3\frac{1}{2}$; c) $5\frac{5}{8} : 6\frac{2}{3}$; d) $2\frac{1}{12} : 3\frac{1}{3}$.

△ **312.** Ispitati da li su ispravno napisane proporcije, odnosno, da li važe jednakosti:

a) $15 : 35 = 9 : 21$; b) $240 : 81 = 95 : 9$; c) $0,25 : 0,45 = 0,6 : 0,96$;

d) $3\frac{5}{7} : 3\frac{3}{11} = 6\frac{1}{9} : 5\frac{5}{13}$.

△ **313.** Uprostiti proporcije i po potrebi izvršiti skraćivanja ili proširivanja:

a) $24 : 16 = 3 : x$; b) $144 : x = 256 : 6$; c) $x : 35 = 55 : 25$;

d) $0,36 : 0,8x = 0,105 : 0,63$; e) $a : b = 2,25 : 7\frac{1}{2}$;

f) $x : 1\frac{7}{8} = 2\frac{1}{2} : 6\frac{1}{4}$; g) $a : b : c : d = \frac{1}{20} : \frac{1}{30} : \frac{1}{40} : \frac{1}{50}$;

h) $(a + b) : (a - b) = x : \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)$. i) $x : ab = a : bc$.

□ **314.** Koje od datih četvorki brojeva mogu biti proporcionalne veličine:

a) $4, 6, 8, 12$; b) $6, 7, 8, 9$; c) $6, 8, 9, 12$; d) $2, 4, 6, 8$; e) $k, 2k, 3k, 4k$.

△ **315.** Date jednakosti predstaviti u obliku proporcija:

a) $5 \cdot 4 = 2 \cdot 10$; b) $8 = 2 \cdot 4$; c) $a(2-b) = b \cdot c$; d) $x^2 = 3 \cdot 5$.

△ **316.** Naći geometrijske sredine za brojeve:

a) 4 i 9; b) 7 i $1\frac{2}{7}$; c) $0,2$ i $1,8$; d) $25,6$ i $0,196$; e) $\frac{1}{4}$ i $\frac{1}{25}$.

△ **317.** Da li je broj $2\frac{4}{5}$ geometrijska sredina brojeva $2\frac{2}{5}$ i $3\frac{4}{15}$?

○ **318.** Ako je $a : b : c : \cdots : l = m : n : p : \cdots : z$ proizvoljna proporcija i $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda$ brojevi od kojih je bar jedan različit od nule, dokazati da je

$$(\alpha a + \beta b + \gamma c + \cdots + \lambda l) : (\alpha m + \beta n + \gamma p + \cdots +_{\lambda} z) =$$
$$= a : m = b : n = c : p = \cdots = l : z.$$

□ **319.** Koristeći se osobinama proporcija uprostiti sledeće proporcije:

a) $(19+x) : x = 4 : 3$; b) $(15-a) : a = 2 : 3$; c) $(24+3x) : x = 63 : 5$;

d) $(5+3x) : \frac{1}{2}x = (2+5y) : \frac{5}{6}y$; e) $(2-5y) : \frac{1}{3}y = (4-3x) : \frac{1}{5}x$.

○ **320.** Načini produženu proporciju od datih proporcija:

a) $a : b = 3 : 5$ i $c : b = 2 : 1$; b) $m : n = 4 : 3$, $m : p = 2 : 3$, $n : q = 9 : 4$;

c) $a : e = 5 : 6$, $b : e = 4 : 3$, $b : c : d = 2 : 3 : 5$;

d) $a : b = 3 : 4$, $b : c = 6 : 5$, $d : a = 7 : 6$; e) $a : b = 1\frac{1}{2} : 2\frac{2}{3}$, $a : c = 3\frac{3}{4} : 4\frac{4}{5}$.

□ **321.** Primenom osobina produženih proporcija odrediti x, y, z, t ako je $x + y + z + t = 198$ i:

a) $x : y : z : t = 1 : 2 : 3 : 5$; b) $x : y : z : t = \frac{1}{3} : \frac{1}{2} : \frac{2}{3} : \frac{3}{2}$;

c) $x : z = 1 : 2$, $x : t = 1 : 3$, $y : z = 2 : 3$.

△ **322.** Odrediti a i b iz proporcija:

a) $a^2 : b^2 = 16 : 25$ i $2a + 3b = 69$; b) $a^3 : b^3 = 27 : 64$ i $7a - 4b = 20$.

□ **323.** Odrediti nepoznate veličine iz proporcija:

a) $x : y : z = 2 : 3 : 7$ i $4x + 5y - 3z = 6$;

b) $x : y : z : u = 13 : 9 : 7 : 11$ i $5x - 3y + 6z - 2u = 116$;

c) $a : b = 5 : 12$ i $b : c = 9 : 4$ i $2a - b + 3c = 84$;

d) $a : b = 3 : 8$ i $a : c = 5 : 4$ i $3a - 2b + 5c = 75$;

e) $a : b = 7 : 8$ i $c : d = 9 : 10$ i $b : d = 4 : 5$ i $a - 3b - 5c + 7d = 16$.

∗ **324.** Ako je $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}$, dokazati da je:

a) $(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2) = (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n)^2$:

b) $\left(\frac{a_1}{b_1}\right)^k = \frac{c_1 a_1^k + c_2 a_2^k + \cdots + c_n a_n^k}{c_1 b_1^k + c_2 b_2^k + \cdots + c_n b_n^k}$,

$n, k \in N$, $c_1, c_2, \ldots, c_n$ su proizvoljni brojevi koji nisu svi jednaki nuli.

∗ **325.** a) Ako je $\dfrac{ay-bx}{c}=\dfrac{cx-az}{b}=\dfrac{bz-cy}{a}$, dokazati da je $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}$;

b) Ako je $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{a_2}{a_3}=\cdots=\dfrac{a_n}{a_{n+1}}$, dokazati da je:

$$\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{a_2+a_3+\cdots+a_{n+1}}\right)^n=\frac{a_1}{a_{n+1}}.$$

△ **326.** Za 4,5 m nekog štofa plaćeno je 19 800 dinara. Koliko treba platiti za 7 m istog štofa (i iste širine)?

△ **327.** Vagon pun džakova cementa istovarila su 3 radnika za 12 časova. Za koliko časova bi to isto učinilo 4 radnika?

□ **328.** Jedan posao su započela 33 radnika i po planu bi ga završili za 80 dana. Međutim, posle 16 dana rada, 9 radnika je premešteno na drugo gradilište. Za koliko dana je urađen planirani posao?

△ **329.** Čokolada od 150 grama plaćena je 48 dinara. Od koliko grama je čokolada čija je cena 128 dinara?

△ **330.** Za jedno odelo treba 3 m štofa širine 140 cm. Koliko štofa širine 80 cm treba za to isto odelo?

△ **331.** Za 60 eura kupljeno je 4 m štofa širine 75 cm. Koliko treba novaca za 8 m istog štofa širine 45 cm? Cena štofa je upravno srazmerna dužini i širini.

□ **332.** 28 radnika asfaltiraju za 17 dana 5 440 m puta, radeći dnevno 8 časova. Koliko dana će raditi 42 radnika na sledećoj deonici puta, dužine 5040 m, sa skraćenim radnim vremenom od 7 časova dnevno?

△ **333.** Šest komada cevi dužine po 40 cm plaćeno je 5100 dinara. Koliko treba platiti osam cevi, svaku dužine 50 cm?

△ **334.** Za izradu 100 komada letnjih radnih odela treba 300 m tkanine, širine 140 cm. Koliko metara tkanine treba za izradu 150 komada odela, ako je tkanina širine 150 cm?

△ **335.** Šest kamiona za 8 sati vožnje potroši 512 litara nafte. Koliko nafte će potrošiti takvih devet kamiona za 6 sati vožnje?

□ **336.** Planirano je da 5 radnika izvrši popis robe za 4 dana radeći 8 časova dnevno. Međutim, drugog dana, zbog bolesti, na posao ne dođu 2 radnika, pa se ostali dogovore da svaki dan rade po 2 sata duže. Da li je popis završen na vreme?

□ **337.** Radeći dnevno 8 časova, 20 radnika je izradilo 1200 komada nekog proizvoda za 15 dana. Koliko časova dnevno treba da radi 40 radnika da bi za 10 dana izradili 1000 komada?

□ **338.** Prodavnica je nabavila tri spavaće sobe po cenama: 2400 eura, 4000 eura i 1500 eura. Troškovi nabavke iznose ukupno 989,44 eura. Da bi najskuplja soba bila pristupačnija potrošačima odlučeno je da se troškovi rasporede obrnuto srazmerno nabavnim cenama. Kako su raspoređeni troškovi?

□ **339.** Zoran, Dušan i Nikola su nasledili sumu od 277 500 dolara. Prema testamentu, delovi koje dobijaju Zoran i Dušan odnose se kao 3 : 2, a deo koji pripada Nikoli, prema Zoranovom, stoji u razmeri 4 : 5. Koliko je svaki od njih nasledio?

□ **340.** Nada je spremila ručak i to što je spremala platila je u samoposluzi 2820 dinara. Troškovi za supu, glavno jelo i salatu stoje u razmeri $5 : 8\frac{1}{3} : 6,25$. Koliki su pojedinačni troškovi?

△ **341.** Tri sela su izgradila most čija je vrednost 76 miliona dinara. Svako selo snosi deo troškova srazmerno broju stanovnika. Sa koliko dinara učestvuje svako selo, ako imaju redom 1500, 2400, 1800 stanovnika?

△ **342.** Tri sela su izgradila zajednički sportski teren. Troškovi gradnje iznose 25800000 dinara. Jedno selo je od tog terena udaljeno 3 km, drugo 4 km i treće 7,5 km. Troškove gradnje podelili su obrnuto srazmerno udaljenosti sela od terena. Koliko ovaj sportski teren staje svako selo?

□ **343.** Tri učenika su na republičkom takmičenju iz matematike postigla izvanredan uspeh: Bane je bio peti sa 85 poena, Mirjana je šesta sa 81 poenom i Nataša je bila sedma sa 77 poena. Škola je odlučila da im na ime nagrade podeli 33200 dinara, i to upravno srazmerno broju osvojenih poena i obrnuto srazmerno osvojenom mestu. Koliko je svaki učenik dobio na ime nagrade?

△ **344.** Često se srećemo s problemom mešanja supstanci pod određenim uslovima. Na primer, ako treba pomešati dve vrste robe, čije su cene a i b, a želimo da dobijemo robu – mešavinu po ceni c, $a < c < b$, tada treba odrediti razmeru mešanja. Neka je uzeto x kg prve i y kg druge robe. Dobijamo $(x+y)$ kg mešavine. Uzimajući u obzir cene, dobijamo jednakost: $ax + by = (x + y)c \Rightarrow x : y = (b - c) : (c - a)$. To možemo dobiti i pomoću sledeće šeme (strelice ukazuju na redosled razlike):

$$
\begin{array}{lllll|l}
 & x \text{ kg po } a \text{ dinara} & \searrow & & b-c & \\
 & & & \nearrow & & \\
(1) & & c \text{ din} & & & x : y = (b-c) : (c-a) \\
 & & & \searrow & & \\
 & y \text{ kg po } b \text{ dinara} & \nearrow & & c-a &
\end{array}
$$

Postupajući slično, rešiti sledeći zadatak:

Na skladištu ima kafe po ceni od 7500 dinara po kg i od 5500 dinara po kg. Treba napraviti 120 kg mešavine koja će se prodavati po 6800 dinara za kg.

△ **345.** U kojoj razmeri treba pomešati rastvore alkohola jačine: 80 %, 70 %, 45 % i 40 % da bi se dobio rastvor sa 50 % alkohola?

□ **346.** Treba pomešati tri vrste bronze. Jedna sadrži 30 % bakra, druga 50 % bakra, treća 65 % bakra. U kojoj razmeri treba pomešati ove legure da se dobije nova legura sa 45 % bakra?

□ **347.** Imamo 16 litara tridesetprocentnog rastvora amonijaka i veću količinu šezdesetpetprocentnog rastvora amonijaka. Koliko najviše litara pedesetpetprocentnog rastvora možemo dobiti mešanjem raspoloživih vrsta?

○ **348.** Treba napraviti zlatan pehar mase 300 g, od zlata finoće 750 jedinica, a raspolažemo dovoljnim količinama zlata finoće 800, 700 i 600 jedinica. Kako?

○ **349.** Finoća legure zlata izražava se na engleski način u karatima. (Čisto zlato ima 24 karata). Kako treba pomešati čisto zlato sa zlatom od 18 karata i sa 5 grama zlata od 16 karata, da bi se dobilo standard zlato (od 22 karata)? Koliko grama standard zlata dobijamo?

□ **350.** Koliko treba nabaviti jabuka po ceni od 10 dinara, 16 dinara, 20 dinara i 25 dinara po kg da bi se dobilo 950 kg mešavine za ukupno 16150 dinara?

○ **351.** U laboratoriji se koristi tridesetprocentni rastvor sumporne kiseline, a raspolažemo većim količinama pedesetpetprocentnog i sedamdesetprocentnog rastvora i manjom količinom destilisane vode. Kako ćemo sa ovim materijalima načiniti najveću količinu rastvora potrebnog u laboratoriji?

△ **352.** Ako se plati u gotovom, cena robe je niža za 20 % i iznosi 2 628 dinara. Koliki je popust?

□ **353.** U Vanjinoj prodavnici košulja je prvo poskupela za 20 %, a onda pojeftinila za isti procenat. Kod Cveleta je ista takva košulja prvo pojeftinila za 20 %, a onda poskupela za isti procenat. Boško nije menjao cene. U kojoj prodavnici je sada ta košulja najjeftinija?

○ **354.** Tek oboreno stablo težilo je 2,25 tona i sadržalo je 64 % vode. Posle nedelju dana sadržalo je 46 % vode. Koliko se smanjila masa stabla za tu nedelju?

△ **355.** Uvoz neke robe povećan je za 30 % i iznosi 16640 tona. Za koliko tona je povećan uvoz?

△ **356.** Prodavši robu za 26070 dinara trgovina je zaradila 2370 dinara. Kolika je zarada u procentima?

△ **357.** Od 32 učenika 28 su završili razred bez nedovoljnih ocena, a 4 ponavljaju razred. Izraziti uspeh u procentima.

□ **358.** Cena neke robe je smanjena za 4 %. Za koliko procenata treba povećati novu cenu da bi se dobila prvobitna cena?

○ **359.** Pri proveri vlažnosti pšenice utvrđeno je da iznosi 16 %. Posle sušenja 200 kg zrna je smanjilo masu za 20 kg. Odrediti vlažnost zrna posle šušenja?

□ **360.** Koliko grama rastvora sone kiseline sa 8 % kiseline možemo dobiti ako vodom razblažimo 200 g šezdesetdvoprocentnog rastvora te kiseline?

△ **361.** Svaku stranicu kvadrata povećamo za 20 %. Za koliko procenata se uvećala površina?

□ **362.** Ako se na nekom putu brzina poveća za 50 % za koliko će se procenata smanjiti vreme kretanja na tom putu?

□ **363.** Morska voda sadrži 5 % soli. Koliko litara čiste vode treba pomešati sa 40 litara morske vode da bi se dobio rastvor sa 1 % soli?

△ **364.** Sulja je prodao Selimu uređeno jagnje od 14 kg 800 g. Selimovi gosti su pojeli pečeno jagnje, tačno 10 kg pečenja. Koliko se procenata gubi pri pečenju?

□ **365.** Nabavljen je nov strug, pa je norma radnika povećana za 15 %. Međutim, tokom prve radne nedelje radnik je obradio 328 predmeta, što je 15 % više od nove norme. Za koliko obrađenih predmeta je premašena stara norma?

△ **366.** Zemljoradnička zadruga iz Culina treba da isporuči 117 kg malina hotelu u Paskovcu. U transportu, usled isparavanja, maline kaliraju (smanje masu) za 6,4 %. Koliko je malina otpremljeno, ako su u Paskovcu dobili traženu količinu?

□ **367.** Zbog menjanja gume, vozač se zadržao na putu 15 minuta, pa je nastavio vožnju brzinom za 20 % većom od planirane. Za koje je vreme nadoknadio gubitak vremena nastalog zadržavanjem?

○ **368.** Sok od narandže poskupeo je za 25 %, a sok od višnje je skuplji za 20 %. Za koktel "đus" koristimo 30 % soka od višnje, 60 % soka od narandže i 10 % vode. Za koliko procenata je skuplji "đus"?

□ **369.** Fudbalski klub je odlučio da smanji cenu ulaznica koja sada iznosi 90 dinara. Posle toga, broj gledalaca se povećao za 50 %, a prihod je porastao za 25 %. Kolika je nova cena ulaznica?

□ **370.** Komad bronze od 7,5 kg sadrži 72 % bakra. Kada se ovaj komad stopi sa drugim dobije se 10 kg bronze, koja sadrži 70 % bakra. Koliko je procenata bakra bilo u drugom komadu bronze?

□ **371.** Poznato je da je cena dijamanta proporcionalna kvadratu njegove mase. Prilikom brušenja nekog dijamanta otpao je komad, tako da se cena smanjila za 36 %. Koliko je procenata otpalo prilikom brušenja?

△ **372.** Veličko je predao otkupnoj stanici u Peckoj 2024 kg malina, što je za 15 % više nego što je bilo ugovoreno. Za koliko kilograma je više isporuči?

△ **373.** Marija je na rasprodaji platila suknju 7700 dinara, što je l2 % niže od ranije cene. Kolika je bila cena ove suknje pre rasprodaje?

○ **374.** Ukupna masa posude napunjene vodom (posude zajedno sa vodom) iznosi 2000 grama. Odlijemo li 20 % vode, ukupna masa će se smanjiti na 88 % prvobitne mase. Odrediti masu prazne posude i masu vode.

○ **375.** Trećina robe prodata je po ceni koja je za 10 % viša od planirane, a polovina iste robe prodata je za 15 % jeftinije od planirane cene. Sa koliko procenata iznad planirane cene je prodat ostatak robe, kad je na kraju naplaćen iznos koji bi se dobio da je ukupna količina robe prodata po planiranoj ceni?

○ **376.** U posudi je bilo 420 g dvadestprocentnog rastvora soli u vodi. Posle izvesnog vremena, usled isparavanja, količina rastvora se smanjila na 300 g. Koliki je sada procenat soli u vodi?

○ **377.** Sveže grožđe sadrži 80 % vode, a suvo sadrži 12 % vode. Koliko kilograma svežeg grožđa treba za 16 kilograma suvog grožđa?

○ **378.** Pre nekoliko dana u 100 tona tek iskopanog uglja bilo je 2 % vode. Do danas je taj ugalj upio u sebe još izvesnu količinu vode, tako da sada sadrži 2,5 % vlage. Kolika je masa tog uglja danas?

□ **379.** Cena radio aparata je najpre povećana za 18 %, a zatim smanjena za 14 %. Sadašnja cena je 76110 dinara. Kolika je bila cena pre poskupljenja?

○ **380.** Četvrtina od ukupne količine neke robe prodata je sa maržom od 8 %, petina sa 9,5 %, tri osmine sa 3 % i ostatak sa maržom od 5 %. Kolika je nabavna vrednost robe, nabavna cena za 1 kg i prodajna cena, ako je ostvareno 42480 dinara marže? Po najnižoj ceni je prodato 30 kg robe koja je bila podložna kvarenju.

○ **381.** Trećina od ukupne količine robe prodata je sa zaradom od 10 %, četvrtina sa zaradom od 15 %, a ostatak sa gubitkom od 5 %. Izračunati nabavnu cenu i zaradu u procentima, ako je ukupno ostvarena dobit od 24000 dinara.

○ **382.** Šestina ukupne količine neke robe prodata je sa 5 % preko planirane cene, petina sa 20 % preko plana, a trećina sa gubitkom od 10 %. Ostatak robe je prodat po ceni od 5700 din, pa je ostvarena planirana dobit. Ukupna količina robe prodata je za 1800100 dinara. Koliko je robe prodato i kolika je planirana cena?

△ **383.** Godišnji priraštaj stanovništva u Loznici iznosi 35,5 promila, odnosno 1349 stanovnika. Koliko ljudi trenutno živi u Loznici?

△ **384.** Zajedno sa 2,5 promila provizije naplaćeno je 484448 dinara. Koliko iznosi provizija?

□ **385.** Finoća srebra se izražava u penivejtima. (Čisto srebro ima 240 penivejta). Koliko grama čistog srebra sadrži 60 grama standard srebra? (Standard srebro ima 222 penivejta). Izraziti finoću standard srebra u promilima.

△ **386.** Koliko će na ime kamate štediši biti isplaćeno na kraju godine, ako je 20. jula uložio 32000 dinara uz kamatnu stopu, od 9 %?[5)]

△ **387.** Zatezna kamata po sudskoj presudi iznosi 72 % godišnje, a treba je platiti na iznos od 34500 din, za vreme od 8 meseci. Kolika je zatezna kamata?

△ **388.** Za 6 meseci ulog je, zajedno sa kamatom, narastao na 38325 dinara. Ako banka obračunava 7 % godišnje, kolika je uložena suma?

□ **389.** U banku je 12. avgusta uloženo 7200 dinara sa 7,5 % godišnje kamate. Kog datuma je podignut ulog ako je kamata iznosila 120 dinara?

○ **390.** Za rođendan, 7. jula, Dušan je dobio od babe Srboljupke izvesnu sumu novca, koju je odmah uložio u banku sa 45 % kamate. Novac je podigao 7. oktobra, i to ukupno 2225 dinara. Koliko je novca baba dala Dušanu za rođendan? (Kamata se računa sa 45 % za celu godinu.)

○ **391.** Nikola: "Daj mi, ujka Aco, 8000 dinara na zajam. Vraćam ih za 6 meseci".
Aleksandar: "Važi, ali da mi vratiš 10 % više."
Nikola je pozajmljeni novac oročio kod banke, vratio ujaku po dogovoru i ostalo mu je 2000 dinara. Koliko procenata godišnje kamate plaća banka na ovaj iznos?

○ **392.** Iznos od 9000 dinara doneo je na ime kamate 2227 dinara. Jednu trećinu vremena banka je plaćala 45 % kamate godišnje, četvrtinu vremena kamata je bila 39 % godišnje, šestinu vremena plaćana je kamata po godišnjoj stopi od 36 %, a ostatak uz 28,8 %. Koliko vremena je ulog bio u banci?

□ **393.** Pre pola godine uloženo je 6000 din sa 5 % godišnje kamate, a danas ulažemo 6500 din. sa 8 % kamate. Kada će oba iznosa imati istu vrednost?

○ **394.** Pre osam meseci uložena je u banku izvesna suma, a mesec dana ranije uloženo je 2000 din više. Danas se kamate na ove sume razlikuju za 120 din. Koje su sume uložene i sa koliko procenata godišnje, ako je danas ukupna kamata 600 din?

○ **395.** Trećina neke sume uložena je sa 6 % od 5. marta do 29. jula, petina iste sume uložena je sa 8 % od 8. aprila do 18. avgusta, a ostatak sa 4 % od 15. aprila do 15. oktobra. Ukupna kamata iznosi 20800 dinara. Odrediti nepoznate sume.

[5)] Kamatna stopa, se uvek računa za celu godinu. Na primer, 9 % kamate znači da će 100 uloženih dinara za godinu dana, računajući od 1. januara do 31. decembra doneti 9 dinara kamate.

PETA GLAVA

5. RACIONALNI ALGEBARSKI IZRAZI

Stepeni

Najjednostavniji algebarski izraz je *stepen*. Za $n > 1$ proizvod $\underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ puta}} = a^n$ je n-ti stepen broja a. Za $n = 1$ podrazumevamo da je $a^1 = a$.

(Broj a je *osnova*, a n je *izložilac* stepena a^n.)

Stepeni se *sabiraju* samo ako imaju jednake i osnove i izložioce.

(Ne sabira se, npr. $a^2 + a^3$ ni $a^2 + b^2$.)

Za $k, m, n \in N$ važi sledeće jednakosti:

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ i $(a^m)^n = a^{mn}$.

$a^m : a^n = a^{m-n}$, za $a \neq 0$. Pritom je $a^{-k} = \dfrac{1}{a^k}$ i $\dfrac{1}{a^{-k}} = a^k$.

Za $a \neq 0$ je $a^0 = 1$.

Ako je $c \neq 0$, onda je $\left(\dfrac{ab}{c}\right)^n = \dfrac{a^n b^n}{c^n}$.

Monomi

1) Svi simboli realnih brojeva (npr. -3, 5, $\sqrt{2}$, π, ...) i svi simboli promenljivih $(a, b, \dots, x, y, \dots)$ su *monomi*.

2) Ako su M i N monomi, onda je $M \cdot N$ *monom*.

3) Svi monomi se određuju konačnim brojem primena pravila 1) i 2).

Polinomi

4) Svi monomi su *polinomi*.

5) Ako su P i Q polinomi, onda su $P + Q$, $P - Q$ i $P \cdot Q$ takođe *polinomi*.

6) Svi polinomi se dobijaju konačnim brojem primena pravila 4) i 5).

Polinom jedne promenljive x, u oznaci $P_n(x)$ je algebarski izraz:

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0,$$

gde je x, $x \in R$, *promenljiva*, prirodan broj n je *stepen* polinoma i racionalni brojevi $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$, su *koeficijenti*.

Identička jednakost polinoma

$$(a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \equiv b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow (a_n = b_{n-1} \wedge a_{n-1} = b_{n-1} \wedge \cdots \wedge a_1 = b_1 \wedge a_0 = b_0)$$

Stepenovanje polinoma

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2 \geq 0$ – *kvadrat binoma*; $(a \pm b)^2 = 0$ za $a = \mp b$.

$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$ – *kvadrat trinoma*
$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b+3ab^2 \pm b^3$ – *kub binoma*

Razlaganje binoma na činioce

$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ – *razlika kvadrata*
$a^2+b^2 \geq 0$ – *zbir kvadrata* – ne razlaže se u skupu R.
$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ – *zbir kubova.*
$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ – *razlika kubova.*
$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1}),\ n\in N$
$a^{2k+1}+b^{2k+1}=(a+b)(a^{2k}-a^{2k-1}b+a^{2k-2}b^2-\cdots-ab^{2k-1}+b^{2k}),\ k\in N_0$
$a^n-1=(a-1)(a^{n-1}+a^{n-2}+\cdots+a+1),\ n\in N$

$ax^2+bx+c=a(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)$, gde su α_1 i α_2 nule datog polinoma po promenljivoj x.

Uopšte, ako su $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ nule polinoma $P_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{k-1}+\cdots+a_1x+a_0$, tada je $P_n(x)=a_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)$. Otuda sledi

$(-1)^n\alpha_1\cdot\alpha_2\ldots\alpha_n=\dfrac{a_0}{a_n}$.

Specijalno ako je $a_n=1$, imamo:

$a_0=(-1)^n\alpha_1\cdot\alpha_2\ldots\alpha_n$ i $a_{n-1}=-(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n)$.

Ako je $P(x)=D(x)\cdot Q(x)+R(x)$ tada je $Q(x)$ *količnik*, a $R(x)$ *ostatak* deljenja polinoma $P(x)$ polinomom $D(x)$.

Ako je $P(x)=D_1(x)\cdot D_2(x)\ldots D_k(x)$ tada su polinomi $D_i(x)$ *delioci* ili *činioci* polinoma $P(x)$.

Bezuov stav: ostatak deljenja polinoma $P(x)$ sa $(x-a)$ je: $R=P(a)$. Specijalno, ako je $P(a)=0$, tada je $P(x)$ deljivo sa $(x-a)$ i $P(x)=(x-a)\cdot Q(x)$.

Hornerova šema. Za deljenje polinoma sa $(x-a)$ koristimo šemu. Neka je $P(x)$ dati polinom $Q_{n-1}(x)$ količnik, R ostatak:

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=(b_0x^{n-1}+\cdots+b_{n-2}x+b_{n-1})(x-a)+R.$$

Za određivanje koeficijenata $b_0,b_1,\ldots,b_{n-1}$ koristimo:

	a_0	a_1	a_2	$\cdots$	a_{n-1}	a_n
$a,$	$b_0=a_0$	$b_1=a_1+b_0a$	$b_2=a_2+b_1\cdot a$	$\cdots$	$b_{n-1}=a_{n-1}+b_{n-2}\cdot a$	$R=a_n+b_{n-1}a$

Količnik celog broja a sa prirodnim brojem b je *razlomak* $\dfrac{a}{b}$.

Izraz $\dfrac{A(x)}{B(x)}$, za $B(x)\neq 0$, nazivamo *algebarskim razlomkom.*

Skraćivanje razlomaka:

$$\frac{A(x)\cdot D(x)}{B(x)\cdot D(x)}=\frac{A(x)}{B(x)},\ \text{gde je } 0\neq D(x)=NZD(A\cdot D,B\cdot D).$$

Množenje i deljenje razlomaka:

$$\frac{A}{B}\cdot\frac{C}{D}=\frac{A\cdot C}{B\cdot D};\quad \frac{A}{B}:\frac{C}{D}=\frac{A}{B}\cdot\frac{D}{C}=\frac{A\cdot D}{B\cdot C},\quad C\neq 0.$$

Dvojni razlomci $\dfrac{\frac{A}{B}}{\frac{C}{D}}=\dfrac{A}{B}:\dfrac{C}{D}=\dfrac{A\cdot D}{B\cdot C}$, $C\neq 0$.

5.1 STEPENI

△ **396.** Izračunati:
a) $\left(\frac{3}{2}\right)^{-1}$; b) $\left(\frac{2}{3}\right)^{2}-\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}$; c) $0,5^{-2}:1,5^{-1}-0,3^{-3}:0,9^{-2}$;

d) $2^{-1}+2^{-2}+2^{-3}$; e) $\frac{(-3)^{-3}-(-3)^{-2}}{(-4)^{-1}}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$.

△ **397.** Napisati bez razlomačke crte izraze:
a) $\frac{a^2}{b^2c^{-2}}$, $bc\neq 0$; b) $\frac{x^2y^{-1}}{a^{-3}b^{-1}}$, $aby\neq 0$; c) $\frac{a^2b^{-3}c^{-1}}{a^{-4}b^{-2}c^{-2}}$, $abc\neq 0$.

△ **398.** Za $x\neq 0$ i $y\neq 0$ izračunati:
a) $x^3:x^{-2}$; b) $x^4y^{-3}\cdot x^{-3}y^{-5}$; c) $(xy)^{-3}\cdot(x^{-2}y)^{-4}:(xy^{-2})^3$.

△ **399.** Ako je $ab\neq 0$, koliko je:
a) $\frac{2a^3}{5b^{-2}}:\frac{10a^{-2}}{3b^{-2}}$; b) $\left((a^{-1}b^{-2})^{-3}\right)^{-4}$; c) $(a^2b^{-1}:a^{-1}b)^2:\frac{a^5}{b^3}$;

d) $(5a^4-15a^{-3}+20a^{-7}-25a^{-8}):5a^{-3}$?

△ **400.** Izračunati vrednost izraza, ako je $mnp\neq 0$:
a) $(m^{-2}n^2p^{-2})^3\cdot(m^{-2}n^3p)^{-2}:(m^2n^2p^8)^{-1}$;

b) $(m^3n^{-2}p^6)^{-1}\cdot(m^4n^{-5}p)^{-2}:(m^{-2}n^3p^{-2})^4$; c) $\frac{(mn^{-1}p)^{-5}(np)^3m^9n^{-2}}{(m^2n)^3(np)^2}$.

5.2 POLINOMI

△ **401.** Srediti polinom, tj. napisati ga u vidu zbira nesličnih monoma:
a) 1) $1+x+3x+3x^2-5x+5x^2-x^3$; 2) $x^4-1+5x^3-x+7x^2-2x+7-4x^3$;
3) $10x^2+5-3x+2x^2-4x-1$; 4) $x^2+xy^2+y^2-7x^2y+5xy^2-3x^2+x^2y$.

b) 1) $x^3+3x^2-7x+1-x^3-3x^2+7x$; 2) $x^2-3x-7-4x+7-x^2$.

△ **402.** Osloboditi se zagrada i srediti polinome:
a) 1) $3m+5n-(9m-(6m+2n-(12n-10m))-m-(7m-4n))$;
2) $15a^2-(-4a^2+(5a-8a^2-(2a^2-a)+9a^2-3a))$;
3) $(a^2-2ab+b^2)+(a^2+2ab+b^2)$; 4) $(5m^2-5m+3)+(-4m^2-5m-3)$;
5) $(10a-6b+5c-4d)+(9a-2b-4c+2d)$;
6) $(5x^3-ax+a^2)+(3x^2+2ax-3a^2)+(2a^2-4ax-x^2)$;
7) $(2a^4+5a^3b-3a^2b^2-ab^3)+(3a^4-8a^3b+2a^2b^2-6ab^3)$;
8) $(8a^n-2b^m+c)+(-4a^n-5b^m-c)$;
9) $(3x^{n+1}+10x^n-7x)-(9x^{n+1}+10x^n-x)$;
10) $(2x^3-3+x^2-6x)-(8x^3-4x^2+x-1)-(5x^3-8x^2-3x-1)$.

b) 1) $(2x-3y)(4x^2+6xy+9y^2)$; 2) $(4x^2-2xy+y^2)(2x+y)$;
3) $(x-1)(x+1)(x^2+1)$; 4) $a(a+b)-b(a-b)$; 5) $(4z^2-1)(z^2+5)$;
6) $(x^2+2xy-5y^2)(2x^2-3y)$; 7) $(a^2-2ab)(a^2-5ab+3b^2)$;
8) $(a^3-a^2+a-1)(a+1)$; 9) $(5ab^2-3a^3-2a^2b)(-ab+2a^2-4b^2)$;

10) $(5b-4c)(3b-2c)$; 11) $(2x+1)(x+4)$;
12) $(a^2+3ab-b^2)(2a-b)$; 13) $(x^2+3x+2)(x-5)$;
14) $(x^3+x^2y+xy^2+y^3)(x-y)$; 15) $(a^3-a^2b+ab^2-b^3)(a+b)$;
16) $(x-y)(y-z)(x-z)-x^2(y-z)-y^2(z-x)$.

△ **403.** Dati su polinomi: $A=5a^4-8a^3b+2a^2b^2-4ab^3-b^4$, $B=a^4+3a^3b-5a^2b^2-6ab^3-2b^4$, $C=-4a^4+5a^3b-7a^2b^2+10ab^3-5b^4$. Izračunati:
a) $A+B-C$; b) $A-B+C$; c) $B+C-A$.

△ **404.** Srediti polinom pa mu izračunati brojnu vrednost:
a) $5abc-(2a^2b-(3abc-(4ab^2-a^2b)))$, za $a=-2$, $b=-1$, $c=3$.
b) $3x^2y-(xyz-(2xyz-x^2z)-4x^2z+3x^2z-(4xyz-5x^2z-3xyz))$, za $x=-1$, $y=-2$, $z=-3$;
c) $abc-\big(3a^2b-(4abc-(3a^2b-2ab^2))\big)$, za $a=-\dfrac{1}{2}$, $b=-\dfrac{2}{3}$, $c=-4$.
d) $(a-4)(a-2)-(a-1)(a-3)$, za $z=1\dfrac{3}{4}$,
e) $(m-5)(m-1)-(m+2)(m-3)$, za $m=-\dfrac{13}{5}$.
f) $(x-2)(x-3)+(x+6)(x-5)-2(x^2-7x+13)$, za $x=5,6$.
g) $(x+1)(x+2)+(x+3)(x+4)$, za $x=-0,4$.
h) $(a-1)(a-2)+(a-3)(a-4)$, za $a=0,2$.
i) $(x-1)(x+2)+(x+1)(x-2)$, za $x=2\dfrac{1}{2}$.

△ **405.** Izračunati A^2 i A^3 ako je:
a) $A=x-2$; b) $A=1+x$; c) $A=2x+5y$; d) $A=x^2-1$;
e) $A=x^2-x+1$; f) $A=3x^2y-1$; g) $A=x-y+2$.

△ **406.** Sledeće trinome predstaviti u obliku kvadrata binoma:
a) x^2+2x+1; b) $4a^2+4ab+b^2$; c) $m^2-6mn+9n^2$;
d) $25x^2+20xy-4y^2$; e) $\dfrac{1}{4}-x+x^2$; f) $0,64a^6+8a^3+25$.

△ **407.** Date polinome napisati u obliku kuba binoma:
a) k^3-3k^2+3k-1; b) $8x^3+12x^2+6x+1$;
c) $27m^3-54m^2n+36mn^2-8n^3$.

□ **408.** Dopuniti sledeće polinome, tako da se dobije kvadrat ili kub binoma:
a) $m^2-2mn+?$; b) $4a^2+12ab+?$; c) $25x^2+?+49b^2$;
d) $1-2a+?$; e) $1+?+25b^2$; f) $?-12mn+4m^2$;
g) $a^3+18a^2+?+216$; h) $64-?+?-8a^3$; i) $?+75m^2-?+1$.

△ **409.** Osloboditi se zagrada u izrazima:
a) $(2x-1)^2+(x-2)^3+(2x-1)(x-2)$;
b) $(x^2-x+1)(x+1)+(x+1)^2-(x^2+x+1)(x-1)$;

c) $(a-1)^2 - 4(a+1)^2 - 6(a+1)(a-1)$;

d) $(a-b+c)^2 + (a+b)^2 - (a+c)^2$.

△ **410.** Dokazati identičnosti:

a) $(ax+by)^2 + (ay-bx)^2 = (a^2+b^2)(x^2+y^2)$;

b) $(ax+by)^2 - (ay+bx)^2 = (a^2-b^2)(x^2-y^2)$;

c) $x(y-z) + y(z-x) + z(x-y) = 0$;

d) $(a-b)^3 + 3(a-b)^2(a+b) + 3(a-b)(a+b)^2 + (a+b)^3 = 8a^3$;

e) $(x^2+xy+y^2)^2 - (x^2-xy+y^2)^2 = 4xy(x^2+y^2)$;

f) $(a-b)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3 = 3(a-b)(b-c)(c-a)$;

g) $(a^2-b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) - (ax+by+cz)^2 = (bx-ay)^2 + (cy-bz)^2 + (az-cx)^2$;

h) $(ad+bc)^2 + (ac-bd)^2 = (ad-bc)^2 + (ac+bd)^2$.

∗ **411.** Dokazati identičnosti:

a) $(a+b-c+d)^2 + (a-b+c+d)^2 = 2((a+d)^2 + (b-c)^2)$;

b) $(a^2+b^2+c^2+bc+ca+ab)^2 - (a+b+c)^2(a^2+b^2+c^2) = (bc+ca+ab)^2$;

c) $(2+xy+x+y)^2 + (2-xy+x-y)^2 = 2(x+2)^2 + 2y^2(x+1)^2$;

d) $x(y+z-x)^2 + y(z+x-y)^2 + z(x+y-z)^2 =$
$(x+y+z)^3 - 4(x+y+z)(x^2+y^2+z^2) + 4(x^3+y^3+z^3)$.

○ **412.** Dokazati da se dati polinomi mogu napisati u obliku zbira kvadrata nekih binoma:

a) $2x^2 + 2y^2$; b) $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + x^2 + ax + bx + cx + dx$.

○ **413.** Izračunati zbir koeficijenata polinoma koji se dobija posle oslobađanja od zagrada i sređivanja:

a) $(1-3x+3x^2)^{2003}(1+3x-3x^2)^{2004}$;

b) $(6x^5 - 5x^4 + 4x^3 - 3x^2 + x - 2)^{2005}$;

c) $(x+2)(3x-7)(x-6)(x-3174)(x-1) + 15$.

∗ **414.** Da li postoji polinom $P(x)$ sa celim koeficijentima koji zadovoljava uslove: $p(2) = 4$ i $p(6) = 6$?

∗ **415.** Neka je $p(x)$ polinom sa celobrojnim koeficijentima koji za četiri različite celobrojne vrednosti promenljive x uzima vrednost 7. Dokazati da $p(x)$ nije jednako 14 ni za jedan ceo broj x.

○ **416.** Polinom $P(x)$ napisati u obliku zbira stepena oblika $(x-\alpha)^n$, $n \in N$, ako je:

a) $P(x) = x^3 + 4x^2 + 6x + 4$ i $\alpha = -1$;

b) $P(x) = 2x^3 - 12x^2 + 27x - 19$ i $\alpha = 2$.

○ **417.** Polinom $F(x,y) = xy + x$ napisati u obliku razlike kvadrata dva polinoma, tj. u obliku: $(A(x,y))^2 - (B(x,y))^2$.

∗ **418.** Polinom $x^4 + 2x^3 + ax^2 + 2x + b$ je kvadrat drugog polinoma. Naći a, b i taj drugi polinom.

$*$ **419.** Naći sve polinome $p(x)$, koji za svako x zadovoljavaju jednakost $xp(x-1) = (x-3)p(x)$.

○ **420.** Dokazati da u proizvodu:

$$(1 - x + x^2 - x^3 + \cdots - x^{99} + x^{100}) \cdot (1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{99} + x^{100})$$

posle oslobađanja od zagrada i svođenja sličnih članova neće biti članova koji sadrže x na neparnom stepenu.

□ **421.** Ako dati polinom ima celih ili racionalnih nula, odrediti te nule na osnovu koeficijenta uz najstariji član i slobodnog člana, koristeći se Bezu-ovim stavom.

a) $x^2 - x - 6$; b) $x^3 - x^2 - x + 1$; c) $4x^2 - 5x + 1$;

d) $x^4 + x^3 - x^2 + x - 2$; e) $x^4 - 4x^3 - 7x^2 - 10x$.

$*$ **422.** Neka su a, b, c različiti pozitivni brojevi i $P(x)$ polinom šestog stepena. Ako je $P(a) = P(-a)$, $P(b) = P(-b)$, $P(c) = P(-c)$, dokazati da je $P(x) = P(-x)$ za svaki realan broj.

5.3 RASTAVLJANJE POLINOMA NA ČINIOCE

△ **423.** Koristeći se distributivnim zakonom, odnosno izvlačenjem pred zagradu zajedničkog delioca rastaviti na činioce sledeće polinome:

a) 1) $2a - 3b$; 2) $mx - m$; 3) $4ax + 8a$; 4) $-15ax - 20ay$;
5) $x^4 - x^3$; 6) $8m^2n^3 + 6m^3n$; 7) $2a^2bx + 6ax^2$;

b) 1) $ax + bx + cx$; 2) $5x^2 - 20xy + 5y^2$; 3) $15x^3y^2 + 10x^2y - 20x^2y^3$;
4) $-4x^3y + 6x^2y^2 - 8x^4y^3$; 5) $4ax - 8ax^2 + 12ax^3$;

c) 1) $a(x+y) + b(x+y)$; 2) $7q(p-q) + 2p(q-p)$;
3) $2m(x-3) - 5n(3-x)$; 4) $3(x+y) + (x+y)^2$;
5) $2(a-b)^2 - (a+b)(a-b)$; 6) $2a(x+y-z) + 3b(z-x-y)$.

△ **424.** Koristeći se grupisanjem članova, rastaviti na činioce sledeće polinome:

a) 1) $5a(x+y) - x - y$; 2) $2x(x-y) - x + y$; 3) $4y(m-n) - m + n$;

b) 1) $x^2 + xy + ax + ay$; 2) $x^2 - xy - 2x + 2y$; 3) $a^2 - ab - 3a + 3b$;
4) $3ax - 4by - 4ay + 3bx$; 5) $6by - 15bx - 4ay + 10ax$;

c) 1) $ax^2 - bx^2 - bx + ax - a + b$; 2) $5ax^2 - 10ax - bx + 2b - x + 2$
3) $m^2x^4 - mnx^3 + 2mx^2 - 2nx - n + mx$.

△ **425.** Koristeći se pravilom za razliku kvadrata, rastaviti na činioce polinome:

a) a) 1) $1 - 25x^2$; 2) $0,25x^2 - y^2$; 3) $\frac{4}{9}x^2y^4 - z^2$; 4) $16x^4 - 1$.

b) 1) $4b^2 - (a+b-c)^2$; 2) $(x+1)^2 - (2x-1)^2$;
3) $(2a - 3ab)^2 - (3a - 2ab)^2$; 4) $(a+2b-c)^2 - (a-b+c)^2$.

△ **426.** Koristeći se pravilima za razliku i zbir kubova, rastaviti polinome:

a) 1) $a^3 + 8$; 2) $1 - q^3$; 3) $27 - 8a^3$; 4) $\frac{1}{8} - b^3$; 5) $125m^3n^3 + 1$;

b) 1) $8 - (x+1)^3$; 2) $(x+2y)^3 + (x-y)^3$; 3) $x^6 - 64$; 4) $x^9 + 512$.

△ **427.** Sledeće polinome rastaviti na činioce, koristeći se formulama za kvadriranje i kubiranje binoma:

a) 1) $4a^2 + 4a + 1$; 2) $25x^2 + 40xy + 16y^2$; 3) $\frac{1}{4}x^2 + x + 1$
4) $x^2 - 6x + 9$; 5) $1 - 4a^3 + 4a^6$; 6) $9c^2 - 6c(a-b) + (a-b)^2$;

b) 1) $a^3 - 12a^2b + 48ab^2 - 64b^3$; 2) $x^3 - 6x^2 + 12x - 8$;
3) $27m^3 + 54m^2p + 36mp^2 + 8p^3$; 4) $-x^3 + 9x^2y - 27y^2x + 27y^3$.

□ **428.** Rastaviti na činioce kvadratne trinome, koji nisu kvadrati binoma:
a) 1) $a^2 - 4a + 3$; 2) $a^2 - a - 6$; 3) $a^2 + 2ax - 15x^2$; 4) $4x^2 + 4xy - 3y^2$.

b) Koristeći metodu dopunjavanja do potpunog kvadrata, kao u primeru

$$x^2 - ax - 6a^2 = x^2 - ax + \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}a^2 - 6a^2 = \left(x - \frac{1}{2}a\right)^2 - \frac{25}{4}a^2 =$$
$$= \left(x - \frac{1}{2}a - \frac{5}{2}a\right)\left(x - \frac{1}{2}a + \frac{5}{2}a\right) = (x-3a)(x+2a),$$

rastaviti na činioce trinome:

1) $a^2 + 4a + 3$; 2) $2x^2 - 5x + 2$; 3) $\frac{1}{2}y^2 - 3yz + 4z^2$; 4) $n^4 + n^2 - 2$;

5) $a^2 + 3ab + 2b^2$; 6) $2x^2 + 7ax + 3a^2$; 7) $6x^2 + 19x + 10$.

□ **429.** Kombinujući razne metode, rastaviti na činoce polinome:
a) 1) $3a^2 - 3b^2$; 2) $5x^3 - 20xy^2$; 3) $a^3b + 27b$; 4) $a^3b - 125b^4$;
5) $2 - 128x^3$; 6) $ax^2 - 2ax + a$; 7) $3a^2x^2 + 6a^3x + 3a^4$;
8) $x^4y - 3x^3y^2 + 3x^2y^3 - xy^4$; 9) $a^7 - a$; 10) $a^4 - 2a^2b^2 + b^4$;

b) 1) $ax^2 - 3bx^2 + 3by^2 - ay^2$; 2) $x^2y^2 - a^2y^2 - 4b^2x^2 + 4a^2b^2$;
3) $a^4 + a^3 - a^2 - a$; 4) $x^2 - 1 - xy + y$; 5) $x^4 + x^3 - x^2 + 1$;

c) 1) $a^2 - b^2 - c^2 + d^2 - 2ad - 2bc$; 2) $a^2 - b^2 - c^2 + 2bc$;
3) $2a^2 + 2ab + \frac{1}{2}b^2$; 4) $x^5 - x^4 - 2x^3 + 2x^2 + x - 1$;
5) $(x-1)(x-2)(x-3) + (x-1)(x-2) - (x-1)$; 6) $\frac{1}{2}a^2 + ab + \frac{1}{2}b^2$.

d) Često, da bi se moglo izvršiti grupisanje, treba neki monom napisati kao zbir ili razliku monoma, ili, pak, doda se i oduzme isti monom. Na primer:

$$a^3 + 8a^2 + 19a + 12 = a^3 + 4a^2 + 4a^2 + 16a + 3a + 12 = a^2(a+4)+$$
$$+4a(a+4) + 3(a+4) = (a+4)(a^2 + 4a + 3) = (a+4)(a^2 + a + 3a + 3) =$$
$$= (a+4)(a(a+3) + a + 3) = (a+4)(a+3)(a+1).$$

Slično je: $a^2 + ac - bc - b^2 = a^2 + ac + ab - ab - bc - b^2 = a(a+c+b) - b(a+c+b) = (a+b+c)(a-b)$.

Postupajući po potrebi slično ovim primerima, rastaviti na činioce polinome:
1) $4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2$; 2) $a^3 + 9a^2 + 26a + 24$; 3) $a^3 + 6a^2 + 11a + 6$;
4) $a^6 - a^4 + 2a^3 + 2a^2$; 5) $x^3 + 5x^2 + 3x - 9$; 6) $a^3 + a^2c + abc + b^2c - b^3$;
7) $x^6 - 2x^5y + 2x^3y^3 - 2xy^5 + y^6$; 8) $b^2c + bc^2 + ac^2 - a^2c - a^2b - ab^2$.

○ **430.** Rastaviti na činioce polinome:

a) 1) x^4+4y^4; 2) a^4+64; 3) n^4+n^2+1;

b) 1) a^3+a^2+4; 2) x^3-6x^2-32; 3) a^3+2a^2-3; 4) x^3-7x-6; 5) a^3+6a^2-a+30; 6) x^3+5x^2+3x-9.

c) 1) $a^{10}+a^5+1$; 2) a^5+a+1; 3) x^4+x^3+x+1; 4) $x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$;

d) 1) $x^4-5x^3+7x^2-5x+6$; 2) $x^4+6x^3y+12x^2y^2+24xy^3+32y^4$; 3) $x^2y+xy^2+x^2z+xz^2+y^2z+yz^2+3xyz$;

e) 1) $x^3+y^3+z^3-3xyz$; 2) $a^3+b^3-c^3+3abc$; 3) $2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4$.

○ **431.** Osloboditi se zagrada, pa rastaviti dobijene polinome na činioce:

a) $ac(a+c)-bc(b+c)+ab(a-b)$; b) $xy(x-y)-xz(x-z)+yz(y-z)$;

c) $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3$; d) $b^2c^2(b-c)+a^2c^2(c-a)+a^2b^2(a-b)$;

e) $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$; f) $a(b+c)^2+b(c+a)^2+c(a+b)^2-4abc$;

g) $ab(a-b)-ac(a+c)+bc(2a+c-b)$; h) $a^3(x-y)-x^3(a-y)+y^3(a-x)$;

i) $bc(a+d)(b-c)-ac(b+d)(a-c)+ab(c+d)(a-b)$;

j) $(b-c)^3+(c-a)^3+(a-b)^3$; k) $x(y^2-z^2)+y(z^2-x^2)+z(x^2-y^2)$;

l) $xy(x^3-x^2y+xy^2-y^3)+yz(y^3-y^2z+yz^2-z^3)+zx(z^3-z^2x+zx^2-x^3)$;

m) $(ab+ac+bc)(a+b+c)-abc$; n) $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+15$;

o) $(x+2)(x+3)(x+8)(x+12)+2x^2$; p) $(a^2+b^2)^3+(c^2-a^2)^3-(b^2+c^2)^3$.

○ **432.** Razložiti na činioce: $(a^2+a+4)^2+8a(a^2+a+4)+15a^2$.

∗ **433.** Ako je n prirodan broj, dokazati da je:

a) n^3+5n deljivo sa 6; b) n^5-n deljivo sa 30; c) n^3+2n deljivo sa 3.

∗ **434.** Neka je $a_1+a_2+\cdots+a_n=2005^{2004}$, gde su $a_1,a_2,\ldots,a_n$ prirodni brojevi i $n>1$ Odrediti ostatak pri deljenju broja $a_1^5+a_2^5+\cdots+a_n^5$ sa 5.

∗ **435.** Dokazati da je:

a) n^3+3n^2-n-3 deljivo sa 48 za $n\in 2N+1$;

b) $(x^2+5x)(x^2+5x+10)+24$ deljivo sa 24 ako je x ceo broj.

c) $4a^2+3a+5$ deljivo sa 6 ako ceo broj a nije deljiv ni sa 2, ni sa 3.

∗ **436.** Dokazati da ni za jedan prirodan broj n polinom:

a) n^2+n+2 nije deljiv sa 49; b) n^2+3n+5 nije deljiv sa 121;

c) $9n^2+3n-2$ nije deljiv sa 9.

∗ **437.** Ako je p prost broj veći od 3, dokazati da je izraz p^2-1 deljiv sa 24.

∗ **438.** Ako su a i b prirodni brojevi, koji nisu deljivi sa tri, tada je razlika a^6-b^6 deljiva sa devet. Dokazati.

∗ **439.** Ako su a i b celi brojevi i a^2+ab+b^2 deljivo sa 9, onda su a i b deljivi sa 3. Dokazati.

∗ **440.** Neka je broj 2^n+n^2 prost, $n\geq 2$. Dokazati da je broj $n-3$ deljiv sa šest.

5.4 DELJENJE POLINOMA

△ **441.** Po definiciji: $(D \neq 0 \wedge D \cdot Q = P) \Rightarrow P : D = Q$, gde Q nazivamo količnikom. Koristeći se rastavljanjem na činioce odrediti količnike, tj. podeliti polinome:

a) $(m^2 - n^2) : (m + n)$, $m \neq -n$; b) $(36 - p^2) : (6 - p)$, $p \neq 6$;

c) $(a^4 + 2a^2 + 1) : (a^2 + 1)$: d) $x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3) : (y - x)$, $x \neq y$;

e) $(8a^3 - 1) : (2a - 1)$, $a \neq \dfrac{1}{2}$; f) $(8a^3 + 27) : (4a^2 - 6a + 9)$.

△ **442.** Podeliti polinome:

a) $(x^4 + 2x^2 + 5x - 14) : (x + 2)$, $x \neq -2$;

b) $(2x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 4x - 5) : (x - 3)$, $x \neq 3$;

c) $(x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 23x - 30) : (x^2 + x - 6)$, $x \neq 2$ i $x \neq -3$;

○d) $(a + a^3x^2 + x^3 - ax + a^3x^3 - 2x^2 + a^2x + x) : (ax + 1 + x^2 - 2x - ax^2 + a^2x^2)$;

□e) $x^5 : (x^2 + 1)$; f) $x^6 : (2x^2 - 3x + 1)$, $x \neq 1$ i $x \neq \dfrac{1}{2}$.

○ **443.** Odrediti a i b tako da:

a) polinom $x^3 + ax^2 + bx - 5$ bude deljiv sa $x^2 + x + 1$;

b) polinom $x^4 - 2x^3 - 13x^2 + ax + b$ bude deljiv sa $x^2 - 5x + 1$;

c) polinom $6x^4 - 7x^3 + ax^2 + 3x + 2$ bude deljiv sa $x^2 - x + b$.

□ **444.** Ako je ostatak deljenja polinoma $P(x)$ sa $D(x)$ jednak $R(x)$, uz količnik $Q(x)$, tada je: $P(x) = D(x) \cdot Q(x) + R(x)$. Koristeći se ovom jednakošću odrediti količnik i ostatak deljenja:

a) $(x^3 + 2x^2 + 5x + 2) : (x^2 + x + 2)$; b) $(x^4 + x^3 + 3x - 3) : (x^2 + x - 2)$.

○ **445.** Primenjujući Hornerovu šemu, na primer, na količnik: $(2x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 4x - 5) : (x - 3)$ dobićemo

$a = 3$,

2	−3	3	−4	−5
2	3	12	32	91

Dakle, količnik je $2x^3 + 3x^2 + 12x + 32$, a ostatak $R = 91$.

Postupajući slično izvršiti deljenja polinoma:

a) $(x^3 + 3x^2 - 3x + 10) : (x + 4)$; b) $(2x^4 + 2x^3 + 5x^2 - 5) : (x + 1)$;

c) $(x^5 + x^2 - x + 1) : (x^2 - 1)$; d) $(3x^4 + 4x^3 - 14x^2 + 4x + 3) : (x^2 + 2x - 3)$.

△ **446.** Prema Bezuovom stavu, ostatak deljenja polinoma $P(x)$ binomom $(x - a)$ jednak je $P(a)$. Koristeći ovaj stav izračunati ostatke sledećih deljenja polinoma:

a) $(4x^4 - 2x^3 + 2x + 1) : (x - 1)$; b) $(2x^3 + 3x^2 + 4) : (x + 5)$;

c) $(x^4 - 2x^3 + x - 8) : (x + 2)$; d) $(2x^3 + x + 12) : (x - 3)$.

□ **447.** Ako polinom $P_n(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ ima nule $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ tada je $P_n(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_n)$. Koristeći ovu osobinu i deljenje polinoma, rastaviti na činioce polinome:

a) $x^3 + 9x^2 + 11x - 21$; b) $x^3 + 9x^2 + 23x + 15$;

c) $x^4 - x^3 - 4x^2 - 2x - 12$; d) $x^5 + 3x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 5x - 6$;

e) $x^3 - x^2 - 21x + 45$; f) $9x^3 - 15x^2 - 32x - 12$;

g) $x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 12x + 36$; h) $2x^4 - x^3 - 9x^2 + 13x - 5$.

Nule polinoma određivati kao u zadatku 421.

□ **448.** Odrediti slova p i q tako da polinom

a) $px^3 + 3p^2x^2 + 7x - 18$ bude deljiv sa $x + 2$;

b) $x^5 - 3x^4 + px^3 + qx^2 - 5x - 5$ bude deljiv sa $x^2 - 1$;

c) $x^3 + px^2 + qx + 1$ bude deljiv sa $x^2 - 3x - 4$;

d) $x^4 + x^3 - x^2 + px + q$ bude deljiv sa $x^2 - x - 2$.

∗ **449.** a) Dokazati da je $a^3 - b^3 + c^3 + 3abc$ deljivo sa $a - b + c$ i naći količnik deljenja $(a^3 - b^3 + c^3 + 3abc) : (a - b + c)$.

b) Koristeći se idejom iz a) razložiti na činioce:

$$a(b + c)(b^2 - c^2) + b(c + a)(c^2 - a^2) + c(a + b)(a^2 - b^2).$$

∗ **450.** Dokazati da je polinom $P(x)$ deljiv polinomom $Q(x)$, ako je:

a) $P(x) = nx^{n+1} - (n + 1)x^n + 1$ i $Q(x) = x^2 - 2x + 1$;

b) $P(x) = x^{4n+2} + 2x^{2n+1} + 1$ i $Q(x) = x^2 + 2x + 1$;

c) $P(x) = x^{2n} - nx^{n+1} + nx^{n-1} - 1$ i $Q(x)(x - 1)^2(x + 1)$.

∗ **451.** Dokazati identičnost

$$(x + y + z)^3 = (-x + y + z)^3 + (x - y + z)^3 + (x + y - z)^3 + 24xyz;$$

○ **452.** Dokazati da je, polinom $(a + b + c)^{333} - a^{333} - b^{333} - c^{333}$ deljiv sa $(a + b + c)^3 - a^3 - b^3 - c^3$.

∗ **453.** Neki polinom pri deljenju sa $(x-1)$ daje ostatak 2, a pri deljenju sa $(x-2)$ daje ostatak 1 . Koliki ostatak daje ovaj polinom pri deljenju sa $(x - 1)(x - 2)$?

○ **454.** Neki polinom od x pri deljenju sa $(x - 1)$ daje ostatak -1, pri deljenju sa $(x - 2)$ daje ostatak 5 i pri deljenju sa $(x - 3)$ daje ostatak 15. Naći ostatak deljenja tog polinoma sa $x^3 + 6x^2 + 11x - 6$.

○ **455.** Naći ostatak deljenja polinoma: $x + x^3 + x^9 + x^{27} + x^{81} + x^{243}$

a) sa $x - 1$; b) sa $x^2 - 1$.

○ **456.** Polinom: $x^{2n} + a_1x^{2n-2} + a_2x^{2n-4} + \cdots + a_{n-1}x^2 + a_n$ deljiv je sa $(x-1)$. Dokazati da je on deljiv i sa $x^2 - 1$.

∗ **457.** Ako polinom sa celim koeficijentima:

$$P(x) = a_0x^7 + a_1x^6 + a_2x^5 + a_3x^4 + a_4x^3 + a_5x^2 + a_6x + a_7$$

za 7 celih vrednosti x dobija vrednost $+1$ ili -1, tada se on ne može predstaviti u obliku proizvoda dva polinoma s celim koeficijentima. Dokazati.

△ **458.** Odrediti NZD (najveći zajednički delitelj) za polinome:

a) $(x + y)^2$, $2(x + y)^3$, $3(x + y)^4$; b) $9a^2bc$, $18a^3b^3c^2$, $24a^2bc^3$;

c) $x^2 - y^2$, $x^2 - 2xy + y^2$; d) $9x^2 - 4$, $27x^3 - 8$, $9x^2 - 12x + 4$.

△ **459.** Odrediti NZS (najmanji zajednički sadržalac) za polinome, čiji su koeficijenti iz skupa celih brojeva:

a) 1) $6, 14, 10$; 2) x, x^2, x^3; 3) $2x^2y$, $3xy^2$, $4x^3$; 4) $24x^4y^2$, $18x^2y^5$;

b) 1) $a+2$, $a-1$; 2) $(x-y)^3$, $x(x-y)^2$, $y(y-x)$; 3) $x-y$, $x+y$, x^2-y^2;

c) $bx-by$, $a^2x^2-2a^2xy+a^2y^2$, $bx^2+2bxy+by^2$, $b^2x^2-2b^2xy+b^2y^2$;

d) $a+b$, $a-b$, a^2-b^2, a^3+b^3; e) x^2+x, x^2+1; f) a^3-b^3, a^3+b^3.

□ **460.** Odrediti polinome $P(x)$ i $Q(x)$, ako je njihov NZS polinom $S(x)=x^4-3x^2+2x$, a NZD je polinom $D(x)=x^2-2x+1$.

5.5 *RAZNI PROBLEMI SA POLINOMIMA

461. Ako se proizvod četiri uzastopna cela, broja uveća za 1 dobiće se kvadrat celog broja. Dokazati. Zatim izračunati m ako je $1996\cdot1997\cdot1998\cdot1999+1=m^2$

462. Odrediti prirodan broj k ako je:

a) $k^2=\underbrace{444\ldots44}_{2n}+\underbrace{11\ldots11}_{n+1}-\underbrace{66\ldots6}_{n}$;

b) $k^2=(10^n+10^{n-1}+\ldots+10+1)\cdot(10^{n+1}+5)+1$

463. Neka su p i q realni brojevi. Dokazati da je $p+q-2pq=\dfrac{1}{2}$ ako i samo ako je $2p=1$ ili $2q=1$.

$*$ **464.** Ako za prirodne brojeve a, b, c, d važi:$(a+b)^2+a=(c+d)^2+c$, dokazati da je $a=c$ i $b=d$.

465. Razložiti na činioce: $(x-y)^5+(y-z)^5+(z-x)^5$.

466. Ako su x i y celi, uzajamno prosti brojevi, dokazati da najveći zajednički delitelj brojeva $x-y$ i $x^{n-1}+x^{n-2}y+\ldots+y^{n-1}$ deli n.

467. Dokazati da polinom: $m^5+3m^4n-5m^3n^2-15m^2n^3+4mn^4+12n^5$ ne može imati vrednost 33 za bilo koje cele vrednosti m i n.

468. Odrediti prost broj p takav da je broj $2p+1$ tačan kub nekog prirodnog broja.

469. Odrediti ceo broj a tako da se $(x-a)(x-10)+1$ može razložiti na proizvod: $(x+b)(x+c)$, gde su b i c celi brojevi.

470. Dokazati da se dati polinom može napisati u vidu zbira kvadrata:

a) $x^2+2xy+3y^2+2x+6y+3$; b) $8x^2+y^2+11z^2+4xy-12xz-5yz$.

471. Dokazati da vrednost datog polinoma ne može biti negativna:

a) $x^6-x^5+x^4+x^2-x+1$; b) $2x^2+5y^2+3z^2-6xy-2xz+5yz$;

c) $4x(x+y)(x+z)(x+y+z)+y^2z^2$; d) $(x-1)(x-3)(x-4)(x-6)+10$.

472. Odrediti vrednosti promenljivih tako da dati polinom ima minimalnu vrednost. Kolika je ta minimalna vrednost?

a) $P(a,b,c)=a^2+b^2+c^2-10a-14b+75$;

b) $P(a,b,c,d)=a^2+d^2-2b(a+c-b)+2c(c-d)$.

473. Ako je zbir $a^2+b^2+x^2+y^2$ konstantan, naći najveću vrednost izraza $(ax-by)^2+(bx+ay)^2$.

474. Odrediti polinom drugog stepena $p_2(x)=a_0x^2+a_1x+a_2$, takav da je za svaki prirodan broj n ispunjen uslov: $p_2(1)+p_2(2)+\cdots+p_2(n)=n^3$.

475. Ako su a, b, c realni brojevi, dokazati da iz jednakosti: $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ac$ sledi da je $a=b=c$.

476. Neka su x, y, z realni brojevi i $(y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2=(y-z-2x)^2+(z+x-2y)^2+(x+y-2z)^2$. Dokazati da je tada $x=y=z$.

477. Ako su a, b, c, d pozitivni brojevi i $a^4+b^4+c^4+d^4=4abcd$, dokazati da je $a=b=c=d$.

478. a) Izraz $(a^2+1)(b^2+1)$ predstaviti u obliku zbira kvadrata dva binoma po a i b.
b) Izraz $(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)$ predstaviti u obliku zbira kvadrata dva polinoma po a, b, c.

$*$ **479.** Dokazati da je svaki broj oblika 8^n+1 složen, $n\in N$.

$*$ **480.** Razlika dva neparna broja je deljiva sa 5. Kojom cifrom se završava razlika kubova tih brojeva?

481. Ako je $x-2y+3z=0$ onda polinom $P(x,y,z)=7xy+11yz-7xz-2x^2-6y^2-3z^2+5$ ima konstantnu vrednost. Dokazati.

$*$ **482.** Ako je $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)\neq 0$, dokazati da su brojevi a, b i c različiti među sobom. Važi li obrnuto tvrđenje?

$*$ **483.** Ako su x, y, z celi brojevi i $x+y+z=0$, dokazati da je broj $x^3+y^3+z^3$ deljiv sa 3.

484. $\star$ a) Ako je $x+y+z=0$ i $x^2+y^2+z^2=1$ izračunati $x^4+y^4+z^4$.

$\star$ b) Ako je $x+y+z=a$, $x^2+y^2+z^2=\dfrac{3}{2}a^2$ i $x^3+y^3+z^3=a^3$ izračunati $xy+yz+zx$, xyz, $x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2$ i $x^4+y^4+z^4$.

c) Ako je $a+b+c=m$, $a^2+b^2+c^2=n$ i $a^3+b^3+c^3=p$ izračunati abc.

d) Ako je $a^2+b^2=1$, $c^2+d^2=1$ i $ac+bd=0$ izračunati $ab+cd$.

485. Prirodni brojevi a, b, c su takvi da su $a+c$ i $b+c$ kvadrati uzastopnih prirodnih brojeva. Dokazati da su $ab+c$ i $ab+a+b+c$ takođe kvadrati dvaju uzastopnih prirodnih brojeva.

486. Neka su a, b, c celi brojevi, takvi da je $a^2+b^2=c^2$.

a) Dokazati da je bar jedan od brojeva a i b deljiv sa 3.

$\star$ b) Dokazati da je abc deljivo sa 60.

487. Ako je $ad=bc$, dokazati da je $(ab+cd)^2=(a^2+c^2)(b^2+d^2)$.

488. Ako je $a+b=1$, dokazati da razlika polinoma $2(a^3+b^3)$ i $3(a^2+b^2)$ ima konstantnu vrednost.

489. Ako je $a+b+c=0$, dokazati da je:

$$a^5(b^2+c^2)+b^5(a^2+c^2)+c^5(b^2+a^2)=\frac{(a^3+b^3+c^3)(a^4+b^4+c^4)}{2}.$$

∗ **490.** Neka su a, b, c realni brojevi i $a \neq b$, $b \neq c$, $c \neq a$. Dokazati da je: $a^4(b-c)+b^4(c-a)+c^4(a-c) \neq 0$.

491. Dokazati da su ispravne jednakosti:

a) $4(p^2q^2+q^2r^2+r^2p^2)=(p^2+q^2+r^2)^2$, ako je $r=p+q$;

b) $64p(p-a)(p-b)(p-c)=(a^2+b^2+c^2)$, ako je $a^2=k^2+m^2$, $b^2=m^2+n^2$, $c^2=n^2+k^2$, $k=m+n$, $2p=a+b+c$;

c) $(a^2+b^2+c^2)^2=2(a^4+b^4+c^4)$, ako je $a+b+c=0$;

d) $x^n+y^n=a^n+b^n$, ako je $x+y=a+b$ i $x^2+y^2=a^2+b^2$.

∗ **492.** Neka su a, b, c, x, y realni brojevi, takvi da $a^3+ax+y=0$, $b^3+bx+y=0$, $c^3+cx+y=0$. Ako je $a \neq b \neq c \neq a$, dokazati da je: $a+b+c=0$

∗ **493.** Dokazati da postoji beskonačno mnogo trojki uzastopnih prirodnih brojeva, takvih da svaki predstavlja zbir dva potpuna kvadrata.

(Na primer: $72=6^2+6^2$, $73=8^2+3^2$, $74=7^2+5^2$.)

∗ **494.** Naći sve nenegativne cele brojeve a, b, c, d, za koje je

$$a^2+b^2+c^2+d^2+ab+bc+cd+da=8.$$

∗ **495.** Odrediti nule polinoma $P(x)=x^3-(m^2+3)x^2+(m^2+3)x+m^4-1$, tj. odrediti vrednosti promenljive x, za koje je $P(x)=0$.

5.6 ALGEBARSKI RAZLOMCI

U zadacima od 501–540. vrednosti promenljivih su takve da su svi imenioci razlomaka različiti od nule.

496. Skratiti razlomke:

△ a) 1) $\dfrac{24}{18}$; 2) $\dfrac{6a^2b}{21ab^2}$; 3) $\dfrac{4mn^3}{20m^2n^4}$; 4) $\dfrac{9x^3y}{3x^3y}$;

5) $\dfrac{3(x+y)}{6xy}$; 6) $\dfrac{5x^2y}{10x^3y}$; 7) $\dfrac{12x^2yz}{18x^2y^3z}$.

△ b) 1) $\dfrac{(a-2)(x+y)^2}{(x+y)^3}$; 2) $\dfrac{(m+3n)(m-3n)}{(m+3n)^3}$; 3) $\dfrac{x-y}{(y-x)^2}$;

4) $\dfrac{3(a-b)(a-c)^2}{6(a-b)(a-c)}$; 5) $\dfrac{8a(a+b)}{4a(a+b)}$; 6) $\dfrac{5a(x-y)}{15a(y-x)}$;

△ c) 1) $\dfrac{x^2-x}{1-x^2}$; 2) $\dfrac{a^2-9}{a^2+6a+9}$; 3) $\dfrac{a^3b-9ab}{a^5b+27a^2b}$; 4) $\dfrac{(x+y)^2-z^2}{x^2-(y+z)^2}$;

5) $\dfrac{ab^2-16a^3}{(4a+b)^2}$; 6) $\dfrac{6a^2b^2-3a^3b}{12a^2b-3a^3b}$; 7) $\dfrac{3x+3y}{6x}$; 8) $\dfrac{a^2}{a^2+ab}$;

9) $\dfrac{pq^3}{p^2q-pq^2}$; 10) $\dfrac{x^2-2xy}{xy-2y^2}$; 11) $\dfrac{3x^2+4xy}{9x^2y-16y^3}$; 12) $\dfrac{2ac-4bc}{5a^3c-20ab^2c}$;

13) $\dfrac{x^2-4x+4}{x^2-4}$; 14) $\dfrac{1-x^3}{3+3x+3x^2}$; 15) $\dfrac{16-8a+a^2}{ab-4b}$.

△ d) 1) $\dfrac{ac+bc-ad-bd}{ax^2+ay^2+bx^2+by^2}$; 2) $\dfrac{x^2-3x-10}{x^2+x-2}$; 3) $\dfrac{a^2+3a+2}{a^2+6a+5}$;

4) $\dfrac{a^4+3a^2b^2+b^4-2a^3b-2ab^3}{a^4+a^2b^2+b^4}$; 5) $\dfrac{3x^2y-xy^2}{3x^3-3xy^2-x^2y+y^3}$;

6) $\dfrac{a^2+b^2-c^2+2ab}{a^2-b^2+c^2+2ac}$; 7) $\dfrac{x^3-x^2-x+1}{x^4-2x^2+1}$; 8) $\dfrac{x^2-ax+bx-ab}{x^3+bx^2+ax+ab}$;

9) $\dfrac{a^2-b^2}{a^2-a-b-b^2}$; 10) $\dfrac{5a^3+a^2b+5ab^2+b^3}{5ab+b^2}$; 11) $\dfrac{a^3+1}{6a^2+12a+6}$;

12) $\dfrac{x^2-7x+12}{x^2-6x+9}$; 13) $\dfrac{a^3-a^2b+ab^2}{b^3+a^3}$; 14) $\dfrac{8x^3-36x^2+54x-27}{4x^3-8x^2-3x+9}$;

15) $\dfrac{(a^2-b^2-c^2-2bc)(a+b-c)}{(a+b+c)(a^2+c^2-2ac-b^2)}$; 16) $\dfrac{a^2-3ab+ac+2b^2-2bc}{a^2-b^2+2bc-c^2}$;

□e) 1) $\dfrac{x^3y-xy^3+y^3z-yz^3+z^3x-zx^3}{x^2y-xy^2+y^2z-yz^2+z^2x-zx^2}$;

2) $\dfrac{n^4+64}{x(n+2)^2-4(n+x)-n^2-8}$;

3) $\dfrac{x^4+4}{a(x^2+2)-2ax-(x-1)^2-1}$; 4) $\dfrac{x^{12}-128x^6+4096}{(x^3-4x^2+8x-8)^2}$;

5) $\dfrac{8a^{n+2}+a^{n-1}}{16a^{n+4}+4a^{n+2}+a^n}$; 6) $\dfrac{bc(c^2-b^2)+ac(a^2-c^2)+ab(b^2-a^2)}{b^2c^2(c-b)+a^2c^2(a-c)+a^2b^2(b-a)}$;

7) $\dfrac{a^3+b^3+c^3-3abc}{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac}$; 8) $\dfrac{m^3+n^3+p^3-3mnp}{(m-n)^2+(n-p)^2+(p-m)^2}$;

○f) 1) $\dfrac{a^3+a^2-2a}{a|a+2|-a^2+4}$; 2) $\dfrac{m\cdot|m-3|}{(m^2-m-6)|m|}$; 3) $\dfrac{x^3-6x^2+11x-6}{(x^3-4x^2+3x)|x-2|}$;

4) $\dfrac{a^2-4-|a-2|}{a^3+2a^2-5a-6}$; 5) $\dfrac{2x-x|x-1|+x|x|+3}{|x|+x^2}$; 6) $\dfrac{|x-1|+|x|+x}{3x^2-4x+1}$;

7) $\dfrac{x|x-3|+x^2-9}{2x^3-3x^2-9x}$; 8) $\dfrac{x^2-1+|x+1|}{|x|\cdot(x-2)}$; 9) $\dfrac{|k-1|\cdot|k|}{k^2-k+1-|k|}$.

○ **497.** Odrediti celobrojne vrednosti razlomka:

a) $\dfrac{k^2-2}{k+2}$, k je ceo broj, $k\neq -2$; b) $\dfrac{a^3+1}{a-1}$, a je ceo broj, $a\neq 1$;

c) $\dfrac{n-11}{n-3}$, $n \in N$, $n \neq 3$.

△ **498.** Izvršiti naznačene operacije sa razlomcima.

a) 1) $\dfrac{2x}{y} \cdot \dfrac{y}{6z} \cdot \dfrac{3z}{x}$; 2) $\dfrac{x}{y} \cdot y^2$; 3) $\dfrac{a^2b}{2x} \cdot \dfrac{x^2y}{a^2b^2}$; 4) $\dfrac{3ab}{4xy} \cdot \dfrac{14x^2y}{21a^2b}$;

5) $3m \cdot \dfrac{n}{12m}$; 6) $8a^2b^4 \cdot \left(-\dfrac{3a}{4b^3}\right)$.

b) 1) $2x : \dfrac{x^2}{y}$; 2) $\dfrac{x}{y} : 2x$; 3) $\dfrac{x^2y^2}{ab^2} : \dfrac{x^3y}{a^3b}$; 4) $16x^2y^3 : \left(-\dfrac{20x^5y^4}{3x^2y}\right)$;

c) 1) $\dfrac{9ab}{28xy} \cdot \dfrac{35xz}{27ac} : \dfrac{5bx}{4cy}$; 2) $\left(\dfrac{52a^2b^3}{69x^4y} : \dfrac{39a^4b^6}{92x^3y^7}\right) \cdot \dfrac{91a^3b}{115xy^2}$;

d) 1) $\dfrac{x+y}{a-b} \cdot \dfrac{b^2-a^2}{y^2-x^2}$; 2) $\dfrac{b-3}{4b+4} \cdot \dfrac{4b}{9-b^2}$; 3) $\dfrac{a^3+27}{a^3-27} \cdot \dfrac{a-3}{a^2-3a+9}$;

4) $\dfrac{a^2-25}{a^2-3a} \cdot \dfrac{a^2-9}{a^2+5a}$; 5) $\dfrac{a^2b-4b^3}{3ab^2} \cdot \dfrac{a^2b}{a^2-ab}$;

e) 1) $\dfrac{2a^2-ab}{ab-b^2} : \dfrac{2a-b}{a^2b^3-ab^4}$; 2) $(4x^2-4y^2) : \dfrac{y-x}{2}$;

3) $\dfrac{x^3-x^2-2x+2}{x^3+x^2-3x-3} : \dfrac{x^3+x^2-2x-2}{x^3-3x^2-3x+9}$;

4) $\dfrac{am^2-an^2}{m^2+2mn+n^2} : \dfrac{am^2-2amn+an^2}{3m+3n}$;

f) 1) $\dfrac{x^4-1}{a^3+a} \cdot \dfrac{a}{x^3+x^2+x+1} : \dfrac{x^2-2x+1}{2a^2+2}$;

2) $\left(\dfrac{x^3+2x^2-x-2}{a+1} : \dfrac{x+2}{x-2}\right) \cdot \dfrac{a^2+a}{x^3-2x^2-x+2}$;

3) $\dfrac{a^2-5a+6}{a^2+7a+12} \cdot \dfrac{a^2+3a}{a^2-4a+4} : \dfrac{a^3-9a}{a+4}$;

4) $\left(\dfrac{x^2+2x-3}{x^2+3x-10} : \dfrac{x^2+7x+12}{x^2-9x+14}\right) \cdot \dfrac{x^2+4x}{x^2-x}$.

499. Sabrati razlomke:

△ a) 1) $\dfrac{x}{3}+\dfrac{x}{6}$; 2) $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}$; 3) $x-2y-\dfrac{x-2y}{6}+\dfrac{2y-x}{3}$;

4) $\dfrac{3a}{2b}-\dfrac{b}{6a}+\dfrac{a}{b}+\dfrac{2b}{3a}$; 5) $\dfrac{2}{5a}+\dfrac{9a-2b}{15ab}-\dfrac{a+b}{10a^2}+\dfrac{b^2-6a^2}{10a^2b}$;

△ b) 1) $\dfrac{a+2b}{a-b}-\dfrac{a-2b}{a+b}$; 2) $x+y-\dfrac{x^2-y^2}{x+2y}$; 3) $\dfrac{a}{ab-b^2}+\dfrac{b}{a^2-ab}+\dfrac{a+b}{ab}$;

4) $\dfrac{16x-x^2}{x^2-4}+\dfrac{3+2x}{2-x}-\dfrac{2-3x}{x+2}$; 5) $\dfrac{1}{a^2-a}+\dfrac{2}{1-a^2}+\dfrac{1}{a^2+a}$;

6) $\dfrac{a^2+b^2}{ab}-\dfrac{a^2}{ab-b^2}+\dfrac{b^2}{a^2-ab}$; 7) $\dfrac{2a-1}{2a}-\dfrac{1}{2a-4a^2}-\dfrac{2a}{2a-1}$,

8) $\dfrac{8a^7}{a^8+b^8}+\dfrac{4a^3}{a^4+b^4}+\dfrac{2a}{a^2+b^2}+\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{a-b}$;

9) $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}-\dfrac{x^2}{xy+y^2}-\dfrac{y^2}{x^2+xy}$;

□ c) 1) $\dfrac{2a}{a-1}-\dfrac{3a^2+2a+1}{a^3-1}+\dfrac{a+1}{a^2+a+1}$;

2) $\dfrac{x-3}{x^2+3x+9}+\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{3x+2x^2}{x^3-27}$;

3) $\dfrac{4a^2}{10ab-25b^2}-\dfrac{25b^2}{4a^2-10ab}-\dfrac{2a}{5b}-\dfrac{5b}{2a}$;

4) $\dfrac{1}{a^2+ab}+\dfrac{2b}{a^3-ab^2}-\dfrac{a+b}{a^2b-ab^2}$;

5) $\dfrac{a^2-a-6}{a^2-4}-2-\dfrac{a-1}{2-a}$; 6) $\dfrac{a^3}{a-1}-\dfrac{a^2}{a+1}-\dfrac{1}{a-1}+\dfrac{1}{a+1}$;

□ d) 1) $\dfrac{a+b}{(b-c)(c-a)}+\dfrac{b+c}{(c-a)(a-b)}+\dfrac{c+a}{(a-b)(b-c)}$;

2) $\dfrac{a-b}{a+b}+\dfrac{b-c}{b+c}+\dfrac{c-a}{c+a}+\dfrac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$;

3) $\dfrac{x^4-(x-1)^2}{(x^2+1)^2-x^2}+\dfrac{x^2-(x^2-1)^2}{x^2(x+1)^2-1}+\dfrac{x^2(x-1)^2-1}{x^4-(x+1)^2}$;

4) $\dfrac{(a-1)^2}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{(b-1)^2}{(b-a)(b-c)}+\dfrac{(c-1)^2}{(c-a)(c-b)}$;

5) $\dfrac{1}{(a-b)(b-c)}-\dfrac{1}{(b-c)(a-c)}-\dfrac{1}{(c-a)(b-a)}$;

6) $\dfrac{a}{(a-2b)(a-c)}+\dfrac{2b}{(2b-c)(2b-a)}+\dfrac{c}{(c-a)(c-2b)}$;

○ e) 1) $\dfrac{a+b}{a}-\dfrac{a}{a-b}+\dfrac{b^2}{a^2-ab}$; 2) $\dfrac{4x-3}{3-2x}-\dfrac{4+5x}{3+2x}-\dfrac{3+x-10x^2}{4x^2-9}$;

3) $\dfrac{2}{3a+6}-\dfrac{a-2}{2a^2+4a}-\dfrac{2}{3a^2+12a+12}-\dfrac{4}{3a(a+2)^2}$;

4) $\dfrac{4}{(a-x)(c-x)}-\dfrac{3}{(a-x)(c-a)}+\dfrac{3}{(a-c)(x-c)}$;

5) $\dfrac{1}{a(a-b)(a-c)}+\dfrac{1}{b(b-a)(b-c)}+\dfrac{1}{c(c-a)(c-b)}$;

6) $\dfrac{x^3}{(x-y)(x-z)}+\dfrac{y^3}{(y-z)(y-x)}+\dfrac{z^3}{(z-x)(z-y)}$;

7) $\dfrac{1}{a(a+1)}+\dfrac{1}{(a+1)(a+2)}+\dfrac{1}{(a+2)(a+3)}+\dfrac{1}{(a+3)(a+4)}$.

△ **500.** Izračunati:

a) $\left(\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}\right):(x+y)$; b) $\left(1-\dfrac{x^2}{y^2}\right):(x+y)$;

c) $\left(\dfrac{x+2}{2}-\dfrac{x+2}{x}\right)\cdot\dfrac{4}{x^2-4}$;

d) $\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\right)\cdot\dfrac{1}{x^2-y^2}-\left(\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}\right):(x^2-2xy+y^2)$;

e) $\dfrac{ab+a}{b^2-b+1}:\left(\dfrac{1}{b+1}+\dfrac{3b}{b^3+1}\right)$; f) $\left(\dfrac{y-x+1}{x+y}-1\right)\cdot\left(\dfrac{2x^2+y}{2x-1}-x\right)$;

g) $\left(\dfrac{5a}{a+x}+\dfrac{5x}{a-x}+\dfrac{10ax}{a^2-x^2}\right)\cdot\left(\dfrac{a}{a+x}+\dfrac{x}{a-x}-\dfrac{2ax}{a^2-x^2}\right)$;

h) $\dfrac{3a^2+2ax-x^2}{3x^2+4ax+a^2}-2+10\cdot\dfrac{ax-3x^2}{a^2-9x^2}$;

i) $\left(\dfrac{x^2-2xy+y^2}{x^2}-\dfrac{(x+y)^2-4xy}{x^2-xy}\right)^2\cdot\dfrac{x^4}{x^2y^2-y^4}$;

j) $\left(6a^2+5a-1+\dfrac{a+4}{a+1}\right):\left(3a-2+\dfrac{3}{a+1}\right)$;

□ k) $\left(\dfrac{1-x}{x^2+x^3-x^4}-\dfrac{x^3+x-2}{x^5-x^3-2x^2-x}\right):\left(\dfrac{1+x}{x^3+x^4+x^5}-\dfrac{1-x+x^2}{x^3}\right)$;

□ l) $\dfrac{x}{x+y}:\left(\dfrac{x^2}{x^3+x^2y-xy^2-y^3}-\dfrac{2xy^2}{x^4-2x^2y^2+y^4}+\dfrac{x^2}{x^3-xy^2-x^2y+y^3}\right)$;

□ m) $\dfrac{a-c}{a^2+ac+c^2}\cdot\dfrac{a^3-c^3}{a^2b-bc^2}\cdot\left(1+\dfrac{c}{a-c}-\dfrac{1+c}{c}\right):\dfrac{c(1+c)-a}{bc}$.

□ **501.** Izračunati brojnu vrednost razlomka:

a) $\left(\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b+c}\right):\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b+c}\right)\right):\left(1+\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)$,

ako je $a=1\dfrac{33}{40}$, $b=0,625$, $c=3,2$.

b) $\left(x^2+2x-\dfrac{11x-2}{3x+1}\right):\left(x+1-\dfrac{2x^2+x+2}{3x+1}\right)$, ako je $x=7\dfrac{1}{3}$.

□ **502.** Uprostiti dvojne razlomke:

a) $\dfrac{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}}{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}}$; b) $\dfrac{y-\dfrac{1}{y}}{\dfrac{1}{y}+1}$; c) $\dfrac{a-\dfrac{x^2}{a}}{x-\dfrac{a^2}{x}}$; d) $\dfrac{\dfrac{m}{n}-2-\dfrac{3n}{m}}{\dfrac{m}{n}+\dfrac{3n}{m}-4}$;

e) $\dfrac{\dfrac{x-y}{x+y}+\dfrac{x+y}{x-y}}{\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}}$; f) $\dfrac{\dfrac{1}{1-x}+\dfrac{1}{1+x}}{\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{1}{1+x}}$; g) $\dfrac{1-\dfrac{b^3}{a^3}}{a-b}$; h) $\dfrac{x}{1-\dfrac{x}{x+2}}$;

i) $\dfrac{\dfrac{x}{1+\dfrac{1}{x}}+1-\dfrac{1}{1+x}}{\dfrac{x}{1+\dfrac{1}{x}}-x+\dfrac{1}{1-x}}$; j) $1-\dfrac{a}{1-\dfrac{a}{a+1}}$; k) $1+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{3+\dfrac{1}{x}}}$.

○ **503.** Uprostiti izraze:

a) $\dfrac{a^3-b^3}{a+b-\dfrac{ab}{a+b}}-\dfrac{a^3+b^3}{a-b+\dfrac{ab}{a-b}}$; b) $\dfrac{\dfrac{2a^2}{a+1}}{1-\dfrac{1}{1+a}}+\dfrac{\dfrac{1}{1+a}}{\dfrac{a}{1-a}}+\dfrac{\dfrac{1}{1-a}}{\dfrac{a}{1+a}}$;

c) $\left(\dfrac{\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}}{\dfrac{a}{b}-\dfrac{b}{a}}+\dfrac{1}{1+\dfrac{b}{a}}-\dfrac{1}{1-\dfrac{b}{a}}\right):\dfrac{1-\dfrac{a-3b}{a+b}}{\dfrac{3a+b}{a-b}-3}$;

d) $\dfrac{\dfrac{3a+2}{3a^2+1}-\dfrac{18a^3-a-9}{9a^4-1}+\dfrac{3a-2}{3a^2-1}}{\dfrac{a^2+10a+25}{9a^4-1}}$; e) $\dfrac{\dfrac{b}{a-b}+b}{3b+\dfrac{ab}{a-b}}-\dfrac{\dfrac{ab}{a-b}+2a}{\dfrac{ab}{a-b}+4a}$;

f) $\dfrac{\dfrac{a}{b}+\dfrac{a+b}{a-b}}{\dfrac{b}{a}+\dfrac{a-b}{a+b}}:\left(\left(\dfrac{a-b}{a+b}+\dfrac{a+b}{a-b}\right)\cdot\left(\dfrac{a^2+b^2}{2ab}+1\right):\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\right)\right)$;

g) $\left(\left(\dfrac{x^2}{y^3}+\dfrac{1}{x}\right):\left(\dfrac{x}{y^2}-\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{x}\right)\right):\dfrac{(x-y)^2+4xy}{1+\dfrac{y}{x}}$;

h) $\dfrac{\left(\dfrac{(a+x)^2}{ax}-4\right)\cdot\left(\dfrac{(a-x)^2}{ax}+4\right):(a^6-x^6)}{(a^2x-ax^2):\big(((a+x)^2-ax)\cdot((a-x)^2+ax)\big)}\cdot\dfrac{a-\dfrac{ax}{a+x}}{a+\dfrac{ax}{a-x}}$;

i) $\dfrac{a^2\left(\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{c}\right)+b^2\left(\dfrac{1}{c}-\dfrac{1}{a}\right)+c^2\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right)}{\dfrac{a}{bc}(c-b)+\dfrac{b}{ca}(a-c)+\dfrac{c}{ab}(b-a)}$;

j) $\dfrac{\dfrac{a-b}{2a-b}-\dfrac{a^2+b^2+a}{2a^2+ab-b^2}}{(4b^4+4ab^2+a^2):(2b^2+a)}\cdot(b^2+b+ab+a)$;

k) $\dfrac{\dfrac{1}{x^6}-64}{4+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}}\cdot\dfrac{x^2}{4-\dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{x^2}}-\dfrac{4x^2(2x+1)}{1-2x}$.

○ **504.** Date izraze uprostiti pa zameniti date vrednosti promenljivih:

a) $\dfrac{\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}-\dfrac{2c}{ab}\right)(a+b+2c)}{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{2}{ab}-\dfrac{4c^2}{a^2b^2}}$, za $a=7,4,\quad b=\dfrac{5}{37},\quad c=2\dfrac{12}{43}$;

b) $\dfrac{\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b+c}}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b+c}}:\dfrac{\dfrac{a-b-c}{abc}}{1+\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}$, za $a=0,02,\quad b=-11,05,\quad c=1,07$;

c) $\dfrac{\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}+2\right)\left(\dfrac{a+b}{2a}-\dfrac{b}{a+b}\right)}{\left(a-2b+\dfrac{b^2}{a}\right)\cdot\left(\dfrac{a}{a+b}+\dfrac{b}{a-b}\right)}$, za $a=0,75,\quad b=1\dfrac{1}{3}$;

d) $\dfrac{1-\dfrac{1}{(m+x)^2}}{\left(1-\dfrac{1}{m+x}\right)^2}\cdot\left(1-\dfrac{1-(m^2+x^2)}{2mx}\right)$, ako je $x=\dfrac{1}{m-1}$.

□ **505.** Uveriti se da je vrednost datog izraza konstanta:

a) $\left(\dfrac{a+1}{a+2}+\dfrac{1}{a}\right):\left(\dfrac{a+1}{a}-\dfrac{1}{a+2}\right)$;

b) $\dfrac{4}{a+\dfrac{1}{b+\dfrac{1}{c}}}:\dfrac{1}{a+\dfrac{1}{b}}-\dfrac{4}{b(abc+a+c)}$;

c) $\dfrac{2-x+4x^2+\dfrac{5x^2-6x+3}{x-1}}{2x+1+\dfrac{2x}{x-1}}:(2x-1)$;

d) $\left(\dfrac{a+b}{a-b}+\dfrac{a-b}{a+b}\right)^2-\left(\dfrac{a+b}{a-b}-\dfrac{a-b}{a+b}\right)^2$;

e) $\left(\dfrac{2x^2y+2xy^2}{7x^3+x^2y+7xy^2+y^3}\cdot\dfrac{7x+y}{x^2-y^2}+\dfrac{x-y}{x^2+y^2}\right):\dfrac{x+y}{x^2-y^2}$;

f) $\dfrac{1}{ab^2c+ab+bc}-\dfrac{1}{a+\dfrac{1}{b+\dfrac{1}{c}}}:\dfrac{1}{a+\dfrac{1}{b}}$;

g) $\left(\dfrac{\dfrac{a}{a-b}+\dfrac{b}{a}}{\dfrac{ab-1}{a+1}+\left(1-\dfrac{1}{a+1}\right)}:\dfrac{\dfrac{a}{b}+\dfrac{a(1+b^2)-b^3}{b(ab-1)}}{1-\dfrac{a}{1-ab}}\right):\dfrac{a+1}{a-b}$.

506. Dokazati identičnosti:

△ a) $\left(\dfrac{6k+12}{k^2+4k}+\dfrac{k+3}{k+4}-\dfrac{2k+3}{k}\right):\left(1-\dfrac{k^2+5k+2}{k^2+4k}\right)=k$;

□ b) $\dfrac{a^2b^2}{(a-c)(b-c)}+\dfrac{b^2c^2}{(b-a)(c-a)}+\dfrac{c^2a^2}{(c-b)(a-b)}=ab+ac+bc$;

□ c) $\dfrac{(2m-3n)^2-m^2}{4m^2-(3n+m)^2}+\dfrac{4m^2-(3n-m)^2}{9(m^2-n^2)}+\dfrac{9n^2-m^2}{(m+3n)^2-m^2}=1$;

□ d) $\dfrac{(a+2b)^3-(a-2b)^3}{(2a+b)^3+(2a-b)^3}:\dfrac{3a^4+7a^2b^2+4b^4}{4a^4+7a^2b^2+3b^4}=\dfrac{b}{a}$;

△ e) $p^2k^2\left(\dfrac{1}{(p+k)^2}\left(\dfrac{1}{p^2}+\dfrac{1}{k^2}\right)+\dfrac{2}{(p+k)^3}\left(\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{k}\right)\right)=1$;

□ f) $\left(\dfrac{2ab}{a^2-ab+b^2}+1\right):\left(\dfrac{a^3-b^3}{a^3+b^3}\cdot\left(\dfrac{2b}{a-b}+1\right)\right)=1$;

○ g) $\dfrac{(b-c)^2}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{(c-a)^2}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{(a-b)^2}{(c-a)(c-b)}=-3$;

○ h) $\left(q^2\dfrac{n-p}{p-q}+n^2\dfrac{m-q}{m-n}\right):\left(p^2\dfrac{m-q}{p-q}+m^2\dfrac{n-p}{m-n}\right)=\dfrac{n-q}{m-p}$.

○ **507.** Ako je p prost broj, dokazati da je vrednost izraza A takođe prost broj:

$$A=\frac{p^3+4p^2+10p+12}{p^3-p^2+2p+16}\cdot\frac{p^3-3p^2+8p}{p^2+2p+6}.$$

□ **508.** Odrediti cele brojeve a i b tako da je vrednost datog izraza:

a) $\left(\dfrac{ab+4+\dfrac{4}{ab}}{2b+(b^2-4)a-2a^2b}+\dfrac{(4a^2-b^2)\cdot\dfrac{1}{b}}{(2a+b)^2-8ab}\right)\cdot\dfrac{ab}{2}$ jednaka nuli;

b) $\left(\dfrac{3a+2}{3a^2+1}-\dfrac{18a^3-a-9}{9a^4-1}+\dfrac{3a-2}{3a^2-1}\right):\dfrac{a^2+10a+25}{9a^4-1}$ takođe ceo broj;

c) $\left(a - \dfrac{4ab}{a+b} + b\right) : \left(\dfrac{a}{a+b} - \dfrac{b}{b-a} - \dfrac{2ab}{a^2-b^2}\right)$ paran broj.

5.7 RAZNI PROBLEMI SA ALGEBARSKIM RAZLOMCIMA

△ **509.** Izraz $\left(\dfrac{a}{b} - \dfrac{b}{a}\right)$ napisati u obliku proizvoda dva izraza, od kojih je jedan $\left(\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a}\right)$.

○ **510.** Dati razlomak predstaviti u obliku zbira "prostih" razlomaka, tj. odrediti A, B, C tako da važi jednakost (Košijev zadatak[6]):

a) $\dfrac{4x}{x^2-1} = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{x+1}$; b) $\dfrac{3x+3}{x^2+x-2} = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{x+2}$;

c) $\dfrac{x^2+5}{x^3-3x+2} = \dfrac{A}{x-2} + \dfrac{B}{(x+1)^2} + \dfrac{C}{x+1}$;

d) $\dfrac{x^2+5}{x^3-3x+2} = \dfrac{A}{x+2} + \dfrac{B}{(x-1)^2} + \dfrac{C}{x-1}$;

e) $\dfrac{2x^2+3x-3}{x^3-x^2-x+1} = \dfrac{A}{(x-1)^2} + \dfrac{B}{(x-1)} + \dfrac{C}{x+1}$.

□ **511.** Ako je $ay = bx$, dokazati da je $\dfrac{x^2}{x^2+y^2} + \dfrac{b^2}{a^2+b^2} = 1$.

∗ **512.** Ako je $a + \dfrac{1}{a}$ ceo broj, dokazati da je $a^3 + \dfrac{1}{a^3}$ takođe ceo broj.

513. Dokazati sledeća tvrđenja:

⋆ a) Ako je $a + \dfrac{1}{a} = 1$ onda je $a^5 + \dfrac{1}{a^5} = 1$;

⋆ b) Ako je $\dfrac{x}{a} = \dfrac{y}{b} = \dfrac{z}{c}$, onda je $(x^2+y^2+z^2)(a^2+b^2+c^2) = (ax+by+cz)^2$;

○ c) Ako je $\dfrac{a}{b} = \dfrac{b}{c}$, onda je $\dfrac{a^2+b^2}{b^2+c^2} = \dfrac{a}{c}$;

⋆ d) Ako je $\dfrac{x}{a} = \dfrac{y}{b} = \dfrac{z}{c}$ i $a+b+c=1$ i $a^2+b^2+c^2=1$, onda je $xy+xz+yz=0$;

○ e) Ako je $a+b=1$, tada je: $\dfrac{a}{b^3-1} - \dfrac{b}{a^3-1} = \dfrac{2(b-a)}{a^2b^2+3}$;

○ f) Ako je $\left(\dfrac{x}{m} + \dfrac{y}{n} + \dfrac{z}{p} = 1 \quad \text{i} \quad \dfrac{m}{x} + \dfrac{n}{y} + \dfrac{p}{z} = 0\right)$ tada je

[6] Augustin Cauchy (1789–1857), čuveni francuski matematičar.

$\left(\dfrac{x^2}{m^2}+\dfrac{y^2}{n^2}+\dfrac{z^2}{p^2}=1\right)$;

○ g) Ako je $b=\dfrac{2ac}{a+c}$, $x=\dfrac{a}{b+c}$, $y=\dfrac{b}{a+c}$, $z=\dfrac{c}{a+b}$, onda je $y=\dfrac{2xz}{x+z}$;

○ h) Ako je $x=a-1$ i $y=a+2$ onda je: $\dfrac{a^2x^2y^2-a^2x^2-y^2+1}{a^2xy-\dfrac{y}{x}+x\left(a^2-\dfrac{1}{x^2}\right)}+1=a^2$;

⋆ i) Ako su a, b, c realni brojevi, $a\neq b\neq c\neq a$ i važi uslov $\dfrac{a}{b-c}+\dfrac{b}{c-a}+\dfrac{c}{a-b}=0$, onda je: $\dfrac{a}{(b-c)^2}+\dfrac{b}{(c-a)^2}+\dfrac{c}{(a-b)^2}=0$.

∗ **514.** Dokazati da važi jednakost:

$$\left(\frac{a-b}{c^2}+\frac{b-c}{a^2}+\frac{c-a}{b^2}\right)\cdot\left(\frac{c^2}{a-b}+\frac{a^2}{b-c}+\frac{b^2}{c-a}\right)=4abc\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^3,$$

ako je $a+b+c=0$.

○ **515.** Ako za pozitivne brojeve a, b, c važi jednakost: $ab\left(\dfrac{a+b}{2}-c\right)+bc\left(\dfrac{b+c}{2}-a\right)+ca\left(\dfrac{c+a}{2}-b\right)=0$, dokazati da je $a=b=c$.

∗ **516.** Ako su brojevi a, b, c, x, y, z različiti od nule u ako je $\dfrac{x^2-yz}{a}=\dfrac{y^2-zx}{b}=\dfrac{z^2-xy}{c}\neq 0$, dokazati da je takođe: $\dfrac{a^2-bc}{x}=\dfrac{b^2-ca}{y}=\dfrac{c^2-ab}{z}$.

○ **517.** Ako su $p_1,p_2,\dots,p_n$ različiti prosti brojevi, dokazati da zbir: $\dfrac{1}{p_1}+\dfrac{1}{p_2}+\cdots+\dfrac{1}{p_n}$ nije ceo broj.

∗ **518.** Ako je $ax+by+cz=0$, dokazati da jednakost

$$\frac{ax^2+by^2+cz^2}{bc(y-z)^2+ca(z-x)^2+ab(x-y)^2}=\frac{1}{a+b+c}$$

važi uvek kad su imenioci zapisanih razlomaka različiti od nule.

○ **519.** Ako je $ax+by+cz=0$, dokazati da ne zavisi od x, y i z izraz:

$$A=\frac{ax^2+by^2+cz^2}{bc(y-z)^2+ca(z-x)^2+ab(x-y)^2}$$

○ **520.** Ako je $a^2+b^2=(a+b-c)^2\neq 0$ i $b\neq c$, dokazati da je:

$$\frac{a^2+(a-c)^2}{b^2+(b-c)^2}=\frac{a-c}{b-c}.$$

○ **521.** Ako je $a+b+c=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$ i $abc\neq 0$, dokazati da je:

$$b(a^2-bc)(1-ac)=a(1-bc)(b^2-ac).$$

○ **522.** Dokazati da iz produžene proporcije:

$$\frac{\dfrac{m}{(a+b)^2}+\dfrac{n}{(a+c)^2}}{a}=\frac{\dfrac{n}{(b+c)^2}-\dfrac{p}{(a+b)^2}}{b}=\frac{\dfrac{p}{(a+c)^2}+\dfrac{m}{(b+c)^2}}{c}$$

slede jednakosti: $ap+bm=cn$ i $\dfrac{1}{(b+c)^2}=\dfrac{c}{(a+b)^2}+\dfrac{b}{(a+c)^2}$.

∗ **523.** Ako racionalni brojevi a, b, c zadovoljavaju uslove: $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{a+b+c}$ i $abc\neq 0$ i $a+b+c\neq 0$, dokazati da je:

a) $a+b=0$ ili $a+c=0$ ili $b+c=0$;

b) $\dfrac{1}{a^{2n-1}}+\dfrac{1}{b^{2n-1}}+\dfrac{1}{c^{2n-1}}=\dfrac{1}{a^{2n-1}+b^{2n-1}+c^{2n-1}}$, gde je $n\in N$.

∗ **524.** Izračunati zbir $S=\dfrac{1}{1+x+xy}+\dfrac{1}{1+y+yz}+\dfrac{1}{1+z+zx}$, ako realni brojevi x, y i z zadovoljavaju uslov: $xyz=1$.

□ **525.** Uprostiti izraz $\dfrac{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{a}}{\dfrac{1}{a}-\dfrac{b}{ax}}$, ako je $x=a+b-\dfrac{a^2+b^2}{a+b}$.

○ **526.** Ako je $a_1^2+a_2^2+a_3^2=p^2$, $\quad b_1^2+b_2^2+b_3^2=q^2$, $\quad a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=pq$, gde su a_i, b_i $(i=1,2,3)$ realni brojevi, dokazati da je: $\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\dfrac{a_3}{b_3}=\dfrac{p}{q}$.

○ **527.** Za koje vrednosti prirodnog broja n polinom: $1+x^2+x^4+\cdots+x^{2n-2}$ je deljiv bez ostatka polinomom: $1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}$?

□ **528.** Dokazati da je:

$$2\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3^2}\right)\left(1+\frac{1}{3^4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{3^{2n-1}}\right)=3\left(1-\frac{1}{3^{2n}}\right).$$

□ **529.** Dokazati jednakost $(n\in N)$:

a) $\left(1-\dfrac{1}{4}\right)\left(1-\dfrac{1}{9}\right)\left(1-\dfrac{1}{16}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)=\dfrac{n+1}{2n}$, za $n\geq 2$;

b) $S=\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{n}{n+1}$.

∗ **530.** Naći najveći i najmanji količnik koji se može dobiti kad se trocifren broj podeli zbirom svojih cifara.

∗ **531.** Neka je $y=\dfrac{x^2+\dfrac{1}{x^2}}{x^2-\dfrac{1}{x^2}}$ i $z=\dfrac{x^4+\dfrac{1}{x^4}}{x^4-\dfrac{1}{x^4}}$. Izraziti z u funkciji y.

∗ **532.** Neka su a, b, c, d celi brojevi za koje važi $ad-bc=1$. Dokazati da se razlomak $\dfrac{a^2+b^2}{ac+bd}$ ne može skratiti.

○ **533.** Dat je razlomak $\frac{p}{q}$, gde su p i q uzajamno prosti brojevi. Ako je $\frac{a}{b}+\frac{p}{q}=1$, dokazati da se razlomak $\frac{a}{b}$ ne može skratiti.

○ **534.** Dato je $y=\dfrac{x^n+\frac{1}{x^n}}{x^n-\frac{1}{x^n}}$. Dokazati da je $\dfrac{x^{2n}+\frac{1}{x^{2n}}}{x^{2n}-\frac{1}{x^{2n}}}=\dfrac{y^2+1}{2y}$, za svaki prirodan broj n.

○ **535.** Ako je $a>b>0$, utvrditi šta je veće:

a) $\dfrac{2,000004}{(1,000004)^2+2,000004}$ ili $\dfrac{2,000002}{(1,000002)^2+2,000002}$;

b) $\dfrac{1+a+a^2+\ldots+a^{n-1}}{1+a+a^2+\ldots+a^{n-1}+a^n}$ ili $\dfrac{1+b+b^2+\ldots+b^{n-1}}{1+b+b^2+\ldots+b^{n-1}+b^n}$.

5.8 *NEKE NEJEDNAKOSTI SA ALGEBARSKIM IZRAZIMA

536. Koristeći se nejednakostima između aritmetičkih i geometrijskih sredina dokazati nejednakosti[7]:

a) $a^3+b^3+c^3\geq 3abc$; b) $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)\geq 9abc$;

c) $2a^3+11>9a$; d) $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq 9$,

gde su a, b, c pozitivni brojevi. Kada važi znak "=".

∗ **537.** Neka su a_1,a_2,a_3,a_4,a_5 pozitivni brojevi i: $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=1$. Dokazati da je

$$\left(\frac{1}{a_1}-1\right)\left(\frac{1}{a_2}-1\right)\left(\frac{1}{a_3}-1\right)\left(\frac{1}{a_4}-1\right)\left(\frac{1}{a_5}-1\right)\geq 1024.$$

538. Ako je $2x+4y=1$, dokazati da je $x^2+y^2\geq\frac{1}{20}$.

539. a) Koristeći činjenicu da kvadrat realnog broja ne može biti negativan, dokazati da je $a^2+b^2\geq 2ab$, za svaki par realnih brojeva a i b. Utvrditi kada važi znak jednakosti. (Košijeva nejednakost)

b) Koristeći prethodnu tačnu nejednakost, dokazati da za proizvoljne realne brojeve, a,b,c važi nejednakost: $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca$.

c) Dokazati da za realne brojeve a i b važi nejednakost: $a(a-b)\geq b(a-b)$.

540. Dokazati da za pozitivne brojeve a i b važe nejednakosti:

a) $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2$. Utvrditi kada važi znak jednakosti.

b) $a+\frac{1}{a}\geq 2$. Kada važi znak jednakosti.

[7] Videti odnose sredina u uvodu ČETVRTE GLAVE.

541. Ako je $ab < 0$, dokazati da je $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \leq 2$.

542. Dokazati da za $a > 0$ važi nejednakost: $\frac{b^2}{a} \geq 2b - a$.

543. Dokazati da za pozitivne brojeve a, b, c važi nejednakost:
$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq a + b + c$.

544. Dokazati da je $\frac{x^2}{1 + x^4} \leq \frac{1}{2}$.

545. Dokazati da za pozitivne brojeve a, b, c važi nejednakost:
$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3$, pri čemu jednakost važi za $a = b = c$.

546. a) Ako je proizvod dva pozitivna broja konstantan, dokazati da je njihov zbir najmanji ako su oni jednaki među sobom.

b) Ako je zbir dva broja konstantan, dokazati da je njihov proizvod najveći ako su oni jednaki među sobom.

c) Naći najveću vrednost izraza $\frac{x}{9x^2 + 4}$.

547. Dokazati da za pozitivne brojeve x, y, z važe nejednakosti:

a) $a^2(1 + b^2) + b^2(1 + c^2) + c^2(1 + a^2) \geq 6abc$; b) $\frac{2a}{b + c} + \frac{2b}{c + a} + \frac{2c}{a + b} \geq 3$;

c) $6abc \leq ab(a + b) + bc(b + c) + ca(c + a) \leq 2(a^3 + b^3 + c^3)$.

548. Ako je $a + b = 2$, gde su a i b realni brojevi, dokazati da je $a^4 + b^4 \geq 2$.

549. Ako je $a + b \geq 1$, dokazati da je $a^4 + b^4 \geq \frac{1}{8}$.

550. Ako je $a + b = 1$, dokazati da je $a^8 + b^8 \geq \frac{1}{128}$.

551. Ako je $a^3 + b^3 = 2$, dokazati da je $a + b \leq 2$.

552. Dokazati da važe nejednakosti:

a) $a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + b$; b) $\frac{a^2 + b^2 + c^2 + 3}{2} \geq a + b + c$;

c) $a^2(1 + b^4) + b^2(1 + a^4) \leq (1 + a^4)(1 + b^4)$;

d) $(a^2 - b^2)(a^4 - b^4) \leq (a^3 - b^3)^2$; e) $(a^2 + b^2)(a^4 + b^4) \geq (a^3 + b^3)^2$.

553. Dokazati nejednakosti:

a) $a < b \Rightarrow a < \frac{a + b}{2} < b$; b) $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a + b}{b} \leq \frac{c + d}{d}$;

c) $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a + bk}{b} \leq \frac{c + dk}{d}$; d) $-1 \leq \frac{a^2 - 1}{a^2 + 1} < 1$;

e) $b > 0$ i $d > 0$ i $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} \leq \frac{a + c}{b + d} \leq \frac{c}{d}$.

554. Dokazati da je u proporciji $a : b = c : d$, koju obrazuju četiri različita pozitivna broja, zbir najvećeg i najmanjeg člana veći od zbira ostalih članova.

555. Dokazati nejednakost: $(a+b)^n < 2^n(a^n+b^n)$, gde je $a > 0$, $b > 0$ i $n \in N$.

556. Ako je $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, dokazati da važe nejednakosti:

a) $\dfrac{ab}{c} + \dfrac{bc}{a} + \dfrac{ca}{b} \geq a + b + c$; b) $\dfrac{3}{a+b+c} < \dfrac{1}{a+b} + \dfrac{1}{b+c} + \dfrac{1}{c+a}$;

c) $ab(a+b-2c) + bc(b+c-2a) + ca(c+a-2b) \geq 0$;

d) $(a^3+b^3+c^3)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right) \geq (a+b+c)^2$;

e) $ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a) \geq 6abc$.

557. Ako su a, b, c prirodni brojevi dokazati da je: $ab + bc + ca \leq 3abc$.

558. Ako je $(x+y+z)^2 = 3(xy+yz+zx)$, tada je: $x = y = z$. Dokazati.

$*$ **559.** Ako je $k > 0$, kolika je minimalna vrednost izraza: $k + \dfrac{3}{k} + \dfrac{9}{k^2}$?

$*$ **560.** Ako su a i b pozitivni brojevi, odrediti najmanju vrednost izraza: $a + b + \dfrac{3}{a+b} + \dfrac{9}{4ab}$.

561. Dokazati sledeće nejednakosti:

a) $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$, $\quad a \geq 0$, $b \geq 0$, $c \geq 0$;

b) $(m+2)(n+2)(m+n) > 16mn$, $\quad m > 0$, $n > 0$;

c) $(x+1)(y+1)(z+1) \geq 8$, $\quad x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ i $xyz = 1$;

d) $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\cdot\left(1+\dfrac{1}{y}\right)\cdot\left(1+\dfrac{1}{z}\right) \geq 64$, $\quad x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ i $x + y + z = 1$.

562. Dokazati da je $(a-x)(a-y)(a-z) > 8xyz$, ako su x, y, z pozitivni brojevi i $x + y + z = a$.

$*$ **563.** Dokazati da za pozitivne brojeve a, b, c važi nejednakost: $(a+6b)(b+3c)(c+4a) \geq 108abc$.

564. Ako su x, y, z pozitivni brojevi i $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 1$, tada je $(x-1)(y-1)(z-1) \geq 8$. Dokazati.

565. Ako je $a > 0$ i $b < 1$, dokazati da je $ab + 1 < a + b$.

566. Ako je $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{c} = \dfrac{2}{b}$ i $ac > 0$, dokazati da važi nejednakost: $\dfrac{a+b}{2a-b} + \dfrac{c+b}{2c-b} \geq 4$.

567. Dokazati da iz $ab \leq 0$ sledi: $(a^2-b^2)^2 \leq (a-b)^4$.

568. Iz $x + y + z = 1$, sledi $x^2 + y^2 + z^2 \geq \dfrac{1}{3}$. Dokazati.

569. Dokazati da je $x^2 + y^2 + z^2 \geq 1$, ako je $xy + yz + zx = 1$.

570. Dokazati nejednakosti:

a) $x + \dfrac{1}{x} \geq a + \dfrac{1}{a}$, ako je $0 < x \leq a < 1$;

b) $a^k + \dfrac{1}{a^k} \geq a^{k-i} + \dfrac{1}{a^{k-i}}$, ako je $a > 0$, $i, k \in Z$, $0 \leq i \leq k$;

c) $x + \dfrac{1}{nx} > 1 + \dfrac{1}{n}$, ako je $n > 1$, $x > 1$ ili $n > 1$, $0 < x < \dfrac{1}{n}$.

571. Dokazati da je polinom $x^8 - x^5 + x^2 - x + 1$ pozitivan za sve realne vrednosti x.

572. Dokazati da za pozitivne brojeve $a_1, a_2, \ldots, a_n$ važi:

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1} \geq n.$$

573. Ako su $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pozitivni brojevi, dokazati da:

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2.$$

574. Ako su $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pozitivni brojevi i: $a_1 \cdot a_2 \cdots a_n = 1$, dokazati da važi nejednakost: $(1 + a_1)(1 + a_2) \cdots (1 + a_n) \geq 2^n$.

575. Dokazati da je: $\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{5}{6} \cdots \dfrac{99}{100} < \dfrac{1}{10}$.

576. Ako je $n \in N$ i $a_1, a_2, \ldots, a_n$ su pozitivni brojevi, dokazati da je tačna nejednakost: $\dfrac{(a_1^2 + a_1 + 1)(a_2^2 + a_2 + 1) \cdots (a_n^2 + a_n + 1)}{a_1 a_2 \cdots a_n} \geq 3^n$.

577. Dokazati implikaciju:

Iz $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = 1$, sledi: $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \cdots + a_n^2 \geq \dfrac{1}{n}$.

578. Dokazati nejednakosti:

a) $S = \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{4^2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2} < 1$; b) $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n - 1) < n^n$;

c) $A = \dfrac{1}{1 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 5} + \dfrac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)} < \dfrac{1}{2}$.

$*$ **579.** Ako su a, b, p, q, r, s prirodni brojevi, takvi da važi $qr - ps = 1$ i $\dfrac{p}{q} < \dfrac{a}{b} < \dfrac{r}{s}$, dokazati da je $b \geq q + s$.

580. Dokazati nejednakost: $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + n \cdot n! < (n + 1)!$
($n!$ – čitamo "en faktorijel"; kao što znamo: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$).

ŠESTA GLAVA

6. UVOD U GEOMETRIJU

Osnovni pojmovi u geometriji su: *tačka*, *prava* i *ravan*.

Osnovne relacije su: *između* i *podudarno*.[8)]

Odnosi i veze među ovim pojmovima i relacijama uređuju se aksiomama pripadanja, rasporeda, podudarnosti, paralelnosti i neprekidnosti.

Relacije podudarnosti i paralelnosti (na skupu pravih ili na skupu ravni) određene su tako da su: refleksivne, simetrične i tranzitivne, tj. to su *relacije ekvivalencije*.

Koristićemo sledeće oznake:

$A - B - C$, ako je tačka B "*između*" tačaka A i C.

$a \parallel BC$, ako je prava a "*paralelna*" sa pravom BC.

$MN = PQ$, ako je duž MN "*podudarna*" duži PQ.

$\triangle ABC \cong \triangle MNP$, ako je $\triangle ABC$ "*podudaran*" sa $\triangle MNP$.

Oznaka za relaciju "*normalno*" je $\perp$.

Duž AB je *paralelna* i *jednaka* sa duži CD označavamo sa: $AB \# CD$.

Za dokazivanje podudarnosti trouglova koristimo se stavovima:

Stav SUS: Dva trougla su podudarna ako imaju jednake po dve odgovarajuće stranice i ugao zahvaćen tim stranicama.

Stav USU: Dva trougla su podudarna ako imaju jednaku po jednu stranicu i oba odgovarajuća ugla nalegla na tu stranicu.

Stav SSS: Dva trougla su podudarna ako su sve stranice jednog jednake odgovarajućim stranicama drugog trougla.

Stav SSU: Dva trougla su podudarna ako su dve stranice jednog trougla i ugao naspram jedne od njih jednake sa dve odgovarajuće stranice i odgovarajućim uglom drugog trougla, i pri tom su uglovi naspram druge dve jednake stranice oba oštra, ili oba tupa ili oba prava.

U trouglu naspram jednakih stranica jednaki su i uglovi, i obrnuto.

Dve prave su paralelne ako i samo ako ih treća prava seče tako da su: saglasni uglovi jednaki, ili naizmenični uglovi jednaki, ili suprotni uglovi suplementni.

Uglovi sa paralelnim kracima su ili jednaki ili suplementni.

[8)] Osnovni pojmovi (objekti) i relacije mogu biti i drugačije odabrani.

6.1 ODNOSI PRIPADANJA I RASPORED TAČAKA

△ **581.** Za tačke koje pripadaju jednoj pravoj kažemo da su *kolinearne*, a za tačke koje pripadaju jednoj ravni kažemo da su *komplanarne*. Odrediti istinitosne vrednosti iskaza:

a) Svake dve tačke su kolinearne.
b) Sve tačke jedne prave su kolinearne i komplanarne.
c) Sve tačke jedne ravni su kolinearne.
d) Ako se prave a i b seku, onda su sve njihove tačke komplanarne.
e) Svake četiri tačke su kolinearne ili komplanarne:
f) Ako su četiri tačke nekomplanarne, onda su svake tri od njih nekolinearne.
g) Postoje četiri tačke koje su kolinearne, ali nisu komplanarne.

△ **582.** Svaka prava koja ne pripada ravni α ima sa tom ravni najviše jednu zajedničku tačku. Dokazati.

△ **583.** Data je prava p i van nje tačka A. Dokazati da sve prave koje sadrže tačku A i seku pravu p pripadaju jednoj ravni.

□ **584.** Dat je skup tačaka $\{A, B, C, D\}$, gde $C \in AB$ i $D \notin AB$. Dokazati da se ravni ABD i ACD poklapaju.

△ **585.** Ako tri različite ravni α, β, γ nemaju ni jednu zajedničku pravu, tada one imaju najviše jednu zajedničku tačku. Dokazati.

□ **586.** Date su prave m i n i tačka P van njih. Ako postoje dve različite prave p i q koje sadrže tačku P i svaka seče obe date prave, tada prave m i n pripadaju istoj ravni. Dokazati.

○ **587.** Date su dve mimoilazne prave p i q i van njih tačka C. Da li postoje prave koje sadrže tačku C i seku obe mimoilazne prave? Ako takve prave postoje, koliko ih ima?

△ **588.** Koliko različitih pravih određuju nekomplanarne tačke A, B, C, D?

△ **589.** Dat je skup od 10 tačaka.

a) Koliko najviše različitih pravih mogu odrediti ove tačke?
b) Koliko najviše različitih ravni mogu odrediti ove tačke?

△ **590.** U ravni π date su četiri prave a, b, c, d različitih pravaca. Koliko najviše presečnih tačaka određuju ove prave?

□ **591.** Dat je skup od šest tačaka u kome postoje tačno dva disjunktna podskupa sa po tri kolinearne tačke. Koliko ima različitih pravih od kojih svaka sadrži bar dve tačke datog skupa?

∗ **592.** U skupu od 7 tačaka postoji tačno 6 trojki kolinearnih tačaka i ne postoje 4 tačke koje su kolinearne. Koliko različitih pravih određuju tačke datog skupa (tj. koliko ima pravih od kojih svaka sadrži bar dve od datih tačaka)?

△ **593.** Neka je dato 6 ravni tako da svake tri imaju zajedničku tačku i ne postoje četiri ravni koje sadrže istu tačku. Koliko je ovakvih tačaka određeno datim ravnima?

△ **594.** Od pet datih ravni svake dve se seku. Koliko najviše presečnih pravih određuju date ravni?

△ **595.** Dato je pet tačaka A, B, C, D, E, među kojima ne postoje četiri koje pripadaju istoj ravni. Koliko ima ravni od kojih svaka sadrži tri od datih tačaka?

∗ **596.** U skupu od 12 tačaka postoji tačno 6 četvorki komplanarnih tačaka i ne postoji 5 tačaka koje su komplanarne. Koliko ravni određuju ovih 12 tačaka?

∗ **597.** U skupu od n tačaka ima tačno k trojki kolinearnih tačaka. Koliko različitih pravih određuju tačke ovog skupa?

∗ **598.** U skupu od n tačaka ima k petorki komplanarnih tačaka. Koliko različitih ravni određuju ovih n tačaka?

○ **599.** Date su tačke: A, B, C, D, E, F, G. Tačke A, B, C, D su kolinearne, a svake tri tačke, među kojima su najviše dve iz skupa $\{A, B, C, D\}$, nisu kolinearne. Koliko ima pravih od kojih svaka sadrži bar dve date tačke?

△ **600.** Koliko najviše ravni određuju:
a) prava p i tri nekolinearne tačke A, B, C, koje su van prave p;
b) tri prave a, b, c, koje imaju zajedničku tačku M i tačka P van datih pravih;
c) mimoilazne prave p i q i dve različite tačke M i N van njih?

□ **601.** Koliki je najmanji broj tačaka kojima je određeno 15 pravih?

□ **602.** Koliki je najmanji broj tačaka kojima je određeno 20 ravni?

○ **603.** Dat je skup tačaka, među kojima nema ni jedna trojka kolinearnih tačaka. Koliko tačaka sadrži ovaj skup, ako se zna da je broj pravih, određenih tim tačkama, dva puta veći od broja tačaka?

○ **604.** U skupu S bilo koje četiri tačke su nekomplanarne. Koliko tačaka sadrži ovaj skup, ako se zna da je broj svih ravni, određenih ovim tačkama, deset puta veći od najvećeg broja svih pravih određenih istim tačkama?

□ **605.** U skupu od 6 tačaka postoje tačno dve četvorke komplanarnih tačaka, a od 6 neparalelnih pravih a, b, c, d, e i f, prve tri pripadaju ravni α, a druge tri pripadaju ravni β. Pritom su ravni α i β paralelne. Koliko najviše različitih ravni određuju sve date tačke i prave?

○ **606.** Van ravni α date su tri nekoilinearne tačke A, B, C, takve da prave AB, BC, CA seku ravan α redom u tačkama M, N, P. Dokazati da su tačke M, N i P kolinearne.

○ **607.** Date su nekolinearne tačke A, B, C i van ravni ABC nekolinearne tačke A_1, B_1, C_1. Ako prave AB, BC, CA redom seku prave A_1B_1, B_1C_1, C_1A_1 u tačkama M, N, P tada su tačke M, N, P kolinearne. Dokazati.

∗ **608.** Date du tačke A, B, C, D, S, tako da su bilo koje četiri od njih nekomplanarne. Neka prava AB prodire ravan SCD u tački M, prava BC prodire ravan SAD u tački N, prava CD prodire ravan SAB u tački P i prava DA prodire ravan SBC u tački Q. Dokazati da su tačke M, N, P, Q komplanarne.

○ **609.** U skupu od n pravih svake dve prave se seku. Dokazati da sve ove prave pripadaju jednoj ravni ili imaju tačno jednu zajedničku tačku.

○ **610.** Dato je šest različitih tačaka, takvih da između svake četiri tačke postoje tri kolinearne. Dokazati da bar pet od ovih datih tačaka pripadaju jednoj pravoj.

□ **611.** Ako je $A - B - C$ i $A - D - C$, onda su A, B, C, D tačke jedne prave i nije $B - A - D$. Dokazati.

□ **612.** Ako su O, A, B, C tačke jedne prave i ako $A - O - B$ i $A - O - C$, onda nije $B - O - C$. Dokazati.

□ **613.** Ako je $A - O - B$ i $B - O - C$ i $C - O - D$, onda su O, A, B, C i D tačke jedne prave i $A - O - D$. Dokazati.

□ **614.** Ako je $A - B - C$ i $A - C - D$, onda su A, B, C i D kolinearne tačke i takođe je $A - B - D$ i $B - C - D$. Dokazati.

○ **615.** Dat je skup kolinearnih tačaka $\mathcal{J} = \{A, B, C, D, E\}$. Kako su raspoređene ove tačke na pravoj ako:

a) $A \prec E$, $C \prec D$, nije $C - E - D$, nije $B - E - D$ i između tačaka A i E, a takođe i između tačaka C i D postoji tačno po jedna tačka datog skupa. ($A \prec E$ čitati: "tačka A je ispred tačke E").

b) $A \prec C$, $B \prec D$ nije $B - C - D$ i između A i C, a takođe i između B i D postoje tačno po dve tačke datog skupa?

□ **616.** Date su prave a i b u ravni α. Ako su sve tačke nekog skupa S koji sadrži pravu a, sa iste strane prave b u ravni α, dokazati da su prave a i b paralelne.

□ **617.** Za dve tačke A i B kažemo da su sa iste strane ravni α, ako duž AB i ravan α nemaju zajedničkih tačaka. Ako su sve tačke ravni β sa iste strane ravni α, dokazati da su ove dve ravni paralelne među sobom.

□ **618.** Ako su prava p i ravan π sa iste strane date ravni α, dokazati da je $p \parallel \pi$.

△ **619.** Za polupravu kažemo da je paralelna nekoj ravni α (ili pravoj a) ako je prava koja sadrži tu polupravu paralelna sa ravni α (sa pravom a). Neka je Op poluprava koja je sa jedne strane date ravni π. Da li je poluprava Op paralelna sa ravni π? Razmotriti sve slučajeve.

□ **620.** Koji od navedenih iskaza su tačni:

a) ako $A - B - C$, onda $C - B - A$.

b) Ako $A - B - C$ i $C - B - D$, onda $A - B - D$.

c) Ako su a i b prave ravni α i $a \parallel b$, onda je prava a sa jedne strane prave b.

d) Sve prave koje pripadaju jednoj poluravni paralelne su među sobom.

e) Skup čiji su jedini elementi različite tačke A i B jeste konveksan,

f) Presek dve poluravni je konveksan skup.

g) Svaka poluprava Op, koja je sa jedne strane prave a u ravni α, paralelna je pravoj a.

△ **621.** Koliko konveksnih uglova, manjih od opruženog ugla, određuju tri različite prave koje pripadaju jednoj ravni i seku se u tački A?.

□ **622.** Odrediti koliko konveksnih i koliko nekonveksnih uglova određuju n različitih polupravih sa zajedničkom početnom tačkom O, ako:

a) ne postoje dve poluprave koje pripadaju jednoj pravoj,

b) među uglovima određenim ovim polupravim postoji tačno $2k$ opruženih uglova ($2k < n$).

□ **623.** Konveksan ugao je presek dve komplanarne poluravni. Koliko nekonveksnih uglova može da ima:

a) trougao, b) četvorougao, c) petougao?

□ **624.** Dat je skup $\mathcal{J}$ tačaka od kojih bilo koje tri nisu kolinearne. Odrediti broj elemenata skupa $\mathcal{J}$, ako tačke tog skupa određuju jednak broj trouglova i četvorouglova.

△ **625.** Na koliko je oblasti podeljena ravan sa svojih
a) 3 prave, b) 4 prave, c) 5 pravih,
ako se svake dve prave seku i bilo koje tri prave nemaju tačno jednu zajedničku tačku?

□ **626.** Koliko različitih konveksnih diedara određuju 5 poluravni sa zajedničkom ivicom, ako bilo koje dve poluravni ne pripadaju jednoj ravni?

○ **627.** U skupu od n tačaka ($n \geq 3$) svake tri tačke su kolinearne. Dokazati da svih n tačaka pripadaju jednoj pravoj.

∗ **628.** Devet pravih dele ravan na n delova. Naći sve moguće vrednosti za $n < 19$.

∗ **629.** Da li postoji zatvorena izlomljena linija koja seče svaku svoju duž tačno jedanput a sastoji se od:
a) šest duži; b) sedam duži?

○ **630.** Mogu li se u ravni rasporediti šest tačaka, tako da duži koje ih spajaju nemaju zajedničkih unutrašnjih tačaka i pri tome je svaka tačka spojena sa
a) tri, b) četiri druge tačke?

6.2 PARALELNOST

△ **631.** Dokazati da sve prave koje pripadaju jednoj poluravni imaju isti pravac (paralelne su).

△ **632.** Neka su date prave a i b koje se seku. Dokazati da svaka prava c, koja pripada ravni određenoj pravim a i b, seče bar jednu od datih pravih.

□ **633.** Neka su p i q dve paralelne prave i neka prava p nema zajedničkih tačaka sa ravni α, a prava q i ravan α imaju bar jednu zajedničku tačku. Dokazati da prava q pripada ravni α.

□ **634.** Dokazati da ne postoji prava c paralelna sa dve mimoilazne prave a i b.

□ **635.** Neka su date ravni α i β ($\alpha \cap \beta = p$) i neka je a prava ravni α i b prava ravni β. Ako a seče p u A i b seče p u B, $A \neq B$, onda su prave a i b mimoilazne. Dokazati.

△ **636.** Prava a pripada ravni α, a prava b seče pravu a i ne pripada ravni α. Koji od sledećih iskaza su tačni:
a) Prava b ima sa ravni α bar jednu zajedničku tačku.
b) Prava b ima sa ravni α tačno jednu zajedničku tačku.
c) Prave a i b određuju jednu ravan.
d) Prava a je paralelna sa ravni α.

△ **637.** Data je ravan α, koja sadrži pravu a i tačku B van prave a. Ako prava b prodire α u tački B, dokazati da su prave a i b mimoilazne.

△ **638.** Koliko najviše ravni određuju:
a) paralelne prave a i b i tri tačke M, N, P, koje su van datih pravih a i b;
b) date paralelne prave a, b, c i nekolinearne tačke M, N i P van njih?

□ **639.** Date su različite prave a, b, c, d, takve da je $a \parallel b$, $c \parallel d$, a seče c, b seče d. Koliko ravni određuju ove prave?

△ **640.** Za skup pravih koje imaju tačno jednu zajedničku tačku ili koje su sve paralelne među sobom, kažemo da pripadaju jednom pramenu pravih. Koliko najviše različitih ravni određuje pramen od:
a) 4 prave, b) 6 pravih, c) n pravih?

○ **641.** Ako su a i b dve mimoilazne prave, tada postoje dve paralelne ravni α i β, tako da $\alpha \supset a$ i $\beta \supset b$. Dokazati.

○ **642.** Ako se ravni α i β seku po pravoj p, onda je svaka prava a ravni α ili paralelna sa ravni β ili prodire ravan β u nekoj tački P ($P \in p$). Dokazati.

○ **643.** Neka je prava a paralelna datoj ravni β i neka je α proizvoljna ravan koja sadrži pravu a. Dokazati da je ili $\alpha \parallel \beta$, ili $\alpha \cap \beta \parallel a$.

□ **644.** Ako je A proizvoljna tačka i β proizvoljna ravan, tada postoji tačno jedna ravan α koja sadrži tačku A, i paralelna je ravni β. Dokazati.

○ **645.** Date su dve mimoilazne prave a i b i van njih tačka C. Dokazati da postoji prava s koja sadrži tačku C i seče obe date mimoilazne prave, ili jednu seče, a sa drugom je paralelna. Odrediti skup svih tačaka iz kojih se ne može povući prava koja seče obe date mimoilazne prave.

6.3 PODUDARNOST

△ **646.** Neka je S središte duži AB i C ma koja tačka prave AB. Dokazati da je: $SC = \frac{1}{2}(AC + BC)$ ili $SC = \frac{1}{2}(AC - BC)$ ili $SC = \frac{1}{2}(BC - AC)$.

△ **647.** Duž AB ima dužinu m. Neka je C proizvoljna tačka duži AB. Ako je M središte duži AC i N središte duži BC, odrediti dužinu duži MN.

△ **648.** Na duži AB dužine k data je tačka C takva da rastojanje od središta duži AB do središta duži BC iznosi $\frac{2}{5}k$. Izračunati dužinu duži AC.

□ **649.** Na pravoj a dat je niz od 100 tačaka: $A_1, A_2, \ldots, A_{100}$, a na pravoj b dat je niz od 10 tačaka $B_1, B_2, \ldots, B_{10}$, tako da je rastojanje između svake dve susedne tačke na pravoj a jednako rastojanju svake dve susedne tačke na pravoj b. Neka je dužina duži $B_1B_{10} = 10$. Kolika je dužina duži A_1A_{100}?

△ **650.** Dokazati da simetrale naporednih uglova obrazuju između sebe prav ugao. Da li važi obrnuto: Ako su simetrale dva susedna ugla normalne među sobom onda su ta dva ugla naporedna?

△ **651.** Odrediti ugao koji je od svog komplementnog ugla veći za $1°$.

□ **652.** Odrediti ugao koji je od svog suplementnog ugla manji tačno za onoliko za koliko je veći od svog komplementnog ugla.

□ **653.** Koliki je zbir dva ugla koji su suplementni sa dva komplementna ugla?

○ **654.** Uglovi α i β su komplementni sa dva suplementna ugla φ i θ. Izračunati uglove α, β, φ, θ.

△ **655.** Dokazati da je trougao ABC podudaran sa trouglom $A_1B_1C_1$ ako je: $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ i $CD = C_1D_1$, gde su CD i C_1D_1 težišne linije.

△ **656.** Dokazati da su trouglovi ABC i A_1B_1C podudarni ako su im jednake visine CD i C_1D_1, stranice AB i A_1B_1 i uglovi ACD i $A_1C_1D_1$.

△ **657.** Dokazati da su oštrougli trouglovi ABC i $A_1B_1C_1$ podudarni ako su im jednake visine CD i C_1D_1 i duži $AD = A_1D_1$ i $BD = B_1D_1$.

□ **658.** Dokazati da su dva oštrougla trougla podudarna ako su im jednaki sledeći odgovarajući elementi:

a) a, c, h_c, b) a, b, h_c, c) a, h_b, h_c.

Napomena: $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$, h je visina.

□ **659.** Dokazati da su dva trougla podudarna ako su im jednaki sledeći odgovarajući elementi:

a) a, c, t_a, b), a, b, t_c, c) c, h_c, t_c. (Sa t smo označili težišnu liniju).

△ **660.** Ako je M bilo koja tačka simetrale duži AB, dokazati da je $AM = BM$.

△ **661.** Ako je M bilo koja tačka simetrale Os ugla Opq, $M \neq O$, i P, Q tačke na kracima ugla, takve da su uglovi OPM i OQM pravi, tada je $MP = MQ$ i $OP = OQ$. Dokazati.

□ **662.** Dat je ugao BAC i tačka S simetrale datog ugla ($S \neq A$). Prava n, koja sadrži tačku S i normalna je na simetrali AS, seče krake datog ugla u tačkama B i C. Dokazati da je $AB = AC$.

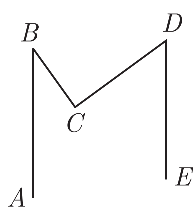
□ **663.** Dokazati da su težišne linije koje odgovaraju kracima jednakokrakog trougla jednake među sobom.

○ **664.** Dat je konveksan ugao pOq, na kraku Op tačke P i P_1 i na kraku Oq tačke Q i Q_1. Ako je $O - P - P_1$, $OP = OQ$, $OP_1 = OQ_1$ i PQ seče P_1Q u S, dokazati da je prava OS simetrala ugla pOq.

○ **665.** Težišne linije koje odgovaraju kracima jednakokrakog trougla seku se u tački koja pripada visini na osnovicu. Dokazati.

□ **666.** Ako je u nekom trouglu težišna linija jednaka polovini naspramne stranice, onda je jedan ugao tog trougla jednak zbiru druga dva ugla. Dokazati.

□ **667.** Prave AB i DE na sl. 20 su paralelne. Ako je $\sphericalangle ABC = 36°17'$ i $\sphericalangle CDE = 52°43'$, izračunati ugao BCD.



Sl. 20

△ **668.** Neka je AB proizvoljna tetiva kruga $k(O, r)$ i S njeno središte. Dokazati da je prava OS simetrala tetive AB.

□ **669.** U jednakokrakom trouglu ABC je $AC = BC$ i ugao na osnovici je dva puta veći nego ugao kod vrha. Simetrala ugla na osnovici seče krak BC u tački M. Dokazati da je $AM = AB = MC$.

□ **670.** U jednakokrakom trouglu ABC osnovica AB je dva puta kraća od kraka. Kroz središte M kraka BC povučena je prava paralelna sa osnovicom i tu pravu seče krak AC u tački N. Dokazati da je prava AM simetrala ugla BMN.

○ **671.** Prava normalna na osnovicu AB jednakokrakog trougla ABC seče krak BC u tački M i produžetak kraka AC u tački N. Dokazati da je trougao CMN jednakokrak.

○ **672.** Dat je trougao ABC. U temenu A konstruisana je duž AD, normalna na AC, tako da je $AD = AC$ i duž AE, normalna na AB, tako da je $AE = AB$. Pri tom su D i B sa raznih strana prave AC, a C i E sa raznih strana prave AB. Dokazati da je $BD = CE$

△ **673.** Simetrale uglova na osnovici nekog jednakokrakog trougla seku naspramne stranice u tačkama M i N. Dokazati da su tačke M i N i presečna tačka ovih simetrala temena novog jednakokrakog trougla.

□ **674.** Iz temena A trougla ABC spuštene su normale na simetrale spoljašnjih uglova kod temena B i C. Ove normale sa pravom BC imaju zajedničke tačke M i N. Dokazati da je duž MN jednaka obimu datog trougla.

○ **675.** Date su kolinearne tačke redom A, B, C, D, E, tako da je C zajedničko središte duži AE i BC. U tački C konstruisana je normala na AE i na toj normali su date tačke K i L, tako da je $C - K - L$. Duži AK i BL imaju zajedničku tačku M, a duži DL i EK imaju zajedničku tačku N. Dokazati da su trouglovi KMN i LMN jednakokraki.

○ **676.** Na pravoj AB data je tačka C, tako da je $A-C-B$ i data je proizvoljna poluprava Cd, koja sa pravom AB određuje par naporednih uglova. Na simetralama Cm i Cn ovih uglova izabrane su tačke M i N, tako da je $MN \parallel AB$. Neka je S presečna tačka prave MN i poluprave Cd. Dokazati da je S središte duži MN.

□ **677.** Da bi trougao bio jednakokrak, potrebno je i dovoljno da on ima dve jednake visine. Dokazati.

○ **678.** Date su u ravni jednake duži AB i CD. Odrediti tačku S u istoj ravni, tako da trouglovi ABS i CDS budu podudarni. Da li su tada podudarni trouglovi ACS i BDS?

○ **679.** Dat je jednakokraki trougao ABC sa osnovicom AB. Na pravoj AC izabrana je proizvoljno tačka D, tako da je $C - A - D$, a zatim tačka E, tako da je $B - E - C$ i $AD = BE$. Dokazati da osnovica AB polovi duž DE.

∗ **680.** Svaka tačka ravni obojena je crnom ili belom bojom. Dokazati da postoji duž dužine 1 u toj ravni, čija su oba kraja obojena istom bojom.

∗ **681.** a) Neka je dat konačan skup P duži prave p sa svojstvom da svake dve imaju neprazan presek. Dokazati da postoji tačka prave p koja pripada svim dužima skupa P.

b) Neka je dat konačan skup P poligona ravni π sa svojstvom da svaka dva imaju neprazan presek. Dokazati da postoji prava q, paralelna datoj pravoj p ravni π, koja seče sve poligone skupa P.

□ **682.** U trouglu ABC je $BC > AC$. Na stranici BC data je tačka D, takva da je $BD = BC - AC$. Dokazati da je prava AD normalna na simetralu ugla ACB.

○ **683.** Simetrale uglova ABC i ACB trougla ABC seku se u S. Prava s, koja sadrži tačku S i paralelna je stranici BC, seče stranice AB i AC redom u tačkama D i E. Dokazati da je $BD + CE = DE$.

6.4 NORMALNE PRAVE I RAVNI

Ako je prava n normalna na ravan α, onda je n normalna na svakoj pravoj ravni α, koja sadrži presečnu tačku prave n i ravni α.

Ako je prava p normalna na dve prave a i b koje se seku, onda je p normalna i na ravan određenu pravim a i b.

Ravan α je normalna na ravan β ako je svaka prava ravni α, koja je normalna na presečnu pravu ovih ravni, normalna i na ravan β.

Kroz datu tačku postoji tačno jedna prava normalna na datu ravan.

△ **684.** Neka su a, b i c tri prave iste ravni. Ako su prave a i b paralelne među sobom i prava c je normalna na pravoj a, dokazati da je prava c normalna i na pravoj b.

□ **685.** Dve ravni, normalne na istoj pravoj, paralelne su među sobom. Dokazati.

□ **686.** Ako je neka ravan normalna na jednoj od dve paralelne prave, onda je ona normalna i na drugoj pravoj. Dokazati.

△ **687.** Ako je neka prava normalna na jednoj od dve paralelne ravni, onda je ona normalna i na drugoj ravni. Dokazati.

○ **688.** Ravan i prava koje su normalne na istoj pravoj, paralelne su među sobom. Dokazati.

□ **689.** Ako je prava a paralelna sa ravni α, a prava b normalna na ravni α i seče pravu a, onda su prave a i b normalne među sobom. Dokazati.

△ **690.** Tačka S je središte duži AB i duži CD. Van ravni određene dužima AB i CD data je tačka M, takva da je $AM = BM$ i $CM = DM$. Dokazati da je prava SM normalna na ravni određenoj dužima AB i CD.

○ **691.** Data je ravan α i tačka P. Dokazati da postoji jedna i samo jedna prava p, koja sadrži tačku P i normalna je na ravan α.

○ **692.** Ako je prava a normalna na ravan β, onda je svaka ravan koja sadrži pravu a normalna na ravan β. Dokazati.

□ **693.** Ako su dve ravni normalne na ravan π, onda su ove dve ravni paralelne među sobom, ili se seku po pravoj koja je normalna na ravan π. Dokazati.

□ **694.** Ako je a data prava, α data ravan i a nije normalna na α, tada postoji tačno jedna ravan β, koja sadrži pravu a i normalna je na α. Dokazati.

○ **695.** Tri različite prave a, b, c ravni α imaju zajedničku tačku N. Prava n sadrži tačku N i sa pravim a, b, c određuje jednake uglove. Dokazati da je prava n normalna na ravan α.

SEDMA GLAVA

7. VEKTORI

7.1 VEKTORI U GEOMETRIJI

U ovoj glavi *model vektora je orijentisana duž.*

Dva vektora $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ su jednaki ako je $AB = CD$ i $AB \parallel CD$ i tačke B i D su sa iste strane prave AC (tj. ako imaju jednake intenzitete, pravce i smerove). Drugim rečima ($\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$) $\Longleftrightarrow$ (četvorougao $ABDC$ je paralelogram).

Ako je $A = B$, onda je $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ – nula vektor.

Vektor $\vec{a}_0 = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ je *ort* (jedinični vektor) vektora $\vec{a}$.

Za bilo koje tri tačke A, B, C, važi $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Ako je četvorougao $ABCD$ paralelogram, tada je: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$.

Pravilo poligona za sabiranje više vektora: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\cdots+\overrightarrow{KL}+\overrightarrow{LM} = \overrightarrow{AM}$. Ako je $M = A$, tj. ako nadovezani vektori zatvaraju mnogougao, njihov zbir je $\vec{0}$. Na primer: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$ (vektori zatvaraju trougao).

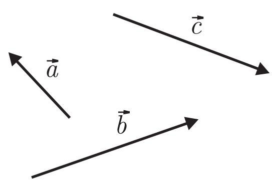
Ako je $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD} = \vec{0}$, onda su $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ *suprotni vektori.* Na primer, suprotni su vektori $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BA}$.

Ako je $\vec{a} = k \cdot \vec{b}$, $\vec{a} \neq \vec{0} \neq \vec{b}$ i $k \neq 0$, tada su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ paralelni.

$k(\vec{a} + \vec{b}) = k \cdot \vec{a} + k \cdot \vec{b}$ (aksioma)

△ **696.** Date su nekolinearne tačke A, B i C. Nacrtati vektor $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CA}$, a zatim dokazati da je dobijeni vektor jednak vektoru $2\overrightarrow{AB}$.

△ **697.** Na slici desno su dati vektori $\vec{a}, \vec{b}$ i $\vec{c}$. Konstruisati vektor: $\vec{m} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$.



△ **698.** Dati su proizvoljni vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Konstruisati vektore: $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$, $\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$, $\vec{b}-\vec{a}-\vec{c}$.

□ **699.** Date su tačke A, B, C, D, O, takve da je O presečna tačka duži AC i BD i $\overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{CD}$. Dokazati da je $\overrightarrow{OA} = k \cdot \overrightarrow{OC}$ i $\overrightarrow{OB} = k \cdot \overrightarrow{OD}$.

□ **700.** Vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ nisu kolinearni. Koji od sledećih vektora su kolinearni:

a) $\vec{m}_1 = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$, $\vec{m}_2 = 2\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{m}_3 = \vec{a} + 2\vec{b}$, $\vec{m}_4 = 3\vec{a} + 2\vec{b}$, $\vec{m}_5 = 4\vec{a} + 2\vec{b}$.

b) $\vec{n}_1 = \vec{a} + 3\vec{b}$, $\vec{n}_2 = 3\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{n}_3 = \vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$, $\vec{n}_4 = \vec{b} + 3\vec{a}$, $\vec{n}_5 = 3\vec{a} + 3\vec{b}$?

△ **701.** Tačka M je središte stranice AD pravougaonika $ABCD$. Odrediti vektor $\overrightarrow{MB}$, ako je $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ i $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$.

△ **702.** Dat je paralelogram $ABCD$. Na pravoj BC data je tačka E, takva da je B središte duži CE. Ako je $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{p}$ i $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{q}$, odrediti vektore: $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{CE}$ i $\overrightarrow{DE}$.

□ **703.** Dokazati da su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ paralelni, ako je $\vec{a} = 6\vec{m} - 15\vec{n} - 3\overrightarrow{p}$ i $\vec{b} = 2\overrightarrow{p} + 10\vec{n} - 4\vec{m}$, gde su $\vec{m}$, $\vec{n}$, $\overrightarrow{p}$ proizvoljni vektori.

○ **704.** O vektorima $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ poznato je da je $\vec{a} = \vec{b} - k\vec{c}$ i $\vec{b} = \vec{c} + k\vec{a}$, $k \neq 1$. Dokazati da su ovi vektori kolinearni.

□ **705.** U proizvoljnom trouglu ABC neka su M, N, P središta stranica redom: BC, CA, AB. Dokazati da je zbir vektora $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{BN}$, $\overrightarrow{CP}$ jednak $\vec{0}$.

○ **706.** Dokazati: $(\forall A, B, C, D)\ (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$.

△ **707.** Ako su $\vec{m}$, $\vec{n}$ i $\overrightarrow{p}$ vektori uzastopnih stranica trougla i ako:

$$\vec{m} = 3\vec{a} - 2\vec{c} + 4\vec{d},\ \ \vec{n} = 2\vec{b} - \vec{a} - 3\vec{d},\ \text{i}\ \overrightarrow{p} = 3\vec{c} - \vec{a} - \vec{b},$$

dokazati da postoji četvorougao čije su stranice vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ i $\vec{d}$.

△ **708.** Ako je M središte date duži AB i S proizvoljna tačka, dokazati da je $\overrightarrow{SM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB})$.

△ **709.** Tačke A_1, B_1 i C_1 su središta stranica BC, CA i AB trougla ABC. Dokazati da važe jednakosti

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AA_1},\ \ \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BB_1}\ \text{i}\ \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{CC_1}.$$

□ **710.** Dat je četvorougao $ABCD$, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, i proizvoljna tačka M. Ako je O tačka preseka dijagonala četvorougla, dokazati da je:

$$\overrightarrow{MO} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}).$$

□ **711.** Ako u četvorouglu $ABCD$ važi: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, dokazati da je

$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{BC}.$$

△ **712.** Dat je proizvoljan četvorougao $ABCD$ i tačka O. Ako su dati vektori $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ i $\overrightarrow{OD} = \vec{d}$ izračunati vektore stranica i dijagonala datog četvorougla.

□ **713.** Dat je četvorougao $ABCD$, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, i proizvoljna tačka O. Dokazati da je $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$. Važi li obrnuto?

□ **714.** U ravni trougla ABC data je tačka O. Ako su A_1, B_1 i C_1 redom središta stranica BC, CA i AB dokazati da je: $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

○ **715.** Neka su A, B, C, D četiri proizvoljne tačke. Ako je E središte duži AC i F središte duži BD, dokazati da je $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{EF}$. Šta se odavde može zaključiti ako je $ABCD$ trapez?

□ **716.** Tačka E je središte stranice AB proizvoljnog četvorougla $ABCD$. Dati su vektori: $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{BC}$ i $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AD}$. Ako je tačka S središte stranice CD, dokazati da su tačke F, G i S kolinearne.

□ **717.** Date su dve prave a i b koje se seku i vektor $\vec{m}$. Konstruisati na pravoj a vektor $\vec{a}$ i na pravoj b vektor $\vec{b}$, tako da bude:

a) $\vec{m} = \vec{a} + \vec{b}$; b) $\vec{m} = \vec{a} - \vec{b}$; c) $\vec{m} = \dfrac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b})$; d) $\vec{m} = \dfrac{1}{3}\vec{a} - \dfrac{1}{2}\vec{b}$.

∗ **718.** Dat je pravilan šestougao $ABCDEF$ i M je središte duži DE, N središte duži AM, P središte duži BC. Razložiti vektor $\overrightarrow{NP}$ po vektorima $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AF}$, tj. izraziti vektor $\overrightarrow{NP}$ preko $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AF}$.

∗ **719.** Neka su K, L, M i N središta stranica AB, BC, CD i DA četvorougla $ABCD$. Dokazati da se duži MK i NL seku u tački P, koja polovi svaku od njih.

∗ **720.** Neka je $A_1A_2A_3A_4A_5$ pravilni petougao i O njegov centar. Dokazati da je $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3} + \overrightarrow{OA_4} + \overrightarrow{OA_5} = \vec{0}$.

∗ **721.** Dat je pravilni petougao $ABCDE$ i proizvoljna tačka T u prostoru. Ako je O centar petougla, dokazati da je $5\overrightarrow{TO} = \overrightarrow{TA} + +\overrightarrow{TB} + \overrightarrow{TC} + \overrightarrow{TD} + \overrightarrow{TE}$.

△ **722.** Koristeći se vektorima dokazati poznatu osobinu trougla: "Ako su M i N redom središta stranica BC i AC trougla ABC, tada je duž MN (srednja linija trougla) paralelna sa stranicom AB i $MN = \dfrac{1}{2}AB$".

○ **723.** Neka su $ABCD$ i $A_1B_1C_1D_1$ dva četvorougla, takva da je $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ i $\overrightarrow{B_1C_1} = \overrightarrow{A_1D_1}$ i neka su M, N, P i Q redom središta duži AA_1, BB_1, CC_1 i DD_1. Dokazati da je četvorougao $MNPQ$ paralelogram.

□ **724.** Dokazati da je moguće konstruisati petougao čije su stranice redom jednake dijagonalama datog petougla $ABCDE$.

∗ **725.** Nad stranicama trougla ABC dati su proizvoljno paralelogrami ABB_1A_2, BCC_1B_2 i ACC_2A_1. Da li postoji trougao kome su stranice podudarne dužima A_1A_2, B_1B_2 i C_1C_2?

∗ **726.** Dve normalne prave p i q, koje se seku u tački M, seku dati krug sa centrom O u tačkama A, B, C, D. Dokazati da je $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{OM}$.

$*$ **727.** U konveksnom petouglu $ABCDE$ tačke M, N, P, Q su središta redom stranica AB, BC, CD, DE. Dokazati da je duž, koja je određena središtima duži MP i NQ, paralelna sa AE i jednaka $\frac{1}{4}AE$.

$*$ **728.** Kroz proizvoljnu tačku P na stranici AB trougla ABC konstruisana je prava paralelna sa CD, gde je D središte duži AB koja seče AC i BC u tačkama A_1 i B_1. Dokazati da je $\overrightarrow{PA_1} + \overrightarrow{PB_1} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$.

$*$ **729.** Dat je trougao ABC. Na polupravim AB, AC, BC, BA, CA i CB određene su; respektivno, tačke Q, K, L, M, N i P, takve da je $AQ = CP = AC$, $AK = BL = AB$ i $BM = CN = BC$. Dokazati da su prave MN, PQ i LK paralelne.

○ **730.** Neka su tačke M, N, P, Q, R, S središta stranica proizvoljnog šestougla. Dokazati da je: $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RS} = \vec{0}$.

○ **731.** Dat je trougao ABC i na stranici BC tačka V, takva da je $\dfrac{BV}{CV} = \dfrac{m}{n}$. Označimo vektore: $\overrightarrow{AB} = \vec{c}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$ i $\overrightarrow{AV} = \vec{v}$. Izraziti vektor $\vec{v}$ preko vektora $\vec{b}$ i $\vec{c}$.

○ **732.** Tačke A, B, C su kolinearne ako i samo ako za proizvoljnu tačku O važi jednakost: $\overrightarrow{OC} = k \cdot \overrightarrow{OA} + (1-k) \cdot \overrightarrow{OB}$. Dokazati!

○ **733.** Ako su date tačke A, B, C, S, takve da je $A-C-B$ i $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC} = \vec{0}$, dokazati da su tačke A, B, C, S kolinearne.

○ **734.** Neka je $7\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{CB}$ i O tačka van prave AB. Izraziti vektor $\overrightarrow{OS}$ preko vektora $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ i $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, ako tačka S zadovoljava uslov: $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} = \vec{O}$.

○ **735.** Na stranici BC trougla ABC data je tačka M, a na stranici AB data je tačka N. Duži AM i CN se seku u tački P. Izračunati $AP : PM$ i $CP : PN$ ako je:

a) $BM = CN$ i $AN = 2BN$; b) $CM = 3BM$ i $AB = 2BN$;

c) $7BM = 3CM$ i $3BN = 2AN$.

OSMA GLAVA

8. PRIMENE PODUDARNOSTI

8.1 TROUGAO

Uglovi sa normalnim kracima su ili jednaki (ako su oba oštra, ili oba tupa, ili oba prava) ili suplementni.

Spoljašnji ugao u trouglu jednak je zbiru dva nesusedna unutrašnja ugla: na primer: $\alpha_1 = \beta + \gamma$.

Zbir unutrašnjih uglova u trouglu jednak je opruženom uglu: $\alpha + \beta + \gamma = 180°$. Zbir spoljašnjih uglova jednak je punom uglu.

Nejednakosti trougla: svaka stranica trougla je veća od razlike, a manja od zbira druge dve stranice. Na primer: $AB + BC > AC$. (Za svake tri tačke A, B, C važi: $AB + BC \geq AC$, a znak "=" važi ako i samo ako je $A - B - C$.)

Naspram veće stranice trougla veći je ugao i obrnuto.

Unutrašnji uglovi jednakostraničnog trougla su $60°$.

Pravougli trougao kome je hipotenuza dva puta veća od manje katete je polovina jednakostraničnog trougla, pa su mu oštri uglovi $30°$ i $60°$.

Hipotenuzina težišna linija jednaka je polovini hipotenuze.

Srednja linija trougla (duž koja spaja središta dveju stranica) paralelna je naspramnoj stranici i jednaka polovini te stranice.

Značajne tačke trougla su: *centar upisanog kruga* (presečna tačka simetrala unutrašnjih uglova), *centar opisanog kruga* (presečna tačka simetrala stranica), *ortocentar* (presečna tačka visina) i *težište* (presečna tačka težišnih linija).

Težište deli težišne linije u razmeri 2 : 1.

△ **736.** Kroz bilo koju tačku P osnovice jednakokrakog trougla ABC konstruisana je normala na osnovicu AB, koja seče prave AC i BC u tačkama M i N. Dokazati da je zbir $PM + PN$ konstantan.

△ **737.** Na produžetku stranice AB trougla ABC, iza B u odnosu na A data je tačka M, tako da je $BM = BC$. Dokazati da je prava MC paralelna simetrali ugla ABC.

△ **738.** U raznostranom trouglu ABC poluprava Bp polovi ugao ABC. Prava m kroz C, paralelna sa Bp, seče AB u tački D. Dokazati da je trougao BCD, jednakokrak.

△ **739.** Dokazati da je zbir dva spoljašnja ugla na krajevima bilo koje stranice trougla veći od opruženog ugla.

△ **740.** Simetrala ma kojeg unutrašnjeg ugla trougla obrazuje sa naspramnom stranicom dva ugla čija je razlika jednaka razlici druga dva unutrašnja ugla trougla. Dokazati.

△ **741.** Dokazati da je trougao pravougli ako i samo ako je jedan njegov ugao jednak zbiru ili razlici druga dva ugla.

□ **742.** U trouglu ABC simetrala ugla BAC seče stranicu BC u tački D. Na pravoj AC data je tačka E, takva da je $\sphericalangle CDE = \sphericalangle BAC$. Dokazati da je $BD = DE$.

△ **743.** Unutrašnji uglovi trougla jednaki su uglovima 4φ, 5φ, 6φ. Izračunati u stepenima utrašnje uglove ovog trougla.

△ **744.** Spoljašnji uglovi trougla jednaki su uglovima 13θ, 20θ i 21θ. Izračunati unutrašnje i spoljašnje uglove ovog trougla.

□ **745.** Na stranici AC oštrouglog trougla ABC date su tačke D i E, takve da je duž BD visina trougla ABC, a prava BE simetrala ugla ABC. Na stranici BC data je tačka F, takva da je duž EF visina trougla BCE. Ako je $\sphericalangle DBE = 20°$ i $\sphericalangle BEF = 50°$, izračunati unutrašnje uglove trougla ABC. Razlikovati slučajeve $A - E - D$ i $A - D - E$.

□ **746.** U trouglu ABC sa različitim stranicama, na najvećoj stranici AB data je duž BD, $BD = BC$. Dokazati da prava CD deli ugao ACB na dva ugla, od kojih je jedan jednak poluzbiru, a drugi polurazlici uglova BAC i ACB.

△ **747.** Simetrala ugla na osnovici jednakokrakog trougla seče bočnu stranicu pod uglom jednakim uglu na osnovici. Odrediti uglove tog trougla.

△ **748.** Ako je zbir dva spoljašnja ugla trougla $270°$, onda je taj trougao pravougli. Dokazati.

△ **749.** Simetrale dvaju unutrašnjih uglova trougla seku se pod uglom koji je jednak trećem unutrašnjem uglu datog trougla. Odrediti taj treći ugao.

△ **750.** Ako su AD i BE visine trougla ABC, dokazati da je $\sphericalangle DAC = \sphericalangle EBC$.

△ **751.** Hipotenuzina visina deli prav ugao na dva ugla, od kojih je jedan jednak jednom, a drugi drugom oštrom uglu trougla. Dokazati.

∗ **752.** U pravouglom trouglu ABC ($\sphericalangle C = 90°$) kontruisane su simetrale AD i BE uglova u temenima A i B. Iz tačaka D i E konstruisane su normale DN i EM na hipotenuzu. Dokazati da je $\sphericalangle MCN = 45°$.

∗ **753.** Neka su A', B' i C' redom središta stranica BC, CA i AB trougla ABC i D podnožje visine iz A. Dokazati da je $\sphericalangle DC'A' = \sphericalangle DB'A' = \sphericalangle B - \sphericalangle C$ ($AC > AB$).

□ **754.** Spoljašnji ugao jednakokrakog trougla je $72°$. Izračunati ugao između visine i simetrale unutrašnjeg ugla, ako one sadrže isto teme osnovice.

□ **755.** U trouglu ABC simetrale uglova γ i β_1 imaju zajedničku tačku D. Dokazati da je $\sphericalangle BDC = \dfrac{\alpha}{2}$.

∗ **756.** Neka je D tačka na stranici BC datog trougla ABC, takva da je DC jednako $2BD$. Odrediti ostale uglove trougla, ako je $\sphericalangle ABC = 45°$, $\sphericalangle ADC = 60°$.

△ **757.** Hipotenuzina težišna linija jednaka je polovini hipotenuze. Dokazati. (Drugim rečima, oko pravouglog trougla može se opisati krug, čiji je centar središte hipotenuze).

△ **758.** U pravouglom trouglu hiputenuzina visina i hipotenuzina težišna linija obrazuju sa katetama jednake uglove. Dokazati.

△ **759.** Simetrala pravog ugla proizvoljnog pravouglog trougla polovi ugao koji obrazuju visina i težišna linija iz temena pravog ugla. Dokazati.

□ **760.** Na najvećoj stranici BC tupouglog trougla ABC date su tačke D i E takve da je $\sphericalangle BAD = \sphericalangle ACB$ i $\sphericalangle CAE = \sphericalangle ABC$. Dokazati da je trougao ADE jednakokrak.

○ **761.** Jedan od unutrašnjih uglova trougla je $75°$. Koliki su ostali unutrašnji uglovi datog trougla, ako postoji prava koja sadrži teme datog ugla i deli dati trougao na dva jednakokraka trougla. (Dva rešenja!)

□ **762.** Na hipotenuzi BC pravouglog trougla ABC date su tačke D i E, takve da je $BE = AB$ i $CD = AC$. Izračunati ugao DAE.

□ **763.** U trouglu ABC u tački H seku se visine AD i CE. Ako je $CH = AB$, izračunati ugao ACB.

△ **764.** U jednakostraničnom trouglu ABC, na produžetku visine BD data je tačka E takva da je $D - B - E$ i $BE = AC$. Dokazati da su uglovi ABC i AEC komplementni.

△ **765.** Na produžecima stranica jednakostraničnog trougla ABC date su tačke K, L, M, tako da je $A - B - K$, $B - C - L$, $C - A - M$ i $BK = CL = AM$. Dokazati da je trougao KLM jednakostraničan.

○ **766.** Neka su C i D tačke duži AB, takve da je $A - C - D$ i $AC = CD = BD$, i neka su E i F tačke sa iste strane prave AB, takve da su trouglovi ADF i DBE jednakostranični. Dokazati da je trougao CEF jednakastraničan.

○ **767.** Za kakav trougao važi jednakost: $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$, gde su a, b, c dužine stranica?

○ **768.** U unutrašnjosti jednakostraničnog trougla ABC izabrana je tačka O, tako da je $\sphericalangle AOC = 150°$. Dokazati da je trougao, čije su stranice jednake dužima OA, OB i OC, pravougli.

○ **769.** U trouglu ABC je $\sphericalangle ACB = 30°$. Neka je D tačka sa one strane prave AB sa koje nije C, takva da je trougao ABD jednakostraničan. Dokazati da postoji pravougli trougao čije su stranice jednake dužima CA, CB i CD.

□ **770.** U pravouglom trouglu jedan od uglova je $30°$. Ako je tačka M središte hipotenuze i N tačka katete takva da je prava MN normalna na hipotenuzu, onda je duž MN tri puta manja od veće katete datog trougla. Dokazati.

$*$ **771.** Trougao ABC ima uglove $\beta = 15°$ i $\gamma = 30°$. Prava koja sadrži tačku A i normalna je na AB seče duž BC u tački D. Dokazati da je $2AC = BD$.

○ **772.** U pravouglom trouglu jedan oštar ugao je pet puta veći od drugog oštrog ugla. Dokazati da je hipotenuza ovog trougla četiri puta veća od svoje visine.

$*$ **773.** U jednakokrakom trouglu ABC, kome je ugao pri vrhu $\sphericalangle ACB = 80°$, data je tačka 0, takva da je $\sphericalangle BAO = 10°$ i $\sphericalangle ABO = 30°$. Izračunati ugao ACO.

□ **774.** Ugao kod vrha C jednakokrakog trougla ABC podudaran je zbiru uglova koje sa osnovicom obrazuju visine iz temena A i B. Dokazati.

□ **775.** Ugao između hipotenuzine visine i simetrale pravog ugla je 8°. Naći oštre uglove datog pravouglog trougla.

□ **776.** U jednakokrakom trouglu ABC sa osnovicom AC, prava CD je simetrala ugla ACB ($D \in AB$). Prava koja sadrži tačku D i paralelna je osnovici ima sa visinom BM zajedničku tačku N. Prava d koja sadrži tačku D i normalna je na CD, ima sa pravom AC zajedničku tačku F. Dokazati da je $DN = \frac{1}{4}CF$.

□ **777.** U trouglu ABC data je visina CE. Simetrala spoljašnjeg ugla kod temena C seče pravu AB u tački D. Ako je $CE = \frac{1}{2}CD$, onda je $\alpha - \beta = 60^\circ$. Dokazati.

∗ **778.** U jednakokrakom trouglu ABC ugao pri vrhu C je 108°. Na kraku BC data je tačka E, takva da prava AE polovi ugao BAC. Ako je duž CD visina ovog trougla, dokazati da je $AE = 2CD$.

∗ **779.** U trouglu ABC je $\sphericalangle BAC = 20^\circ$ i $AB = AC$. Date su tačke: $D \in AB$ i $E \in AC$, takve da je $\sphericalangle BCD = 60^\circ$ i $\sphericalangle CBE = 50^\circ$. Izračunati uglove CDE i BED.

∗ **780.** U trouglu ABC uglovi kod temena B i C su 40°. Neka je D tačka prave AB, iza B u odnosu na A, takva da je $AD = BC$. Izračunati uglove trougla ADC.

○ **781.** U pravouglom trouglu ABC tačka D je središte hipotenuze AB. Prava d, $d \ni D$, normalna na CD, seče dužu katetu AC u E i produžetak katete BC u F. Ako je tačka M središte duži EF, dokazati da je $CM \perp AB$.

○ **782.** Ako je u trouglu ABC razlika uglova CAB i CBA prav ugao, tada su podudarni među sobom odsečci simetrala unutrašnjeg i spoljašnjeg ugla kod temena C, uzeti od temena C do preseka M i N sa pravom AB. Dokazati.

783. Izračunati uglove trougla ABC ako se zna da:

□ a) visina i težišna linija iz temena C dele ugao ABC na tri jednaka dela.

○ b) težišna linija, simetrala ugla i visina iz temena C dele ugao ACB na četiri jednaka dela.

○ **784.** Prave a i b su uzajamno normalne, a prava c sa svakom od njih određuje ugao od 60°. Izračunati ugao između prave c i ravni određene pravim a i b.

△ **785.** Na stranicama AB, BC, CA jednakostraničnog trougla ABC odrediti (konstruisati) redom tačke X, Y, Z, tako da je $XY \perp BC$, $YZ \perp CA$ i $ZX \perp AB$. Dokazati da je trougao XYZ jednakostraničan.

∗ **786.** Tačka D je središte osnovice AB jednakokrakog trougla ABC, a M je središte kraka BC. Krug opisan oko trougla ACM seče visinu CD u K. Dokazati da je $CK = \frac{3}{2}r$, gde je r poluprečnik kruga opisanog oko trougla ABC.

□ **787.** U trouglu ABC je $\alpha - \beta = 2\gamma$.

a) Dokazati da je ugao α tup.

b) Iza A u odnosu na B data je tačka E, takva da je $EC = AC$. Dokazati da je prava CA simetrala ugla ECB.

∗ **788.** Dato je šest komplanarnih tačaka, od kojih bilo koje tri nisu kolinearne. Dokazati da postoji trougao čija su temena neke od datih tačaka, i koji ima bar jedan ugao od 30° ili manji od 30°.

○ **789.** Neka su M i N središta stranica AB i AC trougla ABC i neka su $MP = \dfrac{AB}{2}$ i $NQ = \dfrac{AC}{2}$ normale na stranicama AB i AC, koje su van trougla ABC. Ako je tačka L središte stranice BC, dokazati da je $LP = LQ$.

○ **790.** Dat je trougao ABC i van trougla u istoj ravni tačke P, Q i R, takve da su stranice datog trougla osnovice jednakokrakih pravouglih trouglova ABR, BCQ i ACP. Dokazati da je $BP = QR$ i $BP \perp QR$.

△ **791.** Visina je manja od svake stranice sa kojom ima zajedničko teme i sa kojom se ne poklapa. Zbir svih visina trougla manji je od obima tog trougla. Dokazati.

△ **792.** Dokazati da je svaka stranica trougla manja od poluobima trougla.

△ **793.** Naći sve trouglove kojima je obim 10 cm, a dužine stranica su u centimetrima izražene celim brojevima.

□ **794.** Simetrala unutrašnjeg ugla trougla deli naspramnu stranicu na dva dela, od kojih je svaki manji od svoje susedne stranice. Dokazati.

∗ **795.** U unutrašnjosti trougla ABC izabrana je proizvoljna tačka M. Dokazati da je: a) $\sphericalangle AMB > \sphericalangle ACB$; b) $AM + MB < AC + CB$.

○ **796.** U trouglu iz temena C ugla kojeg obrazuju dve nepodudarne stranice, date su simetrala CD ugla i težišna linija CM. Dokazati da je $CM > CD$.

□ **797.** U ravni trougla ABC, izvan trougla, data je tačka P. Dokazati da je zbir duži PA, PB i PC veći od poluobima trougla,

□ **798.** Dokazati da je težišna linija manja od:
a) poluobima trougla, b) poluzbira susednih stranica.

○ **799.** Dokazati da je zbir težišnih linija trougla veći od poluobima tog trougla.

○ **800.** Neka je M proizvoljna tačka u trouglu ABC. Dokazati da je zbir duži AM, BM i CM manji od obima, a veći od poluobima trougla ABC.

○ **801.** Ako su a, b, c stranice trougla, dokazati da važi nejednakost:
$abc > (a + b - c)(a + c - b)(b + c - a)$.

□ **802.** U jednakokrakom trouglu ABC tačka D je središte osnovice BC, a M je proizvoljna tačka kraka AC. Dokazati da je $|DB - DM| < AB - AM$.

∗ **803.** Na simetrali spoljašnjeg ugla kod temena C trougla ABC izabrana je proizvoljna tačka M. Dokazati da je $MA + MB > AC + BC$.

□ **804.** U trouglu ABC prava s je simetrala spoljašnjeg ugla kod temena A. Neka je B podnožje normale iz B na s. Dokazati da je: $BB_1 + CB_1 > BA + CA$.

○ **805.** Od toga, da li je najveća stranica trougla veća, manja ili jednaka dvostrukoj odgovarajućoj težišnoj liniji, zavisi da li je taj trougao tupougli, oštrougli ili pravougli. Dokazati.

○ **806.** Na osnovici AB jednakokrakog trougla ABC date su tačke M i N, takve da je $AM = MN = NB$. Dokazati da je ugao MCN veći od uglova ACM i BCN.

∗ **807.** Neka je P tačka u oštrouglom trouglu ABC. Posmatrajmo od stojanje tačke P od tačaka na obimu trougla i obeležimo sa d i D najmanje, odnosno najveće od njih. Dokazati da je $2d \leq D$. Kada važi znak jednakosti?

□ **808.** U trouglu dve visine nisu manje od svoje odgovarajuće stranice. Kakav je taj trougao?

□ **809.** Ako se u trouglu poklapaju bilo koje dve od četiri značajne tačke, taj trougao je jednakostraničan i poklapaju se sve četiri značajne tačke. Dokazati. (Ta tačka je centar jednakostraničnog trougla).

□ **810.** Centar upisanog kruga u trouglu najbliži je temenu najvećeg ugla trougla. Dokazati.

○ **811.** U trouglu ABC centri upisanog i opisanog kruga su simetrični u odnosu na stranicu AB. Izračunati unutrašnje uglove trougla ABC.

○ **812.** Prava m, koja polovi stranice AC i BC trougla ABC, seče simetralu ugla BAC u tački S. Dokazati da je $\sphericalangle ASC = 90°$.

△ **813.** Dat je pravougli trougao ABC i središte D hipotenuze AC. Neka je K dodirna tačka stranice AD trougla ABD sa krugom koji je upisan u ovaj trougao. Odrediti uglove trougla ABC, ako je tačka K središte duži AD.

○ **814.** Dat je trougao ABC. Iza A u odnosu na B i u odnosu na C, date su tačke K i L, takve da je $AK = AL = BC$, zatim iza B u odnosu na C i u odnosu na A, date su tačke M i N, takve da je $BM = BN = AC$ i iza C u odnosu na A i u odnosu na B, date su tačke P i Q, takve da je $CP = CQ = AB$. Tačke K, L, M, N, P i Q predstavljaju temena jednog šestougla.

a) Dokazati da su po dve suprotne stranice šestougla paralelne među sobom.

b) Dokazati da je centar kruga upisanog u trougao ABC, ujedno i centar kruga opisanog oko šestougla $KLMNPQ$.

□ **815.** Ako visina h_a i osnovica AB jednakokrakog trougla ABC obrazuju ugao jednak trećini ugla BAC, onda je osnovica podudarna odsečku CH visine h_c, gde je tačka H ortocentar trougla ABC. Dokazati.

△ **816.** U ravni su date četiri različite tačke A, B, C i D, takve da je $AB \perp CD$ i $AC \perp BD$. Dokazati da je $AD \perp BC$.

△ **817.** U pravouglom trouglu ABC konstruisana je hipotenuzina visina CD. Tačka M je središte duži CD, a tačka N središte duži BD. Dokazati da je prava AM normalna na pravoj CN.

○ **818.** U jednakokrakom trouglu ABC tačka M je središte osnovice AB. Neka je N tačka kraka BC, takva da je $MN \perp BC$ i neka je S središte duži MN. Dokazati da je prava AM normalna na CS.

△ **819.** Ako su AD i BE visine trougla ABC, dokazati da je

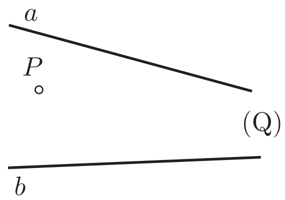
$$\sphericalangle ACB = \sphericalangle ABE + \sphericalangle BAD.$$

○ **820.** Prave a i b seku se "van crteža" u tački Q. Povući pravu kroz datu tačku P i "nedostižnu" tačku Q, sl. 21.

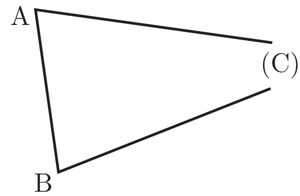
○ **821.** Konstruisati težište T trougla na sl. 22. (Teme C nije na crtežu).

□ **822.** Tačka T je težište trougla ABC. Dokazati da je: $\overrightarrow{TA} + \overrightarrow{TB} + \overrightarrow{TC} = \overrightarrow{0}$.

□ **823.** Dat je trougao ABC sa težištem T i proizvoljna tačka M u istoj ravni. Ako je $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{c}$, dokazati da je $\overrightarrow{MT} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c})$.



Sl. 21



Sl. 22

○ **824.** Dokazati da za ma kakva dva trougla $A_1B_1C_1$ i $A_2B_2C_2$ sa težištima T_1 i T_2 važi jednakost: $\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{B_1B_2} + \overrightarrow{C_1C_2} = 3\overrightarrow{T_1T_2}$.

○ **825.** Odrediti uglove između vektora $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ i $\overrightarrow{OC}$, ako tačke A, B, C pripadaju krugu sa centrom O i ako je $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{0}$.

○ **826.** Na stranicama redom: BC, CA, AB, date su tačke A_1, B_1, C_1, koje se ne poklapaju s temenima trougla ABC. Dokazati da središta duži: AA_1, BB_1, CC_1 ne pripadaju jednoj pravoj.

○ **827.** U kakvom trouglu su središta svih visina kolinearne tačke?

○ **828.** Utvrditi da je podnožje bilo koje visine trougla bliže kraćoj susednoj stranici, pa dokazati da je ortocentar najbliži temenu naspram najduže stranice.

○ **829.** U svakom trouglu simetrala ugla je između visine i težišne linije. Dokazati.

□ **830.** Dat je jednakokraki trougao ABC, sa osnovicom BC. Neka su proizvoljno izabrane tačke M, N na kracima redom AB i AC. Konstruisana je prava s kroz središte S duži MN, paralelno sa BC. Kraci na pravoj s odsecaju duž KL. Dokazati da je normalna projekcija duži MN na pravu s jednaka duži KL.

○ **831.** U ravni proizvoljnog trougla ABC date su tačke D i E, takve da su trouglovi ACD i BCE jednakokraki pravougli, sa hipotenuzama CD i CE. Dokazati da AE, BD i visina CF datog trougla predstavljaju tri prave jednog pramena.

∗ **832.** Tačke A, B i C su težišta trouglova OMN, ONP i OMP. Dokazati da težišta trouglova MNP i ABC i tačka O pripadaju jednoj pravoj.

∗ **833.** Neka je O centar opisanog kruga, a H ortocentar trougla ABC. Dokazati da je: $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

∗ **834.** Date su proizvoljne različite tačke A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 i A_6. U trouglovima $A_6A_1A_2$, $A_1A_2A_3$, $A_2A_3A_4$, $A_3A_4A_5$, $A_4A_5A_6$ i $A_5A_6A_1$ uočimo njihova težišta T_1, T_2, T_3, T_4, T_5 i T_6. Dokazati da su u šestouglu $T_1T_2T_3T_4T_5T_6$ naspramne stranice T_1T_2 i T_4T_5, T_2T_3 i T_5T_6, T_3T_4 i T_6T_1, paralelne među sobom.

∗ **835.** Dokazati da u svakom trouglu većoj stranici odgovara manja težišna linija, a manjoj stranici veća težišna linija.

∗ **836.** Neka su tačke K, L, M središta stranica BC, AC i AB trougla ABC, a P, Q i R središta izlomljenih linija BAC, ACB i CBA. Dokazati da se prave KP, LR i MQ seku u jednoj tački.

$*$ **837.** Neka je D podnožje normale konstruisane iz temena C pravouglog trougla ABC na hipotenuzu AB, a O_1 i O_2 centri krugova upisanih u trouglove CAD i CBD. Dokazati da je simetrala pravog ugla trougla ABC normalna na duž O_1O_2.

$*$ **838.** Dokazati da je trougao ABC jednakokrak ako i samo ako ima dve jednake simetrale ugla (odsečke simetrale ugla od temena do naspramne stranice).

$*$ **839.** Dokazati da su trouglovi ABC i $A_1B_1C_1$ podudarni ako je $AB = A_1B_1$, $CD = C_1D_1$, gde su D i D_1 središta duži AB i A_1B_1 i $CB - CA = C_1B_1 - C_1A_1$ ($CB > CA$, $C_1B_1 > C_1A_1$).

$*$ **840.** Iz jednog temena oštrouglog trougla konstruisana je visina, iz drugog simetrala ugla, iz trećeg težišna duž. Njihove presečne tačke su temena novog trougla. Dokazati da taj trougao ne može biti jednakostraničan.

8.2 ČETVOROUGAO

Zbir unutrašnjih uglova u četvorouglu jednak je punom uglu:
$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$

Osobine paralelograma: 1° na spramne stranice su jednake i paralelne; 2° naspramni uglovi su jednaki; 3° uglovi sa temenima na jednoj stranici su suplementni; 4° dijagonale se polove. (Važe i obrnuti stavovi.)

Dijagonale pravougaonika su jednake među sobom.

Dijagonale kvadrata i romba polove unutrašnje uglove.

Dijagonale romba, kvadrata i deltoida su normalne među sobom.

Dijagonala deltoida koja spaja zajednička temena jednakih stranica polovi drugu dijagonalu.

Srednja linija trapeza (duž koja spaja središta krakova) paralelna je osnovicama i jednaka poluzbiru osnovica.

Odsečak *srednje linije trapeza* između dijagonala jednak je polurazlici osnovica.

$\triangle$ **841.** Izračunati uglove paralelograma ako:
a) jedan unutrašnji ugao iznosi $62°17'$; b) jedan unutrašnji ugao tri puta je veći od drugog unutrašnjeg ugla; c) dva unutrašnja ugla se razlikuju za $15°23'$.

$\triangle$ **842.** Koji od navedenih iskaza su tačni:

a) Svaki paralelogram ima najmanje dva jednaka ugla.

b) Neki paralelogrami imaju jednake dijagonale.

c) Svaki četvorougao koji ima dve stranice paralelne, a druge dve jednake, jeste paralelogram.

d) Potreban i dovoljan uslov da četvorougao bude paralelogram jeste da mu se dijagonale uzajamno polove.

$\triangle$ **843.** Visina polovi stranicu romba. Izračunati ugao između visina koje sadrže jedno teme tupog ugla romba.

$\triangle$ **844.** Simetrala unutrašnjeg ugla paralelograma seče jednu njegovu stranicu pod uglom koji je jednak jednom od uglova paralelograma. Izračunati taj ugao.

$\triangle$ **845.** Dat je paralelogram $ABCD$, tačka M na stranici AB i tačka N na stranici CD, tako da je $MB = DN$. Ugao ANB je $117°$. Koliki je ugao između dijagonala četvorougla $BCNM$?

△ **846.** Jednakokraki trapez $ABCD$, gde je $AD \parallel BC$ i $BC < AD$, dijagonalom AC je podeljen na dva jednakokraka trougla. Izračunati uglove trapeza.

△ **847.** Normala iz temena na dijagonalu pravougaonika seče tu djagonalu tako da je jedan odsečak tri puta veći od drugog odsečka. Izračunati ugao pod kojim se seku dijagonale pravougaonika.

△ **848.** Ako su dijagonale četvorougla jednake među sobom i polove se, onda je taj četvorougao pravougaonik. Dokazati.

△ **849.** Dat je pravougaonik $ABCD$ i na njegovim stranicama AB, BC, CD i DA redom tačke M, N, P i Q, takve da je $AM = BN = CP = DQ$. Dokazati da je četvougao $MNPQ$ paralelogram.

□ **850.** Dat je pravougaonik $ABCD$, $AB > BC$, i tačka B_1, takva da je prava AC simetrala duži BB_1. Ako se AB_1 i CD seku u E, dokazati da je trougao ACE jednakokrak.

□ **851.** U pravougaoniku je stranica BC dva puta veća od stranice AB. Iz tačke M stranice BC duži AB i AD se vide pod jednakim uglovima[9]. Izračunati ove uglove.

○ **852.** Tačka M pripada trougaonoj površi datog jednakostraničnog trougla. Prave p, q i r sadrže tačku M i svaka je paralelna jednoj od stranica datog jednakostraničnog trougla. Dokazati da je zbir preseka pravih p, q i r sa datom trougaonom površi, jednak jednoj istoj duži a, bez obzira na izbor tačke M.

○ **853.** Ako ima dve jednake težišne linije, trougao je jednakokraki. Dokazati.

□ **854.** U trouglu ABC je $AC = BC$ i AD je visina. Neka je P proizvoljna tačka prave AB, a M i N podnožja normala iz tačke P na krake AC i BC. Dokazati:

a) ako je P tačka duži AB, onda je $MP + NP = AD$;

b) ako P nije tačka duži AB, onda je $MP - NP = AD$ ili $NP - MP = AD$.

□ **855.** Ugao između simetrala dva uzastopna unutrašnja ugla četvorougla jednak je poluzbiru druga dva ugla tog četvorougla; ugao između simetrala spoljašnjih uglova dva uzastopna ugla jednak je poluzbiru ta dva unutrašnja ugla. Dokazati.

○ **856.** Ugao između simetrala dvaju uglova koje obrazuju po dve naspramne stranice četvorougla, jednak je poluzbiru dva suprotna ugla četvorougla. Dokazati.

△ **857.** Zbir uglova na manjoj osnovici trapeza veći je od zbira uglova na većoj osnovici. Dokazati.

□ **858.** Dokazati da u ravni ne postoje četiri nekolinearne tačke A, B, C, D, takve da su svi trouglovi ABC, BCD, CDA i DAB oštrougli.

□ **859.** Dokazati da središta stranica jednakokrakog trapeza predstavljaju temena romba. Kakav če tvorougao određuju središta stranica bilo kog četvorougla?

∗ **860.** Tačke E i F su središta stranica AB i CD četvorougla $ABCD$. Dokazati da su središta duži AF, BF, CE i DE temena paralelograma.

□ **861.** Dijagonale trapeza dele srednju liniju na delove, od kojih je jedan deo jednak zbiru druga dva dela. U kakvom su međusobnom odnosu dužine osnovica trapeza?

[9] To znači da su uglovi $\sphericalangle AMB$ i $\sphericalangle AMD$ jednaki.

○ **862.** Dat je trapez $ABCD$. Duž čiji su krajevi središta osnovica jednaka je polurazlici osnovica. Izračunati zbir uglova na većoj osnovici datog trapeza.

□ **863.** U nekom četvorouglu tačke A, B, C i D su središta uzastopnih stranica, a P i Q su središta dijagonala. Dokazati da su trouglovi BCP i ADQ podudarni, a takođe trouglovi ADP i BCQ.

□ **864.** Dat je paralelogram $ABCD$, kome je ugao kod temena B tup. Stranice AB i CB produžene su preko B i na produžecima su određene tačke E i F, takve da su duži BE i BF osnovice jednakokrakih trouglova BCE i ABF. Dokazati da je trougao DEF jednakokrak.

□ **865.** Iz temena A pravougaonika $ABCD$ spuštena je normala na dijagonalu i produžena je za svoju dužinu do tačke F. Dokazati da je:

a) duž BF normalna na duž DF;

b) četvorougao $BDFC$ jednakokraki trapez.

□ **866.** Dokazati da su središta stranica i podnožje bilo koje visine u raznostranom nepravouglom trouglu temena jednakokrakog trapeza.

□ **867.** U paralelogramu $ABCD$ tačka M je središte duži BC, a tačka N je središte duži CD. Dokazati da prave AM i AN dele dijagonalu BD na tri jednaka dela.

□ **868.** U paralelogramu $ABCD$ tačka M je središte duži AB, a tačka N je središte duži CD. Dokazati da prave DM i BN dele dijagonalu AC na tri jednaka dela.

□ **869.** Dijagonale dva pravougaonika, od kojih je jedan upisan u drugom, seku se u jednoj tački. Dokazati.

□ **870.** Dokazati da presečne tačke simetrala unutrašnjih uglova proizvoljnog paralelograma predstavljaju temena pravougaonika.

□ **871.** Simetrale unutrašnjih uglova pravougaonika seku se u temenima kvadrata. Dokazati. Da li isto važi za simetrale spoljašnjih uglova pravougaonika?

□ **872.** Simetrale spoljašnjih uglova romba seku se u tačkama P, Q, R, S. Kakav je četvorougao $PQRS$?

○ **873.** Dat je romb $MNPQ$. Simetrale uglova koje određuju dijagonale seku stranice romba u tačkama A, B, C i D. Kojoj vrsti pripada četvorougao $ABCD$?

△ **874.** Dat je pravougaonik $ABCD$ i na stranicama AB, BC, CD i DA redom tačke M, N, P, Q, tako da su međusobno jednake duži $AM = AQ = CP = CN$. Dokazati da je četvorougao $MNPQ$ paralelogram.

○ **875.** U ravni trougla ABC data je prava p. Ako su A_1, B_1, C_1, T_1 podnožja normala iz A, B, C, T na pravu p – T je težište trougla ABC – dokazati da je: $AA_1 + BB_1 + CC_1 = 3TT_1$.

□ **876.** Dat je paralelogram $ABCD$ i prava p kroz teme D. Tačke A_1, B_1, C_1 redom predstavljaju podnožja normala iz A, B, C na pravu p. Ako je, na primer $A_1 - B_1 - C_1$, tada je $BB_1 = AA_1 + CC_1$ ili $BB_1 = |AA_1 - CC_1|$. Dokazati. (Slično važi u slučajevima $A_1 - C_1 - B_1$ i $B_1 - A_1 - C_1$).

∗ **877.** Oštrougli trougao ima ortocentar H. Tačke M, N, P i Q su redom središta duži BH, CH, AC i AB. Dokazati da je četvorougao $MNPQ$ pravougaonik.

∗ **878.** Dve uzajamno normalne prave k i l seku stranice AB, BC, CD i AD kvadrata $ABCD$ u tačkama E, F, K, L, redom. Dokazati da je $EK = FL$.

∗ **879.** U pravougaoniku $ABCD$ simetrala ugla kod temena B seče prave AC i AD redom u tačkama E i F. Kroz E je konstruisana prava paralelna sa AB, koja seče dijagonalu BD u tački K. Dokazati da je $FK \perp AC$.

∗ **880.** U pravougaoniku $ABCD$ tačka N je podnožje normale iz B na AC, tačka S je središte duži AN i M je središte duži CD. Dokazati da je $\sphericalangle BSM = 90°$.

∗ **881.** Na stranici AB paralelograma $ABCD$ data je tačka K, takva da je $\sphericalangle AKD = \sphericalangle DKC$. Prava p kroz središte P stranice BC, paralelna pravoj AB, seče duž KD u tački M, a normala iz K na AB seče pravu CM u tački N. Dokazati da je prava DN normalna na CK.

∗ **882.** Dat je paralelogram $ABCD$ u kome su A_1, B_1, C_1, D_1 redom središta stranica BC, CD, DA, AB. Neka prave DD_1 i BB_1 seku pravu AA_1 u tačkama M i N. Dokazati da je $MN = \dfrac{3}{5}AA_1$.

□ **883.** U četvorouglu $ABCD$ tačke M, N, P i Q su redom središta stranica AB, BC, CD i DA. Duži MP i NQ nazvaćemo srednjim linijama četvorougla $ABCD$. Dokazati da srednja linija četvorougla, kojoj su krajevi središta dveju naspramnih stranica, nije veća od poluzbira drugih dveju stranica četvorougla.

∗ **884.** U četvrouglu $ABCD$ je tačka M središte stranice AB i tačka N je središte stranice CD. Ako je $BC + AD = 2MN$ i AB nije paralelno sa CD, onda je četvorougao $ABCD$ trapez. Dokazati.

○ **885.** Ako su u četvorouglu $ABCD$ tačke M, N, P i Q središta stranica AB, BC, CD i DA i ako je $2MP = BC + AD$ i $2NQ = AB + CD$, onda je četvorougao $ABCD$ paralelogram. Dokazati.

∗ **886.** Ako su u četvorouglu $ABCD$ tačke M, N, P i Q središta stranica AB, BC, CD i DA i ako je $2MP + 2NQ = AB + BC + CD + DA$, onda je četvorougao $ABCD$ paralelogram. Dokazati.

∗ **887.** Naspramne stranice AB i CD četvorougla $ABCD$ jednake su među sobom. Dokazati da prava p, koja polovi druge dve stranice, određuje sa pravim AB i CD jednake uglove.

□ **888.** U svakom četvorouglu obe srednje linije i duž koja spaja središta dijagonala imaju jednu zajedničku tačku, koja predstavlja središte svake od ovih triju duži. Dokazati.

○ **889.** Neka su naspramne stranice AD i BC četvorougla $ABCD$ jednake i neka su Mi N središta stranica AB i DC. Dokazati da su normalne projekcije stranica AD i BC na pravu MN jednake srednjoj liniji MN.

○ **890.** U konveksnom četvorouglu $ABCD$ zbir duži AB i BD nije veći od zbira duži AC i CD. Dokazati da je $AB < AC$.

□ **891.** Dat je četvorougao $ABCD$, kome su tačke K, L, M, N, P, Q redom središta duži AB, BC, CD, DA, AC, BD. Ako su E, F, G tačke, takve da su četvorouglovi $DACE$, $CABF$ i $DABG$ paralelogrami, dokazati da su duži BE, DF i CG redom paralelne i jednake dvostrukim srednjim linijama KM, LN i PQ.

△ **892.** Dat je pravougaonik $KLMN$, tačka P u pravougaoniku i tačka Q van pravougaonika, tako da su trouglovi LMP i MNQ jednakostranični. Dokazati da je duž PQ podudarna dijagonali datog pravougaonika.

△ **893.** Dat je romb $ABCD$ ($\sphericalangle DAB = 60°$). Prava p seče stranice AB i BC u tačkama M i N, tako da je $MB + BN = AB$. Dokazati da je trougao MND jednakostraničan.

○ **894.** U kvadratu $ABCD$ konstruisan je jedanakokraki trougao PAB sa uglovima na osnovici AB jednakim 15°. Dokazati da su tačke P, C i D temena jednakostraničnog trougla.

○ **895.** Dijagonale paralelograma $ABCD$ seku se u tački O. Dokazati da centri upisanih krugova trouglova ABO, BCO, CDO i DAO predstavljaju temena romba.

○ **896.** Dijagonale romba $ABCD$ seku se u tački O. Dokazati da centri krugova upisanih u trouglove ABO, BCO, CDO i DAO predstavljaju temena kvadrata.

□ **897.** Dat je kvadrat $ABCD$ i van njega u istoj ravni tačke K, L, M i N, takve da su trouglovi ABK, BCL, CDM i DAN jednakostranični. Dokazati da je četvorougao $KLMN$ kvadrat.

○ **898.** Dat je kvadrat $ABCD$ i proizvoljna tačka M stranice BC. Ako je K tačka stranice CD, takva da je $\sphericalangle AMB = \sphericalangle AMK$, izračunati $\sphericalangle MAK$.

○ **899.** Nad stranicama paralelograma $ABCD$ konstruisani su kvadrati:

a) van paralelograma;

b) preko paralelograma (delimično pokrivaju dati paralelogram).

Dokazati da su centri ovih kvadrata temena nekog kvadrata.

○ **900.** Dat je kvadrat $ABCD$ i proizvoljna poluprava Ap, koja pripada uglu BAD. Neka je q, $q \ni A$, prava upravna na polupravu Ap. Neka Ap seče BC u E i CD u F, a q seče BC u G i CD u H.

a) Dokazati da su trouglovi AFG i AFH jednakokraki.

b) Neka je tačka M središte duži FG, tačka P središte duži EH i HE seče FG u tački N. Dokazati da je četvorougao $AMNP$ pravougaonik.

c) Dokazati da su tačke M, B, P i D kolinearne.

○ **901.** Data su tri poduarna kvadrata: $ABCD$, $CDEF$ i $EFGH$ u istoj ravni. Dokazati da je $\sphericalangle ADB + \sphericalangle AEB + \sphericalangle AHB = 90°$.

○ **902.** Neka su $ABCD$ i $BKMN$ dva proizvoljna kvadrata u istoj ravni. Dokazati da je težišna linija BP trougla ABK normalna na pravoj CN.

○ **903.** Dat je pravougli trougao ABC. Nad katetama AC i BC, van trougla, date su tačke D, E, F i K, takve da su četvorouglovi $CDEA$ i $CBFK$ kvadrati.

a) Dokazati da su tačke C, E i F kolinearne.

b) Dokazati da prava koja sadrži hipotenuzinu visinu C_1C polovi duž DK.

□ **904.** Dat je pravougli trougao ABC sa pravim uglom ACB. U istoj ravni, van trougla ABC, dati su kvadrati $ADKC$ i $CBHE$. Dokazati da je zbir normalnih odstojanja tačaka D i H od hipotenuze AB jednak hipotenuzi.

○ **905.** U ravni datog trougla ABC, van trougla, date su tačke D, E, K i L, takve da su četvorouglovi $BCKL$ i $BAED$ kvadrati. Dokazati da je duž DL dva puta veća od težišne linije BM trougla ABC.

○ **906.** U trouglu ABC, ortocentar je tačka H, centar opisanog kruga tačka O i A_1, B_1, C_1 središta stranica BC, CA, AB. Sa A_2, B_2, C_2 označimo središta duži AH, BH, CH. Dokazati da je $A_1A_2 = B_1B_2 = C_1C_2$ i da se duži A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 i OH polove među sobom.

○ **907.** Van trougla ABC, u ravni trougla, konstruisani su kvadrati $ABDE$ i $ACFG$. Neka se CE i BG seku u H. Dokazati da je $CE = BG$ i $CE \perp BG$.

○ **908.** Dat je trougao ABC. Neka su M, N i P središta stranica BC, CA, AB i D proizvoljna tačka na stranici BC. Neka su, dalje, tačke E i F središta duži BD i CD, a AD i NP se seku u Q. Dokazati da je četvorougao $EFNP$ paralelogram čije se dijagonale seku na duži MQ.

○ **909.** Dat je trougao ABC. Neka je M tačka u trouglu koja se kreće paralelno stranici BC, do preseka sa stranicom AC, zatim se kreće paralelno sa AB, do preseka sa BC, zatim paralelno sa AC, do preseka sa AB itd. Dokazati da će se sa nekoliko ovakvih koraka tačka M vratiti u polazni položaj i naći broj koraka.

○ **910.** Neka su M i N središta stranica AD i CD kvadrata $ABCD$. Duži BN i CM seku se u tački P. Dokazati da je duž PA jednaka stranici kvadrata.

○ **911.** Neka je F središte stranice CD datog kvadrata $ABCD$ i K podnožje normale iz A na BF. Dokazati da je $CD = DK$.

∗ **912.** Na stranici AB kvadrata $ABCD$ data je neka tačka M. Simetrala ugla CDM ima sa stranicom BC zajedničku tačku N. Dokazati da je $DM = AM + CN$.

○ **913.** Dat je trougao ABC. U istoj ravni, van trougla ABC, dati su kvadrati $ABMN$ i $BCPQ$. Dokazati da su centri ovih kvadrata i središta duži AC i MQ temena novog kvadrata.

○ **914.** Dat je pravougaonik $ABCD$, tačka M na stranici BC i tačka N na stranici CD, tako da je $2MC = BC$ i $3CN = CD$. Prave AN i DM se seku u tački S, a prave AM i BN se seku u O. Izračunati razmere:

a) $DS : SM$; b) $AS : SN$; c) $BO : ON$; d) $AO : OM$.

□ **915.** Težišna linija trougla, povučena između dve njegove nejednake stranice, određuje sa manjom stranicom veći ugao, nego sa drugom stranicom. Dokazati.

□ **916.** Ako su uglovi α i β četvorougla $ABCD$ jednaki, a ugao δ veći od ugla γ, dokazati da je $BC > AD$.

○ **917.** Neka su $ABCD$ i $A_1B_1C_1D_1$ dva proizvoljna paralelograma u neparalelnim ravnima i neka su M, N, P, Q redom središta duži AA_1, BB_1, CC_1, DD_1. Dokazati da je četvorougao $MNPQ$ paralelogram.

∗ **918.** Dati su u ravni kvadrati $ABCD$ i $A_1B_1C_1D_1$. Tačke A', B', C' i D' su središta duži AA_1, BB_1, CC_1 i DD_1. Neka su A', B', C' i D' različite tačke. Dokazati:

a) ako su temena A, B, C, D i A_1, B_1, C_1, D_1 označena u istom smeru, onda je četvorougao $A'B'C'D'$ kvadrat;

b) ako su temena A, B, C, D i A_1, B_1, C_1, D_1 označena u suprotnim smerovima, onda je četvorougao $A'B'C'D'$ paralelogram.

○ **919.** U ravni trapeza $ABCD$ ($BC = AD$) data je tačka P. Dokazati da su duži PA, PB, PC i PD jednake stranicama nekog konveksnog četvorougla.

∗ **920.** Neka je $ABCD$ proizvoljan jednakokraki trapez i P bilo koja tačka u unutrašnjosti trapeza. Dokazati da se u trapez može upisati četvorougao čije su stranice jednake dužima PA, PB, PC, PD. (Na svakoj stranici trapeza je tačno jedno teme upisanog četvorougla.).

○ **921.** Neka su $ABCD$ i $A'B'C'D'$ dva konveksna četvorougla sa jednakim odgovarajućim stranicama ($AB = A'B'$, $BC = B'C'$ itd.) i unutrašnjim uglovima α, β, γ, δ i α', β', γ', δ'. Ako je $\alpha > \alpha'$, tada je $\beta < \beta'$, $\gamma > \gamma'$ i $\delta < \delta'$. Dokazati.

∗ **922.** Neka je P proizvoljna tačka u pravougaoniku $ABCD$. Dokazati da je zbir duži PA, PB, PC, PD manji od obima pravougaonika. Da li isto važi i ako je $ABCD$ trapez?

∗ **923.** Dat je četvorougao $ABCD$. U ravni datog četvorougla odrediti tačku X tako da zbir duži $AX + BX + CX + DX$ bude minimalan.

∗ **924.** Dat je kvadrat $MNPQ$ i tačka A van njega. Konstruisati pravu p, $p \ni A$, tako da duž d, koju kvadrat odseca od prave p, bude što je moguće veća?

∗ **925.** Dat je jednakokraki trougao ABC ($AB = AC$) i tačke E i K na polupravim AB i AC, takve da je $AE + AK = AB + AC$. Dokazati da je $BC < EK$.

∗ **926.** U dati trougao ABC upisana su tri kvadrata tako da svaki od njih ima dva vrha na jednoj stranici, a po jedan na svakoj od preostale dve stranice trougla. Dokazati da je trougao ABC jednakostraničan ako su sva tri kvadrata podudarna.

∗ **927.** Neka je P tačka unutar trougla ABC, takva da je $\sphericalangle PAC = \sphericalangle PBC$ i neka su M i L podnožja normala iz tačke P na prave AC i BC, respektivno. Ako je D središte stranice AB, dokazati da je $DL = DM$.

∗ **928.** Dijagonale AC i BD jednakokrakog trapeza $ABCD$ sa osnovicom AB seku se u tački O pod uglom AOB, koji iznosi 60°. Dokazati da su središta duži OA, OD, BC temena jednakostraničnog trougla.

∗ **929.** Na stranicama kvadrata $ABCD$ naluze se tačke P, Q i R koje dele njegov obim na tri jednaka dela. Dokazati da je zbir dužina duži PO, QO, RO najmanji moguć ako je jedna od tačaka P, Q ili R središte stranice kvadrata na kojoj se nalazi. (Tačka O je centar kvadrata).

∗ **930.** Na jednoj gusarskoj karti piše: "Na ostrvu Lagator nalaze se: bor, čempres i palma. Pođi od bora prema čempresu i broj korake, pa se okreni udesno za 90 stepeni i idi isti toliki broj koraka. Tu postavi znak. Zatim, ponovo pođi od bora prema palmi i broj korake, pa se okreni ulevo za 90 stepeni i idi isti toliki broj koraka. Tu postavi znak. Kopaj na središtu između dva znaka i naći ćeš sakriveno blago".

Jedan mornar je našao ostrvo i čempres i palmu na njemu, ali bora, odakle je trebalo početi traganje nije bilo, pa se vratio praznih ruku. Da je znao malo matematike našao bi blago. Možete li vi to učiniti?

8.3 KRUG

Prava koja sadrži bar jednu tačku u krugu je *sečica* kruga.

Prečnik je najveća tetiva datog kruga.

Tangenta je normalna na poluprečnik povučen iz tačke u kojoj tangenta dodiruje krug.

Tangentne duži povučene iz jedne tačke na dati krug jednake su među sobom.

Dva kruga k_1 (O_1, r_1) i k_2 (O_2, r_2) se dodiruju ako je: $O_1O_2 = r_1 + r_2$ (spolja) ili $O_1O_2 = r_1 - r_2$, $r_1 > r_2$ (iznutra).

Periferijski ugao jednak je polovini *centralnog ugla* nad istom tetivom. Zbog toga:

– Ugao (periferijski) nad prečnikom je prav.
– Periferijski uglovi u datom krugu, sa jedne strane date tetive (*nad* tom tetivom), jednaki su među sobom.
– Jednakim tetivama u jednom krugu (ili u podudarnim krugovima) odgovaraju jednaki periferijski uglovi.
– Ako je AMB luk datog kruga sa jedne strane prave AB, tada se duž AB iz svake tačke ovog luka vidi pod uglom koji je jednak uglu AMB.
– Ugao zahvaćen tetivom i tangentom koja je konstruisana u krajnjoj tački tetive (*tangentni ugao*), jednak je periferijskom uglu koji je sa druge strane tetive.

Jednakim tetivama datog kruga odgovaraju jednaka centralna rastojanja (normale iz centra kruga).

Četvorougao je *tetivan* (upisan u krug) ako i samo ako su mu naspramni uglovi suplementni.

Četvorougao $ABCD$ je tetivan ako i samo ako je $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB$.

Konveksan četvorougao je *tangentan* (opisan oko kruga) ako i samo ako mu je zbir dve naspramne stranice jednak zbiru druge dve naspramne stranice.

△ **931.** a) Data je tačka A van kruga $k(O, r)$. Konstruisati tangente iz date tačke na dati krug.

b) Data su dva kruga k_1 i k_2. Konstruisati zajedničke tangente ovih krugova.

△ **932.** Dat je krug k i prava p. Konstruisati tangente datog kruga, koje su: a) paralelne sa pravom p; b) normalne na pravu p.

∗ **933.** Neka je k spolja "pripisan" krug koji dodiruje stranicu BC i produžetke stranica BA i CA trougla ABC. Dokazati da je tangentna duž iz tačke C na krug k jednaka poluobimu trougla ABC.

△ **934.** Dat je krug k i njegove tangente a, b i c. Pri tome su prave a i b paralelne, a prava c seče a i b u tačkama A i B. Dokazati da krug prečnika AB prolazi kroz centar datog kruga.

□ **935.** Ako je s poluobim i c hipotenuza pravouglog trougla, onda je poluprečnik upisanog kruga jednak $s - c$. Dokazati.

□ **936.** Krugovi k_1 i k_2 dodiruju se u tački A. Sečica a, koja sadrži tačku A, seče krugove k_1 i k_2 u tačkama P_1 i P_2. Dokazati da su tangente datih krugova u tačkama P_1 i P_2 paralelne među sobom.

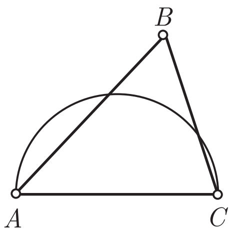
□ **937.** Krugovi k_1 i k_2 dodiruju se spolja u tački A. Njihova zajednička tangenta t dodiruje krug k_1 u tački B i krug k_2 u tački C. Dokazati da je ugao BAC prav.

□ **938.** Dat je krug $k(O, r)$ i tangenta a datog kruga sa dodirnom tačkom A. Na tangenti a izaberimo tačke B i C i konstruišimo iz njih tangente BD i CE (D i E su dodirne tačke). Dokazati da su uglovi BOC i DAE jednaki ili suplementni.

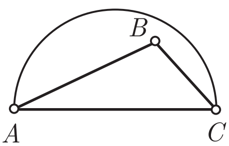
△ **939.** Stranica AB paralelograma $ABCD$ dva puta je veća od stranice BC. Ako je tačka M središte stranice AB, dokazati da $CM \perp DM$.

□ **940.** Neka su A, B i C tri nekolinearne tačke i neka je M, $M \neq B$, zajednička tačka krugova konstruisanih nad prečnicima AB i BC. Dokazati da su tačke A, C i M kolinearne.

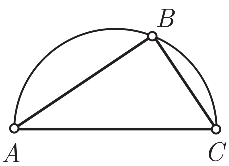
△ **941.** U XIII veku arapski matematičar Abu Hasan je objašnjavao kako se brzo i sigurno može utvrditi da li je dati ugao ABC oštar, tup ili prav. Abu Hasan predlaže da se nacrta krug prečnika AC, pa prema tome da li je tačka B van kruga, u krugu ili na krugu, donosi se zaključak da je ugao ABC oštar, tup ili prav. (Videti sl. 23, 24 i 25). Dokazati ili opovrgnuti Abu Hasanovu konstrukciju.



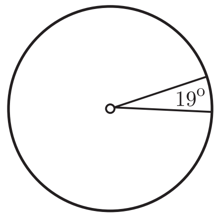
Sl. 23



Sl. 24



Sl. 25



Sl. 26

○ **942.** Dat je krug k, njegov prečnik AB i tačka P van prave AB. Koristeći se samo pravim (za crtanje koristimo samo lenjir) konstruisati normalu iz tačke P na pravu AB.

□ **943.** Data su dva koncentrična kruga k_1 i k_2 poluprečnika dužina a i $2a$, sa centrom O. Neka je P tačka između ovih krugova. Krug k, sa centrom P i poluprečnikom PO seče k_2 u tački M. Normala iz P na pravu OM seče k_2 u tačkama E i F.

a) Dokazati da prava EF dodiruje krug k_1.

b) Dokazati da se tangente, povučene iz E i F na k_1 seku u tački kruga k_2.

□ **944.** Dati ugao od 19°, sl. 26, podeliti na 19 jednakih delova koristeći se samo šestarom.

△ **945.** Ako se dve jednake tetive nekog kruga seku, onda su delovi jedne jednaki delovima druge tetive. Dokazati.

□ **946.** Dve paralelne sečice seku dati krug u tačkama A, B, C, D. Dokazati da su ove četiri tačke temena jednakokrakog trapeza.

△ **947.** Dva kruga imaju zajedničku tetivu AB. Kroz A su postavljene dve prave, od kojih jedna seče date krugove u P i Q, a druga u X i Y. Dokazati da su uglovi PBX i QBY jednaki.

○ **948.** Dva kruga sa centrima O_1 i O_2 imaju zajedničke tačke A i B. Prava p, koja sadrži tačku A, seče date krugove u tačkama M_1 i M_2. Dokazati da je $\sphericalangle O_1M_1B = \sphericalangle O_2M_2B$.

○ **949.** Krugovi, k_1 sa centrom O_1 i k_2 sa centrom O_2, imaju zajedničku tetivu MN. Neka O_1M seče k_1 u A_1 i k_2 u A_2, O_2M seče k_1 u B_1 i k_2 u B_2. Dokazati da prave MN, A_1B_1 i A_2B_2 pripadaju jednom pramenu pravih, tj. da imaju jednu zajedničku tačku.

∗ **950.** Tri kruga k_1, k_2 i k_3 pripadaju jednoj ravni i svaka dva se spolja dodiruju. Dodirne tačke određuju tri tetive, u svakom krugu po jednu. Dokazati da prave određene dvema tetivama seku treći krug u dijametralno suprotnim tačkama.

∗ **951.** Tačka A nalazi se unutar šest krugova. Dokazati da se centar bar jednog od tih krugova nalazi u nekom od preostalih.

∗ **952.** U ravni je dato šest krugova, takvih da centar nijednog od njih nije sadržan u uniji preostalih pet. Dokazati da je presek tih šest krugova prazan.

∗ **953.** Dat je trougao $A_1A_2A_3$, sa stranicama $a_1 = A_2A_3$, $a_2 = A_3A_1$, $a_3 = A_1A_2$. Obeležimo sa s_i tangentnu duž upisanog kruga datog trougla koja polazi iz temena A_i $(i = 1, 2, 3)$. Dokazati da važi nejednakost $\frac{s_1}{a_1} + \frac{s_2}{a_2} + \frac{s_3}{a_3} \geq \frac{3}{2}$, gde znak jednakosti važi ako i samo ako je trougao $A_1A_2A_3$ jednakostraničan.

□ **954.** Dat je polukrug prečnika AB i na tom prečniku dve tačke C i D na jednakom rastojanju od centra O. Kroz C i D konstruisane su dve paralelne prave koje seku polukrug u E i F. Dokazati da je ugao CEF prav.

△ **955.** Data je tetiva MN datog kruga. Dokazati da je zbir ili razlika normala, spuštenih na datu tetivu iz krajeva bilo kog prečnika, stalna veličina.

○ **956.** Neka su OA_1, OB_1, OC_1 normale iz date tačke O na stranice datog trougla ABC $(A_1 \in BC,\ B_1 \in AC,\ C_1 \in AB)$. Krug opisan oko trougla $A_1B_1C_1$ seče stranice datog trougla u tačkama A_2, B_2, C_2. Dokazati da se normale na stranice datog trougla, konstruisane u tačkama A_2, B_2, C_2, seku u jednoj tački.

△ **957.** Dva kruga imaju zajedničku tetivu AB. Neka je a proizvoljna prava kroz A, koja seče date krugove u tačkama M i N. Dokazati da $\sphericalangle MBN$ ima konstantnu veličinu, bez obizra na različite položaje prave a.

○ **958.** Data su dva kruga koji se seku. Ako se u jednoj presečnoj tački konstruiše proizvoljna sečica p i kroz presečne tačke sa datim krugovima postave tangente, ove tangente se seku pod stalnim uglom. Dokazati.

□ **959.** Neka je AB dati prečnik datog kruga k. Ako je k_1 proizvoljan krug sa centrom na k, koji dodiruje AB, tada su tangente iz A i B na k_1 paralelne među sobom. Dokazati.

△ **960.** Kroz presečne tačke dvaju datih krugova konstruisane su dve paralelne prave, koje svaki od datih krugova seku još u dve tačke. Dokazati da su tetive, dobijene na datim krugovima spajanjem presečnih tačaka na ovim sečicama, jednake među sobom.

△ **961.** Neka je AB proizvoljna sečica datog kruga i t tangenta paralelna sa AB. Dokazati da je dodirna tačka S središte luka $\widehat{AB}$.

□ **962.** Produžeci krakova BC i AD trapeza $ABCD$ seku se u E. Dokazati da se opisani krugovi trouglova ABE i CDE dodiruju.

□ **963.** Dati su krugovi $K_1(S_1, r)$ i $K_2(S_2, r)$. Centar S_2 leži na krugu k_1. Presečne tačke krugova označimo sa A i B. Kroz tačku A konstruisana je prava p, koje seče krugove u tačkama C i D. Dokazati da je trougao BCD jednakostraničan.

△ **964.** Dva kruga jednakih poluprečnika seku se u tačkama A i B. Kroz tačku A konstruisana je proizvoljna prava a, koja date krugove seče još u tačkama P i Q. Dokazati da je trougao PBQ jednakokrak, nezavisno od položaja prave a.

□ **965.** Konstruisati skup svih tačaka iz kojih se data duž AB vidi pod datim uglom φ.

○ **966.** Dat je krug $k(O, r)$ sa prečnikom AB. Simetrala ovog prečnika seče krug u tački C. Povučena je tangenta t u tački B. Neka je M proizvoljna tačka poluprečnika OC. Prava AM seče krug k u tački H, a tangentu t u tački S. Tangenta povučena u H seče pravu t u P. Dokazati:

a) četvorougao $OPHM$ je trapez. b) četvorougao $AOPM$ je paralelogram.

□ **967.** U trouglu ABC je $\sphericalangle CAB - \sphericalangle CBA = 90°$. Dokazati da je visina CD trougla ujedno i tangenta opisanog kruga.

□ **968.** Dva kruga imaju zajedničku tačku A. Neka su AB i AC prečnici tih krugova, a BB_1 i CC_1 dve paralelne tetive. Dokazati da su tačke A, B_1, C_1 kolinearne.

□ **969.** U datom krugu prečnika AB data je tetiva DC, paralelna sa AB. Dokazati da je u trouglu ACD razlika dvaju uglova jednaka pravom uglu.

□ **970.** Oko trougla ABC, $b > c$, opisan je krug. Iz središta E luka $\widehat{BC}$ povučen je prečnik ED. Dokazati da je $\sphericalangle DEA = \dfrac{1}{2}(\beta - \gamma)$.

□ **971.** Ako se iz krajnjih tačaka prečnika proizvoljnog kruga spuste normale na jednu proizvoljnu tangentu tog kruga, dokazati da je zbir dobijenih normala jednak prečniku.

△ **972.** U tački T kruga postavljene su tangenta i tetiva. Iz središta jednog od lukova određenih tetivom postavljene su normale na tetivu i tangentu. Dokazati da su ove normale jednake.

○ **973.** Data su dva kruga sa centrima O i O_1, sa dva među sobom paralelna poluprečnika OA i O_1A_1. Prava AA_1 određuje na prvom krugu tetivu AB. U tačkama B i A_1 postavljene su tangente na date krugove i one se seku u C. Dokazati da je $BC = A_1C$.

□ **974.** Tangente u tačkama A i B datog kruga sa centrom O seku se u tački C. Normala povučena iz A na BC seče OC u tački D. Dokazati da je $AD = OA$, povučene iz tačke C.

△ **975.** Dat je krug i njegove tangentne duži AC i BC povučene iz tačke C. Neka je AD prečnik datog kruga i E tačka, takva da je $A - C - E$ i $AC = CE$. Dokazati da su tačke B, D, E kolinearne.

□ **976.** Na datom krugu date su redom tačke B, A, C, tako da su dva luka $\widehat{AB}$ i $\widehat{AC}$ manji od polukruga. Tetiva DE, koja polovi ova dva luka, seče AB u F i AC u G. Dokazati da je $AF = AG$.

○ **977.** Neka je AB tetiva, AD prečnik i C središte manjeg luka $\widehat{AB}$ datog kruga. Neka je CE visina trougla ACD i neka su F i G preseci duži CD i CE sa tetivom AB. Dokazati da je $AG = GF = GC$.

□ **978.** Kroz centar O_1 kruga k_1 prolazi krug k_2 i seče k_1 u A i B. Tangenta t kruga k_2 u tački B seče krug k_1 u C. Ako O_1 nije na tetivi AB, dokazati da je $AB = AC$.

○ **979.** Dva jednaka kruga seku se u A i B. Neka je k krug sa centrom A, koji seče prva dva kruga. Dokazati da tačka B i po dve presečne tačke trećeg kruga sa datim krugovima pripadaju jednoj pravoj.

△ **980.** Dva kruga se dodiruju spolja. Ako se kroz njihovu tačku dodira D povuku sečice AA_1 i BB_1, dokazati da su tetive AB i A_1B_1 paralelne.

△ **981.** Tri kruga sa centrima A, B, C dodiruju se spolja, dva i dva, u tačkama D, E, F. Dokazati da je upisani krug trougla ABC istovremeno opisan oko trougla DEF.

○ **982.** Neka je $ABCD$ paralelogram i E tačka, takva da je $AE \perp AB$ i $BC \perp EC$. Dokazati da je $\sphericalangle AED = \sphericalangle BEC$ ili $\sphericalangle AED + \sphericalangle BEC = 180°$.

□ **983.** Dat je trougao ABC, kome su središta stranica AB, BC, CA, redom tačke C_1, A_1, B_1. Dokazati da su krugovi opisani oko trouglova AB_1C_1, BC_1A_1, CA_1B_1 podudarni i da se seku u centru kruga opisanog oko trougla ABC.

△ **984.** Dokazati da teme A pravog ugla trougla ABC, podnožje D hipotenuzine visine i središta stranica trougla, pripadaju jednom krugu.

○ **985.** Dijagonale konveksnog četvorougla $ABCD$ seku se u S. Ako je $\sphericalangle SAB = \sphericalangle SBC = 30°$ i $\sphericalangle SCD = \sphericalangle SDA = 45°$, odrediti ugao pod kojim se seku dijagonale datog četvorougla.

∗ **986.** Dat je konveksan četvorougao $ABCD$ kod kojeg je $\sphericalangle ABD = 50°$, $\sphericalangle ADB = 80°$, $\sphericalangle ACB = 40°$ i $\sphericalangle DBC = \sphericalangle BDC + 30°$. Izračunati $\sphericalangle DBC$.

∗ **987.** Nad stranicom AB datog kvadrata, kao prečnikom, konstruisan je u kvadratu polukrug k_1. Zatim je konstruisan luk k_2 sa centrom B i poluprečnikom AB, sa iste strane duži AB. Neka je K proizvoljna tačka luka k_2, M presek duži BK i polukruga k_1 i N podnožje normale iz K na AD. Dokazati da je $KM = KN$.

○ **988.** Oko četvorougla $ABCD$ opisan je krug sa centrom O. Dijagonale AC i BD su normalne među sobom. Dokazati da je dužina normale OH, spuštene iz centra kruga na stranicu AD, jednaka polovini dužine stranice BC.

∗ **989.** Na stranicama BC i CD pravougaonika $ABCD$ date su redom tačke E i F, tako da je trougao AEF jednakostraničan. Ako je M središte duži AE, onda je trougao CDM jednakostraničan. Dokazati.

○ **990.** Dijagonale datog paralelograma $ABCD$, sa tupim uglom ABC, seku se u O. Neka su B', C', A' podnožja normala spuštenih iz D, redom na: AC, AB, BC. Dokazati da je tačka O na krugu opisanom oko trougla $A'B'C'$.

□ **991.** Dat je konveksan četvorougao $ABCD$ i krugovi k_1, k_2, k_3, k_4, od kojih svaki dodiruje spolja jednu stranicu i dva produžetka susednih stranica datog četvorougla. Dokazati da centri ovih krugova leže na jednom krugu.

○ **992.** Tačka H je ortocentar oštrouglog trougla ABC, a K i M su redom središta duži AH i BC, tim redom. Ako je O centar opisanog kruga trougla ABC, dokazati da je: $OK = MH$, $OM = KH$ i $MK = OA$.

○ **993.** Data su dva nepodudarna kruga koji se dodiruju spolja u tački A. Zajednička spoljašnja tangenta dodiruje veći krug u tački B, a manji u tački C i seče pravu određenu centrima tih krugova u tački S. U tački S je konstruisana normala na tangentu BC. Prava AB seče tu normalu u tački M, a prava AC seče istu normalu u tački N. Dokazati da je $SM = SN$.

○ **994.** Kroz presečnu tačku A krugova k_1 i k_2 konstruisana je proizvoljna sečica BAC ($B \in k_1$, $C \in k_2$). Dokazati da je zbir uglova BDA i ADC stalan, gde je D druga zajednička tačka krugova.

△ **995.** Dokazati da je u pravouglom trouglu zbir kateta jednak zbiru prečnika upisanog i opisanog kruga.

□ **996.** Ako je AB duž van datog kruga, tada je zbir tangentne duži iz A i tangentne duži iz B veći od AB, a razlika tih tangentnih duži je manja od AB. Dokazati. Zatim dokazati, ako jedan od ovih uslova nije ispunjen, da prava AB seče dati krug.

○ **997.** U pravom uglu s temenom A upisan je krug, koji krake dodiruje u tačkama B i C. Ako se konstruiše tangenta na dati krug, koja duži AB i AC seče u tačkama M i N, dokazati da je $\frac{1}{3}(AB + AC) < MB + NC < \frac{1}{2}(AB + AC)$.

□ **998.** Neka su A, B, C, D, tim redom, četiri proizvoljne tačke nekog kruga. Središta četiri dobijena luka ($\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$, $\widehat{CD}$, $\widehat{DA}$) spojena su pravim. Dokazati da među ovim pravim postoje dve koje su normalne jedna na drugoj.

∗ **999.** Oko oštrouglog trougla ABC opisan je krug. Neka su M, N i P redom tačke u kojima visine iz temena A, B i C datog trougla seku opisani krug. Dokazati da ortocentar trougla ABC predstavlja centar upisanog kruga trougla MNP.

○ **1000.** Ako su M, N, P redom tačke u kojima simetrale unutrašnjih uglova α, β, γ, trougla ABC, seku opisani krug ovog trougla, dokazati da je AM normala duži NP. (Takođe BN je normala duži MP i CP je normala duži MN.)

○ **1001.** Neka su M, N, P tačke u kojima simetrale unutrašnjih uglova α, β, γ, trougla ABC, seku opisani krug ovog trougla. Ako su S i O centar upisanog i centar opisanog kruga trougla ABC, dokazati da je $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}$.

○ **1002.** Tačka O je centar opisanog kruga datog trougla ABC. Označimo sa M, N, P redon središta onih lukova BC, AC, AB, koji ne sadrže redom tačke A, B, C. Ako za tačku X važi: $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}$, dokazati da je X centar upisanog kruga trougla ABC.

∗ **1003.** U krug je upisan jednakostraničan trougao ABC. Proizvoljna tačka M pripada luku BC kojem ne pripada tačka A. Dokazati da je: $BM + CM = AM$.

∗ **1004.** Dat je pravougaonik $ABCD$. Konstruisati tačku M iz koje se stranice AB i BC vide pod uglom od $30°$.

∗ **1005.** U uglu sa temenom A izabrana je tačka M. Neka su P i Q podnožja normala iz M na krake ugla, a K podnožje normale iz A na PQ. Dokazati da je $\sphericalangle MAP = \sphericalangle QAK$.

$*$ **1006.** U trouglu ABC je $\sphericalangle BAC = 70°$ i $\sphericalangle ABC = 50°$. Tačka M se nalazi unutar trougla ABC, pri čemu je $\sphericalangle MAC = \sphericalangle MCA = 40°$. Odrediti uglove: $\sphericalangle AMB$ i $\sphericalangle BMC$.

$*$ **1007.** U četvorouglu $ABCD$ je ugao ABC od $102°$, ugao ADC od $129°$ i $AB = BC = 1$. Izračunati dužinu dijagonale BD.

$*$ **1008.** Simetrala proizvoljnog ugla trougla je i simetrala ugla kojeg obrazuju visina spuštena iz tog temena trougla i prečnik kruga opisanog oko trougla. Dokazati.

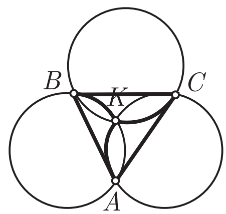
□ **1009.** Na tetivi AB kruga k izabrana je proizvoljna tačka C. Označimo sa D drugu zajedničku tačku kruga k i opisanog kruga trougla OAC (O je centar kruga k). Dokazati da je $CD = BC$.

$*$ **1010.** Neka su M i N tačke simetrične podnožju A_1 visine AA_1 trougla ABC u odnosu na stranice AB i BC i neka je K presek pravih AB i MN. Dokazati da tačke A, K, A_1, C i N pripadaju jednom krugu.

$*$ **1011.** Na stranici BC trougla ABC data je tačka M. Neka su O_1 i O_2 centri krugova opisanih oko trouglova ABM i ACM. Dokazati da je $\sphericalangle O_1AO_2 = \sphericalangle BAC$.

$*$ **1012.** Neka su AA_1, BB_1, CC_1 paralelne tetive nekog kruga. Tačke A', B', C' su simetrične tačkama A_1, B_1, C_1 u odnosu na središta duži BC, CA, AB, redom. Dokazati da su tačke A', B', C' kolinearne.

$*$ **1013.** U ravni su data tri kruga jednakih polu prečnika, koji se seku u tački K, kao na slici. Dokazati da je zbir debljom linijom označenih lukova KA, KB i KC jednak polukrugu (istog poluprečnika).



$*$ **1014.** Date su dve tačke A i B i promenljiva tačka C, takva da je ugao ACB konstantan. Neka su A_1 i B_1 podnožja visina h_A i h_B trougla ABC. Dokazati da je duž A_1B_1 konstantne dužine.

$*$ **1015.** Tri ugla jednog četvorougla su tupi. Dokazati da je veća ona dijagonala koja sadrži teme oštrog ugla.

□ **1016.** Dva kruga se dodiruju iznutra u tački A. Duž AB je prečnik većeg kruga. Tetiva BK većeg kruga dodiruje manji krug u tački C.

Dokazati da je $\sphericalangle BAC = \sphericalangle KAC$.

$*$ **1017.** Dva kruga se dodiruju iznutra u tački A. Iz centra većeg kruga konstruisan je poluprečnik SB koji dodiruje manji krug u tački C. Odrediti ugao BAC.

□ **1018.** Nad prečnikom AB dat je polukrug i na njemu tačke C i D, tako da važi: a) tačka C pripada luku AD; b) ugao CSD je prav, gde je S središte duži AB.

Ako je E presek pravih AC i BD, a F presek pravih AD i BC, dokazati da vektor $\overrightarrow{EF}$ ne zavisi od izbora tačaka C i D.

$*$ **1019.** Dat je jednakokraki trougao ABC, $AC = BC$. Ma kakav bio krug k sa poluprečnikom jednakim visini h_c ovog trougla, koji dodiruje stranicu AB i stranice AC i BC seče redom u tačkama D i E, dokazati da luk $\widehat{DE}$ ima konstantnu veličinu.

△ **1020.** Ugao između poluprečnika kruga opisanog oko oštrouglog trougla, povučenog iz jednog temena trougla i stranice koja polazi iz istog temena, komplementan je onom uglu trougla koji je naspram te stranice. Dokazati.

○ **1021.** Dat je krug prečnika AB i njegov proizvoljan poluprečnik OM. Neka su P i Q centri opisanih krugova trouglova AOM i BOM, a S neka je presečna tačka pravih AP i BQ. Dokazati:

a) Tačka S je na datom krugu. b) $SM \parallel AB$.

c) Tačke O, Q, M, S, P pripadaju jednom krugu.

○ **1022.** Oko trougla ABC ($CA < BC$) opisan je krug k. Simetrale unutrašnjeg i spoljašnjeg ugla kod C seku pravu AB u D i D_1, a tangenta opisanog kruga u istom temenu seče pravu AB u P.

a) Izraziti uglove CPA i PCA preko uglova trougla ABC.

b) Dokazati da je simetrala ugla CPA normalna na simetralu ugla ACB.

c) Dokazati da je P središte duži DD_1.

∗ **1023.** Zajedničke spoljašnje tangente dvaju krugova, $k_1(O_1, r_1)$ i $k_2(O_2, r_2)$, seku zajedničke unutrašnje tangente u tačkama A, B, C i D. Dokazati da tačke A, B, C, D, O_1, O_2 pripadaju istom krugu.

∗ **1024.** Prava MN je zajednička tangenta krugova k_1 i k_2 koji se seku u tačkama A i B (M i N su dodirne tačke). Izračunati zbir uglova: $\sphericalangle MAN + \sphericalangle MBN$.

∗ **1025.** U krug je upisan četvorougao $ABCD$, čije se dijagonale AC i BD seku u tački S pod pravim uglom. Prava kroz S, koja je normalna na AB, polovi stranicu CD. Dokazati.

△ **1026.** Dijagonale tangentnog četvorougla seku se u centru upisanog kruga. Dokazati da je ovaj četvorougao romb.

□ **1027.** Dva kruga, k_1 i k_2, seku se u tačkama A i B. Kroz ma koju tačku P na krugu k_1, van kruga k_2, povučene su prave PA i PB, koje seku k_2 u C i D. Dokazati da je tangenta kruga k_1 u tački P paralelna sa pravom CD.

□ **1028.** Dat je trougao ABC i krug k koji sadrži tačke A i B i seče stranice AC i BC u tačkama M i N. Dokazati da je tetiva MN paralelna tangenti t opisanog kruga datog trougla, povučenoj u temenu C.

□ **1029.** Na stranici AC jednakokrakog trougla ABC, $AC = BC$, izabrana je proizvoljna tačka D i oko trouglova ABD i BCD su opisani krugovi k_1 i k_2. Tangenta na krug k_1, u tački D seče k_2 u tački M. Dokazati da su prave CM i AB paralelne.

□ **1030.** Oko trougla je opisan krug. Dokazati da su poluprečnici povučeni do temena trougla, normalni na dužima koje spajaju dva podnožja visina povučenih iz ostala dva temena trougla.

○ **1031.** U ravni datog trougla ABC date su tačke A_1, B_1, C_1, takve da su trouglovi ABC_1, BCA_1, CAB_1 jednakostranični. Dokazati da su duži AA_1, BB_1, CC_1 jednake među sobom i da se seku u jednoj tački.

○ **1032.** Krugovi k i k_1 imaju zajedničku tetivu AB. Sečice c i d, kroz tačku A, seku krug k u tačkama C i D, a krug k_1 u tačkama C_1 i D_1. Dokazati da se prave CD i C_1D_1 seku pod stalnim uglom, bez obzira na izbor sečica c i d.

○ **1033.** Dat je trougao ABC i tačka D na stranici BC. Neka su k_1 i k_2 krugovi koji sadrže tačku D, takvi da k_1 dodiruje pravu AB u tački B, a k_2 dodiruje pravu AC u tački C. Dokazati da druga zajednička tačka krugova k_1 i k_2 pripada opisanom krugu tog trougla.

□ **1034.** Visine trougla ABC su AD, BE i CF. Ako su M i N središta visina AD i CF, dokazati da krug opisan oko trougla EMN sadrži ortocentar H datog trougla.

○ **1035.** Dat je tetivni četvorougao $ABCD$. Prave AB i CD seku se u tački P, a prave BC i AD u tački Q. Opisani krugovi trouglova PBC i QAB imaju zajedničke tačke B i R. Dokazati da su tačke P, Q, R kolinearne.

○ **1036.** Parovi naspramnih stranica konveksnog četvorougla produženi su do preseka i oko četiri dobijena trougla opisani su krugovi. Dokazati da svi ovi krugovi prolaze kroz jednu tačku.

△ **1037.** Dat je tangentni četvorougao $ABCD$. Ako je O centar upisanog kruga ovog četvorougla, dokazati da je $\sphericalangle AOB + \sphericalangle COD = 180°$.

○ **1038.** Dat je tetivni četvorougao $ABCD$, takav da se prave AB i CD seku u tački E, a prave BC i AD u tački F. Dokazati da su simetrale uglova BEC i AFB paralelne simetralama uglova između dijagonala datog četvorougla.

○ **1039.** Iz središta svake stranice datog tetivnog četvorougla konstruisana je normala na naspramnu stranicu. Dokazati da se ove četiri normale seku u jednoj tački.

○ **1040.** U krug $k(O, r)$ upisan je trapez $ABCD$. Prave AC i BD seku se u tački E, a prave AD i BC u tački F. Dokazati da su četvorouglovi sa temenima A, D, E, O i A, F, C, O tetivni.

○ **1041.** U trouglu podnožja visina, središta stranica i središta duži koje spajaju ortocentar sa temenima, pripadaju jednom krugu. Dokazati. (Tzv. *Ojlerov krug*, ili *krug devet tačaka trougla*).

○ **1042.** Dokazati da centar *Ojlerovog kruga* (iz prethodnog zadatka) polovi duž SH, gde je S centar opisanog kruga, a H ortocentar trougla.

○ **1043.** Dokazati da podnožja normala iz ma koje tačke opisanog kruga trougla, na stranice tog trougla leže na jednoj pravoj.

○ **1044.** Na datom krugu uzete su proizvoljne različite tačke P, A, B, C. Krugovi sa prečnicima PA, PB, PC, seku se u P i u još tri tačke L, M, N. Dokazati da su tačke L, M, N kolinearne.

□ **1045.** Na datom krugu k date su tačke A, B. Kroz neku tačku C luka $\widehat{AB}$ konstruisane su dve proizvoljne sečice koje seku tetivu AB u tačkama D i E, a krug k u tačkama F i G. Kakav položaj treba da ima tačka C na luku $\widehat{AB}$, da bi četvorougao $DEGF$ bio tetivan?

△ **1046.** U svakom četvorouglu simetrale unutrašnjih uglova se seku međusobno, tako da su četiri presečne tačke temena tetivnog četvorougla. Dokazati.

○ **1047.** Oko trougla ABC opisan je krug i u tački B je konstruisana tangenta t ovog kruga. Dokazati da prava p, paralelna sa t, koja seče stranice BA i BC u tačkama D i E, odseca od datog trougla tetivan četvorougao $ACED$.

□ **1048.** Neka je H ortocentar trougla ABC. Dokazati da su krugovi opisani oko trouglova ABH, BCH i CAH podudarni među sobom.

○ **1049.** Date su dve međusobno normalne poluprave Op i Oq, na polupravoj Op tačke A, B, C i na polupravoj Oq tačka D, tako da je $OA = AB = BC = OD$. Dokazati da je prava AD tangenta kruga opisanog oko trougla BCD.

○ **1050.** Oko kruga su na proizvoljan način opisani trougao i kvadrat. Dokazati da je zbir dužina delova stranica kvadrata unutar trougla veći od zbira dužina delova stranica kvadrata van trougla.

$*$ **1051.** Dat je trougao ABC i krug sa centrom O koji sadrži tačke A i C i seče duži AB i BC još u različitim tačkama K i N. Krugovi opisani oko trouglova ABC i KBN imaju tačno dve zajedničke tačke B i M. Dokazati da je $\sphericalangle OMB = 90°$.

$*$ **1052.** Nad duži AB kao osnovicom konstruisani su jednakostranični trougao ABD i jednakokraki pravougli trougao ABC. Tačka E je podnožje normale iz tačke C na duž AB, a tačka M je podnožje normale iz tačke C na duž AD. Izračunati ugao CEM.

$*$ **1053.** Dat je tetivni četvorougao $ABCD$. Suprotne stranice AB i DC seku se u tački M, a stranice AD i BC u tački N. Dokazati da su simetrale uglova ANB i AMD normalne među sobom.

□ **1054.** Na kraku AD trapeza $ABCD$ izabrana je tačka M. Dokazati da zajednička tačka N krugova, opisanih oko trouglova ABM i CDM, pripada kraku BC.

$*$ **1055.** U kvadratu $ABCD$ dijagonale AC i BD se seku u tački O. Na stranicama BC i CD date su redom tačke M i N, tako da je $BM = CN$. Ako se prave AM i BN seku u tački P, dokazati da je prava OP simetrala ugla APN.

$*$ **1056.** Neka je P proizvoljna tačka na kraćem luku AB kruga opisanog oko pravougaonika $ABCD$, a L i M podnožja normala iz P na dijagonale AC i BD. Dokazati da dužina duži LM ne zavisi od položaja tačke P.

□ **1057.** Upisani krug trougla dodiruje stranice u tačkama K, L, M. Dokazati da je trugao KLM oštrougli.

○ **1058.** Na prečniku AB datog kruga k izabrana je proizvoljno tačka C. Nad dužima AC i CB, kao prečnicima, konstruisani su krugovi k_1 i k_2. Kroz tačku C konstruisana je proizvoljna prava p koja seče k u tačkama M i N, a krugove k_1 i k_2, u tačkama K i L. Dokazati da je $KM = LN$.

$*$ **1059.** Krugovi k_1 i k_2 seku se u tačkama A i B. Proizvoljna sečica kroz A seče krugove k_1 i k_2 u tačkama M i N, a proizvoljna sečica kroz B u tačkama P i Q. Dokazati da je MP paralelno sa NQ.

$*$ **1060.** Dat je krug k, tačka A koja mu pripada i tačka P koja pripada datoj pravoj p. Proizvoljan krug kroz tačke A i P seče krug k u tački B, i pravu p u tački Q. Dokazati da sve prave BQ imaju zajedničku tačku koja pripada krugu k.

○ **1061.** Krugovi k i l imaju zajedničku tetivu PQ. Neka je A proizvoljna tačka kruga k, različita od P i Q i neka prave AP i AQ seku redom krug l još u tačkama B i C. Dokazati da prava h određena visinom trougla ABC iz temena A, sadrži fiksiranu tačku koja ne zavisi od izbora tačke A.

$*$ **1062.** Dat je tetivni četvorougao $ABCD$. Neka AD seče BC u H i CD seče AB u E. Simetrala ugla DEA seče stranice DA i CB u tačkama P i M, a simetrala ugla DHC seče stranice DC i BA u N i L. Dokazati da je $LMNP$ romb.

∗ **1063.** Na osnovici BC i kracima AB i AC jednakokrakog trougla ABC date su tačke P, Q i R, takve da je $PQ \parallel AC$ i $PR \parallel AB$. Dokazati da tačka simetrična tački P u odosu na pravu QR leži na krugu opisanom oko trougla ABC.

∗ **1064.** Krugovi k_1, k_2 i k_3 imaju zajedničke tačke A i B. Prava a sadrži tačku A i seče krugove k_1, k_2 i k_3 redom u tačkama A_1, A_2, A_3. Neka su A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 paralelne tetive krugova k_1, k_2 i k_3. Dokazati da tačke B_1, B_2 i B_3 pripadaju istoj pravoj.

∗ **1065.** Ako je ravan konveksan četvorougao $ABCD$ takav da se dodiruju krugovi k_1 i k_2, upisani u trouglove ABC i ACD, dokazati da postoji krug k upisan u četvorougao $ABCD$.

∗ **1066.** Dat je tetivan četvorougao $ABCD$. Neka su K, L, M i N, redom, podnožja normala iz preseka S dijagonala AC i BD na prave AB, BC, CD i DA. Dokazati da se u četvorougao $KLMN$ može upisati krug.

∗ **1067.** Tačka M pripada opisanom krugu oko jednakostraničnog trougla ABC. Neka su p_1, p_2, p_3 prave kroz M, paralelne sa BC, CA i AB i neka su P_1, P_2, P_3 presečne tačke pravih p_1, p_2, p_3 sa pravim AB, BC, CA. Dokazati da tačke P_1, P_2, P_3 pripadaju jednoj pravoj.

∗ **1068.** Kroz ortocentar trougla ABC konstruisana je prava l. Dokazati da se prave njoj simetrične u odnosu na stranice trougla seku na krugu opisanom oko trougla ABC.

□ **1069.** Krug k dodiruje iznutra tri stranice četvorougla $ABCD$. Dokazati:

a) Ako k seče stranicu CD, onda je $AB + CD > BC + AD$.

b) Ako k ne seče stranicu CD, onda je $AB + CD < BC + AD$.

○ **1070.** Prava p paralelna stranici AB datog trougla ABC polovi stranicu BC i seče simetralu s ugla ABC u T. Ako je O centar upisanog kruga datog trougla, dokazati da je $\sphericalangle OCT = \dfrac{1}{2}\sphericalangle BAC$.

∗ **1071.** Neka je O centar kruga upisanog u dati trougao ABC, a N i M središta stranica AC i BC. Neka su, dalje, T i S presečne tačke prave MN redom sa BO i AO. Dokazati da je $AO + BO + CO > AB + ST$.

○ **1072.** Ako su T_1, T_2, T_3 dodirne tačke stranica BC, AC, AB sa upisanim krugom trougla ABC, dokazati da se prave AT_1, BT_2 i CT_3 seku u jednoj tački.

∗ **1073.** Dat je jednakokraki trougao ABC, $AB = AC$. Neka je D proizvoljna tačka duži BC, takva da je $BC > BD > DC > 0$. Neka su redom k_1 i k_2 opisani krugovi trouglova ABD i ADC i neka su redom BB' i CC' prečnici krugova k_1 i k_2, a tačka M središte duži $B'C'$. Dokazati da je površina trougla MBC konstantna, odnosno da ne zavisi od položaja tačke D.

∗ **1074.** Neka su tačke P i M na stranicama DC i BC kvadrata $ABCD$, takve da je PM tangenta kruga sa centrom A i poluprečnikom AB. Dalje, neka su Q i N tačke preseka pravih PA i MA sa dijagonalom BD.

Dokazati da tačke P, Q, N, M i C pripadaju jednom krugu.

○ **1075.** Unutrašnji uglovi proizvoljnog trougla ABC podeljeni su svaki na tri jednaka dela pravim AY i AZ; BZ i BX; CX i CY. Dokazati da je trougao XYZ jednakostraničan.

8.4 MNOGOUGAO

Ako poluprava Aa, koja ne prolazi kroz neko teme mnogougla, seče neparan broj stranica, tada tačka A leži *u mnogouglu* (tačka A na sl. 27.)

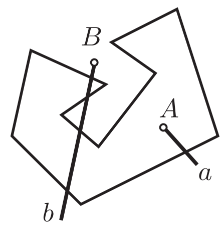
Zbir unutrašnjih uglova konveksnog n-tougla iznosi: $Sn = (n-2)180°$.

Zbir spoljašnjih uglova konveksnog n- tougla iznosi: $S = 360°$.

Broj dijagonala n-tougla je $Dn = \dfrac{n(n-3)}{2}$.

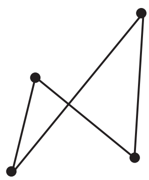
Unutrašnji ugao pravilnog n-tougla je $\alpha_n = \dfrac{(n-2)\cdot 180°}{n}$.

Spoljašnji ugao pravilnog n-tougla je $\beta_n = \dfrac{360°}{n}$.

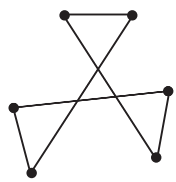


Sl. 27

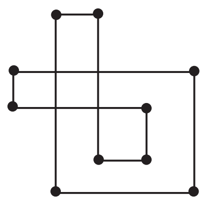
△ **1076.** Na slikama 28-34 odrediti (šrafirati) unutrašnju oblast mnogougla. (Osim na sl. 34, temena su istaknuta punim kružićima).



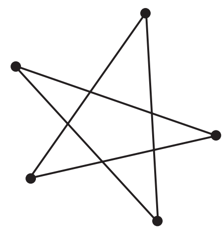
Sl. 28



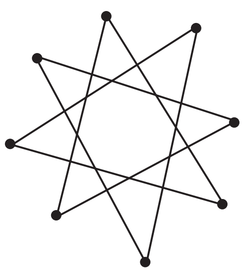
Sl. 29



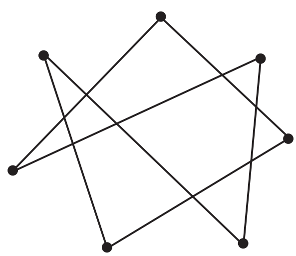
Sl. 30



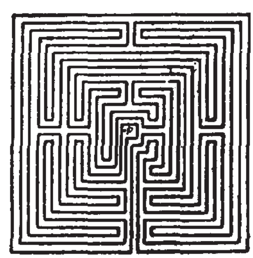
Sl. 31



Sl. 32



Sl. 33



Sl. 34

△ **1077.** Koliko najviše zajedničkih unutrašnjih tačaka mogu imati sve stranice ravne zatvorene izlomljene linije, koja ima 7 temena.

△ **1078.** U petouglu, šestouglu, osmouglu i desetouglu izračunati:

a) zbir unutrašnjih uglova; b) broj dijagonala;

c) unutrašnji ugao pravilnog mnogougla.

△ **1079.** Koji mnogougao ima:

a) zbir unutrašnjih uglova: $540°$, $900°$, $1080°$; b) 44 dijagonale?

△ **1080.** Koji pravilan mnogougao ima unutrašnji ugao: $140°$, $150°$, $160°$?

□ **1081.** Koji pravilan mnogougao ima unutrašnji ugao tri puta veći od spoljašnjeg ugla?

□ **1082.** Koliki je unutrašnji ugao pravilnog mnogougla koji ima dijagonala 6 puta više nego stranica?

△ **1083.** Dat je pravilan mnogougao. Koliki je unutrašnji ugao ovog mnogougla, ako drugi mnogougao, koji ima jednu stranicu manje, ima za 8 dijagonala manje od datog pravilnog mnogougla?

△ **1084.** Koliko najviše oštrih uglova može imati konveksan mnogougao?

□ **1085.** Dokazati da je svaki tetivan jednakostraničan mnogougao pravilan.

△ **1086.** Dokazati da pravilan petougao ima jednake dijagonale.

□ **1087.** Temena pravilnog petougla obojimo plavo ili crveno. Dokazati da postoje tri temena iste boje, koja određuju jednakokraki trougao.

□ **1088.** Dokazati da krug, koji prolazi kroz dva susedna temena i kroz centar opisanog kruga pravilnog petougla, prolazi takođe i kroz presečnu tačku dveju dijagonala tog petougla.

△ **1089.** Ako se dve nesusedne stranice pravilnog petougla produže do preseka, taj produžetak je jednak dijagonali petougla. Dokazati.

□ **1090.** U proizvoljnom konveksnom petouglu $ABCDE$ dužina stranice AE je 4 cm. Neka su P, Q, S i T redom središta duži AB, CD, BC i DE, a M i N redom središta duži PQ i ST. Izračunati dužinu duži MN.

∗ **1091.** Dato je u ravni n krugova jednakih poluprečnika, pri čemu je centar svakog kruga izvan preostalih $(n-1)$ krugova. Ako postoji tačka M koja pripada svim krugovima, dokazati da je $n \leq 5$.

○ **1092.** Neka je M proizvoljna tačka manjeg luka AE kruga opisanog oko pravilnog petougla $ABCDE$. Dokazati da je $MB + MD = MA + MC + ME$.

□ **1093.** Kroz centar pravilnog šestougla prolaze tri simetrale tog šestougla, koje spajaju suprotna temena. Proizvoljna tačka P pripada obimu šestougla i ne poklapa se sa nekim temenom. Dokazati da je najveće rastojanje tačke P od jedne simetrale jednako zbiru rastojanja te tačke od druge dve simetrale.

□ **1094.** U konveksnom šestouglu $ABCDEF$ sve stranice su jednake i jednaki su među sobom uglovi A, B, C, E. Dokazati da je ovaj šestougao pravilan.

○ **1095.** Ako su u nekom šestouglu dijagonale jednake, a po dve stranice paralelne, dokazati da se oko tog šestougla može opisati krug.

△ **1096.** Nad svakom stranicom pravilnog šestougla konstruisan je spolja kvadrat. Dokazati da temena ovih kvadrata, koja se ne poklapaju sa temenima šestougla, određuju pravilan dvanestougao.

○ **1097.** Dat je pravilan desetougao upisan u krug sa centrom O i poluprečnikom r. Ako su A, B, C, D uzastopna temena desetougla dokazati da je $AD - AB = r$.

○ **1098.** Tačke A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 su uzastopna temena pravilnog desetougla upisanog u krug sa centrom O. Poluprečnici OA_3 i OA_4 seku tetivu A_2A_5 u tačkama M i N. Dokazati da je zbir duži MN i A_3A_4 jednak poluprečniku kruga.

□ **1099.** U oštrouglom trouglu ABC duži AD, BE i CF su visine. Tačke K i N su podnožja normala iz D na AB i AC, tačke M i Q su podnožja normala iz E na BC i AB i tačke L i P su podnožja normala iz F na BC i AC. Dokazati da su po dve suprotne stranice šestougla $KLMNPQ$ paralelne među sobom.

□ **1100.** Povukli smo sve dijagonale konveksnog sedmougla. Ove dijagonale dele sedmougao na manje mnogouglove disjunktnih oblasti. Koliko najviše stranica ima jedan takav manji mnogougao?

○ **1101.** Dat je proizvoljan ravan mnogougao. Dokazati da se ovaj mnogougao može pokriti krugom čiji je prečnik podudaran polovini obima datog mnogougla.

∗ **1102.** Dat je zvezdasti mnogougao kome svaka stranica seče tačno dve nesusedne stranice. Izračunati zbir unutrašnjih uglova u vrhovima zvezde, ako zvezda ima: a) 5 stranica, sl. 31; b) 7 stranica, sl. 33; c) n stranica.

○ **1103.** Ako su a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 uzastopne stranice konveksnog šestougla, kome su svi uglovi jednaki, dokazati da je $a_1 - a_4 = a_5 - a_2 = a_3 - a_6$. Obrnuto, ako šest duži: a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 zadovoljavaju date jednakosti, dokazati da postoji konveksan šestougao sa jednakim uglovima, čije su stranice redom duži a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6.

∗ **1104.** Neka su AB i BC dve susedne stranice pravilnog devetougla upisanog u krug čiji je centar tačka O. Sa M označimo središte stranice AB, a sa N središte poluprečnika OX koji je normalan na BC. Dokazati da je $\sphericalangle OMN = 30°$.

∗ **1105.** Dokazati da se konveksan sedamnaestougao ne može razrezati na 12 četvorouglova čija su temena ili temena sedamnaestougla, ili leže unutar njega, ali tako da nijedno teme četvorougla nije unutrašnja tačka stranice nekog drugog četvorougla.

∗ **1106.** Ako je osmougao $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$ upisan u krug i važi $A_1A_2 \parallel A_5A_6$, $A_2A_3 \parallel A_6A_7$, $A_3A_4 \parallel A_7A_8$, dokazati da je $A_8A_1 \parallel A_4A_5$.

∗ **1107.** Ako petougao $ABCDE$ ima jednake stranice, a za njegove uglove važi $\sphericalangle A \geq \sphericalangle B \geq \sphericalangle C \geq \sphericalangle D \geq \sphericalangle E$, dokazati da je petougao pravilan.

∗ **1108.** Dat je tetivan mnogougao sa neparnim brojem stranica. Ako su mu svi unutrašnji uglovi jednaki, dokazati da je on pravilan.

∗ **1109.** U krug je upisan sedmougao čija su tri ugla jednaka 120°. Dokazati da su bar dve stranice ovog sedmougla jednake.

○ **1110.** Dokazati da bar jedno od podnožja normala, spuštenih iz proizvoljne unutrašnje tačke konveksnog mnogougla na njegove stranice, leži na samoj stranici, a ne na njenom produžetku.

8.5 KONSTRUKTIVNI ZADACI U RAVNI

U ovom odeljku dati su zadaci koji se rešavaju na osnovu podudarnosti. U sledećim dvema glavama biće takođe konstruktivnih zadataka, koje ćemo rešavati koristeći se transformacijama. Zadaci su raspoređeni po temama: o trouglu, o četvorouglu, o krugu, geometrijska mesta tačaka i konstrukcije sa ograničenjima u kojima glavni problem predstavljaju nedovoljne dimenzije pribora za crtanje.

8.5.1 Konstrukcije trougla, četvorougla i kruga

1111. Označimo stranice trougla ABC sa $BC = a$, $AC = b$ i $AB = c$, naspramne uglove sa α, β i γ, odgovarajuće visine sa h_a, h_b i h_c, težišne linije sa t_a, t_b i t_c, sa $2s$ obim trougla, a sa r i R poluprečnike upisanog i opisanog kruga.

Konstruisati trougao ABC, ako su mu dati elementi:

△ a) b, c, t_c	△ b) c, α, t_b	△ c) α, γ, h_c
△ d) α, h_c, h_b	△ e) h_c, t_c, α	△ f) c, t_c, h_a
□ g) c, α, t_a	△ h) c, t_a, t_b	△ i) c, t_a, t_c
□ j) c, $a-b$, β, $(a>b)$	□ k) $b+c$, h_c, α	□ l) a, $b+c$, α
□ m) s, α, β	□ n) s, α, h_c	□ o) t_a, t_b, t_c
△ p) c, h_c, t_c	△ q) b, c, t_a	□ r) c, $a-b$, $\alpha-\beta$, $(a>b)$
□ s) h_c, t_c, R	□ t) a, b, $\alpha-\beta$, $a>b$	⋆ u) h_a, h_b, t_a

1112. Konstruisati jednakokraki trougao, ako su mu dati elementi (a je osnovica):

△ a) a, α; □ b) a, $b+h_a$; △ c) a, $b-h_a$; △ d) $b-h_a$, β;

□ e) $a+b$, β; □ f) $b-a$, α, $(b>a)$; ◯ g) h_a, h_b; □ h) α, s.

1113. Konstruisati pravougli trougao hipotenuze c, ako su mu dati elementi:

△ a) $b-a$, α, $(b>a)$; □ b) $a+c$, α △ c) $b+a$, α □ d) s, h_c.

1114. Konstruisati jednakostraničan trougao ako mu je dato:

□ a) $a+h$ △ b) $a-h$.

∗ **1115.** Na osnovici jednakokrakog trougla odrediti tačku, tako da razlika njenih rastojanja od krakova tog trougla bude jednaka datoj duži.

∗ **1116.** Konstruisati trougao ABC, ako su date dve stranice $AC = b$ i $AB = c$, znajući da je ugao kod temena A dva puta veći od ugla kod temena B.

∗ **1117.** Konstruisati trougao ABC, tako da je stranica BC jednaka datoj duži a, stranica CA jednaka datoj duži b i $\sphericalangle CAB = 3\sphericalangle ABC$.

∗ **1118.** Konstruisati trougao ABC ako je dato $AM = t_a$ i poluprečnici r_1 i r_2 krugova opisanih oko trouglova ABM i ACM.

1119. Konstruisati četvorougao $ABCD$ ($AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, $AC = d_1$, $BD = d_2$, uglovi sa temenima A, B, C, D, su α, β, γ, δ), ako su mu dati elementi:

□ a) a, b, c, α, δ; □ b) $a, b, c, d, \sphericalangle(a, c)$; △ c) $a, d_1, d_2, \beta, \gamma$.

1120. Konstruisati paralelogram, ako mu je dato (h_a je visina: $h_a \perp a$):

△ a) a, α, d_1 □ b) h_a, d_1, d_2.

1121. Konstruisati romb, ako mu je dato (r je poluprečnik upisanog kruga):

△ a) a, d_1; △ b) a, r; □ c) a, $d_1 + d_2$.

1122. Konstruisati pravougaonik, ako mu je dato:
△ a) d, $a+b$; △ b) d, $a-b$, $(a>b)$; □ c) a, $b+d$.

1123. Konstruisati kvadrat, ako mu je dato:
△ a) $d-a$; △ b) $a+d$.

1124. Konstruisati trapez $ABCD$, kome su osnovice $AB=a$, $CD=b$, kraci $BC=c$, $DA=d$, dijagonala $AC=d_1$, $BD=d_2$ i visina na osnovicu h, ako je dato:
△ a) a,b,c,h; △ b) a,b,d,α; □ c) a,b,d_1,d_2;
○ d) $a-b,h,d_1,d_2$ $(a>b)$; □ e) $a+b,h,\alpha,\beta$; △ f) a,b,c,d, $(a>b)$;
△ g) $c,d,d_1,\delta=90°$; △ h) $b,d_2,\beta,\delta=90°$.

△ **1125.** Konstruisati jednakokraki trapez, kome je d dijagonala, ako mu je dato:
a) a,b,α; b) $a+b,c,d$; c) $a-b,c,d$, $(a>b)$.

1126. Konstruisati deltoid kome su stranice a i b, simetrala d_s i druga dijagonala d, ako mu je dato:
△a) $d_s, a+b$, $\sphericalangle(a,b)$; □b) $d_s, a-b$, $\sphericalangle(a,b), (a>b)$.

□ **1127.** Konstruisati četvorougao $ABCD$ kome su stranice AB, BC, CD, DA redom jednake datim dužima a, b, c, d i dijagonala AC polovi ugao BAD.

○ **1128.** U dati paralelogram $ABCD$ upisati kvadrat $KLMN$.

△ **1129.** Kroz jednu tačku na hipotenuzi AB pravouglog trougla ABC konstruisati dve prave paralelne katetama, tako da one od trougla odsecaju pravougaonik čiji je obim jednak $2s$, gde je s data duž.

□ **1130.** Konstruisati četvorougao kome su date dužine stranica a, b, c, d i duž m koja spaja središta stranica a i c.

△ **1131.** Konstruisati krug koji sadrži datu tačku A i datu pravu p dodiruje u datoj tački P.

△ **1132.** Date su prave a i b i tačka A prave a. Konstruisati krug koji dodiruje pravu b, a pravu a dodiruje u datoj tački A.

△ **1133.** Konstruisati krug koji sadrži datu tačku A i dati krug b dodiruje u datoj tački B.

□ **1134.** Konstruisati krug koji dodiruje datu pravu a i dati krug k dodiruje u datoj tački K.

○ **1135.** Konstruisati krug koji dodiruje dati krug k i datu pravu a dodiruje u datoj tački A.

○ **1136.** Konstruisati krug koji dodiruje dva data kruga a i b i to krug a u datoj tački A.

□ **1137.** Dat je krug k i izvan njega tačka A. Konstruisati pravu koja sadrži tačku A i seče krug u tačkama B i C, tako da je $AC=2BC$.

△ **1138.** Data je prava a i tačka M van nje. Konstruisati krug datog poluprečnika r, koji dodiruje pravu a i sadrži tačku M.

□ **1139.** Date su nekolinearne tačke A, B, C, D. Konstruisati krug koji je jednako udaljen od svih datih tačaka.
(To znači da je: $|OA-r|=|OB-r|=|OC-r|=|OD-r|$).

□ **1140.** U ravni su date četiri tačke A, B, C, D. Konstruisati krug tako da prolazi kroz tačke A i B, a tangentne duži tog kruga iz C i D su jednake.

□ **1141.** Data su dva podudarna kruga koji se dodiruju spolja. Konstruisati pravu p koja seče oba kruga, tako da presečne tačke određuju na pravoj p tri jednake duži.

△ **1142.** Data je tačka P u krugu. Kroz datu tačku konstruisati najveću i najmanju tetivu datog kruga.

1143. Konstruisati trougao ABC ako mu je dato:
○ a) $a, r, b-c$, $b>c$; □ b) r, h_a, s_α[10]; □ c) a, α, h_a;
○ d) h_a, t_a, s_α; △ e) α, β,R; □ f) a, α, t_a; ○ g) a, α, r;
□ h) $a, R, \beta-\gamma$ $(b>c)$; ○ i) $b, c, \gamma-\beta$, $(c>b)$.

□ **1144.** U datom trouglu ABC konstruisati tačku M, tako da su uglovi MAC, MCB, MBA jednaki među sobom.

○ **1145.** Konstruisati četvorougao kome su data tri ugla i obe dijagonale.

□ **1146.** Oko temena datog trougla ABC, kao centara, opisati tri kruga, tako da svaki od njih dodiruje ostala dva.

□ **1147.** U dati krug upisati četvorougao kome su date dijagonale i ugao pod kojim se seku dijagonale.

△ **1148.** Dat je pravougli trougao. Konstruisati krug koji dodiruje hipotenuzu, prolazi kroz teme pravog ugla i centar mu je na jednoj kateti.

○ **1149.** Data je prava a, tačka A na datoj pravoj i tačka B van prave a. Konstruisati tačke C i D na pravoj a, tako da je $AC = AD$ i ugao CBD jednak je datom uglu β.

□ **1150.** Date su paralelne prave a i b, tačka M na a i tačka P van datih pravih. Konstruisati pravu p kroz tačku P, tako da prave a, b seče redom u tačkama A, B i da je $MA = MB$.

○ **1151.** Dati su krugovi k_1 i k_2. Konstruisati pravu p koja na datim krugovima odseca tetive, koje su redom jednake datim dužima m i n.

○ **1152.** Data su dva kruga koji se seku. Konstruisati sečicu kroz zajedničku tačku krugova, tako da odsečak na njoj, koji je u krugovima, bude jednak datoj duži m.

□ **1153.** Data je tačka P u krugu k. Konstruisati tetivu AB kroz tačku P, tako da je $AP - BP = m$, gde je m data duž.

○ **1154.** Dat je krug k i na njemu tačke A i B, zatim sečica p kruga i na sečici, u krugu, tačka P. Konstruisati tačku C na datom krugu, tako da AC i BC seku p u D i E i da je tačka P središte duži DE. Tačke A i B su sa jedne strane date sečice.

∗ **1155.** Na datom krugu date su tačke A, B, C. Konstruisati na krugu tačku D, tako da se u četvorougao $ABCD$ može upisati krug.

---

[10] s_α je odsečak simetrale ugla α, od temena A do stranice BC.

○ **1156.** Dat je jednakokraki pravougli trougao APQ sa hipotenuzom AP. Konstruisti kvadrat $ABCD$, tako da prava BC sadrži tačku P i prava CD sadrži tačku Q.

△ **1157.** Konstruisati krug koji sadrži date tačke A i B i seče dati krug k u tačkama C i D, tako da je tetiva CD paralelna datoj pravoj p.

□ **1158.** Date du tri tačke A, B i C. Konstruisati pravu a, $a \ni A$, tako da zbir ili razlika rastojanja tačaka B i C od prave a bude podudaran datoj duži $2m$.

△ **1159.** Date su tri nekolinearne tačke A, B i C. Konstruiati tri paralelne prave: $a \ni A$, $b \ni B$ i $c \ni C$, tako da su rastojanja između susednih pravih jednaka među sobom.

△ **1160.** Konstruisati pravu jednako udaljenu od datih tačaka A, B i C.

□ **1161.** Dat je trougao ABC. Konstruisati pavu p paralelnu sa stranicom AB, koja seče stranicu AC u tački M i stranicu BC u tački N, tako da je $MN = AM + BN$.

∗ **1162.** Konstruisati trougao ABC ako je data prava p koja sadrži stranicu AB, tačka D – podnožje visine iz temena A na stranicu BC i tačka E – podnožje visine iz temena B na stranici AC.

△ **1163.** Konstruisati trougao ABC ako su date tri tačke: H – ortocentar trougla, D – podnožje visine h_a i E – podnožje visine h_b.

□ **1164.** Konstruisati kvadrat $ABCD$ ako mu je dato teme A, proizvoljna tačka M stranice BC i proizvoljna tačka N stranice CD.

○ **1165.** Date su tačke A, B, C, D koje pripadaju stranicama kvadrata $MNPQ$ ili produžecima ovih stranica. Konstruisati kvadrat $MNPQ$.

○ **1166.** Na jednoj pravoj date su tačke: A, B, C, D. Kroz ove tačke konstruisati prave: a, b, c, d, takve da je $a \parallel b$ i $c \parallel d$ i da one u preseku određuju jedan kvadrat.

○ **1167.** Date su tri tačke: D, E, S. Konstruisati trougao ABC, kome je duž CD visina, prava CE simetrala ugla kod temena C i tačka S centar opisanog kruga.

∗ **1168.** Konstruisati trougao ABC, ako su date tačke A_1, B_1, C_1, takve da su A, B, C redom središta duži CC_1, AA_1, BB_1.

∗ **1169.** Konstruisati četvorougao $ABCD$, ako su date tačke A_1, B_1, C_1, D_1 i ako znamo da su temena A, B, C, D redom središta duži DD_1, AA_1, BB_1, CC_1.

△ **1170.** Dat je krug k i u krugu tačke P, R. U dati krug upisati pravougli trougao ABC, tako da kateta AC sadrži tačku P, a kateta BC sadrži tačku R.

○ **1171.** Data je prava p, duž a, ugao α i tačke M, N van prave p. Konstruisati trougao ABC, tako da $B, C \in p$ i $BC = a$, zatim $\sphericalangle BAC = \alpha$, $M \in AB$ i $N \in AC$.

○ **1172.** Date su kolinearne tačke M, N, P i duž a. Konstruisati jednakostraničan trougao ABC, tako da je $BC = a$ i prave AB, AC redom prolaze kroz M, N i prava AP polovi ugao BAC.

□ **1173.** Konstruisati trougao ABC ako mu je dat opisani krug, teme A, prava h koja sadrži visinu h_a i tačka B_1 u kojoj visina h_b seče opisani krug.

○ **1174.** Konstruisati trougao ABC ako su date tačke M, N, P, koje predstavljaju podnožja visina redom iz temena A, B, C.

○ **1175.** Konstruisati trougao ABC, ako mu je dato teme A, ortocentar H i centar S opisanog kruga.

△ **1176.** Označimo sa k_1, k_2, k_3 krugove koji spolja dodiruju po jednu stranicu i produžetke drugih dveju stranica trougla ABC[11]. Konstruisati trougao ABC ako su tri date tačke S_1, S_2, S_3 centri krugova k_1, k_2, k_3.

○ **1177.** Konstruisati trougao ABC ako su mu dati centri upisanog, opisanog i jednog spolja pripisanog kruga (pomenutog u prethodnom zadatku).

○ **1178.** Konstruisati trougao ABC ako su date tačke P, Q, R u kojima opisani krug seče:

a) simetrale uglova trougla; b) visine trougla;

c) visinu, simetralu ugla i težišnu liniju iz temena A.

○ **1179.** Konstruisati trougao ABC ako su date tri tačke, koje su u odnosu na stranice trougla simetrične:

a) centru opisanog kruga; b) ortocentru.

○ **1180.** Nad svakom stranicom sa spoljašnje strane trougla ABC konstruisani su kvadrati. Konstruisati trougao ABC ako su dati centri A_1, B_1, C_1 ovih kvadrata.

8.5.2 *Geometrijska mesta tačaka

1181. U datoj ravni konstruisati skup podnožja svih normala, spuštenih iz date tačke A, na sve prave koje sadrže datu tačku B.

1182. Dat je prav ugao Opq. Na kraku Op biramo proizvoljnu tačku P i na kraku Oq tačku Q, tako da je duž PQ jednaka datoj duži $2m$. Konstruisati skup središta svih duži PQ.

1183. Konstruisti skup središta svih tetiva datog kruga k, koje su jednake datoj duži t.

1184. Dat je krug k i tačka A u istoj ravni. Konstruisati skup središta svih tetiva određenih presecima datog kruga i pravih koje sadrže tačku A.

1185. Konstruisati skup centara svih krugova datog poluprečnika r, koji na datoj pravoj p odsecaju tetivu jednaku datoj duži $2m$.

1186. Na datom krugu k date su tačke A i B. Za bilo koju tačku M kruga konstruiše se tetiva AM i iza M u odnosu na A odredimo tačku N, tako da je $MN = MB$. Kakvu figuru određuju sve tačke N?

1187. Data je tetiva AB kruga k. Odrediti skup ortocentara svih trouglova ABC upisanih u dati krug.

1188. Neka je AB dati prečnik datog kruga k. Na proizvoljnoj tetivi AM datog kruga, određena je duž $AN = BM$. Odrediti skup svih tačaka N.

1189. Dat je krug k i duži m i r. Konstruisati skup središta svih krugova poluprečnika r, koji na datom krugu odsecaju tetivu jednaku datoj duži m.

[11] Kažemo da su ovi krugovi spolja pripisani trouglu.

1190. Dat je krug k i duž r. Konstruisati skup centara svih krugova poluprečnika r, koji seku dati krug pod pravim uglom. (Ugao pod kojim se seku dva kruga je ugao između tangenti u zajedničkoj tački).

1191. Dat je krug k i duž t. Konstruisati skup svih tačaka, takvih da su tangentne duži iz tih tačaka povučene na dati krug jednake datoj duži t.

1192. Dat je ugao Oab i duž s. Za svake dve tačke A, B, $A \in Oa$, $B \in Ob$, takve da je $OA + OB = s$, konstruišemo tačku C, tako da je četvorougao $OACB$ paralelogram. Šta predstavlja skup tačaka C?

1193. Odrediti skup središta svih duži, kojima je jedan kraj data tačka A, a drugi kraj pripada datoj pravoj p.

1194. Na najmanjoj stranici AC trougla ABC, proizvoljno biramo tačku M, a na stranici BC biramo tačku N, takvu da je $BN = AM$. Konstruisati skup središta svih duži MN.

1195. Data je prava p i na njoj tačke B i C. Neka su k_1 i k_2 dva bilo koja kruga koji se dodiruju u tački A i jedan dodiruje pravu p u B, a drugi dodiruje pravu p u C. Konstruisati skup tačaka A.

1196. Iz proizvoljne unutrašnje tačke M stranice BC jednakostraničnog trougla ABC, konstruisane su normale MD i ME na stranice AB i AC. Naći skup centara svih krugova opisanih oko trouglova ADE.

1197. Na duži AB biramo proizvoljno unutrašnju tačku M. Sa iste strane date duži konstruišemo kvadrate $AMDE$ i $MBFG$. Odrediti skup središta svih duži OS, gde su tačke O i S centri kvadrata $AMDE$ i $MBFG$.

1198. Konstruisati skup svih tačaka jedne ravni, kojima je zbir rastojanja od dve date prave a i b jednak datoj duži m.

1199. U ravni određenoj datim pravim a i b, konstruisati skup svih tačaka kojima je razlika rastojanja od pravih a i b jednaka datoj duži m.

1200. Odrediti skup težišta svih pravouglih trouglova upisanih u dati krug k.

1201. Dati su krugovi $k_1(O_1, r_1)$, $k_2(O_2, r_2)$, tako da je $r_1 > r_2$. Ako je $M \in k_1$ i $N \in k_2$, M i N su proizvoljno izabrane, odrediti skup središta svih duži MN.

1202. Data su dva kruga $k_1(O_1, r_1)$ i $k_2(O_2, r_2)$. Kontruisati skup središta svih duži MN, gde je M tačka kružne površi prvog kruga, a N tačka kružne površi drugog kruga.

1203. Data je duž AB i tačka C. Sve tačke duži AB projektuju se na sve prave koje sadrže tačku C. Konstruisati skup svih ovih projekcija.

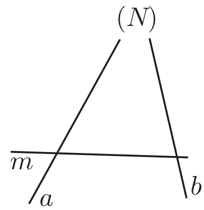
1204. Date su kolinearne tačke A, B, C, tako da je $A - B - C$ i $AB \neq BC$. Bilo koja dva podudarna kruga, od kojih jedan sadrži tačke A i B, a drugi sadrži tačke B i C, pored tačke B imaju još jednu zajedničku tačku M. Konstruisati skup svih tačaka M.

$*$ **1205.** Dat je trougao ABC. Odrediti skup svih tačaka M u ravni tog trougla, takvih da se normale na pravim MA, MB i MC, konstruisane kroz tačke A, B i C seku u jednoj tački.

8.5.3 *Konstrukcije sa ograničenjima

Ako se dve prave seku van crteža, njihovu zajedničku tačku nazivamo *nedostižnom tačkom* (videti zadatak 820). Nedostižnu tačku A označavamo sa (A).

1206. Kroz datu nedostižnu tačku (N) (data je sa dve prave a i b koje se seku van crteža, sl. 35) konstruisati normalu n na datu pravu m.



Sl. 35

1207. Konstruisati središte date duži $A(B)$.

1208. Konstruisati središte stranice $(B)(C)$ datog trougla $A(B)(C)$.

1209. Konstruisati težište datog trougla $A(B)(C)$.

1210. Dat je trougao $(A)(B)(C)$, čije su stranice a, b, c seku van crteža. Konstruiši njegov ortocentar.

1211. Konstruisati upisani krug trougla iz **zadatka 1210**.

1212. Konstruisati opisani krug datog trougla $AB(C)$.

1213. Date su tačke A i B, takve da je $AB > 2r$. Od pribora za crtanje raspolažemo šestarom, kojim se može konstruisati krug poluprečnika ne većeg od r, i lenjirom dužine $2r$[12]. Konstruisati središte S duži AB.

1214. Date su tačke A, B, takve da je $AB > 2r$. Koristeći se *malim šestarom* i *malim lenjirom* (iz prethodnog zadatka) nacrtati duž AB (tj. spojiti pravom linijom tačke A i B).

1215. Koristeći se *malim lenjirom* i *malim šestarom* (za dimenzije manje ili jednake $2r$) nacrtati pravu a kroz datu tačku A, paralelnu datoj pravoj p, ako je rastojanje tačke A od prave p veće od $2r$.

1216. Date su tačke O i R, takve da je $d(O,R) > m$ i prava p. Konstruisati presek prave p i kruga $k(O,OR)$, koristeći se *malim šestarom* i *malim lenjirom* (za crtanje dimenzija manjih od $2m$).

1217. Date su tačke M, N, O, S, takve da je $OM > r$, $SN > r$ i $OS > 2r$. Nacrtati presečne tačke kruga $k_1(O,OM)$ sa krugom $k_2(S,SN)$, koristeći se *malim šestarom* i *malim lenjirom.*

1218. U krugu $k(S,r)$ data je tačka M. Koristeći se pri crtanju samo šestarom (konstruišući samo krugove) odrediti krajnje tačke tetive AB, kojoj je data tačka M središte.

1219. Date su tri paralelne prave a, b i c, takve da je prava b jednako udaljena od pravih a i c. Na jednoj od pravih data je duž m. Koristeći se samo lenjirom (konstruišući samo prave), konstruisati duž $PQ = 2MN$.

1220. Date su prave a, b i c i duž MN, kao u prethodnom zadatku. Koristeći se samo lenjirom, prepoloviti datu duž MN.

---

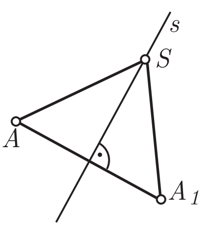
[12] U narednim zadacima ovakav pribor ćemo nazivati *malim šestarom* i *malim lenjirom. Malim lenjirom* možemo po volji "produžiti" polupravu. Unutar kruga prečnika $2r$ sve konstrukcije su "*normalne*".

DEVETA GLAVA

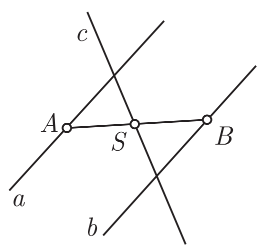
9. IZOMETRIJSKE TRANSFORMACIJE

Tačka A_1 je *simetrična* tački A u *odnosu na pravu* s, u oznaci $\mathfrak{J}_s(A) = A_1$, ako je $AA_1 \perp s$ i prava s polovi duž AA_1, sl. 36. Ako je $S \in s$, onda je $\mathcal{J}_s(S) = S$ i S je *nepokretna tačka* simetrije $\mathcal{J}_s$. Prava s je *osa simetrije*. Osna simetrija $\mathcal{J}_s$ se odlikuje još i osobinama:

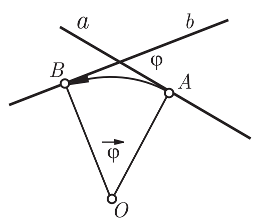
– nepokretne su sve prave koje su normalne na s;
– ako je $\mathfrak{J}_s(A) = B$, tada je središte S duži AB na pravoj s;
– ako je $\mathfrak{J}_s(A) = C$ i $\mathfrak{J}_s(B) = D$, tada je $AB = CD$, tj, osna simetrija je izometrija, i to *indirektna* (menja orijentaciju trougla).
– $\mathfrak{J}_s \circ \mathfrak{J}_s = \mathcal{J}_1$, tj. kompozicija dve jednake osne simetrije je *identično preslikavanje.*
– ako je $\mathfrak{J}_s(a) = b$, tada su a, b, s prave jednog pramena.
– svaka indirektna izometrija ravni, koja ima bar jednu nepokretnu tačku, predstavlja osnu simetriju.



Sl. 36



Sl. 37



Sl. 38

Tačka B je *simetrična* tački A u *odnosu na tačku* S ako je S središte duži AB, sl. 37. Simetrija u odnosu na tačku S, u oznaci $\mathfrak{J}_S$, odlikuje se sledećim osobinama

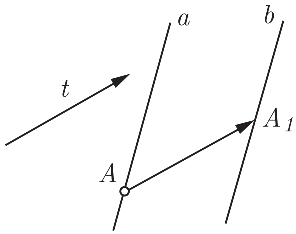
– $\mathfrak{J}_S(S) = S$, tj. S je nepokretna tačka simetrije $\mathfrak{J}_S$;
– ako je $S \in c$, onda je $\mathfrak{J}_S(c) = c$, tj. nepokretna je svaka prava koja sadrži *centar simetrije* S;
– ako je $\mathfrak{J}_S(a) = b$, onda je $a \parallel b$;
– ako je $\mathfrak{J}_S(A) = C$ i $\mathfrak{J}_S(B) = D$, tada je $AC = BD$, tj. centralna simetrija je izometrija.
– $\mathfrak{J}_S \circ \mathfrak{J}_S = \mathfrak{J}_1$, tj. $\mathfrak{J}_S \circ \mathfrak{J}_S(M) = M$.

Ako su O, A, B takve tačke da je $OA = OB$ i $\sphericalangle \overrightarrow{OAB} = \overrightarrow{\varphi}$, tada kažemo da se tačka A preslikava u tačku B *rotacijom oko tačke* O za orijentisani ugao $\overrightarrow{\varphi}$, sl. 38.

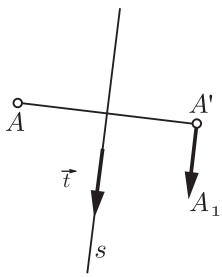
Oznaka za ovu rotaciju je $\mathcal{I}_{O,\vec{\varphi}}(A) = B$ ili $\mathcal{R}_{O,\vec{\varphi}}(A) = B$. Centar O je nepokretna tačka centralne rotacije $\mathcal{I}_{O,\vec{\varphi}}$. Ako je $\varphi \neq 0$, $\varphi \neq 180°$ i $\varphi \neq 360°$ tada rotacija nema nepokretnih pravih. Ako je $\mathcal{I}_{O,\vec{\varphi}}(a) = b$, onda je $\sphericalangle(a, b) = \varphi$.

Rotacija je izometrija.

Ako je za svaki par tačaka A i A_1 figura $\mathcal{F}$ i $\mathcal{F}_1$ zadovoljen uslov: $\overrightarrow{AA_1} = \vec{t}$, tada se figura $\mathcal{F}$ preslikava u figuru $\mathcal{F}_1$ *translacijom* za vektor $\vec{t}$. Translaciju tačke označavamo sa $\mathcal{I}_{\vec{t}}(A) = A_1$ ili $\mathcal{J}_{\vec{t}}(A) = A_1$, sl. 39. Translacija nema nepokretnih tačaka. Nepokretne su sve prave koje su paralelne vektoru translacije. Ako je $\mathcal{I}_{\vec{t}}(a) = b$, onda je $a \parallel b$.



Sl. 39



Sl. 40

Translacija je izometrija, tj. ako je $\mathcal{I}_{\vec{t}}(AB) = CD$, tada je $AB = CD$.

Klizajuća simetrija, u oznaci $\mathcal{I}_{s,\vec{t}}$ ili $G_{s,\vec{t}}$, je izometrija, koja predstavlja kompoziciju jedne osne simetrije i jedne translacije, na sl. 40. $\mathcal{I}_{s,\vec{t}}(A) = A_1$.

9.1 OSNA SIMETRIJA

△ **1221.** Datom trouglu ABC konstruisati simetričan trougao $A_1B_1C_1$ u odnosu na pravu s koja:

a) sadrži stranicu BC; b) sadrži teme C, a ne seče duž AB;

c) seče stranice AB i BC i $B \notin s$; d) seče sve stranice trougla;

e) ne seče trougao ABC.

△ **1222.** Dat je trougao ABC i tačka M u trouglu. Neka su A', B' i C' redom tačke simetrične sa M u odnosu na stranice BC, CA i AB. Dokazati da su trouglovi $C'AB'$, $B'CA'$ i $A'BC'$ jednakokraki.

△ **1223.** Data su dva podudarna i suprotno orijentisana trougla OAB i OA_1B_1. Dokazati da su prave AA_1 i BB_1 paralelne.

□ **1224.** Date su tačke A i B. Ako su A_1 i B_1 simetrične sa A i B u odnosu na bilo koju pravu s koja nije normalna na pravu AB, dokazati da postoji krug koji šadrži tačke A, B, A_1, B_1.

□ **1225.** Data je duž AA_1, simetrala s te duži i tačka B van prave AA_1. Konstruisati tačku B_1, simetričnu sa B u odnosu na s, koristeći se samo lenjirom (tj. povlačeći samo prave linije).

△ **1226.** U jednoj ravni data je prava p i tačke A i B sa iste strane prave p. Konstruisati tačku P prave p, u koju treba da padne svetlosni zrak iz A, koji posle odbijanja od prave p prolazi kroz B. (*Napomena*: koristiti činjenicu da je ugao pod kojim zrak pada jednak uglu pod kojim se odbija).

△ **1227.** Ako presek prave p i kružnog prstena predstavljaju dve duži, dokazati da su ove duži podudarne među sobom.

△ **1228.** Date su tačke A i B i prava p. Konstruisati prave a i b, tako da $A \in a$ i $B \in b$ i da prava p polovi ugao kojeg obrazuju a i b.

□ **1229.** Date su prave a, b, c u istoj ravni. Odrediti tačku B prave b i tačku C prave c, tako da ove dve tačke budu simetrične u odnosu na pravu a.

□ **1230.** Dati su krugovi k_1 i k_2 i prava p. Konstruisati tačke A_1 i A_2, tako da $A_1 \in k_1$, $A_2 \in k_2$ i tačke A_1 i A_2 su simetrične u odnosu na datu pravu p.

○ **1231.** U istoj ravni date su tri prave a, b i c i tačka A na pravoj a. Na pravim b i c odrediti tačke B i C, tako da prava BC bude normalna na pravu a i da duž BC bude osnovica jednakokrakog trougla ABC.

○ **1232.** Data su dva kruga i prava a u istoj ravni i duž h. Konstruisati jednakokraki trougao kome po jedno teme osnovice BC pripada datim krugovima, a visina koja odgovara osnovici pripada pravoj a i jednaka je datoj duži h.

○ **1233.** Date su tri prave a, b i c. Konstruisati jednakostraničan trougao ABC kome visina h_a pripada datoj pravoj a, a ostala dva temena B i C, pripadaju datim pravim: $B \in b$ i $C \in c$.

○ **1234.** Date su dve paralelne prave b i c i tačka A na trećoj pravoj a. Konstruisati jednakokraki trougao ABC, sa vrhom A, kome temena osnovice pripadaju datim pravim b i c i kome je osnovica paralelna datoj pravoj a.

○ **1235.** Date su prave a, b, c i duž d. Konstruisati romb $ABCD$, takav da $A \in a$, $C \in c$ i $BD \in b$, pri čemu je $CD = d$.

□ **1236.** Konstruisati romb, takav da jedna njegova dijagonala bude jednaka datoj duži d i pripada datoj pravoj p, a druga dva temena pripadaju dvama datim krugovima k_1 i k_2.

□ **1237.** Data je prava p i krugovi k_1 i k_2. Konstruisati kvadrat $ABCD$, tako da bude: $A \in k_1$, $C \in k_2$, $B, D \in p$.

○ **1238.** Date su tačke M, N i tačke A, B van prave MN. Odrediti na pravoj MN tačku P takvu da je $\sphericalangle BMP = 2\sphericalangle APN$.

□ **1239.** Date su tačke A i B i krug sa centrom O. Prava AB nije nacrtana, ali znamo da ona seče dati krug. Koristeći se samo šestarom konstruisati tačke M i N u kojima prava AB seče dati krug.

△ **1240.** Date su dve prave b i c koje se seku i tačka A van njih. Konstruisati trougao ABC kome su prave b i c simetrale unutrašnjih uglova ABC i ACB.

∗ **1241.** Dat je krug k i prave a, b, c, koje prolaze kroz centar datog kruga. Konstruisati trougao ABC opisan oko kruga k, tako da mu temena pripadaju redom pravim a, b, c.

△ **1242.** Dva nejednaka kruga k_1 i k_2 imaju zajedničku tetivu AB. Može li se konstruisati prava p, takva da seče k_1 u M_1 i N_1 i k_2 u M_2 i N_2 i da je $M_1M_2 = N_1N_2$?

○ **1243.** Dat je trougao ABC. Neka je tačka A_1 presek simetrale ugla BAC sa stranicom BC, a P i Q tačke simetrične tački A_1 u odnosu na stranice AB i AC. Neka je p, $p \ni P$, prava paralelna sa AC i q, $q \ni Q$, prava paralelna sa AB. Neka dalje: p seče q u N, PA_1 seče AB u D i q u F, QA_1 seče AC u E i p u G. Dokazati sledeća tvrđenja:

a) Prava AA_1 je simetrala duži PQ; b) Tačka N pripada pravoj AA;

c) Duži EF i DG jednake su među sobom.

○ **1244.** U ravni datog trougla ABC data je tačka P. Neka su D, E i F tačke simetrične tački P u odnosu na prave BC, CA i AB, a S centar kruga opisanog oko trougla DEF. Dokazati da je:

a) $AS \perp EF$ (slično: $BS \perp FD$ i $CS \perp DE$);

b) $\sphericalangle EAF = 2\alpha$ (slično: $\sphericalangle FBD = 2\beta$ i $\sphericalangle DCE = 2\gamma$, gde su α, β i γ unutrašnji uglovi trougla ABC).

c) $\sphericalangle PAB = \sphericalangle SAC$ (slično: $\sphericalangle PBC = \sphericalangle SBA$ i $\sphericalangle PCA = \sphericalangle SCB$).

∗ **1245.** Neka su M i N tačke simetrične temenu C trougla ABC, u odnosu na simetrale uglova α i β. Dokazati da je tačka S, u kojoj upisani krug trougla dodiruje stranicu AB, središte duži MN.

○ **1246.** Date su tačke A, B i prava p. Konstruisati krug koji sadrži date tačke i dodiruje datu pravu.

○ **1247.** Produžeci krakova AD i BC jednakokrakog trapeza seku se u tački S. Dokazati da se krugovi opisani oko trouglova ACS i BDS seku u centru kruga opisanog oko datog trapeza.

□ **1248.** Konstruisati putanju kojom treba da se kreće data bilijarska loptica A, da bi, pošto udari o dve susedne ivice pravougaonog stola, udarila datu lopticu B.

∗ **1249.** Na pravouglom bilijarskom stolu nalaze se dve lopte A i B. Kako treba uputiti loptu A da ona, pošto udari u sve četiri ivice stola, udari u loptu B?

∗ **1250.** U ravni su date prave m i n, koje se seku i tačka O van njih. Konstruisati trougao ABC kome visine iz temena B i C pripadaju redom pravim m i n, a tačka O je centar opisanog kruga.

9.2 CENTRALNA SIMETRIJA

△ **1251.** Konstruisati trougao $A_1B_1C_1$ centralno simetričan datom trouglu ABC, ako je centar simetrije:

a) tačka A; b) tačka O van trougla; c) tačka S u trouglu.

△ **1252.** Dat je proizvoljan četvorougao $ABCD$. Konstruisati četvorougao $A_1B_1C_1D_1$ simetričan datom četvorouglu u odnosu na presečnu tačku njegovih dijagonala.

△ **1253.** Date su tačke A, B i C. Konstruisati tačku C_1 simetričnu sa C u odnosu na A i tačku C_2 simetričnu sa C_1 u odnosu na B. Zatim dokazati da je $CC_2 = 2AB$.

△ **1254.** Ako su duži AB i A_1B_1 simetrične u odnosu na tačku S, onda su duži AB_1 i A_1B simetrične u odnosu na istu tačku S. Dokazati.

△ **1255.** Dokazati da mnogougao sa neparnim brojem stranica ne može biti centralno simetričan.

□ **1256.** Dat je šeštougao koji ima paralelne i podudarne suprotne stranice.[13)] Dokazati da je ovaj šestougao centralno simetrična figura.

△ **1257.** Dat je paralelogram $ABCD$ i tačke E, F, G, H, takve da je $E = \mathfrak{I}_B(A)$ $F = \mathfrak{I}_C(B)$, $G = \mathfrak{I}_D(C)$, $H = \mathfrak{I}_A(D)$. Dokazati da prave AC, BD, EG, FH imaju zajedničku tačku.

△ **1258.** U jednoj ravni van datih pravih a i b data je tačka C. Konstruisati tačku A na pravoj a i tačku B na pravoj b, tako da tačka C bude središte duži AB.

□ **1259.** Data je prava a, krug k i tačka S u jednoj ravni. Konstruisati pravu s koja sadrži tačku S, takvu da njen odsečak između date prave i datog kruga bude prepolovljen tačkom S.

△ **1260.** Dokazati da su dve proizvoljne paralelne prave centralno simetrične. Za dve date paralelne prave a i b odrediti skup svih centara simetrija, kojim se prava a preslikava u pravu b.

△ **1261.** Konstruisati trougao ABC ako su date tačke A_1, A_2, B_1 takve da su A_1 i A_2 redom simetrične sa A u odnosu na B i u odnosu na C, a B_1 je simetrična sa B odnosu na C.

□ **1262.** Dat je ugao Abc i u njegovoj oblasti tačka M. Konstruisati trougao ABC, tako da $B \in b$, $C \in c$, a duž AM je težišna linija.

□ **1263.** Dati su krugovi k_1, k_2 i tačka P u jednoj ravni. Konstruisati pravu p kroz P, tako da njen odsečak između datih krugova bude prepolovljen tačkom P.

○ **1264.** Dati su krugovi k_1, k_2, k_3 sa zajedničkim centrom S. Konstruisati pravu p, koja krugove seče redom u tačkama A_1, A_2 i A_3, tako da je $A_1A_2 = A_2A_3$.

○ **1265.** Data su dva kruga k i k_1 sa različitim centrima O i S, koji se seku. Kroz jednu od zajedničkih tačaka krugova povući pravu p, koja na ovim krugovima odseca jednake tetive.

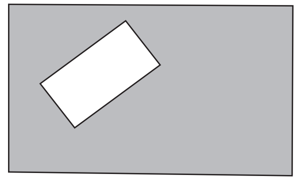
○ **1266.** Date su tačke O, M, N. Konstruisati kvadrat $ABCD$, tako da tačka O bude presečna tačka dijagonala AC i BD, da tačka M pripada pravoj AB, a tačka N pripada pravoj CD.

○ **1267.** Date su tačke O, M, N, P. Konstruisati romb $ABCD$, tako da tačka O bude presek dijagonala AC i BD, a tačke M, N, P redom pripadaju pravim AB, BC, CD.

[13)] U šestouglu $ABCDEF$ suprotne su, npr. stranice AB i DE, a takode BC i EF.

△ **1268.** Dat je proizvoljan paralelogram $ABCD$. Koristeći se samo lenjirom (tj. crtajući samo prave) podeliti paralelogram na dva podudarna četvorougla.

□ **1269.** Iz osenčenog pravougaonika na sl. 41, isečen je (neosenčen) pravougaonik. Konstruisati pravu p koja će ostatak osenčenog pravougaonika podeliti na dva dela jednakih površina.



Sl. 41

○ **1270.** Dva brata Zoran i Dušan, igraju sledeću igru. Nacrtali su jedan krug poluprečnika 20 cm. Posle toga, Zoran nacrta jedan krug poluprečnika većeg od 2 cm, a manjeg od 3 cm, tako da on ceo leži u velikom krugu. Zatim, Dušan nacrta drugi krug poluprečnika r, takvog da 2 cm$< r <$ 3 cm, tako da on takođe leži ceo u velikom krugu, a sa manjim krugom ima najviše jednu zajedničku tačku. Zatim, ponovo Zoran upiše mali krug, i dalje to čine naizmenično, vodeći računa da svaki mali krug ima poluprečnik veći od 2 cm, a manji od 3 cm, da leži ceo u velikom krugu i sa ranije nacrtanim malim krugovima ima najviše po jednu zajedničku tačku. Igra se završava onda kada više nema mesta za crtanje malih krugova, a pobednik je onaj ko nacrta poslednji mali krug. Kako treba da igra Zoran, pa da uvek osigura pobedu?

○ **1271.** Buca i Mina, na papiru oblika paralelograma sa stranicama 20 cm i 30 cm, igraju sledeću igru. Najpre Mina nacrta jedan kvadrat stranice 2 cm, a zatim to isto učini Buca, vodeći računa da se kvadrati ne preklapaju. Dalje naizmenično crtaju kvadrate stranice 2 cm, vodeći računa da se ne preklapaju sa ranije nacrtanim kvadratima. Igra se završava kada na velikom papiru nije moguće nacrtati kvadrat stranice 2 cm, tako da se ne preklapa sa ranije nacrtanim kvadratima. Pobednik je onaj ko nacrta poslednji kvadrat. Može li Mina tako voditi igru, da sebi uvek obezbedi pobedu?

○ **1272.** Pod ograničenom ravnom figurom podrazumevamo figuru koja se može pokriti nekim krugom. Na primer, ograničen je svaki mnogougao, svaka duž, svaki krug, a neograničene su prave, poluprave, uglovi itd. Dokazati da ograničena figura ima najviše jedan centar simetrije.

○ **1273.** Dat je tetivni četvorougao, čija temena određuju šest duži. Iz središta svake duži, određene sa dva temena četvorougla, konstruiše se normala na pravu određenu sa preostale dve tačke. Tako se dobija šest pravih. Dokazati da ove prave imaju jednu zajedničku tačku.

○ **1274.** Na datom "plavom" krugu[14)] crvenom olovkom nacrtani su proizvoljni lukovi: $l_1, l_2, l_3, \ldots, l_k$, tako da je zbir ovih lukova manji od polovine kruga. Dokazati da postoji "plavi" prečnik datog kruga, takav da su mu krajevi "plave" tačke.

∗ **1275.** Dat je četvorougao $ABCD$. Neka su tačke A i A_1 simetrične u odnosu na B, a B i B_1 u odnosu na C, zatim C i C_1 u odnosu na D, a D i D_1 odnosu na A. Na isti način na koji je od četvorougla $ABCD$ dobijen četvorougao $A_1B_1C_1D_1$, treba iz četvorougla obrazovanog središtima stranica AB, BC, CD, DA postaviti nov četvorougao. Dokazati da temena poslednjeg četvorougla polove stranice četvorougla $A_1B_1C_1D_1$.

[14)] Krug nacrtan plavom olovkom.

9.3 ROTACIJA

△ **1276.** Datu pravu p rotirati oko date tačke S za ugao $-60°$.

△ **1277.** Dati oštrougli trougao ABC rotirati za $90°$ (dobijamo trougao $A_1B_1C_1$) i za $-90°$ (dobijamo trougao $A_2B_2C_2$), ako je centar rotacije

a) teme A, b) data tačka O van trougla, c) data unutrašnja tačka S trougla. Dokazati da su trouglovi $A_2B_2C_2$ i $A_1B_1C_1$ simetrični u odnosu na centar rotacije.

△ **1278.** Date su dve jednake duži AB i A_1B_1 u istoj ravni. Konstruisati tačku O te ravni, takvu da se rotacijom oko tačke O duž AB preslikava u duž A_1B_1.

△ **1279.** Tačka A pripada datoj pravoj a i tačka B pripada datoj pravoj b. Odrediti rotaciju koja pravu a preslikava u pravu b i pritom tačku A preslikava u tačku B.

□ **1280.** U jednoj ravni data su dva podudarna jednakostranična trougla ABC i $A_1B_1C_1$ iste orijentacije. Da li postoji rotacija kojom se trougao ABC preslikava u trougao $A_1B_1C_1$?

□ **1281.** Kroz centar kvadrata $ABCD$ konstruisane su dve normalne prave. Dokazati da ove prave seku stranice datog kvadrata u tačkama koje su temena novog kvadrata.

□ **1282.** Date su prave a i b i tačka S van njih. Konstruisati krug sa centrom S koji seče date prave u tačkama A i B, tako da je $\sphericalangle ASB = 60°$.

□ **1283.** Dati su krugovi k i l i tačka O van njih. Konstruisati tačke K i L, $K \in k$ i $L \in l$ tako da je $\sphericalangle KOL = 120°$ i $OK = OL$.

□ **1284.** Data su dva kruga k_1, k_2 i tačka O u istoj ravni. Na krugu k_1 odrediti tetivu t_1 sa središtem S_1, a na krugu k_2 tetivu t_2 sa središtem S_2, tako da je $t_1 = t_2$, $OS_1 = OS_2$ i $\sphericalangle S_1OS = 90°$.

○ **1285.** Date su paralelne prave b i c i u njihovoj ravni tačka A i ugao α. Konstruisati jednakokraki trougao ABC kome je ugao naspram osnovice $\sphericalangle BAC = \alpha$, a $B \in b$ i $C \in c$.

○ **1286.** Data je prava a, tačka C i krug k. Konstruisati jednakokraki trougao ABC tako da $A \in a$, $B \in k$, $AC = BC$ i $\sphericalangle ACB = 30°$.

○ **1287.** Konstruisati jednakostraničan trougao ABC, kome je dato teme A, a temena B i C pripadaju datim pravim b i c.

○ **1288.** Konstruisati jednakostranični trougao, kome temena pripadaju trima datim paralelnim pravim a, b i c.

○ **1289.** Data su tri kruga k_1, k_2 i k_3 sa zajedničkim centrom S. Konstruisati jednakostraničan trougao ABC, kome temena pripadaju redom datim krugovima.

○ **1290.** Data je tačka A u oblasti konveksnog ugla $\sphericalangle xOy$. Konstruisati jednakokraki pravougli trougao ABC, kome je hipotenuza BC, a $B \in Ox$ i $C \in Oy$.

○ **1291.** Date su u jednoj ravni tačke A i P, prava q i duž r. Konstruisati pravougli jednakokraki trougao ABC, $\sphericalangle BAC = 90°$, tako da rastojanje tačke B od tačke P i rastojanje tačke C od prave q bude jednako duži r.

○ **1292.** Konstruisati kvadrat $ABCD$ čija temena A i C pripadaju dvema datim pravim a i c i kome je dato teme B.

○ **1293.** Date su tri paralelne prave a, b i c. Konstruisati kvadrat $ABCD$, tako da bude: $A \in a$, $B \in b$ i $C \in c$.

○ **1294.** Data su tri kruga a, b i c i tačka B, $B \in b$. Konstruisati kvadrat $ABCD$ tako da $A \in a$ i $C \in c$.

○ **1295.** Konstruisati kvadrat, ako su date tačke P, Q i R u kojima sve četiri stranice kvadrata (ili njihovi produžeci) seku jednu pravu.

○ **1296.** Konstruisati kvadrat $ABCD$, ako je dat njegov centar O i tačke P i Q, pri čemu P pripada pravoj BC, a Q pripada pravoj CD.

○ **1297.** Date su dve prave b i d i tačka C. Konstruisati romb, datog ugla γ kod datog temena C, tako da mu temena B i D pripadaju datim pravim b i d.

∗ **1298.** U krug k su upisana dva jednakostranična trougla. Dokazati da se od 6 presečnih tačaka njihovih stranica mogu izabrati tri koje su temena jednakostraničnog trougla.

∗ **1299.** Ako su A, B, C, D, E tačke u ravni, takve da su trouglovi ABE i CDE jednakostranični i jednako orijentisani, dokazati da postoji tačka F, takva da su trouglovi BCF i ADF jednakokraki.

∗ **1300.** Dat je četvorougao $ABCD$. Dokazati tvrđenje: Ako postoji tačka P, takva da su trouglovi ABP i CDP jednako orijentisani jednakokraki pravougli s pravim uglom kod temena P, onda postoji tačka Q, takva da su trouglovi BCQ i DAQ jednakokraki pravougli s pravim uglom kod temena Q.

○ **1301.** Date su prave p, q, tačka O i duž m. Konstruisati krug k čiji je centar tačka O i koji seče pravu p u tačkama A, B i pravu q u tačkama C, D, tako da je $AB + CD = 2m$.

○ **1302.** Dat je krug $k(O, r)$, tačke P i Q i ugao α. Odrediti na krugu k tačke M i N, takve da je MP paralelno sa NQ i $\sphericalangle MON = \alpha$.

○ **1303.** Dat je krug k, dve tačke A i B i duž m. Odrediti na krugu k tačke C i D, takve da je AC paralelno sa BD i $CD = m$.

○ **1304.** Dat je krug $k(O, r)$, dve tačke A, B i ugao γ. Odrediti na krugu k tačke M i N, takve da je $\sphericalangle OAM = \sphericalangle OBN$ i $\sphericalangle MON = \gamma$.

○ **1305.** Dat je krug $k(O, r)$, dve tačke A, B i dva ugla α i β. Odrediti na krugu k tačke M i N, takve da je $\sphericalangle MON = \alpha$ i $\sphericalangle OAM - \sphericalangle OBN = \gamma$.

9.4 TRANSLACIJA

△ **1306.** Dati četvorougao $ABCD$ preslikati translacijom za vektor $\overrightarrow{t} = 2\overrightarrow{DB}$.

△ **1307.** Data su dva podudarna kruga $k_1(O_1, r)$ i $k_2(O_2, r)$. Odrediti vektor translacije koji krug k_1 preslikava u krug k_2.

□ **1308.** Date su paralelne prave a i b i u njihovoj ravni tačka P. Konstruisati pravu p, $p \ni P$, koja seče prave a i b u tačkama A i B, tako da duž AB bude jednaka nekoj datoj duži m.

□ **1309.** Dokazati da je trougao jednakokrak ako i samo ako su mu jednake dve težisne linije

△ **1310.** Konstruisati paralelogram $ABCD$, ako su dva njegova temena date tačke A i B, a druga dva temena pripadaju datom krugu k.

△ **1311.** Data je duž AB, prava p i krug k. Konstruisati tačku P na pravoj p i tačku K na krugu k, tako da četvorougao $ABPK$ bude paralelogram.

□ **1312.** Dati su u ravni krugovi $k_1(O_1, r_1)$ i $k_2(O_2, r_2)$, prava p i duž m. Konstruisati pravu q, $q \parallel p$, koja seče krugove u tačkama A i B, $A \in k_1$ i $B \in k_2$, tako da je $AB = m$.

□ **1313.** Data su u istoj ravni dva kruga $k_1(O_1, r_1)$ i $k_2(O_2, r_2)$ i duž AB. Konstruisati paralelogram $ABCD$, tako da $C \in k_1$ i $D \in k_2$.

□ **1314.** Date su paralelne prave a i b i tačke A, B i C, tako da $A \in a$, $B \in b$ i $A - C - B$. Konstruisati pravu c, kroz C, koja seče a i b redom u tačkama X i Y, pri čemu je $AX + BY = m$, gde je m data duž.

○ **1315.** Data je prava p i tačke A i B sa iste strane date prave. Konstruisati tačke C i D na pravoj p, takve da je $AC = BD$ i CD je jednaka datoj duži m.

○ **1316.** Data su dva kruga $k_1(O_1, r_1)$, $k_2(O_2, r_2)$ i prava p. Konstruisati pravu q, $q \parallel p$, koja seče date krugove, i to k_1 u A, B i k_2 u C, D, tako da je $AB = CD$.

○ **1317.** Data su u istoj ravni dva kruga k_1 i k_2 i prava p. Konstruisati pravu q, paralelnu pravoj p, koja na datim krugovima određuje tetive čiji je zbir jednak datoj duži $2m$.

○ **1318.** Dva data kruga $k_1(O_1, r)$ i $k_2(O_2, r)$ seku se u tačkama P i Q. Prava m, paralelna pravoj O_1O_2, seče date krugove, i to k_1 u tačkama A i B, a k_2 u tačkama C i D. Dokazati da veličina ugla APC i dužina duži AC ne zavise od izbora ove prave.

□ **1319.** Jednakokraki trouglovi ABC i DEF imaju kolinearne osnovice AB i DE. Pritom je $AB > DE$ i $AC < DF$. Konstruisati pravu p paralelnu osnovicama, tako da ona na trouglovima ABC i DEF odseca dve jednake duži.

○ **1320.** Nad stranicom AB pravougaonika $ABCD$ konstruisan je trougao ABE, tako da je E van pravougaonika. Kroz C i D konstruisane su normale CM i DN, redom na AE i BE. Pri tom $M \in AE$ i $N \in BE$. Ako se CM i DN seku u P, dokazati da je prava EP normalna na AB.

□ **1321.** Dokazati da se odgovarajućim translacijama četiri dijagonale pravilnog petougla dobija pravilan petougao čije su stranice dijagonale datog petougla. Prikazati crtežom te translacije.

○ **1322.** Na stranicama AC i BC jednakostraničnog trougla ABC, koji ima centar O, izabrane su redom tačke D i E, takve da je $CD = CE$. Ako je F tačka takva da je $DOBF$ paralelogram, dokazati da je trougao OEF jednakostraničan.

○ **1323.** Dat je krug sa centrom O i četiri njegove tačke: A, B, C, D, takve da tačke A i B leže sa jedne strane prave CD. Na datom krugu konstruisati tačku M, takvu da AM i BM seku tetivu CD u tačkama P i Q, pri čemu je $PQ = m$, a m je data duž.

□ **1324.** Dat je trougao ABC i duž m. Konstruisati pravu p koja seče stranicu AB u tački D i stranicu BC u tački E, tako da je $AD = BE$ i $DE = m$.

○ **1325.** Dat je kvadrat $ABCD$ i u njemu tačka M. Dokazati da se od duži MA, MB, MC, MD može konstruisati četvorougao čije su dijagonale normalne među sobom.

9.5 *KLIZAJUĆA SIMETRIJA

1326. Ako indirektna izometrijska transformacija $\mathcal{J}$ u ravni nema nepokretnih tačaka, dokazati da je $\mathcal{J}$ klizajuća simetrija.

1327. Date su dve jednake duži AB i A_1B_1. Konstruisati osu klizajuće (ili osne) simetrije, koja preslikava A u A_1 i B u B_1.

1328. Date su dve prave a, b i tačke A i B, tako da $A \in a$ i $B \in b$. Odrediti klizajuću simetriju G, tako da je $G(a) = b$ i $G(A) = B$.

1329. Date su dve jednake duži AB i A_1B_1. Ako su G_1 i G_2 klizajuće simetrije kojim se duž AB preslikava u A_1B_1, odnosno u B_1A_1, dokazati da su ose ovih klizajućih simetrija normalne među sobom.

1330. Date su dve jednake duži AB i A_1B_1. Neka su G_1 i G_2 klizajuće simetrije, takve da je $G_1(A) = A_1$, $G_1(B) = B_1$, $G_2(A) = B_1$ i $G_2(B) = A_1$. Dokazati da kompozicija klizajućih simetrija G_1 i G_2 predstavlja osnu simetriju.

9.6 *KOMPOZICIJA (PROIZVOD) IZOMETRIJA U RAVNI

1331. Date su prave a i b koje se seku u tački O pod uglom α. Dokazati da kompozicija osnih simetrija $\mathcal{J}_b \circ \mathcal{J}_a$ predstavlja:

a) centralnu simetriju $\mathcal{J}_O$, ako je $\alpha = 90°$;

b) centralnu rotaciju $\mathcal{R}_{O,2\alpha}$, ako je $\alpha \neq 90°$.

1332. Ako su različite prave a i b paralelne, dokazati da izometrija $\mathcal{J}_b \circ \mathcal{J}_a$ predstavlja translaciju. Odrediti vektor te translacije.

1333. Odrediti pravu c, ako su date prave a, b i $\mathcal{J}_b \circ \mathcal{J}_a = \mathcal{J}_c$.

1334. Ako su A i B različite tačke, dokazati da izometrija $\mathcal{J}_B \circ \mathcal{J}_A$ predstavlja translaciju. Odrediti vektor te translacije.

1335. Date su tačke A, B. Odrediti tačku C, takvu da $\mathcal{J}_B \circ \mathcal{J}_A = \mathcal{J}_C$.

1336. Data je prava a i tačka A te prave. Dokazati da izometrija $\mathcal{J}_a \circ \mathcal{J}_A$ predstavlja osnu simetriju. Odrediti osu ove simetrije.

1337. Data je prava p, tačka M te prave i tačka N van prave, takva da je $MN \perp p$. Šta predstavlja izometrija $\mathcal{J}_N \circ \mathcal{J}_M \circ \mathcal{J}_p$?.

1338. Kompozicija tri osne simetrije $\mathcal{J}_c \circ \mathcal{J}_b \circ \mathcal{J}_a$ predstavlja osnu simetriju ako i samo ako su a, b, c prave jednog pramena. Osa te simetrije pripada istom pramenu pravih. Dokazati. Konstruisati osu dobijene simetrije.

1339. Ako su a, b, c tri prave koje ne pripadaju jednom pramenu pravih, dokazati da kompozicija osnih simetrija u odnosu na ove tri prave predstavlja klizajuću simetriju.

1340. Dat je trougao ABC. Konstruisati osu klizajuće simetrije, koja je kompozicija osnih simetrija u odnosu na prave BC, CA, AB.

1341. Kompozicija triju centralnih simetrija u odnosu na bilo koje tri tačke A, B, C je centralna simetrija. Dokazati. Odrediti centar te simetrije.

1342. Kompozicija neparnog broja osnih (centralnih) simetrija je osna (centralna) simetrija. Dokazati.

1343. Prava s je simetrala ugla određenog pravim a i b ako i samo ako je $\mathcal{I}_b \circ \mathcal{I}_s \circ \mathcal{I}_a = \mathcal{I}_s$. Dokazati.

1344. Dat je paralelogram $ABCD$ i trougao MNP. Odrediti trougao u koji se preslikava trougao MNP kompozicijom simetrija u odnosu na tačke redom: A, B, C, D.

1345. Ako je $\mathcal{I}_A \circ \mathcal{I}_P = \mathcal{I}_p \circ \mathcal{I}_B$, dokazati da je $\mathcal{I}_p(A) = B$.

1346. Ako je $\mathcal{I}_a \circ \mathcal{I}_S = \mathcal{I}_S \circ \mathcal{I}_b$, dakazati da je $\mathcal{I}_S(a) = b$.

1347. Ako je $\mathcal{I}_B \circ \mathcal{I}_p \circ \mathcal{I}_A = \mathcal{I}_A \circ \mathcal{I}_p \circ \mathcal{I}_B$, dokazati da je $p \perp AB$.

1348. Dokazati da je kompozicija dveju klizajućih simetrija, čije ose obrazuju ugao α, centralna rotacija za ugao 2α.

1349. Odrediti ugao između različitih pravih a i b, ako je $\mathcal{I}_a \circ \mathcal{I}_b \circ \mathcal{I}_a = \mathcal{I}_b \circ \mathcal{I}_a \circ \mathcal{I}_b$

1350. Neka su M, N, P, Q, R, S redom središta stranica AB, BC, CD, DE, EF, FA proizvoljnog konveksnog šestougla. Dokazati da kompozicija centralnih simetrija u odnosu na tačke M, N, P, Q, R, S redom, predstavlja koincidenciju.

1351. Date su tačke K, L, M, N, P, koje predstavljaju središta stranica konveksnog petougla $ABCDE$. Konstruisati petougao $ABCDE$. Kakav treba da bude mnogougao da bi se mogao konstruisati na osnovu datih središta stranica?

1352. Ako je $\mathcal{I}$ indirektna izometrijska transformacija, dokazati da središta duži koje spajaju parove odgovarajućih tačaka pripadaju jednoj pravoj.

1353. Data su dva podudarna suprotno orijentisana trougla ABC i $A_1B_1C_1$. Dokazati da središta duži AA_1, BB_1 i CC_1 pripadaju jednoj pravoj.

* **1354.** U ravni su date (neparalelne) podudarne duži AB i A_1B_1. Neka su O i O' centri rotacija koje tačke A i B preslikavaju u A_1 i B_1, odnosno u B_1 i A_1. Dokazati da krug sa prečnikom OO' sadrži središta duži AB i A_1B_1.

* **1355.** Date su tri međusobno paralelne prave a, b, c i prava s koja ih seče. Konstruisati jednakostraničan trougao ABC, takav da $A \in a$, $B \in b$, $C \in c$, a ortocentar H pripada pravoj s.

9.7 *PROBLEMI MAKSIMUMA I MINIMUMA

1356. U dati pravougli trougao ABC upisati pravougaonik kome se jedno teme poklapa sa temenom C pravog ugla trougla i koji ima najmanju dijagonalu.

1357. Date su tačke A, B sa iste strane date prave p. Konstruisati tačku C na pravoj p, tako da obim trougla ABC bude najmanji.

1358. Dva broda A i B nalaze se usidreni na moru, nedaleko od pravolinijske obale p. S jednog broda poslat je čamac na drugi brod. Čamac je usput morao da iskrca na obalu jednog putnika. Odrediti (konstruisati) najkraći put kojim čamac treba da ide da bi obavio postavljeni zadatak.

1359. Dat je konveksan ugao Oab i u njemu tačka C. Konstruisati tačke A i B, $A \in a$ i $B \in b$, takve da obim trougla ABC bude najmanji.

1360. Date su tačke A i B u oštrom uglu Omn. Na kracima datog ugla odrediti tačke M i N, $M \in Om$ i $N \in On$, takve da izlomljena linija $AMNB$ bude najkraća.

1361. Van date prave p date su tačke A i B. Konstruisati tačku P, $P \in p$, takvu da razlika njenih rastojanja od tačaka A i B bude najmanja, i tačku Q, $Q \in p$, kojoj je razlika rastojanja od tačaka A i B najveća.

1362. Data je prava p i tačke A i B sa iste strane date prave. Konstruisati na pravoj p duž CD, tako da duž CD bude jednaka nekoj datoj duži m i da izlomljena linija $ACDB$ bude što je moguće kraća (najkraća).

1363. Date su tačke A i B sa raznih strana date prave p. Konstruisati duž CD na pravoj p, tako da je $CD = AB$ i da pritom izlomljena linija $ACDB$ bude najkraća.

1364. Između mesta A i B nalazi se kanal sa paralelnim obalama m i n. Konstruisati most MN preko kanala, tako da dužina mosta bude što je moguće manja i da pri tome put $AMNB$ bude što je moguće kraći.

1365. Između mesta A i B teku dve reke. Gde treba postaviti mostove (najkraće) da bi put od A do B bio najkraći?

1366. Dat je konveksan ugao Abc. Na kracima Ab i Ac konstruisati tačke B i C, tako da je zbir $AB + AC$ jednak datoj duži $2m$ i da duž BC bude najmanja.

1367. Dati su krugovi k_1 i k_2 koji imaju zajedničke tačke A i B. Konstruisati pravu p, koja sadrži tačku A i seče k_1 i k_2 i P_1 i P_2, tako da je dužina duži P_1P_2 maksimalna.

1368. Dat je krug k i tačka P. Konstruisati sečicu p datog kruga kroz datu tačku, tako da zbir rastojanja date tačke od presečnih tačaka sečice i kruga bude najveći (najmanji). Razmotriti sve položaje tačke P u odnosu na krug.

1369. Kroz teme A datog trougla ABC povući pravu p, tako da zbir rastojanja tačaka B i C od prave p bude najveći i da je A jedina zajednička tačka date prave i datog trougla.

1370. U dati kvadrat upisati drugi kvadrat najmanjeg obima.

1371. Date su poluprave Oa i Sb sa zajedničkom tačkom C. Na polupravoj Oa konstruisati tačku A i na polupravoj Sb tačku B, tako da je $OA = SB$ i da je duž AB najmanja.

1372. U dati oštrougli trougao ABC upisati trougao, kome svako teme pripada jednoj stranici datog trougla, tako da obim upisanog trougla bude najmanji.

1373. U datom trouglu ABC odrediti tačku M, tako da zbir rastojanja od tačke M do stranica trougla bude najmanji, ako je tačka M:

a) na stranici AC, b) u unutrašnjosti trougla.

1374. U datom trouglu ABC konstruisati tačku P, tako da zbir rastojanja tačke P od temena A, B, C bude najmanji.

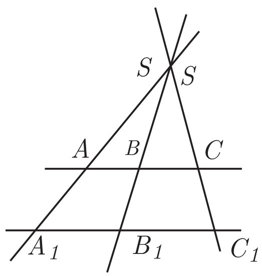
1375. U konveksnom četvorouglu $ABCD$ naći tačku, kojoj je zbir rastojanja od temena datog četvorougla najmanji.

DESETA GLAVA

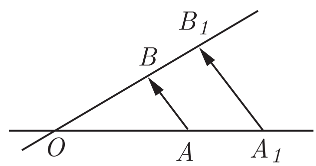
10. HOMOTETIJA I SLIČNOST

Značajna je *Talesova teorema*:

Ako je pramen pravih presečen paralelnim transverzalama, tada su odgovarajući odsečci na pravim pramena i na paralelnim pravim proporcionalni. Prema sl. 42 je: $\dfrac{SA}{SA_1} = \dfrac{SB}{SB_1} = \dfrac{SC}{SC_1} = \dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{BC}{B_1C_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1}$. Važi i obrnuta teorema, npr.: ako je $\dfrac{SA}{SA_1} = \dfrac{SB}{SB_1}$, onda je $AB||A_1B_1$.



Sl. 42



Sl. 43

Ako je data tačka O i realan broj k, tada ako je $\overrightarrow{OA_1} = k \cdot \overrightarrow{OA}$, kažemo da se tačka A preslikava u A_1 *homotetijom* $\mathcal{H}_{O,k}$. Ako je $\mathcal{H}_{O,k}(\mathcal{F}) = \mathcal{F}_1$, onda je figura $\mathcal{F}_1$ homotetična slika (lik) figure $\mathcal{F}$. Na sl. 43 je $\mathcal{H}_{O,k}(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{A_1B_1}$. Homotetija održava kolinearnost, raspored tačaka, paralelnost i jednakost uglova.

Ako za svaki par odgovarajućih tačaka A, $B \in \mathcal{F}$ i A_1, $B_1 \in \mathcal{F}_1$, važi: $A_1B_1 = k \cdot AB$, $k > 0$, tada se figura $\mathcal{F}$ preslikava u figuru $\mathcal{F}_1$ *transformacijom sličnosti.*

Dva trougla, su slična ako i samo ako imaju:

- proporcionalne sve odgovarajuće stranice $a : b : c = a_1 : b_1 : c_1$ (treći stav);
- jednak jedan odgovarajući ugao i proporcionalne stranice koje zahvataju taj ugao, npr. $\alpha = \alpha_1$ i $b : c = b_1 : c_1$ (prvi stav);
- jednaka dva para odgovarajućih uglova, npr. $\alpha = \alpha_1$ i $\beta = \beta_1$ (drugi stav);
- dva para proporcionalnih odgovarajućih stranica, jednak po jedan ugao naspram jedne stranice, a uglovi naspram druge proporcionalne stranice su oba oštra, ili oba tupa, ili oba prava, npr. $a : b = a_1 : b_1$, $\alpha = \alpha_1$, β i β_1 oba tupa, oba oštra ili oba prava (četvrti stav).

– Za pravougli trougao sa hipotenuzom c važi Pitagorina teorema: $c^2 = a^2 + b^2$.
– Važi i obrnuta teorema: ako u trouglu ABC važi: $AB^2 + AC^2 = BC^2$, onda je $\sphericalangle BAC = 90°$.

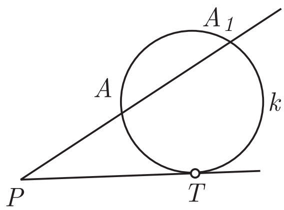
Za slične mnogouglove važi $O : O_1 = a : a_1$ (O je obim) i $P : P_1 = a^2 : a_1^2$ (P je površina).

Ako su h, t, R, r redom visina, težišna linija, poluprečnik opisanog i poluprečnik upisanog kruga trougla, tada za slične trouglove važi:

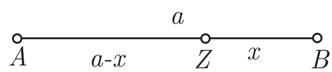
$$a : a_1 = h : h_1 = t : t_1 = R : R_1 = r : r_1.$$

Za svaki trougao važi: $a : b = h_b : h_a$.

Ako sečica iz tačke P seče krug u tačkama A i $A_!$, a tangenta iz iste tačke dodiruje krug u tački T, tada je $PA \cdot PA_1 = PT^2$. Za datu tačku P i dati krug k ova veličina je konstantna i zove se *potencija tačke P u odnosu na krug k*, sl. 44.



Sl. 44



Sl. 45

Ako tačka Z deli duž $AB = a$ tako da je veći deo geometrijska sredina date duži i manjeg odsečka, tada kažemo da Z deli duž *a zlatnim presekom*, sl. 45:

$$a : (a - x) = (a - x) : x$$

Ako su A, B, C, D kolinearne tačke, $A - B - C$ i nije $A - D - C$, a važi proporcija $AC : CB = AD : BD$, tada su tačke C i D *harmonijski spregnute* sa A i B (A, B i C, D su dva para harmonijskih tačaka).

Simetrala unutrašnjeg i simetrala spoljašnjeg ugla u jednom temenu trougla dele naspramnu stranicu harmonijskom podelom (npr. $BM : MC = BN : CN$). Pri tome, ako $M \in BC$, važi $BM : MC = AB : AC$.

Važi i obrnuto: ako $M \in BC$ i $BM : MC = AB : AC$, tada je AM simetrala ugla BAC u trouglu ABC.

10.1 PROPORCIONALNOST ODSEČAKA

△ **1376.** Datu duž a podeliti na delove koji su u razmeri:
a) $5 : 2$, b) $1 : 3$, c) $1 : 1 : 1$, d) $2 : 1 : 3$.

△ **1377.** Data je duž b. Konstruisati duž: a) $\frac{2}{3}b$, b) $\frac{3}{5}b$, c) $\frac{5}{3}b$.

△ **1378.** Konstruisati tačke P i Q date duži MN, tako da je $M - P - Q$ i $MP = 2PQ$ i $PQ = 2QN$.

△ **1379.** Prave m, n i p su paralelne stranici AB trougla ABC i seku stranice AC i BC redom u tačkama M i M_1, N i N_1, P i P_1, tako da $CM = MN = NP = PA$. Ako je $\overrightarrow{PP_1} = m \cdot \overrightarrow{MM_1} = n \cdot \overrightarrow{NN_1}$, izračunati brojeve m i n.

□ **1380.** Data je duž AB. Na pravoj AB konstruisati tačke P i Q, tako da je $AP : PB = m : n$ i $AQ : BQ = m : n$, gde su m i n date duži. Ako je O središte duži AB, dokazati da je $OA^2 = OP \cdot OQ$.

△ **1381.** U sistemu merenja sa datom jediničnom duži u date su duži a, b i c. Konstruisati duž x datu formulom:

a) $x = \frac{ac}{b}$; b) $x = \frac{a^2}{b}$; c) $x = \frac{a+b}{c}$; d) $x = a \cdot b$; e) $x = \frac{a}{b}$;

f) $x = a^2$; g) $(a - x) : x = b : a$; h) $(a + x) : (a - x) = 5 : 2$.

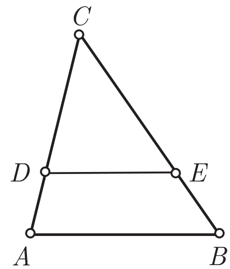
△ **1382.** U trouglu ABC na sl. 46 duž DE je paralelna sa AB.

a) Naći CE, ako $AC = 12$, $CD = 4$, $BC = 24$;

b) Naći BE, ako $AC = 15$, $AD = 3$, $BC = 25$;

c) Naći BC, ako $AD = 6$, $CD = 14$, $CE = 7$;

d) Naći AC, ako $AD = CE$, $CD = 4$, $BE = 9$;



Sl. 46

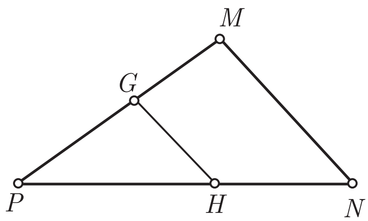
△ **1383.** U kojim od niže navedenih slučajeva je $GH \parallel MN$ (sl. 47)?

a) $NP = 14$, $HP = 6$, $MP = 7$, $GP = 3$;

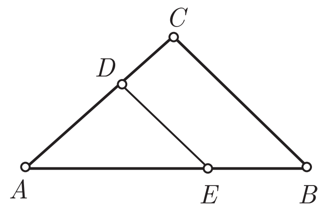
b) $NP = 12$, $HN = 3$, $MP = 8$, $GP = 6$;

c) $HP = 6$, $HN = 5$, $GP = 9$, $GM = 8$;

d) $MP = 21$, $MG = 9$, $NP = 24$, $HP = 5$.



Sl. 47



Sl. 48

△ **1384.** Na datoj sl. 48 je $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADE$. Ako je $AD = 14$, $ED = 12$, $BC = 15$ i $BE = 4$, izračunati AC, AE i AB.

△ **1385.** Date su duži m i n i ugao xOy. Kroz datu tačku M u uglu xOy konstruisati pravu koja seče krake u tačkama A i B, tako da je:

a) $OA : OB = m : n$; b) $AM : BM = m : n$.

□ **1386.** Date su tri poluprave Sa, Sb i Sc. Dokazati da je razmera normalnih odstojanja bilo koje tačke poluprave Sa, od polupravih Sb i Sc, stalna veličina.

□ **1387.** Na stranici AD paralelograma $ABCD$ data je tačka N_1, takva da je $AN_1 = \frac{AD}{n}$. Duž BN_1 i dijagonala AC imaju zajedničku tačku M_1.

Dokazati da je $AM_1 = \frac{AC}{n+1}$, (n je prirodni broj).

$*$ **1388.** Neka je K središte težišne linije CC_1 trougla ABC i neka AK seče BC u M. Dokazati da je $CM : MB = 1 : 2$.

$*$ **1389.** Na stranici AC trougla ABC data je tačka K koja deli AC u razmeri $AK : KC = 1 : 3$, a na stranici BC data je tačka L, tako da je $BL : LC = 1 : 4$. Dokazati da prava AL polovi duž BK.

$*$ **1390.** Na stranici AC trougla ABC uočena je tačka D, takva da $AD : DC = 2 : 3$, a na stranici BC data je tačka E, takva da je $BC : EC = 3 : 1$. Duži BD i AE seku se u S. Odrediti razmeru $AS : SE$.

$*$ **1391.** U trouglu KLM tačke P i O dele, redom, stranice LK i LM u odnosu $LP : PK = 3 : 1$, $LO : OM = 3 : 1$. Dokazati da je $PO \parallel KM$.

□ **1392.** Dat je ugao Omn, tačke M i P na kraku Om i tačke N i Q na kraku On, takve da je $MN \parallel PQ$. Prava q kroz Q, paralelna sa NP, seče krak Om u tački R. Dokazati da je duž OP geometrijska sredina duži OM i OR.

○ **1393.** Dokazati da neparalelne stranice i dijagonale trapeza na pravoj koja je paralelna osnovicama odsecaju tri duži od kojih su dve krajnje jednake među sobom.

○ **1394.** Dokazati da prava, koja je određena presečnom tačkom dijagonala i presečnom tačkom produžetaka krakova trapeza, polovi osnovice trapeza.

○ **1395.** Kroz presečnu tačku dijagonala trapeza $ABCD$ konstruisane su prave paralelne sa kracima AD i BC i one seku osnovicu AB u M i N. Dokazati da je $AM = BN$.

10.2 HOMOTETIJA

△ **1396.** Konstruisati homotetičnu sliku trougla ABC, ako je centar homotetije tačka S van trougla i koeficijent homotetije:

a) $k = \dfrac{1}{2}$, b) $k = -1$, c) $k = -2$, d) $k = m : n$ gde su m i n date duži.

□ **1397.** Tačke M i N su središta stranica BC i CD konveksnog četvorougla $ABCD$. Ako duži AM i AN dele dijagonalu BD na tri jednaka dela, četvorougao $ABCD$ je paralelogram. Dokazati.

△ **1398.** Dokazati da za svaka dva kruga $k_1(O_1, r_2)$ i $k_2(O_2, r_2)$ postoji homotetija koja preslikava k_1 u k_2. Odrediti centar i koeficijent te homotetije.

$*$ **1399.** U trougao ABC upisan je paralelogram $ADEF$ tako da temena D, E, F leže redom na stranicama AB, BC i CA. Kroz središte A_1 stranice BC konstruisana je prava AA_1 koja seče pravu EF u tački G. Dokazati da je četvorougao $BGFD$ paralelogam.

$*$ **1400.** U krug sa centrom O je upisan četvorougao $ABCD$ čije su dijagonale uzajamno normalne i seku se u tački E. Iz tačke E je konstruisana normala na pravu AD. Ta normala seče pravu BC u tački M. Dokazati da je $BM = MC$. Odrediti skup tačaka M koji nastaje kad se dijagonala BD menja, ostajući pri tom normalna na AC.

∗ **1401.** Dat je krug k i krugovi k_1 i k_2 jednakih poluprečnika koji dodiruju k iznutra u tačkama A i B i pri tom se međusobno dodiruju. Neka je C proizvoljna tačka kruga k i neka CA seče k_1 u M, a CB seče k_2 u N. Dokazati da je MN paralelno sa AB.

○ **1402.** Data je prava p, krug k i tačke M, N na pravoj p. Iz datih tačaka konstruisane su po dve tangente na dati krug i u uglovima koje obrazuju tangente iz svake od datih tačaka upisana su dva podudarna kruga. Dokazati da je prava određena centrima ovih krugova paralelna datoj pravoj.

∗ **1403.** Dat je jednakokraki trougao ABC sa osnovicom BC. Neka je k krug koji iznutra dodiruje opisani krug datog trougla i dodiruje krake trougla u tačkama P i Q. Dokazati da je središte duži PQ ujedno i centar kruga upisanog u trouglu ABC.

∗ **1404.** Dva kruga se dodiruju (iznutra ili spolja) u tački P. Prava t dodiruje jedan od tih krugova u tački A, a seče drugi u B i C. Dokazati da je prava AP simetrala jednog od uglova između pravih BP i CP.

∗ **1405.** U datom trouglu ABC konstruisana su tri podudarna kruga, od kojih svaki dodiruje po dve stranice trougla i sadrži zajedničku tačku O. Dokazati da su centar upisanog i centar opisanog kruga trougla ABC kolinearni sa tačkom O.

□ **1406.** U datom oštrom uglu Abc data je tačka D i date su duži m i n. Na kraku Ab odrediti tačku B i na kraku Ac tačku C, tako da $D \in BC$ i $h_c : CD = m : n$, gde je h_c visina trougla ABC.

△ **1407.** Date su paralelne prave a, b, c i tačke M i N na pravoj b. Ako je A proizvoljna tačka prave a i P, Q tačke preseka pravih AM i AN sa pravom c, dokazati da duž PQ ima stalnu dužinu.

□ **1408.** Dat je trougao ABC. Konstruisati kvadrat $KLMN$, tako da tačke K i L pripadaju stranici AB, tačka M pripada stranici BC i N pripada stranici AC.

□ **1409.** U dati trougao ABC upisati jednakostraničan trougao KLM, tako da $K \in AB$, $L \in BC$, $M \in AC$ i $KM \perp AB$.

□ **1410.** U dati trougao ABC upisati paralelogram $AMNP$, tako da $M \in AB$, $N \in BC$, $P \in AC$ i $AM = 2MN$.

□ **1411.** U dati polukrug upisati kvadrat, tako da dva temena kvadrata pripadaju prečniku, a druga dva kružnom luku.

○ **1412.** U datom krugu k data su dva poluprečnika OA i OB. Konstruisati tetivu koju ova dva poluprečnika dele na tri jednaka odsečka.

□ **1413.** Date su prave p, q, r jednog pramena, tačka S i duži m i n. Konstruisati pravu s, koja sadrži tačku S i seče prave p, q, r redom u tačkama P, Q, R, tako da je $PQ : QR = m : n$.

○ **1414.** Date su prave p, q, r, duži m i n i tačke P i Q, $P \in p$ i $Q \in q$. Konstruisati pravu s, koja je paralelna sa r i seče prave p, q u tačkama M, N, tako da je $PM : QN = m : n$.

□ **1415.** Dat je trougao ABC i krug k. U dati krug upisati trougao $A_1B_1C_1$, tako da mu odgovarajuće stranice budu paralelne stranicama datog trougla.

○ **1416.** Date su duži d, h i r. Konstruisati trougao ABC kome je r poluprečnik upisanog kruga, h je visina iz temena A i $AB - AC = d$.

□ **1417.** Date su prave a i b koje seku datu pravu p. Konstruisati kvadrat čija dva temena pripadaju datoj pravoj p, jedno teme pripada pravoj a i jedno teme pripada pravoj b. Razmotriti sve slučajeve.

□ **1418.** Dat je konveksan ugao $\sphericalangle xOy$ i tačka A u uglu. Konstruisati krug koji sadrži tačku A i dodiruje krake datog ugla.

△ **1419.** U datom konveksnom uglu $\sphericalangle pOq$ data je tačka A i prava a. Konstruisati trougao APQ, tako da $P \in Op$, $Q \in Oq$, $\sphericalangle PAQ$ jednak je datom uglu α i stranica PQ je paralelna datoj pravoj a.

△ **1420.** Dat je krug k i tačka P van kruga. Konstruisati sečicu p datog kruga, $P \in p$, tako da je dobijena tetiva dva puta veća od odsečka prave p između tačke P i datog kruga.

○ **1421.** Data je prava t i van nje tačke A i B. Konstruisati krug k koji sadrži date tačke i dodiruje datu pravu.

○ **1422.** Date su prave a i b i krug k. Konstruisati krug koji dodiruje date prave i dati krug.

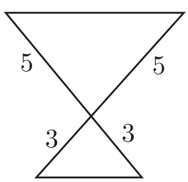
○ **1423.** Odrediti na stranicama AC i BC datog trougla ABC redom tačke P i Q takve da su duži AP, PQ i QB jednake.

○ **1424.** Date su prave a i b, tačka A na pravoj a i tačka B na pravoj b. Konstruisati dva podudarna kruga koji se dodiruju spolja i pritom jedan dodiruje pravu a u tački A, a drugi dodiruje pravu b u tački B.

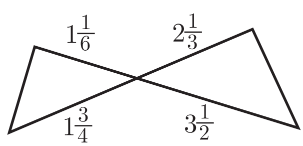
○ **1425.** Date su duži m, n, krugovi k_1, k_2 i tačke A i B, $A \in k_1$ i $B \in k_2$. Konstruisati dva kruga, a i b, koji se dodiruju spolja i krug a dodiruje krug k_1 u tački A, a krug b dodiruje krug k_2 u tački B i poluprečnici krugova a i b odnose se kao $m : n$.

10.3 SLIČNOST

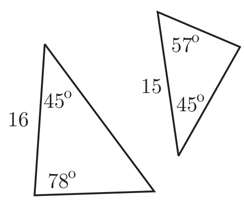
△ **1426.** Na slikama 49, 50, 51 data su po dva trougla sa izmerenim pojedinim stranicama i uglovima. Koji od navedenih parova trouglova su slični?



Sl. 49



Sl. 50



Sl. 51

△ **1427.** Mogu li dva trougla biti slična ako:

a) jedan ima uglove od 60° i 70°, a drugi ima uglove od 50° i 80°,

b) dva ugla jednog su 45° i 75°, a dva ugla drugog su 45° i 60°,

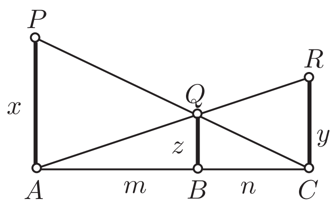
c) jedan od trouglova ima ugao od 40° i dve stranice dužine 5, a drugi ima ugao od 70° i dve stranice dužine 8.

△ **1428.** Na sl. 52 su duži PA, QB i RC normalne na duži AC.

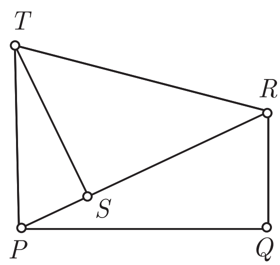
a) Dopunite tačne formule: $\triangle PAC \sim \triangle \ldots$ i $\triangle ABQ \sim \triangle \ldots$

b) Šta je tačno $\dfrac{z}{x} = \dfrac{n}{m}$ ili $\dfrac{z}{x} = \dfrac{n}{m+n}$?

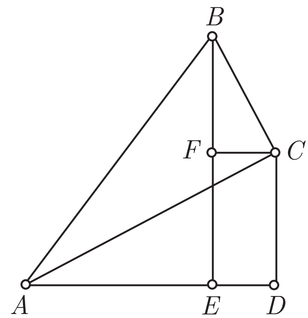
c) Šta je ispravno $\dfrac{z}{y} = \dfrac{m}{n}$ ili $\dfrac{z}{y} = \dfrac{m}{m+n}$? d) Dokazati da je $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{z}$.



Sl. 52



Sl. 53



Sl. 54

△ **1429.** Na sl. 53 je $RQ \perp PQ$, $PQ \perp PT$ i $ST \perp PR$.
Dokazati da je $ST \cdot RQ = PS \cdot PQ$.

△ **1430.** Na sl. 54 je $BC \perp AC$, $BE \perp AD$, $CD \parallel BE$ i $CF \parallel DE$.

a) Dokazati da je $\triangle BFC \sim \triangle ADC$. b) Dokazati da je $BF = \dfrac{AD \cdot BC}{AC}$.

△ **1431.** Drvo baca senku dužine 19,5 m. Kolika je visina drveta ako vertikalni stub visine 2 m istovremeno baca senku dužine 3 m?

△ **1432.** Na geografskoj karti razmere 1:500.000 označena su tri mesta sa A, B i C. Ako je mesto A udaljeno 15 km od mesta B i 20 km od mesta C, a mesto B je udaljeno 10 km od mesta C, kolike su stranice trougla ABC na karti?

△ **1433.** Osnovici jednakoktakog trougla ABC odgovara visina $h = 16$, a visina koja odgovara kraku je $h = 12$. Obim sličnog trougla $A_1B_1C_1$ je 22. Izračunati stranice trougla $A_1B_1C_1$.

□ **1434.** Da li postoji trougao čije su visine: $h_a = 3$, $h_b = 2$ i $h_c = 4$?.

□ **1435.** Osnovica BC jednakokrakog trougla ABC jednaka je polovini kraka. Visina koja odgovara kraku je duž BN. Dokazati da je $AN = 7CN$.

□ **1436.** Ortocentar ma kojeg trougla deli visine na odsečke, tako da je proizvod odsečaka jedne visine jednak proizvodu odsečaka bilo koje druge visine tog trougla. Dokazati.

□ **1437.** Oštrougli trougao ABC ima visine $h_b = BD$ i $h_c = CE$. Dokazati da je: $AC \cdot AD = AB \cdot AE$.

△ **1438.** Ako su $h_b = BD$ i $h_c = CE$ visine trougla ABC, kome je ugao BAC oštar, dokazati da je trougao ADE sličan trouglu ABC.

□ **1439.** Ako su $h_b = BD$ i $h_c = CE$ visine trougla ABC, dokazati da je $\sphericalangle ADE = \sphericalangle ACE + \sphericalangle CBD$.

□ **1440.** Data su dva trougla koji imaju par jednakih odgovarajućih uglova i par suplementnih uglova. Dokazati da su stranice naspram jednakih uglova proporcionalne stranicama naspram suplementnih uglova.

∗ **1441.** U trouglu ABC tačka D pripada stranici AB, a tačka E je presek simetrale ugla BAC i stranice BC. Ako je $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ACD$ i $AC = BD$, dokazati da je $DE \parallel AC$.

□ **1442.** Stranice BC i AC trougla imaju dužine a i b i zahvataju ugao od $120°$. Izračunati dužinu odsečka simetrale tog ugIa.

○ **1443.** Kroz proizvoljnu tačku M stranice AB datog trougla ABC konstruisana je prava p paralelna težišnoj liniji CD. Prava p seče prave AC i BC redom u tačkama N i P. Dokazati da je $MN + MP = 2CD$.

□ **1444.** U trouglu ABC konstruisane su normale BE i CF na simetralu AD ugla α. Dokazati da je $AE \cdot DF = AF \cdot DE$.

○ **1445.** U trouglu ABC tačka M je središte stranice BC. Simetrala ugla AMB seče stranicu AB u tački E, a simetrala ugla AMC seče AC u tački D. Dokazati da su trouglovi ABC i AED slični.

□ **1446.** U temenu A trougla ABC konstruisana je tangenta na opisani krug. Prava kroz B, paralelna ovoj tangenti, seče stranicu AC u tački D. Dokazati da je stranica AB geometrijska sredina duži AC i AD.

○ **1447.** Simetrala ugla β trougla ABC seče stranicu AC u tački D. Normala na BD kroz središte M duži BD seče pravu AC u tački E. Dokazati da je duž DE geometrijska sredina duži AE i CE.

□ **1448.** Ako je D tačka koja pripada stranici BC trougla ABC i ako su O_1 i O_2 centri krugova opisanih oko trouglova ABD i ACD, dokazati da je trougao AO_1O_2 sličan trouglu ABC.

○ **1449.** U trouglu ABC je $\alpha = 2\beta$ ako i samo ako je $a^2 = b(b + c)$. Dokazati.

∗ **1450.** Na stranici AC trougla ABC data je tačka E tako da je $\sphericalangle EDA = \sphericalangle ABC$, gde je D središte stranice BC. Prava konstruisana kroz tačku E, paralelno pravoj BC, seče AD u tački F. Dokazati da je $FE^2 = FA \cdot FD$.

∗ **1451.** Neka je M tačka na stranici BC trougla ABC. Dokazati da je $AM \cdot BC \leq AB \cdot MC + AC \cdot MB$.

○ **1452.** Neka je AA_1 prečnik datog kruga k, B proizvoljna tačka kruga, različita od A i A_1 i C tačka duži AA_1, takva da je $AB = CA_1$. Dokazati da se simetrala ugla CAB, visina CF i težišna linija BE trougla ABC seku u jednoj tački.

○ **1453.** Nad stranicama AB, AC i BC trougla ABC, kao osnovicama, konstruisani su slični jednakokraki trouglovi ABP, ACQ i BCR, prva dva van datog trougla, a treći sa iste strane sa koje je i trougao ABC. Dokazati da je četvorougao $APRQ$ paralelogram ili da tačke A, P, R, Q pripadaju jednoj pravoj.

□ **1454.** Simetrala pravog ugla u trouglu ABC deli hipotenuzu AB u odnosu $m : n$. Dokazati da hipotenuzina visina deli hipotenuzu u odnosu $m^2 : n^2$.

○ **1455.** Hipotenuzina visina pravouglog trougla ABC je duž CD. Ako su O i S centri krugova upisanih u trouglove BCD i ACD, dokazati da je trougao DOS sličan trouglu ABC.

○ **1456.** Kroz središte stranice AB trougla ABC konstruisana je prava paralelna simetrali ugla ACB. Ova paralela seče pravu BC u tački D i pravu AC u tački E. Dokazati da je $BD = AE$.

○ **1457.** Iz tačke M u datom uglu Oab spuštene su normale MP i MQ na krake Oa i Ob. Iz tačaka P i Q spuštene su normale PR i QS na krake redom Ob i Oa. Dokazati da je $RS \perp OM$.

○ **1458.** Neka su P, Q, R tačke stranica BC, CA, AB trougla ABC, takve da je $BP : PC = CQ : QA = AR : RB$. Dokazati da trouglovi ABC i PQR imaju zajedničko težište.

○ **1459.** Kroz težište T trougla ABC konstruisana je prava t koja seče stranice BC, CA, AB u tačkama P, Q, R, tako da su Q i R sa iste strane tačke T. Dokazati da je $\dfrac{1}{TP} = \dfrac{1}{TQ} + \dfrac{1}{TR}$.

∗ **1460.** Dat je trougao ABC i na pravim BC, CA, AB redom tačke P, Q, R. Dokazati da se prave AP, BQ i CR seku u jednoj tački (ili su paralelne) ako i samo ako je $\dfrac{BP}{PC} \cdot \dfrac{CQ}{QA} \cdot \dfrac{AR}{RB} = 1$. (Teorema Čevija)

∗ **1461.** Neka su P, Q, R tačke pravih BC, CA, AB trougla ABC. Dokazati da tačke P, Q, R pripadaju jednoj pravoj ako i samo ako je $\dfrac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \dfrac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \dfrac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = -1$. (Teorema Menelaja)

○ **1462.** Dokazati da tačke P, Q, R, u kojima simetrala spoljašnjeg ugla kod temena A i simetrale unutrašnjih uglova kod temena B i C seku prave određene naspramnim stranicama trougla ABC, pripadaju jednoj pravoj.

○ **1463.** Dokazati tvrđenje iz **zadatka 1072** koristeći se teoremom Čevija tj. koristeći se rezultatom **zadatka 1460.**

○ **1464.** Na stranici AC datog trougla ABC data je tačka M, a na stranicama AB i BC tačke N i P, takve da je $MN \parallel BC$ i $MP \parallel AB$. Izraziti površinu trougla NBP, ako su P_1 i P_2 površine trouglova AMN i CMP.

○ **1465.** Kroz proizvoljnu tačku O u datom trouglu ABC konstruisane su prave DE, FK, MN, paralelne redom stranicama AB, AC, BC, tako da F, $M \in AB$, $E, K \in BC$ i N, $D \in AC$. Dokazati da je $\dfrac{AF}{AB} + \dfrac{BE}{BC} + \dfrac{CN}{CA} = 1$.

○ **1466.** U svakom četvorouglu prava određena središtima dijagonala odseca na suprotnim stranicama proporcionalne odsečke. Dokazati.

□ **1467.** Dat je pravougli trapez $ABCD$, kod koga se dijagonale seku pod pravim uglom. Dokazati da je $AD^2 = AB \cdot CD$. (Pravi uglovi su kod temena A i D).

○ **1468.** Kroz tačku O preseka dijagonala trapeza $ABCD$ povučena je prava paralelna osnovicama BC i AD, do preseka E i F sa kracima. Dokazati da je EF harmonijska sredina osnovica, tj. da je $EF = \dfrac{2}{\dfrac{1}{BC} + \dfrac{1}{AD}}$.

○ **1469.** U trapezu $ABCD$ središte S osnovice AB povezano je sa tačkama C i D. Neka su M i N presečne tačke dobijenih duži i dijagonala trapeza. Dokazati da je prava MN paralelna osnovicama i da je njen odsečak između krakova trapeza tačkama M i N podeljen na tri jednaka dela.

□ **1470.** Oko kruga poluprečnika r opisan je jednakokraki trapez $ABCD$ sa osnovicama AB i CD. Dokazati da je $AB \cdot CD = 4r^2$.

□ **1471.** Dat je pravougli trapez kome je dijagonala normalna na veći krak. Dokazati da je ta dijagonala geometrijska sredina osnovica trapeza.

□ **1472.** Dat je pravougli trapez $ABCD$ s pravim uglovima kod temena B i C. Krug prečnika AD seče BC u tačkama M i N. Dokazati da je $BM \cdot MC = AB \cdot CD$.

∗ **1473.** Neka je M središte osnovice AB trapeza $ABCD$, P proizvoljna tačka prave BC, PM seče AC u Q, DQ seče AB u Y i DP seče AB u X. Dokazati da je tačka M središte duži XY.

□ **1474.** Trapez je dijagonalama podeljen na četiri trougla. Izračunati površinu trapeza, ako površine dvaju trouglova koji sadrže osnovice trapeza iznose P_1 i P_2.

∗ **1475.** Dat je romb $ABCD$. Presečna tačka simetrala uglova BAC i BDC leži na jednoj sranici romba. Izračunati uglove romba.

∗ **1476.** Neka je E presek dijagonala romba $ABCD$, F i G podnožja normala iz E, odnosno iz C, na pravu AB i H središte duži CG. Dokazati da je $DF \perp AH$.

○ **1477.** Ako su A' i C' tačke u kojima krug određen temenima A, B i C paralelograma $ABCD$ seče prave AD i CD, dokazati da je $A'B : A'C = A'C' : A'D$.

□ **1478.** Kroz teme B paralelograma $ABCD$ konstruisana je prava p koja seče AC i AD u tačkama F i E, tako da je $AE = \dfrac{1}{4}AD$. Dokazati da je $AF = \dfrac{1}{5}AC$.

○ **1479.** Kroz teme D paralelograma $ABCD$ konstruisana je prava koja seče dijagonalu AC u tački S i stranice AB i BC u P i Q. Dokazati da je $DS^2 = SP \cdot SQ$ i da je proizvod $AP \cdot CQ$ stalan za sve prave kroz D (za dati paralelogram).

○ **1480.** Dat je paralelogram $ABCD$. Proizvoljna prava kroz A seče prave BC, CD, BD redom u tačkama P, Q, R. Dokazati da je $\dfrac{1}{AR} = \dfrac{1}{AP} + \dfrac{1}{AQ}$.

○ **1481.** Dat je četvorougao $ABCD$ čije se dijagonale seku u tački S. Prava kroz S, paralelna sa AB, seče stranice CD, BC, AD, redom u tačkama P, Q, R. Dokazati da je $PS^2 = PQ \cdot PR$.

∗ **1482.** Dat je četvorougao $ABCD$. Neka je E tačka na pravoj DB, takva da je $AE \parallel DC$, a F tačka na pravoj AC, takva da je $DF \parallel AB$. Dokazati da je $EF \parallel BC$.

∗ **1483.** Jedan konveksan četvorougao podeljen je (razbijen) dijagonama na četiri trougla čije se površine izražavaju celim brojevima. Dokazati da je proizvod ta četiri broja potpun kvadrat.

∗ **1484.** Četvorougao $ABCD$ ima prave uglove u temenima B i D. Dokazati da su normalne projekcije stranica AD i BC na dijagonalu BD jednake među sobom.

∗ **1485.** Ako se u četvorougao može upisati krug, dokazati:

a) Krugovi, upisani u dva trougla na koje jedna od dijagonala deli četvorougao, međusobno se dodiruju.

b) Dodirne tačke ovih krugova sa stranicama datog četvorougla predstavljaju temena tetivnog četvorougla.

10.4 PRIMENA SLIČNOSTI NA PRAVOUGLI TROUGAO

Ako je c hipotenuza, a i b katete, h_c hipotenuzina visina, p i q normalne projekcije kateta na hipotenuzu, tada važe jednakosti:
$h_c^2 = pq$, $a^2 = cp$, $b^2 = cq$ i $a^2 + b^2 = c^2$.

△ **1486.** Konstruisati duž čija dužina u odnosu na datu jediničnu duž iznosi:

a) $\sqrt{30}$; b) $\sqrt{15}$; c) $\sqrt{7}$; d) $\sqrt{5}$; e) $\sqrt{3}$.

△ **1487.** Date su duži a, b, c i d. Konstruisati duž:

a) $\sqrt{a^2 - b^2}$; b) $\sqrt{ab + c^2}$; c) $\sqrt{a^2 - bc}$; d) $\sqrt{ac + bd}$; e) $\sqrt{ab - cd}$.

△ **1488.** Neka su a i b katete, c hipotenuza, h_c hipotenuzina visina, p upravna projekcija katete a i q upravna projekcija katete b na hipotenuzu. Odrediti nepoznate elemente skupa $D = \{a, b, c, h_c, p, q\}$ ako:

a) $a = 25$, $p = 20$; b) $b = 0,8$, $h_c = 0,48$; c) $h_c = 60$, $q = 144$;

d) $a = 16$, $b = 12$; e) $a = 5$, $c = 13$; f) $c = 20$, $h_c = 8$;

g) $p = 0,09$, $q = 0,16$.

△ **1489.** Dat je jednakostraničan trougao stranice a i visine h.

a) Izraziti dužinu visine preko dužine stranice.

b) U dati trougao upisana su tri jednaka kruga, tako da svaki dodiruje dve stranice trougla i druga dva kruga. Izraziti dužine poluprečnika ovih krugova preko dužine stranice.

△ **1490.** Stranice trougla su 13, 14 i 15. Izračunati visinu koja odgovara stranici dužine 14.

□ **1491.** Odrediti dužine kateta pravouglog trougla kome je hipotenuza dužine 20 cm, a jedan oštar ugao je $22°30'$.

△ **1492.** Dokazati: ako je trougao ABC pravougli, tada su mu težišne linije vezane relacijom: $t_a^2 + t_b^2 = 5t_c^2$ (C je teme pravog ugla).

△ **1493.** Oluja prelomi stablo visine 16 m i pri tome mu vrh dodirne zemlju 8 m daleko od stabla. Na kojoj se visini prelomilo stablo?

□ **1494.** Data je tačka K u trouglu ABC. Ako su M, N, P redom podnožja normala iz K na stranice BC, CA, AB, dokazati da je
$$AP^2 + BM^2 + CN^2 = AN^2 + BP^2 + CM^2.$$

□ **1495.** Prava koja sadrži teme pravog ugla trougla obrazuje sa manjom katetom ugao 30° i deli hipotenuzu u razmeri $1:2$. Manja kateta ima dužinu $\sqrt{3}$. Odrediti dužinu hipotenuze.

□ **1496.** U pravouglom trouglu su a i b katete, c hipotenuza i h_c visina. Dokazati da je trougao sa stranicama: h_c, $c + h_c$, $a + b$, takođe pravougli.

○ **1497.** Na hipotenuzi AB pravouglog trougla ABC izabrana je proizvoljna tačka M i iz nje su konstruisane normale MP i MQ na katete BC i AC. Dokazati da je $\dfrac{BP^2}{BM^2} + \dfrac{AQ^2}{AM^2} = 1$.

○ **1498.** Dokazati da za svaki pravougli trougao važi jednakost: $\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} = \dfrac{1}{h_c^2}$, gde su a, b katete i h_c hipotenuzina visina.

○ **1499.** Na hipotenuzi AB pravouglog trougla ABC izabrana je proizvoljna tačka P. Normala kroz P na hipotenuzu seče prave BC i AC u tačkama Q i R, a opisani krug trougla ABC u tački S. Dokazati da je $PS^2 = PQ \cdot PR$.

○ **1500.** Izraziti dužinu težišne linije u funkciji od dužina stranica trougla.

□ **1501.** U trouglu ABC težišne linije t_a i t_b seku se pod pravim uglom. Izraziti dužinu stranice c preko dužina stranica a i b. Koji uslov moraju zadovoljiti a i b da bi se mogla odrediti stranica c?

∗ **1502.** Izraziti dužine stranica trougla u funkciji od dužina težišnih linija. Odrediti razmeru zbira kvadrata težišnih linija prema zbiru kvadrata stranica trougla.

□ **1503.** Brojevi m, n, p izražavaju dužine težišnih linija trougla. Ako važi jednakost $m^2 + n^2 = 5p^2$, dokazati da je trougao pravougli. Da li je pravougli onaj trougao koji ima težišne linije dužina: 5 cm, $\sqrt{52}$ cm i $\sqrt{73}$ cm?

□ **1504.** Trougao ima visine čije su dužine: 12 cm, 15 cm i 20 cm. Dokazati da je ovaj trougao pravougli.

□ **1505.** Brojevi h_1, h_2, h_3 izražavaju dužine visina trougla. Ako važi jednakost: $\left(\dfrac{h_1}{h_2}\right)^2 + \left(\dfrac{h_1}{h_3}\right)^2 = 1$, dokazati da je trougao pravougli.

○ **1506.** Zbir kateta pravouglog trougla je 8 cm. Može li dužina hipotenuze biti 5 cm?

∗ **1507.** U trougao ABC upisan je krug koji dodiruje stranicu AB u tački P. Dokazati da je trougao ABC pravougli ako i samo ako je $AC \cdot BC = 2AP \cdot BP$.

∗ **1508.** Dužine stranica trougla izražavaju se sa tri uzastopna prirodna broja, ne manja od 3. Dokazati da visina trougla, spuštena na stranicu srednju po veličini, deli tu stranicu na odsečke čije se dužine razlikuju za 4.

∗ **1509.** Težišna linija koja odgovara hipotenuzi ima dužinu 20 cm. Iz središta hipotenuze podignuta je normala na hipotenuzu, do preseka sa katetom. Dužina ove normale je 15 cm. Odrediti dužine kateta.

○ **1510.** U jednakostraničnom trouglu data je proizvoljna tačka P. Ako su D, E, F redom podnožja normala iz tačke P na stranice BC, CA, AB, izračunati: $\dfrac{PD+PE+PF}{BD+CE+AF}$.

○ **1511.** Ako je D tačka stranice BC trougla ABC, dokazati da je:
$$AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot BD - AD^2 \cdot BC = BC \cdot CD \cdot DB.$$

○ **1512.** U ravni kvadrata $A_1A_2A_3A_4$ data je tačka M. Dokazati da je
$$MA_1^2 + MA_3^2 = MA_2^2 + MA_4^2.$$

∗ **1513.** Pravougaoni list hartije dimenzija 16 cm i 12 cm, presavije se tako da se dva suprotna temena poklope. Izračunati dužinu duži po kojoj je papir presavijen.

□ **1514.** Kvadrat površine 10 dm^2 treba popločati sa 10 kvadratnih pločica ivice 1 dm. Dozvoljeno je nekoliko pločica (ne sve) razrezati na dva dela. Koliko će ostati celih pločica?

○ **1515.** U kružni odsečak, čiji centralni ugao je $120°$, upisan je kvadrat. Odrediti dužinu stranice kvadrata, ako je dužina poluprečnika kruga $2+\sqrt{19}$.

∗ **1516.** Dat je kvadrat $MNPQ$ sa stranicama dužine 1 m. Na stranicama MN, NP, MQ date su tačke redom C, A, B, takve da je: $\mathrm{M}C = CN$, $NA : AP = 1 : 2$ i $MB : BQ = 2 : 1$. Kako treba pomeriti tačku C na stranici MN da bi trougao ABC bio pravougli?

∗ **1517.** Vrt ima oblik pravougaonika sa temenima A, B, C i D. U vrtu je česma koja je od temena A udaljena 14 m, a od temena B je udaljena 4 m i od temena C 12 m. Koliko je česma udaljena od temena D?

∗ **1518.** Dokazati da je zbir kvadrata dijagonala paralelograma jednak zbiru kvadrata njegovih stranica.

∗ **1519.** U paralelogramu $ABCD$ je AC duža dijagonala. Iz temena C spuštene su normale CE i CF na produžetke stranica AB i AD. Dokazati da je
$$AC^2 = AB \cdot AE + AD \cdot AF.$$

△ **1520.** Ako su kraci trapeza međusobno normalni, dokazati da je zbir kvadrata njegovih dijagonala jednak zbiru kvadrata osnovica.

○ **1521.** Dokazati da je zbir kvadrata dijagonala trapeza jednak zbiru kvadrata krakova i dvostrukog proizvoda osnovica.

∗ **1522.** Sva temena konveksnog mnogougla nalaze se u unutrašnjosti kvadarata čija je stranica dužine 1. Dokazati da je zbir kvadrata dužina stranica tog mnogougla manji od 4.

∗ **1523.** Oko tačaka A i B opisani su krugovi k_1 i k_2 poluprečnika $r = AB =$ 4 cm. Označimo sa M jednu od presečnih tačaka ovih krugova. U tako dobijen "krivolinijski trougao" ABM upisan je krug. Kolika je dužina poluprečnika ovog upisanog kruga?

∗ **1524.** Nad datom duži AB, kao prečnikom, opisan je polukrug sa centrom O, a nad AO i OB kao prečnicima opisana su dva polukruga sa iste strane prave AB, kao i veći polukrug. Krug k dodiruje spolja manje polukrugove, a iznutra veći polukrug. Koliki je poluprečnik kruga k, ako je prečnik većeg polukruga 12 cm?

○ **1525.** Tetive AB i CD nekog kruga seku se pod pravim uglom u tački M. Ako je d dužina prečnika kruga, dokazati da je:
a) $d^2 < AB^2 + CD^2$, b) $d^2 = AM^2 + BM^2 + CM^2 + DM^2$.

10.5 PRIMENE SLIČNOSTI NA KRUG

□ **1526.** Ako su b i c stranice trougla ABC, h visina i R poluprečnik opisanog kruga, dokazati da je $b \cdot c = 2R \cdot h_a$.

□ **1527.** U isečak kruga poluprečnika R upisan je krug poluprečnika r. Ako je dužina tetive isečka jednaka $2a$, dokazati da je: $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{R} + \dfrac{1}{a}$.

□ **1528.** Simetrala unutrašnjeg ugla BAC seče opisani krug trougla ABC u tački M i stranicu BC u tački D. Dokazati da je:
a) $BM^2 = AM \cdot DM$; b) $AM \cdot AD = AB \cdot AC$.

□ **1529.** Dat je ugao Abc i tačka M. Proizvoljan krug, koji sadrži tačke A i M, seče krake datog ugla u tačkama B i C. Dokazati da razmera $MC : MB$ ima stalnu vrednost.

○ **1530.** Na prečniku AB datog polukruga data je tačka M, a u tačkama A i B konstruisane su tangente na polukrug. Neka je P proizvoljna tačka polukruga i p prava kroz P, normalna na PM. Ako prava p seče tangente u C i D, dokazati da proizvod odsečaka na tangentama, $AC \cdot BD$, ne zavisi od izbora tačke P.

○ **1531.** Dat je polukrug sa prečnikom AB i tangente u krajevima prečnika. Tangenta povučena u proizvoljnoj tački C polukruga seče prve dve tangente u tačkama D i E. Duži AE i BD seku se u F. Prava CF seče prečnik AB u tački G. Dokazati da je prava CG normalna na AB i da je tačka F središte duži CG.

□ **1532.** Dat je krug k, prava p i prečnik AB datog kruga normalan na datu pravu. Kroz tačku A povučena je proizvoljna sečica, koja seče k u tački C i pravu p u tački D. Dokazati da je proizvod $AC \cdot AD$ konstantan.

○ **1533.** Na datom krugu k data je tetiva AB i tangente u tačkama A i B. Ako je P proizvoljna tačka kruga k i PQ, PR, PS redom normale na tetivu AB i tangente, dokazati da je $PQ^2 = PR \cdot PS$.

□ **1534.** Iz date tačke M povučene su tangentne duži MA i MB i sečica p datog kruga k. Ako sečica p i krug k imaju zajedničke tačke C i D, dokazati da je $AC \cdot BD = AD \cdot BC$.

□ **1535.** Data je duž AB sa središtem O. Nad dužima AB i AO, kao prečnicima, konstruisani su sa iste strane prave AB polukrugovi. Kroz ma koju tačku M duži AO konstruisana je normala na AB, koja seče manji polukrug u tački D i veći polukrug u tački C. Dokazati da je $AC^2 = 2AD^2$.

○ **1536.** Data prava p odseca na dva data kruga k_1 i k_2 dve jednake tetive AB i CD. Tangenta t_1 kruga k_1 u tački A i tangenta t_2 kruga k_2 u tački D, seku se u tački M. Dokazati da se krugovi k_1 i k_2 iz tačke M vide pod jednakim uglovima.[15)]

[15)] Ako se tangente povučene na krug k iz tačke M seku pod uglom α, tada kažemo da se krug k iz tačke M *vidi pod uglom* α, ako krug k pripada tom uglu.

$*$ **1537.** Neka je u pravouglom trouglu ABC ugao C od $90°$, a tačka D podnožje visine iz temena C. Ako su poluprečnici krugova upisanih u trouglove ACD i BCD redom jednaki 3 cm i 4 cm, odrediti poluprečnik kruga upisanog u trougao ABC.

$*$ **1538.** U dijametralno suprotnim tačkama A i B kruga k konstruisane su tangente tog kruga, redom p_1 i p_2. Neka je C proizvoljna tačka prave p_1 različita od A, zatim D i E tačke u kojima proizvoljna prava koja sadrži C seče krug k, i F dodirna tačka kruga k i tangente iz C koja je različita od p_1. Ako su M, H i K, tim redom, tačke u kojima prave AE, AF i AD seku pravu p_2, dokazati da je $MH = HK$.

$*$ **1539.** U krug je upisan trougao ABC. Tačke M, N i P su središta lukova BC, CA i AB (tačka M se nalazi sa one strane prave BC sa koje nije tačka A itd.). Tetiva MN seče stranicu BC u tački K, a tetiva NP seče stranicu AB u tački L. Dokazati da je prava KL paralelna pravoj AC i da centar upisanog kruga trougla ABC pripada duži KL.

$*$ **1540.** Dokazati da je proizvod dužina normala konstruisanih iz ma koje tačke kruga na dve naspramne stranice četvorougla upisanog u tom krugu, jednak proizvodu dužina normala konstruisanih iz iste tačke na druge dve stranice tog četvorougla.

$*$ **1541.** Krugovi k_1 i k_2 seku se u tačkama A i B. Kroz proizvoljnu tačku M duži AB konstruisane su tetiva PQ kruga k_1 i tetiva RS kruga k_2. Dokazati da tačke P, Q, R i S pripadaju jednom krugu.

□ **1542.** Tetive AC i BD datog kruga k seku se u E, tako da je $AB = BC$. Dokazati da je $\sphericalangle BAD = \sphericalangle CED$.

○ **1543.** U svakom konveksnom tetivnom četvorouglu proizvod dijagonala jednak je zbiru dva prozvoda parova suprotnih stranica. Dokazati. (Teorema Ptolomeja)

○ **1544.** Dokazati da se dijagonale tangentnog četvorougla i tetive čiji su krajevi dodirne tačke suprotnih stranica, seku u jednoj tački.

○ **1545.** Kroz teme B datog trougla ABC konstruisati pravu koja seče stranicu AC u tački D, tako da važi jednakost $BD^2 = AD \cdot DC$.

○ **1546.** Na stranici BC trougla ABC date su tačke M i S, takve da je AM težišna linija, a AS simetrala ugla. Opisani krug trougla AMS seče stranice AB i AC u tačkama D i E. Dokazati da je $BD = CE$.

○ **1547.** U datom krugu data je tačka M, različita od centra kruga. Neka je P proizvoljna tačka na krugu, PA tetiva normalna na MP i AB tetiva paralelna sa MP. Dokazati da u krugu postoji tačka N kroz koju prolazi tetiva AB, bez obzira na izbor tačke P, a proizvod $MP \cdot AN$ je stalna veličina.

○ **1548.** Dat je krug $k(O, OA)$ i krug k_1 kome je OA prečnik, zatim tačke C i D kruga k, takve da CD dodiruje k_1 u tački E. Dokazati da je duž AE geometrijska sredina duži CE i DE.

○ **1549.** Data su tri kruga k_1, k_2, k_3, takva da svaki seče druga dva. Dokazati da se tri zajedničke tetive seku u jednoj tački.

○ **1550.** Dokazati da je zbir proizvoda visina oštrouglog trougla sa svojim odsečcima od ortocentra do temena, jednak poluzbiru kvadrata stranica.

○ **1551.** Ako se iz krajeva bilo kog prečnika datog kruga povuku dve tetive koje se seku, dokazati da je proizvod svake tetive i njenog odsečka od kraja prečnika do presečne tačke – konstantan.

○ **1552.** Dat je krug k, prava p van kruga i prava n koja sadrži centar datog kruga i normalna je na p. Ako se iz ma koje tačke P prave p konstruišu tangentne duži PA i PB na dati krug, dokazati da prava AB seče pravu n u tačno određenoj tački N, bez obzira na izbor tačke P.

□ **1553.** Data su dva kruga koji imaju zajedničku tetivu AB. Dokazati da su tangentne duži, povučene iz ma koje tačke prave AB na date krugove, jednake među sobom.

○ **1554.** Dat je krug $k(S, r)$ i tačka P van njega. Na duži PS konstruisati tačku Q, takvu da je duž PQ jednaka tangentnoj duži konstruisanoj iz tačke Q na krug k.

□ **1555.** Date su duži d i m. Konstruisati pravougaonik kome je razlika stranica jednaka datoj duži d, a površina je $P = m^2$.

○ **1556.** Dat je krug k i njegove tangentne duži MA i MB. Sečica, određena tačkom M i centrom kruga, seče krug u tačkama C i D i pravu AB u tački N. Dokazati da su tačke M, N harmonijski spregnute sa tačkama C, D.

○ **1557.** Data je duž MN. Konstruisati skup svih tačaka P, takvih da je $PM : PN = m : n$, gde su m i n date duži (Apolonijev krug).

□ **1558.** Datu duž AB podeliti zlatnim presekom. Konstrukciju dokazati.

○ **1559.** Ako poluprečnik datog kruga $k(O, r)$ podelimo zlatnim presekom, tada je veći odsečak poluprečnika jednak stranici pravilnog desetougla upisanog u krugu k. Dokazati. Na osnovu toga, u dati krug k upisati pravilan petougao i pravilan desetougao.

□ **1560.** Dokazati da dijagonale pravilnog petougla, koje imaju zajedničku unutrašnju tačku, dele jedna drugu zlatnim presekom.

10.6 KONSTRUKCIJE PRIMENOM SLIČNOSTI

△ **1561.** Konstruisati trougao ABC ako mu je dato:
a) α, β, h_c; b) α, β, t_a; c) $\alpha, \beta, c + h_c$;
d) $\alpha, b : c = 3 : 4, t_a$; e) $a, \alpha, b : c = m : n$ (m i n date duži).
(*Uputstvo*: Prvo se konstruiše sličan trougao na osnovu prva dva podatka).

□ **1562.** Data su dva oštrougla trougla $A_0B_0C_0$ i $A_1B_1C_1$. Konstruisati trougao ABC sličan trouglu $A_1B_1C_1$, tako da bude opisan oko trougla $A_0B_0C_0$ i $A_0 \in BC$, $B_0 \in CA$, $C_0 \in AB$. Osim toga, trougao ABC mora imati maksimalan obim.

□ **1563.** Dat je poluprečnik r kruga k opisanog oko trougla ABC, teme C i podnožja A_1 i B_1 visina h_a i h_b. Konstruisati trougao ABC.

○ **1564.** Na stranicama AB i AC datog trougla ABC odrediti tačke M i N, takve da je duž MN jednaka datoj duži m, a odnos odsečaka AM i CN jednak odnosu dveju datih duži a i c.

○ **1565.** Dat je krug k, dve tačke A i B na krugu k, prava p i na pravoj p, van prave AB, tačka P. Konstruisati na krugu k tačku C, takvu da prave AC i BC seku pravu p u tačkama M i N i da odnos odsečaka PM i PN bude jednak odnosu datih duži m i n.

□ **1566.** Konstruisati skup svih tačaka kojima je odnos rastojanja od datih pravih a i b jednak odnosu dveju datih duži m i n. Zatim, na datom krugu k odrediti tačku K, takvu da je odnos njenih rastojanja od dveju pravih a i b jednak odnosu dveju datih duži m i n.

□ **1567.** Date su tri nekolinearne tačke A, B, C i tri duži m, n, p. Konstruisati pravu, tako da je odnos njenih rastojanja od tačaka A i B jednak $m : n$, a odnos rastojanja od tačaka B i C jednak $n : p$. Koliko ima rešenja?

○ **1568.** Date su tačke A, B, C, D. Konstruisati pravu p, tako da zbir (ili razlika) rastojanja tačaka A i B od p bude jednak datoj duži d, a odnos rastojanja tačaka C i D od p bude jednak odnosu datih duži m i n.

○ **1569.** Dat je krug k, na njemu dve tačke A, B i prava s koja sadrži centar S kruga k. Konstruisati tačku K na krugu k, takvu da prave AK i BK seku pravu s u tačkama M i N i da je $SM : SN = m : n$, gde su m i n date duži.

□ **1570.** Date su tačke A, B, C, takve da je $A - B - C$. Konstruisati skup svih tačaka iz kojih se duži AB i BC vide pod jednakim uglovima.

□ **1571.** Date su redom tačke A, B, C, D jedne prave. Odrediti tačku M iz koje se duži AB, BC i CD vide pod istim uglom.[16)]

□ **1572.** Data je prava p i van nje kolinearne tačke A, B, C, takve da je $A-C-B$. Na pravoj p konstruisati tačku P, tako da je $AP : BP = AC : BC$.

□ **1573.** Date su tri duži m, n, p. U ravni datog trougla ABC odrediti tačku O, takvu da je $OA : OB : OC = m : n : p$.

○ **1574.** Date su prave a i b, krug k, tačke A i B i duži m, n, p, q. Konstruisati pravu s, koja seče krug k u tački K, tako da odnos rastojanja tačke K od pravih a i b bude $m : n$ i da odnos rastojanja tačaka A i B od prave s bude jednak $p : q$.

□ **1575.** Konstruisati trougao ABC ako je dato:

a) $a, \alpha, b : c = m : n$; b) $a, h_a, b : c = m : n$; c) $a, R, b : c = m : n$.

(R je poluprečnik opisanog kruga, m i n date duži).

○ **1576.** Na datom krugu k date su tačke A i B i na datoj pravoj p data je tačka P. Konstruisati tačku K na krugu k, takvu da prava KA seče p u M, a prava KB seče p u N, tako da je odnos duži MP i NP jednak odnosu datih duži m i n.

○ **1577.** Na kraku Op datog ugla Opq date su tačke A i B. Konstruisati tačku C na Oq, tako da ugao ACB bude najveći.

∗ **1578.** Dat je krug k i tačke A i B van kruga, $A \neq B$. Konstruisati krug koji sadrži tačke A i B i dodiruje dati krug k.

○ **1579.** Dat je krug k, prava p i tačka M. Konstruisati krug koji sadrži tačku M i dodiruje dati krug i datu pravu.

[16)] To znači: $\sphericalangle AMB = \sphericalangle BMC = \sphericalangle CMD$.

○ **1580.** Dati su krugovi k_1, k_2 i tačka M. Konstruisati krug koji sadrži tačku M i dodiruje krugove k_1 i k_2.

○ **1581.** Data je prava p i krugovi k_1 i k_2. Konstruisati krug koji dodiruje datu pravu i date krugove.

$*$ **1582.** Konstruisati krug koji dodiruje tri data kruga k_1, k_2 i k_3.

$*$ **1583.** Date su tačke A i B. Na pravoj AB odrediti tačke C i D, tako da je $AC : BC = AD : BD$ i da je $CD = m$, gde je m data duž.

○ **1584.** Konstruisati trougao ABC kome je data stranica a, ugao α i dužina simetrale $AD = s$, od temena A do preseka sa stranicom BC.

$*$ **1585.** Date su prave a i b sa zajedničkom tačkom O, na pravoj a tačka A i na pravoj b tačka B, $A \neq O \neq B$ i duži d, m i n. Konstruisati pravu p koja seče pravu a u M i pravu b u N, tako da je $AM : BN = m : n$ i $MN = d$.

10.7 *ODABRANI PROBLEMI SA POVRŠINAMA

U ovom odeljku nećemo se baviti brojevima, odnosno izračunavanjem površina figura po zadatim dimenzijama. Koristeći se poznatim formulama, kao i osobinama podudarnih i sličnih figura nalazićemo i dokazivati zanimljive relacije između površina i drugih elemenata ravnih figura.

$*$ **1586.** Dat je trougao čije stranice imaju dužine 3 cm, 4 cm, 5 cm. Da li u ovom trouglu postoji tačka koja je od svake stranice udaljena manje od 1 cm?

1587. Ako je S ma koja tačka u jednakostraničnom trouglu a M, N i P podnožja normala povučenih iz tačke S na stranice trougla, dokazati da je $SM + SN + SP = h$, gde je h visina trougla.

1588. Dokazati da u svakom trouglu ABC važi jednakost: $\dfrac{1}{h_a} + \dfrac{1}{h_b} + \dfrac{1}{h_c} = \dfrac{1}{r}$, gde je r poluprečnik kruga upisanog u trougao.

1589. Neka su x, y, z rastojanja unutrašnje tačke T trougla ABC od stranica a, b, c, a h_a, h_b, h_c odgovarajuće visine. Dokazati da je $\dfrac{x}{h_a} + \dfrac{y}{h_b} + \dfrac{z}{h_c} = 1$.

1590. U trouglu ABC su date stranice a i b. Ako je $h_c = h_a + h_b$ izračunati stranicu c.

1591. U datom trouglu ABC odrediti tačku S, takvu da su površine trouglova ABS, BCS i CAS jednake među sobom.

$*$ **1592.** U trouglu ABC je $AC + BC = 2AB$. Dokazati da je prava određena težištem i centrom upisanog kruga paralelna sa AB.

1593. Dokazati da je površina pravouglog trougla jednaka proizvodu odsečaka na koje u trouglu upisani krug deli hipotenuzu.

1594. U trouglu ABC, na stranici AC data je tačka D, a na stranici BC tačka E, tako da je $AD : CD = 2 : 3$ i $BE : CE = 3 : 2$. Duži BD i AE seku se u S. Odrediti razmeru površina trougla ABS i četvorougla $CDSE$.

1595. Neka su A_1, B_1, C_1 tačke na stranicama BC, CA, AB trougla ABC takve da je $\frac{BA_1}{BC} = \frac{CB_1}{CA} = \frac{AC_1}{AB} = k$. Odrediti k za koje je vrednost površine trougla $A_1B_1C_1$ najmanja.

1596. Dati trougao razrezati na tri dela od kojih je moguće napraviti pravougaonik.

1597. Kroz proizvoljnu tačku M stranice AB datog trougla ABC konstruisati pravu koja trougao deli na dva dela jednakih površina.

1598. Dat je trougao ABC i na stranici AB tačka M. Kroz tačku M konstruisati dve prave koje dele trougao ABC na tri dela jednakih površina.

$*$ **1599.** Kroz jednu tačku u unutrašnjosti trougla povučene su tri prave, redom paralelne stranicama trougla. Ove prave dele površinu trougla na šest delova, od kojih su tri trouglovi sa površinama S_1, S_2, S_3. Izračunati površinu datog trougla.

$*$ **1600.** Tačke D, E i F redom pripadaju stranicama AB, BC i CA jednakostraničnog trougla ABC. Pri tom duži DB, EC i FA jednake su trećini stranice datog trougla. Duži AE, BF i CD seku se u tačkama K, L i M. Izraziti površinu S trougla KLM preko date površine P trougla ABC.

1601. Neka je O unutrašnja tačka trougla ABC i K, L, M tačke u kojim prave, koje sadrže tačku O i paralelne su stranicama AC, AB, BC, seku redom prave AB, BC, CA. Dalje, neka su P, Q, R tačke u kojima se seku redom prave: CK i AL, AL i BM, BM i CK. Dokazati da je zbir površina trouglova AKP, BLQ i CMR jednak površini trougla PQR.

1602. Da li je moguće pravougaonik dimenzija 9×4 razrezati na dva dela od kojih se može sastaviti kvadrat?

1603. Četvorouglovi $ABCD$ i $EFGH$ imaju svojstvo da su tačke B, C, D, A redom središta duži AE, BF, CG, DH. Ako je površina četvorougla $ABCD$ jednaka 1 dm^2, kolika je površina četvorougla $EFGH$?

$*$ **1604.** Na stranici AB konveksnog četvorougla $ABCD$ date su tačke M i N, a na stranici CD tačke P i Q tako da je $AM = MN = NB$ i $CP = PQ = QD$. Ako je površina četvorougla $ABCD$ jednaka 3, izračunati površinu četvorougla $MNPQ$.

1605. Data su dva nepodudarna kvadrata $ABCD$ i $KLMN$, pri čemu je K centar kvadrata $ABCD$. Koliki deo manjeg kvadrata prekriva veći kvadrat?

1606. Dat je jednakokraki trapez $ABCD$ sa paralelnim stranicama AB i CD kome je duž CE visina. Dokazati da je površina trapeza $ABCD$ dva puta veća od površine trougla AEC.

1607. U trapezu $ABCD$ prava paralelna sa osnovicama seče duži AC i BC, redom u tačkama M i N. Dokazati da su površine trouglova DAM i DBN jednake.

1608. Visina jednakokrakog trapeza jednaka je h, a površina trapeza je h^2. Pod kojim uglom se seku dijagonale tog trapeza?

$*$ **1609.** Dat je trapez sa uzajamno normalnim dijagonalama. Ako je P površina tog trapeza, a m njegova srednja linija, dokazati da je $P \leq m^2$.

1610. Neka je O zajednička tačka dijagonala AC i BD četvorougla $ABCD$. Dokazati tvrđenje: "*Četvorougao ABCD je trapez ako i samo ako trouglovi AOD i BOC imaju jednake površine*".

$*$ **1611.** Dijagonale proizvoljnog trapeza dele trapez na četiri trougla. Površine trouglova kojima pripadaju osnovice, iznose P_1 i P_2. Izračunati površinu P trapeza.

1612. U četvorouglu $ABCD$ tačke M i N su središta stranica AB i CD. Neka MD seče AN u P i MC seče BN u Q. Dokazati da je površina četvorougla $MQNP$, jednaka zbiru površina trouglova APD i BCQ.

$*$ **1613.** Suprotne stranice šestougla $ABCDEF$ su paralelne i nejednake. Dokazati da je površina trougla ACE jednaka površini trougla BDF.

$*$ **1614.** Svaka od devet pravih deli dati kvadrat na dva četvorougla čije se površine odnose kao $2:3$. Dokazati da se neke tri od ovih pravih seku u jednoj tački.

$*$ **1615.** Dat je pravougaonik $ABCD$. U njemu se bira proizvoljna tačka, kroz koju se konstruišu dve prave paralelne stranicama pravougaonika. Dokazati da je površina bar jednog od pravougaonika koji sadrži tačku A ili tačku C manja ili jednaka četvrtini površine celog pravougaonika.

1616. Neka su A_1, B_1, C_1 i D_1 središta stranica AB, BC, CD, DA konveksnog četvorougla $ABCD$, a A_2, B_2, C_2, D_2 preseci duži DA_1 i AB_1, AB_1 i BC_1, BC_1 i CD_1, CD_1 i DA_1. Dokazati da je površina četvorougla $A_2B_2C_2D_2$ jednaka zbiru površina trouglova AA_1A_2, BB_1B_2, CC_1C_2 i DD_1D_2.

1617. Dva četvorougla imaju zajedničke tačke – središta svih stranica. Dokazati da ovi četvorouglovi imaju jednake površine.

1618. Središta stranica dvaju konveksnih šestouglova se poklapaju. Dokazati da ovi šestouglovi imaju jednake površine.

1619. Dat je trougao ABC. Odrediti skup svih pravih koje dele obim i površinu trougla u jednom istom odnosu.

$*$ **1620.** Kvadrat je podeljen na pet disjunktnih pravougaonika jednakih površina, tako da temena kvadrata pripadaju različitim pravougaonicima, a peti pravougaonik nema zajedničkih tačaka sa stranicama datog kvadrata. Dokazati da je taj peti pravougaonik kvadrat.

$*$ **1621.** U oštrouglom trouglu ABC tačka D je središte stranice BC. Tačka E deli duž AD, tako da je $AE : ED = m : n$. Prava BE seče stranicu AC u tački F. Odrediti razmeru površina trouglova ABF i BCF.

1622. Dat je konveksan četvorougao $ABCD$ površine 1. Na stranici AB izabrane su tačke A' i B', a na stranici CD tačke C' i D', tako da je: $\dfrac{AA'}{AB} = \dfrac{CC'}{CD} = a$ i $\dfrac{BB'}{AB} = \dfrac{DD'}{CD} = b$, pri čemu je $a+b<1$. Izračunati površinu četvorougla $A'B'C'D'$.

10.8 *GEOMETRIJSKE NEJEDNAKOSTI

1623. Neka su u pravouglom trouglu a i b katete, c hipotenuza i h visina koja odgovara hipotenuzi. Dokazati da je $c+h>a+b$.

1624. Dat je trougao ABC sa tupim uglom BAC. Neka je $BC=a$, $CA=b$ i neka su odgovarajuće visine h_a i h_b. Dokazati da je $a+h_a>b+h_b$.

1625. Ako je M bilo koja tačka u ravni jednakostraničnog trougla ABC, dokazati da je $MA \leq MB + MC$.

1626. Dokazati da je zbir dijagonala svakog konveksnog petougla veći od obima petougla.

1627. Dokazati da od svih trouglova date stranice i datog naspramnog ugla, jednakokraki ima najveću simetralu datog ugla.

1628. Dokazati da od svih trouglova sa datom stranicom i datim naspramnim uglom, jednakokraki ima:

a) najveću težišnu liniju koja odgovara toj stranici, ako je dati ugao oštar;

b) najmanju težišnu liniju koja odgovara toj stranici, ako je dati ugao tup.

1629. Tačke X i Y pripadaju stranicama ili unutrašnjosti konveksnog poligona. Ako je duž XY maksimalne dužine, dokazati da su tačke X i Y temena poliona.

1630. Ako su t_a i t_b težišne linije koje odgovaraju katetama a i b proizvoljnog pravouglog trougla, dokazati da je $\frac{1}{2} < \frac{t_a}{t_b} < 2$.

1631. Dokazati da za svaki pravougli trougao važi nejednakost $0,4 < \frac{r}{h} < 0,5$, gde je r poluprečnik upisanog kruga, a h je hipotenuzina visina.

1632. Ako su R i r poluprečnici opisanog i upisanog kruga, a S površina, dokazati da važi nejednakost: $R + r \geq \sqrt{2S}$.

1633. Ako su a, b, c stranice trougla i s poluobim, dokazati nejednakosti:

a) $2\sqrt{(s-b)(s-c)} \leq a$; b) $s\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}\right) \geq \frac{9}{4}$;

c) $\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s-b} + \frac{1}{s-c} \geq 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$.

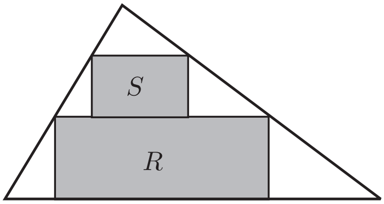
1634. Dat je trougao ABC i u njemu tačka D, takva da je $AC - AD \geq 1$ i $BC - BD \geq 1$. Dokazati da za svaku tačku E stranice AB važi nejednakost $EC - ED \geq 1$.

1635. Neka je M proizvoljna tačka u trouglu ABC. Označimo redom sa A_1, B_1, C_1 tačke preseka pravih AM, BM i CM sa BC, AC i AB. Dokazati da zbir $MA_1 + MB_1 + MC_1$ nije veći od najveće stranice trougla ABC.

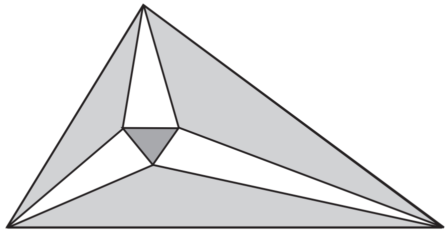
1636. U trouglu ABC izabrana je proizvoljna tačka M. Kroz tačku M i temena A, B, C povučene su prave AM, BM, CM, koje seku odgovarajuće stranice trougla u tačkama A_1, B_1, C_1. Dokazati da važe nejednakosti:

a) $\frac{AM}{A_1M} + \frac{BM}{B_1M} + \frac{CM}{C_1M} \geq 6$; b) $\frac{AM}{A_1M} \cdot \frac{BM}{B_1M} \cdot \frac{CM}{C_1M} \geq 8$.

1637. U dati oštrougli trougao su upisana dva pravougaonika R i S, kao na sl. 55. Izračunati najveću moguću vrednost izraza $\frac{P_R + P_S}{P}$, gde je P površina datog trougla.



Sl. 55



Sl. 56

10.9 *KOMBINATORNA GEOMETRIJA

1638. Dokazati da u svakom konveksnom jedanaestouglu postoje bar dve dijagonale, takve da jedan od uglova između njih nije veći od 5°.

1639. Trougao na sl. 56 podeljen je na sedam trouglova. Oni koji sadrže stranice datog (najvećeg) trougla su "crni", a ostali su obojeni "crno" i "belo", kao polja na šahovskoj tabli. Podelite slično na trouglove i osenčite na isti način neki konveksan šestougao, ali tako da "belih" trouglova bude više od šest. (Trouglovi koji sadrže stranice datog šestougla obavezno su "crni".) Možete li isto učiniti i sa konveksnim osmouglom?

1640. Dat je konveksan 2001-tougao čiji je obim 2800. Dokazati da neka tri temena datog mnogougla određuju trougao čija je površina manja od 1.

1641. Da li se u krug poluprečnika 1 može smestiti izvestan broj krugova, tako da ni jedan od njih nema zajedničku unutrašnju tačku sa drugim krugovima i da im je zbir poluprečnika jednak 2000?

1642. U ravni je dato n tačaka $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Ako je $A_iA_j \geq 1$, za svako $i, j = 1, 2, \ldots, n$ $(i \neq j)$, tada broj duži A_iA_j dužine jednake 1 ne prelazi $3n$. Dokazati.

1643. U ravni je dato pet tačaka od kojih nikoje tri ne leže na jednoj pravoj. Svake dve se spajaju crvenim ili plavim dužima i to tako da nikoje tri duži iste boje ne obrazuju trougao. Dokazati:

a) iz svake tačke polaze tačno dve plave i dve crvene duži;

b) postoji zatvorena izlomljena linija, sastavljena od duži iste boje, koja sadrži sve date tačke.

1644. Dokazati da se u krug poluprečnika 9 ne može smestiti 400 tačaka, tako da rastojanje između svake dve tačke bude veće od 1.

1645. U ravni je dat kvadrat stranice $a = 15$ i u njemu 20 manjih kvadratića stranice $b = 1$. Dokazati da postoji krug poluprečnika $r = 1$ koji nema zajedničkih tačaka ni sa jednim kvadratićem, a ceo se nalazi unutar velikog kvadrata.

1646. Na okruglom stolu poluprečnika 25 leži n metalnih novčića poluprečnika 1, tako da nijedan ne izlazi van stola. Dokazati: ako je $n > 625$, onda novčići delimično prekrivaju jedan drugog, a ako je $n < 144$, onda se na sto može staviti još jedan novčić tako da on ne prekriva (ni delimično) nijedan od ostalih novčića.

1647. Dat je krug prečnika 3 i u njemu nekoliko manjih krugova tako da je zbir njihovih prečnika jednak 25. Dokazati da za svaku pravu p, koja pripada ravni tih krugova, postoji njoj paralelna prava q koja seče bar 9 unutrašnjih krugova.

1648. U ravni je dato n tačaka, tako da su sva njihova međusobna rastojanja različita. Ako je iz svake tačke konstruisana duž do njoj najbliže tačke, dokazati da ni iz jedne tačke ne može polaziti više od pet takvih duži.

1649. Dato je n tačaka u ravni, među kojima ne postoje tri kolinearne tačke. Površina ma kog trougla čija su temena u datim tačkama nije veća od 1. Dokazati da postoji trougao površine 4 koji sadrži sve date tačke. (Tačke datog skupa mogu pripadati stranicama traženog trougla).

1650. U ravni je dato n tačaka i među njima ne postoje tri koje su kolinearne. Dokazati da postoji krug koji sadrži najmanje tri od datih tačaka i da u tom krugu ne leži ni jedna od datih tačaka.

1651. Dat je krug k i u njemu 2001 tačka, od kojih su svake tri nekolinearne. Konstruisati pravu p, koja sadrži jednu od datih tačaka, a datu kružnu površ deli na dva dela, tako da u svakom ima jednak broj datih tačaka.

1652. U ravni je dato 25 tačaka, takvih da se od bilo koje tri mogu izabrati dve između kojih je rastojanje manje od 1 cm. Dokazati da se sve tačke mogu pokriti sa dva kruga čiji su poluprečnici po 1 cm.

1653. Dve hiljade krugova u ravni pokrivaju deo ravni površine 1 m^2. Dokazati da se može izabrati izvestan broj njih koji se ne seku, a da je zbir njihovih površina veći od $\dfrac{1}{9}$ m^2.

1654. Bela ravan je polivena crnom bojom. Dokazati da postoje dve tačke iste boje između kojih je rastojanje tačno 2000 metara.

1655. Svaka tačka ravni je obojena jednom od tri boje. Dokazati da postoje dve tačke iste boje, na međusobnom rastojanju od 1 metra.

1656. U ravni su date 1003 tačke od kojih nikoje tri ne leže na jednoj pravoj, takve da su tri od njih temena trougla u kome se nalaze ostalih 1000 tačaka. Koliko ima trouglova koji se ne preklapaju, a čija su temena date tačke?

1657. Na ravni je izabrano 4000 tačaka, od kojih su svake tri nekolinearne. Dokazati da možemo konstruisati 1000 nepresecajućih četvorouglova, kojima su izabrane tačke temena.

1658. U ravni je dato 1000 tačaka, tako da 10 od njih predstavljaju temena konveksnog desetougla u kome se nalaze ostalih 990 tačaka. Sada redom spajamo tačke nepresecajućim dužima i taj proces nastavljamo dotle dok postoji bar jedan par tačaka koji se može spojiti nepresecajućom duži. Dokazati da broj povučenih duži ne zavisi od redosleda kojim spajamo tačke.

1659. U ravni je dato n pravih ($n \geq 3$), tako da se svake dve prave seku i da se u svakoj presečnoj tački seku najmanje tri prave. Dokazati da sve ove prave pripadaju jednom pramenu pravih.

1660. U ravni je dat skup od n tačaka ($n \geq 3$), tako da svaka prava određena dvema od datih tačaka sadrži bar još jednu od ovih tačaka. Dokazati da su sve tačke ovog skupa kolinearne.

JEDANAESTA GLAVA

11. LINEARNA FUNKCIJA

11.1 GRAFIK LINEARNE FUNKCIJE

△ **1661.** Grafik linearne funkcije definisane za svako realno x je prava, pa je za njegovo crtanje u koordinatnom sistemu dovoljno odrediti koordinate dveju tačaka. Na takav način konstruisati grafike funkcija:

a) $y = 2x - 1$; b) $y = 1 - x$; c) $y = -3x + 2$;

d) $y = 4x$; e) $2x - 2y + 1 = 0$; f) $x - y + 3 = 0$.

△ **1662.** Grafik linearne funkcije može biti duž ili skup izolovanih tačaka, u slučajevima kada funkcija nije definisana, za svako realno x. Uverite se u to, crtanjem grafika sledećih funkcija:

a) $y = x + 1$, $x \in N$; b) $y = 2x$, $x \geq 0$ i $x \leq 5$;

c) $y = \dfrac{2}{3}x - 1$, $x \in D$ i $x < 7$, $y \geq 0$; d) $y = \dfrac{x}{2} + 2$, $x \in \{-2, 1, 4\}$.

△ **1663.** Formula $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} = 1$ određuje linearnu funkciju, koja sadrži tačke sa koordinatama: $x = 2$, $y = 0$, $x = 0$ i $y = 3$. Ove tačke su preseci grafika i koordinatnih osa. Na sličan način, uzimajući za jednu, pa za drugu koordinatu vrednost 0, nacrtati grafike funkcija:

a) $\dfrac{x}{3} - \dfrac{y}{3} = 1$; b) $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{4} = 1$; c) $3x + 4y = 12$.

△ **1664.** Linearnu funkciju $y = 2x + 4$, možemo označiti sa $l(x) = 2x + 4$. Za $x \in R$ rešiti formule:

a) $l(x) = 6$; b) $l(x) = 2$; c) $l(x) = l(2x + 1)$; d) $l(l(x)) = 16$.

□ **1665.** Dokazati da za linearnu funkciju $l(x) = ax$, a je konstanta, važe uslovi:

a) $l(0) = 0$; b) $l(-x) = -l(x)$; c) $l(x) + l(y) = l(x + y)$; d) $l(l(x)) = a^2x$.

△ **1666.** Skupovi tačaka u koordinatnoj ravni, čijim koordinatama odgovaraju formule $x = c$ ili $y = c$ (c je realna konstanta), predstavljaju prave paralelne koordinatnim osama. Uveriti se u to, crtajući grafike pravih:

a) $y = 1$; b) $x = -2$; c) $x = 3$; d) $y = 2$; e) $x = 0$; f) $y = 0$.

△ **1667.** *Nula funkcije* je vrednost promenljive x za koju je tačna formula $f(x) = 0$. Tako je $x = 1$ nula funkcije $f(x) = 2x - 2$, jer je $f(1) = 2 - 2 = 0$.

a) Naći nule i nacrtati grafike funkcija:
1) $f(x) = x + 1$; 2) $f(x) = 2x + 4$; 3) $f(x) = -x + 2$;
4) $f(x) = -\frac{1}{2}x + 1$.

□b) Odrediti vrednost parametra k, tako da je nula funkcije x_0, a zatim nacrtati grafik:
1) $y = (k-1)x - 4$, $x_0 = 2$; 2) $y = (1-k)x + 3 - 2k$, $x_0 = -4$

□ **1668.** Kažemo da je funkcija $f(x)$ rastuća, ako je tačna formula: $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$ za sve x, y iz R, a opadajuća ako je tačna formula $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$, za sve x, y iz R.

a) Dokazati da su rastuće funkcije:
1) $f(x) = 2x$; 2) $f(x) = 3x - 2$; 3) $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$; 4) $f(x) = x + 2$.

b) Dokazati da su opadajuće funkcije:
1) $f(x) = -x$; 2) $f(x) = -\frac{2}{3}x - 1$; 3) $f(x) = -x + 2$;
4) $f(x) = \frac{2}{5} - 2x$.

c) Koje su od navedenih funkcija rastuće, a koje opadajuće:
1) $y = 3 - x$; 2) $y = a^2x + 3$; 3) $y = x - 2$; 4) $y = -1 - \frac{1}{2}x$?

□ **1669.** U funkciji $y = (k-3)x + k$ odrediti k tako da grafik prolazi kroz tačku $A(3, -1)$. Zatim nacrtati grafik.

□ **1670.** U funkciji $f(x) = (a-2)x - 2a + 3$, odrediti parametar a, tako da grafik funkcije odseca na osi Oy odsečak dužine 5. Nacrtati grafik dobijene funkcije.

△ **1671.** Grafici funkcija $f(x) = ax + b$ i $g(x) = ax + c$ su paralelne prave jer imaju isi koeficijent a uz x. Koristeći se tim rezultatom odrediti parametar m tako da budu paralelne prave:

a) $y = 2x - 1$ i $y = (m-2)x + m$; b) $y = 3 - mx$ i $y = -x$;

c) $2x - y + 1 = 0$ i $mx + (1-m)y + 3 = 0$.

□ **1672.** Odrediti funkciju čiji grafik sadrži tačku $A(-1, 1)$ i paralelan je grafiku funkcije $2x - 3y + 1 = 0$

○ **1673.** Naći linearnu funkciju koja prolazi kroz tačke:
a) $A(0,0)$ i $B(-2,1)$; b) $A(2,-1)$ i $B(3,0)$.

○ **1674.** Date su funkcije $f(x) = 2x - 1$ i $g(x) = x + 3$. Nacrtati grafike funkcija:

a) $f\left(\frac{x}{2}\right)$; b) $g(x-1)$; c) $f(g(x))$; d) $g \circ f(x)$; e) $f \circ f(x)$;

f) $g \circ f \circ g(x)$.

□ **1675.** Datoj funkciji odrediti inverznu (videti **zadatak 107**):

a) $f(x) = x + 3$; b) $f(x) = 3 - 2x$; c) $f(x) = \frac{1}{3}x$.

Nacrtati grafike svake date funkcije kao i grafike inverznih funkcija.

□ **1676.** Funkcija se može zadati sa više formula. Na primer: $f(x)=\begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$
Kao što znamo, to je funkcija *apsolutne vrednosti*, u oznaci $f(x) = |x|$.

Nacrtati grafike funkcija:

a) $f(x) = |x|$; b) $f(x) = -|x|$; c) $f(x) = |-x|$;

d) $y = |x| - 1$; e) $y = |x - 1|$; f) $y = 2 - |x|$; g) $y = |2 - x|$;

h) $y = x - |x|$; i) $y = \dfrac{x}{|x|}$; j) $y = \dfrac{|x|}{x}$.

○ **1677.** Nacrtati grafike funkcija definisanih formulama:

a) $f(x) = \begin{cases} x, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 2x, & x > 0 \end{cases}$; b) $f(x) = \begin{cases} -2x, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 2x, & x > 0 \end{cases}$;

c) $f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ x+1, & x < 0 \end{cases}$; d) $f(x) = \begin{cases} 1-x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$;

e) $f(x) = \begin{cases} 1-x, & x \leq -1 \\ 2, & -1 < x \leq 2 \\ x, & x > 2 \end{cases}$; f) $f(x) = \begin{cases} -x, & x \in D, x < 0 \\ 2, & -1 < x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x, & x \in N \end{cases}$;

g) $f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$.

(Poslednja funkcija je tzv. *signum* (znakovna) funkcija).

○ **1678.** Nacrtati grafike funkcija:

a) $y = \dfrac{1}{2}(|x+1| - |x-1|)$; b) $y = \dfrac{1}{2}(|x+1| + |x-1|)$;

c) $y = |x| + |x-1| + |x+1|$; d) $y = |2-x| - 2x - |x+2|$;

e) $y = \dfrac{1}{2}(x + \sqrt{x^2})$;

f) $y = \sqrt{x^2+4x+4} + \sqrt{x^2-2x+1} + \sqrt{x^2-6x+9}$;

g) $y = \dfrac{x^2-1}{x+1}$, $x \neq -1$; h) $y = \dfrac{x^2-3x+2}{|x-2|}$, $x \neq 2$.

∗ **1679.** Nacrtati grafik funkcije $y = (4m+6n-2)|x|+2m+3n$, za one vrednosti m i n za koje izraz $\dfrac{1}{4m^2+12mn+9n^2+1}$ ima najveću vrednost.

∗ **1680.** Izračunati $f(2)$ ako se zna da je $\dfrac{1}{2}f(x) + 2f\left(\dfrac{1}{x}\right) = x$.

∗ **1681.** Odrediti $f(x)$ i $g(x)$ ako je $f\left(\dfrac{x}{x-1}\right)+g(2x+1)=2x$ i $f\left(\dfrac{x}{x-1}\right)-g(2x+1)=x,\ x\neq 1.$

○ **1682.** Neka je $E(x)$ najveći ceo broj koji nije veći od x, u oznaci $E(x)=[x]$ (videti zadatke 293–300). Gde su u koordinatnoj ravni raspoređene tačke koje zadovoljavaju uslov: $E(x)=E(y)$.

○ **1683.** Odrediti skup tačaka (x,y) koje zadovoljavaju uslov: $x+|x|=y+|y|$.

○ **1684.** Nacrtati skup tačaka (x,y) za koje važi jednakost: $|x|+|y|=1$.

○ **1685.** Nacrtati grafike funkcija:
a) $y=x\ \mathrm{sgn}(x-2)+2x-1$; b) $y=|x|(x-1)+(x+1)\,\mathrm{sgn}(x+2)$.
(Videti zadatak 197.)

DVANAESTA GLAVA

12. LINEARNE JEDNAČINE

Jednačina $ax = b$ ima jedinstveno rešenje $x = \dfrac{b}{a}$, ako je $a \neq 0$, (određena je).

Jednačina $0 \cdot x = b$, gde je $b \neq 0$, nema rešenja (nemoguća je, nije saglasna).

Jednačina $0 \cdot x = 0$ je identičnost i zadovoljena je za svaki realan broj x (neodređena je).

Pri rešavanju jednačina koristimo, između ostalih, i osobinu da su jednakosti saglasne sa osnovnim računskim operacijama. (Mogu se sabirati, oduzimati, a takođe se mogu množiti i deliti brojevima ili izrazima koji nisu jednaki nuli).

12.1 LINEARNE JEDNAČINE S JEDNOM NEPOZNATOM

△ **1686.** Koje od navedenih jednakosti su identičnosti:

a) $x = 0$; b) $x^2 - 1 = 0$; c) $\dfrac{x-1}{x+1} = 0$; d) $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$;

e) $\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x}$; f) $\dfrac{1}{x^2+1} = \dfrac{1}{x^2+1}$;

g) $5(1-x)^2 - 3(1-x)(1+x) - (3+x)^2 = 7x^2 - 16x - 7$?

△ **1687.** Između navedenih jednačina izdvojiti one koje nemaju rešenja (nemoguće su) i one koje imaju beskonačno mnogo rešenja (neodređene su):

a) $2x + 3 = 2(x-1)$; b) $3(x-2) + 5 = 2x - (1-x)$;

c) $\dfrac{x-5}{6} - x = \dfrac{1-x}{3} - \dfrac{x-7}{2} - \dfrac{14}{3}$; d) $\dfrac{7x-6}{3} + \dfrac{3x+6}{2} = 5x - \dfrac{7x-6}{6}$;

e) $\left(\dfrac{x}{2} - 3\right) \cdot 4 = 2x - 1$; f) $\dfrac{2x+3}{3} - \dfrac{5x-14}{12} = \dfrac{x+1}{4} - 3$;

g) $\dfrac{2x}{3} - \dfrac{4x}{9} = \dfrac{2x}{9} - 2$; h) $\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 = (x+4)^2 - 9x + 2$.

△ **1688.** Da li su ekvivalentne jednačine (tj. da li imaju ista rešenja):

a) $2x = x + 1$ i $x = 1$; b) $\dfrac{x}{2} - 3 = 2x - 7$ i $x - 6 = 4x - 14$;

c) $2x = 2x + 1$ i $x = x + 1$; d) $x - 1 = 0$ i $(x-1)^2 = 0$;

e) $2x - \frac{3}{5}x = 1\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} - \frac{2}{5}x + 2$ i $15(x+2) = 6(2x+7)$?

△ **1689.** Rešiti po x jednačine:

a) $\frac{6x+7}{7} - 3 = \frac{5x-3}{8}$; b) $\frac{x-5}{2} + \frac{x-1}{8} = \frac{x-3}{4} + \frac{x-4}{3}$;

c) $x + 2\frac{1}{2} = \frac{4x+3}{4} - \frac{2-3x}{8}$; d) $x - \frac{x-1}{3} - \frac{2x-5}{5} + \frac{x+8}{6} = 7$;

e) $\frac{4x}{3} - 17 + \frac{3x-17}{4} = \frac{x+5}{2}$; f) $14\frac{1}{2} - \frac{2(x+3)}{5} = \frac{3x}{2} - \frac{2(x-7)}{3}$;

g) $x - \frac{1 - \frac{3x}{2}}{4} - \frac{2 - \frac{x}{4}}{3} = 2$; h) $\frac{5x-4}{2} = \frac{16x+1}{7}$; i) $\frac{1-9x}{5} = \frac{19+3x}{8}$;

j) $\frac{5-x}{8} = \frac{18-5x}{12}$; k) $\frac{4x+33}{21} = \frac{17+x}{14}$; l) $1 - \frac{2x-5}{6} = \frac{3-x}{4}$;

m) $\frac{x+17}{5} - \frac{3x-7}{4} = -2$; n) $x + \frac{2x-7}{2} - \frac{3x+1}{5} = 5 - \frac{x+6}{2}$;

o) $\frac{3(1,2-x)}{10} - \frac{5+7x}{4} = x - \frac{9x+0,2}{20} - \frac{4(13x-0,6)}{2}$;

p) $x - \frac{\frac{x}{2} - \frac{3+x}{4}}{2} = 3 - \frac{\left(1 - \frac{6-x}{3}\right) \cdot \frac{1}{2}}{2}$;

q) $\frac{11x-3}{18} + \frac{x - 1\frac{1}{2}}{10} + \frac{9 - \frac{x}{2}}{3} = 5\frac{1}{20}$.

△ **1690.** Rešiti po x jednačine:

a) $(x+5)^2 - (x-1)^2 = 48$; b) $(x+1)^2 - (x-4)^2 = 5$;

c) $(x+4)^2 - (x+8)(x-8) = 96$; d) $3(x+2)^2 + (2x-1)^2 - 7(x+3)(x-3) = 28$;

e) $5(x+3)^2 - 5(x-4)(x+8) + 12 = 87$; f) $(x-2)^3 - (x^2-1)(x-4) + 2x^2 = 7$;

g) $(x-3)(x+4) - 2(3x-2) = (x-4)^2$; h) $(x+5)(x+2) - 3(4x-3) = (x-5)^2$;

i) $2x^2 + (x+5)^2 - 2(x+7)^2 = 2(3x - 72,5) + (x-6)^2$;

j) $(x-0,4)^2 - (x+0,4)(x-0,4) = 0,1$.

△ **1691.** Rešiti jednačine:

a) $\frac{3x-5}{x-1} - \frac{2x-5}{x-2} = 1$; b) $\frac{9z-7}{3z-2} - \frac{4z-5}{2z-3} = 1$;

c) $\frac{14}{3y-12} - \frac{2+y}{y-4} = \frac{3}{8-2y} - \frac{5}{6}$; d) $\frac{3x-1}{x-1} - \frac{2x+5}{x+3} + \frac{4}{x^2+2x-3} = 1$;

e) $\frac{12}{1-9x^2} = \frac{1-3x}{1+3x} + \frac{1+3x}{3x-1}$; f) $\frac{t^2-3}{1-t^2} + \frac{t+1}{t-1} = \frac{4}{1+t}$;

g) $\dfrac{3}{1-6t}=\dfrac{2}{6t+1}-\dfrac{8+9t}{36t^2-1}$; h) $\dfrac{3}{4x-20}+\dfrac{15}{50-2x^2}+\dfrac{7}{6x+30}=0$;

i) $\dfrac{3}{1-z^2}=\dfrac{2}{1+2z+z^2}-\dfrac{5}{1-2z+z^2}$; j) $\dfrac{y^2+17}{y^2-1}=\dfrac{y-2}{y+1}-\dfrac{5}{1-y}$;

k) $5+\dfrac{96}{x^2-16}=\dfrac{2x-1}{x+4}-\dfrac{3x-1}{4-x}$;

l) $\dfrac{12x^2+30x-21}{16x^2-9}=\dfrac{3x-7}{3-4x}+\dfrac{6x+5}{4x+3}$;

m) $\dfrac{5-x}{4x^2-8x}+\dfrac{7}{8x}=\dfrac{x-1}{2x^2-4x}+\dfrac{1}{8x-16}$; n) $1+\dfrac{5}{x^2-x-6}=-\dfrac{1}{x+2}$;

o) $\dfrac{x-9}{x-5}-\dfrac{x-7}{x-2}-\dfrac{x-9}{x-4}=\dfrac{x-8}{x-5}-\dfrac{x-7}{x-4}-\dfrac{x-8}{x-2}$;

p) $\dfrac{3}{(x+1)^2}+\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{4}{x^2-1}+\dfrac{1}{x+1}$; q) $\dfrac{1}{\dfrac{1}{x}+1}=\dfrac{x+4}{x+3}$.

□ **1692.** Rešiti jednačine, vodeći računa o definiciji apsolutne vrednosti:

a) $|x|+1=5$; b) $2|x|-1=|x|+7$; c) $|x|-x=0$;

d) $|5x-2|+x=10$; e) $|1+x|-|x-1|=0$; f) $|x-4|-|2x+3|=2$;

g) $|x+4|+|x-1|=5$; h) $|x+1|-|x|+3|x-1|-2|x-2|=x+2$;

i) $\dfrac{x+3}{4}-\dfrac{|x-4|}{9}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{x+5}{36}$;

j) $\sqrt{x^2-4x+4}-\sqrt{x^2-6x+9}=\sqrt{x^2-2x+1}$;

k) $\sqrt{x^2-4x+4}+\sqrt{x^2+1+2x}=\sqrt{4+4x+x^2}$.

△ **1693.** Rešiti po x sledeće jednačine. (Vrednosti parametara su date tako da jednačine imaju jedinstvena rešenja).

a) $(a+x)b-a=(b+1)x+ab$; b) $7(2x-a)-3(4x-a)-5(3x+2a)+a=0$;

c) $\dfrac{a+x}{b}-2=\dfrac{x-b}{a}$; d) $\dfrac{a+bx}{a+b}=\dfrac{c+dx}{c+d}$; e) $\dfrac{a-x}{b-a}-\dfrac{x+a}{a+b}=\dfrac{2ax}{a^2+b^2}$;

f) $\dfrac{x+n}{m+n}+\dfrac{x-n}{m-n}=\dfrac{1}{m+n}-\dfrac{x-n}{m^2-n^2}+\dfrac{2x}{m}$; g) $\dfrac{x}{a}-\dfrac{a}{2x}=\dfrac{2x+a}{2a}-\dfrac{a}{x}$;

h) $a^2-\dfrac{a}{x}+\dfrac{b^2}{ax}=\dfrac{a^2}{bx}-\dfrac{b}{x}+b^2$; i) $\dfrac{a+b}{x}+\dfrac{a}{b}=-1$;

j) $\dfrac{3}{x-a}-\dfrac{2}{x+a}=\dfrac{3x-7a}{x^2-a^2}$; k) $\dfrac{x-2a}{x+3a}=3-\dfrac{2x^2-13a^2}{x^2-9a^2}$.

□ **1694.** Slično prethodnom zadatku, rešiti po y jednačine:

a) $m-\dfrac{n+y}{n}=n-\dfrac{m+y}{m}$; b) $\dfrac{y+a}{a-b}+\dfrac{y-a}{a+b}=\dfrac{y+b}{a+b}+\dfrac{2y-2b}{a-b}$;

c) $\dfrac{b+y}{a^2+2ab+b^2}+\dfrac{2y}{a}=\dfrac{y-b}{a^2-b^2}+\dfrac{y+b}{a+b}+\dfrac{y-b}{a-b}$; d) $\dfrac{y+d}{c}-\dfrac{y-c}{d}=2$.

$*$ **1695.** Rešiti jednačinu

$$\frac{x-29}{1971}+\frac{x-27}{1973}+\frac{x-25}{1975}+\frac{x-23}{1977}+\frac{x-21}{1979}+\frac{x-19}{1981}=$$
$$=\frac{x-1971}{29}+\frac{x-1973}{27}+\frac{x-1975}{25}+\frac{x-1977}{23}+\frac{x-1979}{21}+\frac{x-1981}{19}.$$

$\square$ **1696.** Odrediti vrednost parametra a, tako da budu ekvivalentne jednačine:

a) $ax+1=a-3$ i $\dfrac{2x+1}{4}-2=\dfrac{3}{4}$; b) $a+x=1$ i $2a+x=3$;

c) $\dfrac{a+\dfrac{x}{a-1}}{a-\dfrac{x}{a+1}}=\dfrac{a+1}{a-1}$ i $\dfrac{x}{a}-\dfrac{a+1}{x}=\dfrac{x-a}{2}$;

d) $\dfrac{\dfrac{ax}{2}}{a-x}-\dfrac{\dfrac{x}{a}}{\dfrac{a}{2}-\dfrac{x}{2}}=1+\dfrac{2}{a}$ i $\dfrac{1}{\dfrac{a+2}{ax}-\dfrac{a-2}{2a}}=\dfrac{a}{2}$.

$\square$ **1697.** Odrediti vrednost parametra a, tako da jednačina nema rešenja:
a) $2ax-1=x+a$; b) $a^2x-a=x+1$; c) $(a-3)x=x+2$.

$\square$ **1698.** Odrediti vrednosti parametara a i b, tako da jednačina bude neodređena, odnosno, da bude zadovoljena za svako realno x:
a) $ax+x=b-x$; b) $b(bx-a)=a^2(x-1)$;
c) $(a+x)b-a=(b+1)x+ab$; d) $a-(a+b)x=(b-a)x-(3+bx)$.

$\bigcirc$ **1699.** Jednačina $\dfrac{x-a}{b-a}+\dfrac{x-b}{a-b}=1$ zadovoljena je za $x=a$ i za $x=b$. Kako je moguće da linearna jednačina ima dva rešenja? Dati obrazloženje.

1700. Date su jednačine po nepoznatim x, y ili z. Diskutovati rešenja ovih jednačina u zavisnosti od vrednosti parametara a, b, c, m, n.

$\triangle$1) $a(ax+1)=2(2x-1)$; 2) $\dfrac{a-x}{b-a}-\dfrac{a+x}{a+b}=\dfrac{2ax}{a^2-b^2}$;

$\triangle$3) $\dfrac{x}{a}-b=\dfrac{x}{b}-a$; $\triangle$4) $\dfrac{x+a}{x+b}=\dfrac{x-b}{x+c}$;

$\triangle$5) $\dfrac{1}{a^2+a}-\dfrac{1}{a}=-\dfrac{x}{a}+\dfrac{x}{a+1}-\dfrac{x}{a^2-a}$;

$\square$6) $\dfrac{y+p}{q}-\dfrac{q}{p}=\dfrac{y-q}{p}+\dfrac{p}{q}$; $\square$7) $\dfrac{x-a}{bc}+\dfrac{x-b}{ac}+\dfrac{x-c}{ab}=2\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)$;

$\square$8) $\dfrac{x+b}{a+b}+\dfrac{x-b}{a-b}=\dfrac{b+x}{a^2+2ab+b^2}-\dfrac{x-b}{a^2-b^2}+\dfrac{2x}{a}$; $\triangle$9) $\dfrac{a}{a-x}=\dfrac{b}{b-x}$;

$\triangle$10) $(a^2-5a+6)x=a-3$; $\square$11) $\dfrac{6x+2a+3b+c}{6x+2a-3b+c}=\dfrac{2x+6a+b+3c}{2x+6a-b-3c}$;

□12) $\frac{m-x}{m-n}-\frac{x-n}{m+n}=\frac{2mn}{m^2-n^2}$; □13) $\frac{ax-1}{x-1}+\frac{b}{x+1}=\frac{ax^2+a}{x^2-1}$;

○14) $\frac{a}{c}-\frac{ax}{cx-1}=\frac{c}{a}-\frac{cx}{ax-1}$; □15) $\frac{x}{a^2-b^2}+\frac{2x}{a+b}+\frac{a+b-1}{2a-2b}=\frac{x}{a-b}+1$;

○16) $\frac{x-m-n}{p}+\frac{x-n-p}{m}+\frac{x-p-m}{n}=3$;

□17) $\frac{a+x}{a^2+ax+x^2}+\frac{a-x}{a^2-ax+x^2}=\frac{3a}{a^4x+a^2x^3+x^5}$;

○18) $\frac{(x^2+a^2-b^2)(a+x)}{ax}+\frac{(a^2+b^2-x^2)(b+a)}{ab}+\frac{(b^2+x^2-a^2)(x+b)}{bx}=0$;

□19) $\frac{2x+a}{a}+\frac{x-b}{a}=\frac{3ax+(a-b)^2}{ab}$; △20) $\frac{2x-m}{m+n}=\frac{2x+n}{m-n}$;

□21) $\frac{x-1}{n-1}+\frac{2n^2(1-x)}{n^4-1}=\frac{2x-1}{1-n^4}-\frac{1-x}{1+n}$; □22) $\frac{a+by}{a+b}=\frac{m+ny}{m+n}$;

△23) $\frac{y}{a-1}+\frac{y}{a+1}=\frac{1}{a^2-1}$; □24) $\left(a+\frac{x}{a-b}\right):\left(a-\frac{x}{a+b}\right)=\frac{a+b}{a-b}$;

□25) $\frac{y}{a-b}-\frac{3}{a+b}=\frac{4by}{a^2-b^2}$;

○26) $\frac{x+n}{m+n}+\frac{x-n}{m-n}=\frac{1}{m+n}-\frac{x-n}{m^2-n^2}+\frac{2x}{m}$;

○27) $\frac{x}{a}-\frac{a+b}{x}=\frac{x-a}{a}$; ○28) $\frac{m}{m-x}+\frac{b^2}{cx-cm}=\frac{mc-b^2}{c}$;

○29) $\frac{c+y}{cy}=\frac{1}{c}+\frac{c}{c+y}$; ○30) $\frac{a}{ac+bc}+\frac{a-b}{2bx}=\frac{a+b}{2bc}-\frac{b}{ax+bx}$.

12.2 SISTEMI LINEARNIH JEDNAČINA

△ **1701.** a) Odrediti rešenje datog sistema linearnih jednačina grafičkom metodom:

1) $x-y=0 \wedge x+y=2$; 2) $2x+y=4 \wedge x+2y=5$;

3) $-x+y=2 \wedge 2x-y=-1$; 4) $3x+2y=5 \wedge x-2y=-1$.

b) Uveriti se grafičkom metodom da su sledeći sistemi linearnih jednačina nemogući, tj, da nemaju rešenja:

1) $x+y=-1 \wedge x+y=1$; 2) $2x+y=3 \wedge 2x+y=4$;

c) Grafičkom metodom uveriti se da dati sistemi linearnih jednačina imaju beskonačno mnogo rešenja, tj. da su neodređeni:

1) $x+y=1 \wedge 2x+2y=2$; 2) $-x-2y=0 \wedge 2x+4y=0$.

□ **1702.** Utvrditi da li je dati sistem saglasan, neodređen ili nesaglasan:

1) $\begin{array}{l} 5x-4y=13 \\ 2x-3y=1 \end{array}$ 2) $\begin{array}{l} 4x-6y=7 \\ 8x-12y=15 \end{array}$ 3) $\begin{array}{l} 10x-15y=7 \\ 6x-9y=4,2 \end{array}$

4) $\begin{array}{l} 4x+6y=3 \\ 6x+9y=4,5 \end{array}$ 5) $\begin{array}{l} 2x-3y=4 \\ 4x-6y=5 \end{array}$ 6) $\begin{array}{l} 12x+16y+1=0 \\ 3x+4y+2=0 \end{array}$

7) $\begin{array}{l} 28x+35y+3=0 \\ 12x+15y+25=0 \end{array}$ 8) $\begin{array}{l} 2x-7y=0 \\ 0\cdot x+0\cdot y=2 \end{array}$

□ **1703.** Znamo da se polinom $ad-bc$ naziva **determinantom drugog reda** i označava se sa $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$. Sistem linearnih jednačina s dve napoznate rešava se pomoću determinanti na sledeći način:

$$\begin{array}{l} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{array} \Longleftrightarrow x=\frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \text{ i } y=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \text{ i } \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1\neq 0,$$

a) Izračunati determinante:

$$1)\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix};\quad 2)\ \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix};\quad 3)\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix};\quad 4)\ \begin{vmatrix} -5 & 6 \\ -4 & 3 \end{vmatrix};\quad 5)\ \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}.$$

b) Koristeći determinante rešiti sisteme jednačina:

1) $\begin{array}{l} 3x+4y=-1 \\ 2x-y=3 \end{array}$ 2) $\begin{array}{l} x+y=2 \\ x-y=0 \end{array}$ 3) $\begin{array}{l} x-2y=-5 \\ -2x+y=1 \end{array}$

4) $\begin{array}{l} x+5y=17 \\ 3x-y=3 \end{array}$ 5) $\begin{array}{l} 6x-7y=40 \\ 5x-2y=-8 \end{array}$ 6) $\begin{array}{l} 2x-3y=8 \\ 7x-5y=-5 \end{array}$

7) $\begin{array}{l} 25x-4y+1=0 \\ 31x-5y+16=0 \end{array}$

△ **1704.** Raznim metodama rešiti sisteme jednačina:

a) $\begin{array}{l} (x-1)(y+2)-(x-2)(y+5)=0 \\ (x+4)(y-3)-(x+7)(y-4)=0 \end{array}$ *b*) $\begin{array}{l} (x+3)(y+5)=(x+1)(y+8) \\ (2x-3)(5y+7)=2(5x-6)(y+1) \end{array}$

c) $\begin{array}{l} x+5y=19 \\ -4y=-19-3x \end{array}$ *d*) $\begin{array}{l} x=-7-3y \\ x=3+2y \end{array}$ *e*) $\begin{array}{l} 3x+2y=12 \\ 3x-2y=0 \end{array}$

f) $\begin{array}{l} \dfrac{x}{6}-\dfrac{y}{9}=-1 \\ \dfrac{5x}{9}+\dfrac{2y}{3}=15\dfrac{1}{3} \end{array}$ *g*) $\begin{array}{l} \dfrac{6x+5y}{8}=2 \\ \dfrac{6x+y}{8}=1 \end{array}$ *h*) $\begin{array}{l} \dfrac{x+y}{4}+\dfrac{2x-y}{2}=\dfrac{7}{4} \\ \dfrac{2x-3}{3}+\dfrac{x-2y}{5}=-\dfrac{7}{15} \end{array}$

$i)$ $\frac{x+y}{3}-\frac{y}{5}=-2$, $\frac{2x-y}{3}-\frac{3x}{4}=\frac{3}{2}$ $j)$ $\frac{2x-1}{5}+\frac{3y-2}{4}=2$, $\frac{3x+1}{5}-\frac{3y+12}{4}=0$ $k)$ $\frac{x+1}{3}-\frac{y+2}{4}=\frac{2(x-y)}{5}$, $\frac{x-3}{4}-\frac{y-3}{3}=2y-x$

$l)$ $\frac{0,2x+0,1y}{2}-\frac{4x-y}{10}=\frac{3x+0,5y}{30}+\frac{x-y}{5}$, $\frac{3x+2y-1}{8}=3-\frac{0,8x-5y}{41}$ $m)$ $x:y=3:4$, $(x-1):(y+2)=1:2$

□ **1705.** Uvođenjem novih nepoznatih rešiti sisteme jednačina:

$a)$ $\frac{3}{x}+\frac{5}{y}=16$, $\frac{5}{x}-\frac{3}{y}=4$ $b)$ $\frac{4}{x}-\frac{7}{y}=-13$, $\frac{6}{x}+\frac{4}{y}=24$ $c)$ $\frac{2}{x-1}+\frac{3}{y-4}=5$, $\frac{4}{x-1}+\frac{1}{y-4}=3$

$d)$ $\frac{2}{x}+\frac{5}{y}=30$, $\frac{3}{x}+\frac{4}{y}=31$ $e)$ $\frac{1}{x+y}+\frac{1}{x-y}=\frac{5}{8}$, $\frac{1}{x-y}-\frac{1}{x+y}=\frac{3}{8}$ $f)$ $\frac{10}{x-5}+\frac{1}{y+2}=1$, $\frac{25}{x-5}+\frac{3}{y+2}=2$

$g)$ $\frac{1}{x}+\frac{3}{y+1}=\frac{5}{4}$, $\frac{4}{x}+\frac{7}{y+1}=\frac{1}{4}$ $h)$ $\frac{11}{2x-3y}+\frac{18}{3x-2y}=13$, $\frac{27}{3x-2y}-\frac{2}{2x-3y}=1$

$i)$ $\frac{1}{x-y+2}+\frac{1}{1-x-y}=0,1$, $\frac{1}{x-y+2}+\frac{1}{x+y-1}=0,3$

○ **1706.** Rešiti sisteme jednačina:

$a)$ $2x+3|y|=13$, $3x-y=3$ $b)$ $|x-1|+|y-5|=1$, $|x-1|-y=-5$ $c)$ $|x+1|+|y-1|=5$, $|x+1|-4y=-4$

$d)$ $x-|y-4|=4$, $|x-3|+|y-4|=3$ $e)$ $|x+y|=1$, $|x|+y=1$ $f)$ $|2x+3y|=5$, $|2x-3y|=1$

$g)$ $2x-3|y|=1$, $|x|+2y=4$ $h)$ $y-2|x|+3=0$, $|y|+x-3=0$ $i)$ $|x|+|y-1|=1$, $x+2y=3$

□ **1707.** Odrediti vrednost parametra k, tako da imaju jedinstvena rešenja sistemi jednačina:

$a)$ $\begin{array}{l} 3x + ky = 5 + k \\ 2x + 5y = 8 \end{array}$ $b)$ $\begin{array}{l} kx + (k+1)y = 3 \\ 2x + 3y = k - 1 \end{array}$

□ **1708.** Odrediti vrednosti parametara tako da budu neodređeni sistemi (tj. da imaju beskonačno mnogo rešenja):

$a)$ $\begin{array}{l} (2k-1)x + ky = 6 \\ 7,5x + 4y = 3 \end{array}$ $b)$ $\begin{array}{l} 2x + (m-1)y = 3 \\ (m+1)x + 4y = -3 \end{array}$ $c)$ $\begin{array}{l} 5x + 3y = b \\ 10x + ay = 42 \end{array}$

$d)$ $\begin{array}{l} (m+n-2)x+(m+2n)y=6 \\ nx + 3y = 3 \end{array}$ $e)$ $\begin{array}{l} (1+a)x + (a+b)y = b - a \\ (5+a)x+2(a+b)y=b-1, \text{ gde } a+b \neq 0 \end{array}$

□ **1709.** Za koje vrednosti parametara sistemi jednačina nemaju, a za koje imaju rešenja:

$a)$ $\begin{array}{l} (1+2k)x + 5y = 7 \\ (2+k)x + 4y = 8 \end{array}$ $b)$ $\begin{array}{l} ax + (b-2)y = 5a \\ bx + 4y = 3 - b \end{array}$ $c)$ $\begin{array}{l} x + 2y = 6 \\ 4x - ay = b \end{array}$

○ **1710.** Sistem $\begin{array}{l} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{array}$ određen je (saglasan je) ako je $a_1b_2 \neq a_2b_1$, odnosno ako: $\dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$. Sistem je *protivrečan*, tj. nema rešenja, ako: $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$. Najzad, ako je ispunjen uslov: $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$, sistem je ekvivalentan sa $0 \cdot x + 0 \cdot y = 0 \wedge a_1x + b_1y = c_1$, tj. ekvivalentan je prvoj jednačini. Tada, ako je $a_1 = b_1 = 0$ i $c_1 \neq 0$, sistem je nemoguć, tj. nema rešenja, a ako je $a_1 = b_1 = c_1 = 0$, ili bar jedan od koeficijenata a_1, b_1 nije jednak nuli, sistem je *neodređen* i ima beskonačno mnogo rešenja.

Utvrditi za koje vrednosti parametara, navedeni sistemi jednačina sa dve nepoznate, x i y, su *saglasni* (imaju jedinstveno rešenje), *protivrečni* (nemogući) ili *neodređeni*, tj. *diskutovati rešenja* sledećih sistema:

△$a)$ $\begin{array}{l} x + ay = 6 \\ 2x + ay = 7 \end{array}$ △$b)$ $\begin{array}{l} ax + y = 5a \\ x + 2y = 3a \end{array}$ △$c)$ $\begin{array}{l} ax + 2ay = 5 \\ x + y = 3 \end{array}$

□$d)$ $\begin{array}{l} (a+1)x-y=1 \\ ax + 4y = 10 \end{array}$ □$e)$ $\begin{array}{l} \dfrac{x}{a} + y = 1 \\ \dfrac{x}{b} - y = 0 \end{array}$ □$f)$ $\begin{array}{l} ax + y = b \\ \dfrac{1}{b}x + y = a \end{array}$

□$g)$ $\begin{array}{l} mx + y = 1 \\ 2x + y = 2 \end{array}$ □$h)$ $\begin{array}{l} 2ax-3by=12ab \\ ax + by = ab \end{array}$ □$i)$ $\begin{array}{l} ax - 3y = a \\ (a-4)x+(a-7)y=-6 \end{array}$

$j)$ $(m-1)x+2my=-2$
$2mx+(m-1)y=m-1$

$k)$ $a^2x-y=a-b$
$b^3x+ay=b^2$

$l)$ $x+y=1$
$x+a^2y=a$

$m)$ $\dfrac{x-a}{b}+\dfrac{y-b}{a}=1$
$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$

$n)$ $\dfrac{x}{a+b}+\dfrac{y}{a-b}=2$
$\dfrac{x}{a-b}-\dfrac{y}{a+b}=\dfrac{4ab}{a^2-b^2}$

$o)$ $\dfrac{2ax}{b}-\dfrac{3by}{a}+1=\dfrac{2a}{b}+\dfrac{3b}{a}$
$\dfrac{ax}{b}-\dfrac{by}{a}=\dfrac{a^2+b^2}{ab}$

$p)$ $\dfrac{x}{a+b}+\dfrac{y}{a-b}=a+b$
$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=2a$

$q)$ $\dfrac{x}{a+b}+\dfrac{y}{a-b}=2a$
$x-y=4ab$

$r)$ $\dfrac{a}{x-a}+\dfrac{y}{y-b}=2$
$ax+by=2ab$

$s)$ $\dfrac{x+y}{x-y}=\dfrac{a}{b-c}$
$\dfrac{x+c}{y-b}=\dfrac{a+b}{a+c}$

$t)$ $\dfrac{x}{a-p}+\dfrac{y}{b-p}=1$
$\dfrac{x}{a-q}+\dfrac{y}{b-q}=1,\ a\neq b,\ p\neq q$

$u)$ $ax+by=c^2$
$\dfrac{a+x}{b}=\dfrac{b+y}{a},\ a\neq 0,\ b\neq 0$

△ **1711.** Sistem linearnih jednačina sa tri nepoznate: $\begin{aligned} x-y+z&=5\\ 2y-z&=-8\\ 3z&=6\end{aligned}$ ima tzv. *trougaoni oblik*; rešava se jednostavnim postupkom. Iz treće jednačine je $z=2$. Zamenom u drugu jednačinu dobijamo: $2y-2=-8$, odakle je $y=-3$. Sada u prvoj jednačini zamenimo y i z i dobijemo $x=0$.

Postupajući slično, rešiti sledeće sisteme linearnih jednačina:

$a)$ $\begin{aligned} x+y&=3\\ y&=1\end{aligned}$ $b)$ $\begin{aligned} 2x-5y&=5\\ 3y&=3\end{aligned}$ $c)$ $\begin{aligned} 7x-3y&=8\\ 5y&=10\end{aligned}$

$d)$ $\begin{aligned} -10x-5y&=20\\ -2x&=2\end{aligned}$ $e)$ $\begin{aligned} x+y+3z&=14\\ 2y+4z&=16\\ 5z&=15\end{aligned}$ $f)$ $\begin{aligned} 2x+3y+z&=14\\ 2x+4y&=10\\ 5x&=25\end{aligned}$

$g)$ $\begin{aligned} x-y+z+u&=0\\ 3x+2y-z&=-4\\ 2x-3y&=-2\\ 4x&=-4\end{aligned}$ $h)$ $\begin{aligned} 3x+3y-4z+5u&=9\\ 2x-3y-z&=-4\\ 4x+5y&=1\\ 3x&=-3\end{aligned}$ $i)$ $\begin{aligned} x+y+z+u+v&=10\\ 4y+5z-u-v&=1\\ 3z+2u-v&=2\\ 4u-3v&=0\\ 2v&=8\end{aligned}$

□ **1712.** Postupnim eliminisanjem nepoznatih, sistem se može dovesti na trougaoni oblik – to je tzv. *Gausov postupak*. Gausovom metodom rešiti sisteme linearnih jednačina:

a) $2x+3y+z=7$, $-3x+y-4z=-10$, $5x+4y-2z=5$

b) $x+2y-3z=5$, $2x+3y-5z=8$, $5x+y-6z=7$

c) $3x+5y-z=8$, $5x+3y+z=0$, $2x+4y+5z=-11$

d) $x+y+z+u=6$, $2x-3y+4z-u=-2$, $x+y+3z-4u=-2$, $3x-2y+4z+2u=7$

e) $x+y+z+u=0$, $2x+y+2z-u=9$, $3x-y-3z+u=-2$, $4x-y-z-u=10$

□ **1713.** Raznim metodama rešiti sisteme jednačina:

a) $x+2y-z=2$, $2x+y+z=7$, $x+y+z=6$

b) $x+2y+3z=80$, $5x-2y=70$, $3x+2z=80$

c) $x+9y+10z=4$, $4x+9z=6$, $2x-6y-5z=10$

d) $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{3}$, $\dfrac{y}{5}=\dfrac{z}{6}$, $3x-2y+z=18$

e) $x+y+z=39$, $y+z+u=45$, $z+u+x=43$, $u+x+y=41$

f) $x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=3$, $x_1+x_3+x_4+x_5+x_6=5$, $x_1+x_2+x_4+x_5+x_6=4$, $x_1+x_2+x_3+x_5+x_6=7$, $x_1+x_2+x_3+x_4+x_6=11$, $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=10$

○ **1714.** Uvođenjem novih nepoznatih rešiti sisteme jednačina:

a) $\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{y}-\dfrac{1}{z}=9$, $\dfrac{3}{x}-\dfrac{2}{y}+\dfrac{2}{z}=14$, $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}-\dfrac{3}{z}=-1$

b) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=1$, $\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{y}+\dfrac{1}{z}=-2$, $\dfrac{1}{x}-\dfrac{5}{y}-\dfrac{7}{z}=3$

c) $\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{3}{y-3}+\dfrac{1}{z+1}=-1$, $\dfrac{2}{x-2}-\dfrac{5}{y-3}-\dfrac{3}{z+1}=-6$, $\dfrac{5}{x-2}+\dfrac{2}{y-3}-\dfrac{1}{z+1}=6$

d) $3xy=2(x+y)$, $5yz=6(y+z)$, $4zx=3(z+x)$

∗ **1715.** Rešiti na pogodne načine sisteme jednačina:

a) $x+y=a$, $y+z=b$, $z+x=c$

b) $ax+y+z=1$, $x+ay+z=a$, $x+y+az=a^2$

c) $x+y+z=0$, $ax+by+cz=0$, $bcx+acy+abz=1$

$$d)\quad \begin{aligned} &x+y+z+a(x+y)+a^2x=a^3\\ &x+y+z+b(x+y)+b^2x=b^3\\ &x+y+z+c(x+y)+c^2x=c^3\end{aligned}$$

$$e)\quad \begin{aligned} &x-y+z=0\\ &(a+b)x-(a+c)y+(b+c)z=0\\ &abx-acy+bcz=1\end{aligned}$$

$$f)\quad ax+by+cz=bx+cy+az=cx+ay+bz=a+b+c$$

$$g)\quad \begin{aligned} &ax+y+z=1\\ &x+by+z=1\\ &x+y+cz=1\end{aligned} \qquad h)\quad \begin{aligned} &\frac{xy}{ay+bx}=\frac{1}{c}\\ &\frac{yz}{bz+cy}=\frac{1}{a}\\ &\frac{zx}{az+cx}=\frac{1}{b}\end{aligned}$$

$$i)\quad \begin{aligned} &\frac{x_1-a_1}{m_1}=\frac{x_2-a_2}{m_2}=\cdots=\frac{x_n-a_n}{m_n}\\ &x_1+x_2+\cdots+x_n=a\\ &m_1+m_2+\cdots+m_n\neq 0\end{aligned}$$

12.3 *DIOFANTSKE JEDNAČINE

U ovom odeljku rešavamo uglavnom nelinearne jednačine, čija su rešenja obavezno celi brojevi i koje se svode na linearne jednačine.

1716. U skupu celih brojeva rešiti linearne jednačine $(x, y \in D)$:
a) $60x-77y=1$; b) $3x-4y=5$

1717. U skupu prirodnih brojeva rešiti jednačine (p je prost broj):
a) $x^2-y^2=8$; b) $x^2-y^2=13$; c) $x^2-y^2=105$;
d) $2(x^2-y^2)=1978$; e) $2x+xy=7$; f) $xy=x+y$;
g) $x+y=(x-y)^2$; h) $x^2+2xy-3y^2=5$; i) $2x^2+5xy-12y^2=28$;
j) $xy-3x+2y=8$; k) $x^2=y^2+2y+12$; l) $x^4-y^4=175$;
m) $p(x+y)=xy$; n) $5p+1=x^2$; o) $x^4+4=p$;
p) $xyz=x+y+z$; q) $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2}=1$.

1718. Naći celobrojna rešenja jednačina:
a) $x^2-xy+2x-3y=11$; b) $xy=10x+10y,\ x, y\in N$; c) $2(x+y)=xy$;
d) $xy-x=2+y^3$; e) $x^2+y^2=1$; f) $x^2+y^2-2x-4y+4=0$;
g) $x^2+xy+y^2=1$; h) $x^2+4y^2+z^4=2x-20y-23$.

1719. a) Odrediti sve cele brojeve x tako da $x^2+3x+24$ bude potpun kvadrat.
b) Odrediti pirodan broj n, tako da je $n^2+2n+13$ kvadrat prirodnog broja.
c) Prost broj p prikazati u obliku: $8n^2+10n+3$, gde je n ceo broj.

1720. Razlomak $\frac{44}{65}$ prikazati u obliku zbira dva pozitivna razlomka čiji su imenioci 13 i 5.

1721. Zoran duguje Dušanu 130 dinara, pri čemu Zoran poseduje samo novčanice od 20 dinara, a Dušan samo novčanice od 50 dinara. Kako će Zoran vratiti dug Dušanu?

1722. Dokazati da se broj 101010 ne može predstaviti u obliku razlike kvadrata dva cela broja.

1723. Dužina jedne katete pravouglog trougla je 21, a dužine ostalih dveju stranica izražene su prirodnim brojevima. Koliko ima takvih trouglova? Naći njihove stranice.

1724. Učenik je u toku 19 dana rešio 73 zadatka. Svakog od prvih 11 dana rešio je po x zadataka, a svakog od preostalih dana po y zadataka. Naći x i y.

1725. Dokazati da sledeće jednačine nemaju rešenja u skupu celih brojeva:
a) $x^2-3y=17$; b) $3x^2-4y^2=13$; c) $3x^2+8=y^2$;
d) $2x^2-5y^2=7$; e) $x^2+4x-8y=11$; f) $2x^2-4x-5y^2-10y=10$;
g) $19x^2+2=y^2$; h) $x^2+y^2=1992$; i) $x^2-y^2=1990$;
j) $x^2+4y^2=1990$?

12.4 PRIMENA LINEARNIH JEDNAČINA

12.4.1 Elementarni problemi

△ **1726.** Koji broj treba dodati brojiocu i imeoniocu nekog razlomka, tako da se dobije recipročan razlomak?

△ **1727.** Stub je ukopan u zemlju trećinom svoje dužine, polovina dužine je u vodi, a 2 metra izviriju iz vode. Kolika je dužina stuba?

△ **1728.** Dva se broja odnose kao 2 : 3. Ako se prvi uveća za 1, a drugi za 4, oni se odnose kao 1 : 2. Koji su to brojevi?

△ **1729.** Ako se neki broj podeli drugim brojem, dobiće se količnik 2 i ostatak 2. Ako se pak njihov zbir podeli njihovom razlikom, dobiće se količnik 2 i ostatak 8. Koji su to brojevi?

△ **1730.** Otac želi da podeli izvestan broj jabuka deci. Ako svakom da po pet jabuka, tada preostanu tri jabuke, a ako želi da im da po šest jabuka, tada mu nedostaje jedna. Koliko ima dece i koliko je bilo jabuka?

△ **1731.** Na pitanje: koliko je godina sinu, otac odgovori: "Pre pet godina bio sam pet puta stariji od sina, a posle tri godine biću samo tri puta stariji od njega". Koliko je godina sinu, a koliko ocu?

△ **1732.** Jedna stranica pravougaonika iznosi 7 cm, a dijagonala je za 1 cm duža od druge stranice. Kolika je druga stranica?

□ **1733.** Naći skup dvocifrenih brojeva koji su za 10 veći od trostrukog zbira svojih cifara.

□ **1734.** Na pismenom ispitu trebalo je rešiti 20 zadataka. Za svaki rešeni zadatak učenik dobija 4 boda, a za svaki nerešeni on gubi 3 boda. Ako je na kraju učenik imao 38 bodova, koliko je zadataka rešio? Koliki je procenat rešenih zadataka?

□ **1735.** Strelac gađa u metu i za svaki uspešan pogodak dobija 5 bodova, a za svaki promašaj oduzimaju mu se 3 boda. Kako je očito imao loš dan, strelac je nakon serije hitaca, kojih je bilo više od 10, a manje od 20, postigao tačno nula bodova. Koliko hitaca je bilo u toj seriji i koliko je od njih bilo uspešnih?

○ **1736.** Dača sad ima četiri puta više godina nego što je imala Maca kada je bila dva puta mlađa od Dače. Koliko godina ima Dača, a koliko Maca, ako će kroz 15 godina imati zajedno 100 godina?

○ **1737.** Kupljene su dve sveće različite dužine i debljine. Duža sveća bi sasvim sagorela za 3,5 časova, a kraća za 5 časova. Sveće su zapaljene istovremeno. Pošto su gorele 2 časa, dužine su im postale jednake. Za koliko je procenata jedna sveća (ona duža) u početku bila duža od druge sveće?

○ **1738.** Jedan učenik je kupio četiri knjige. Za prve tri knjige platio je 160 dinara, a za prvu, drugu i četvrtu platio je 210 dinara. Za prvu, treću i četvrtu dao je 240 dinara, a za drugu, i četvrtu knjigu 200 dinara. Koliko staje svaka knjiga posebno?

□ **1739.** Neka roba, koja staje 4550 dinara, plaćena je sa 23 novčanice, čije su vrednosti od 50 dinara, 100 dinara i 500 dinara. Broj novčanica od 50 dinara je najmanji. Sa koliko novčanica od 50 dinara, 100 dinara i 500 dinara je plaćena ova roba?

□ **1740.** Pas je udaljen od lisice 30 m. Jedan skok psa iznosi 2 m, a skok lisice je dug 1 m. Za vreme za koje pas načini 2 skoka, lisica načini 3 skoka. Koliko će rastojanje preći pas dok ne uhvati lisicu?

12.4.2 Problemi mešanja

△ **1741.** Neko pomeša 60 litara 72 % alkohola sa 70 litara 96 % alkohola. Koliko litara čiste vode treba doliti u ovaj rastvor, da se dobije rastvor od 46 % alkohola?

△ **1742.** Ako se pomeša 8 litara toplije vode sa 2 litra hladnije vode, temperatura vode će biti 66° C. Ako se pomeša 7 litara toplije sa 3 litra hladnije vode, temperatura mešavine biće 59° C. Kolika je temperatura toplije, a kolika hladnije vode?

□ **1743.** Jedna legura cinka i srebra teška 3,5 kp, sadrži 76 % srebra. Kad su ovu leguru stopili s drugom legurom cinka i srebra, dobijena je nova (treća) legura, teška 10,5 kp, koja je sadržavala 84 % srebra. Koliki je bio procenat srebra u drugoj leguri?

○ **1744.** Imamo dve smeše zlata i srebra. U prvoj smeši količine ovih metala se odnose kao 2 : 3, a u drugoj kao 3 : 7. Koliko treba uzeti od svake smeše da bi se dobilo 8 kg nove smeše u kojoj će zlato i srebo biti u razmeri 5 : 11?

○ **1745.** U zlatarskoj radionici mora se načiniti 9 kg smeše u kojoj će zlato i srebro biti u razmeri 7 : 11. Na skladištu imaju dve smeše. U jednoj smeši količine zlata i srebra nalaze se u razmeri 4 : 5, a u drugoj 2 : 5. Koliko treba uzeti od svake smeše da bi se načinila nova smeša u zadatoj razmeri?

□ **1746.** Komad legure cinka i bakra, mase 40 kg, kad se sasvim potopi u vodu, izgubi u masi 5 kg. Naći koliko u njemu ima cinka, a koliko bakra, ako je poznato da u vodi cink gubi $14\frac{2}{7}$ %, a bakar $11\frac{1}{9}$ % svoje mase.

□ **1747.** Dve legure zlata finoće 950 i 800 legiraju se sa 2 kg čistog zlata. Dobijamo 25 kg legure finoće 906.[17)] Koliko kilograma je uzeto od svake legure?

○ **1748.** Ako leguru srebra legiramo sa 3 kg čistog srebra dobićemo leguru finoće 900, a ako istu količinu prve legure legiramo sa 2 kg dobijene legure, nova legura će biti finoće 840. Odredlti finoću prve legure i masu koju smo legirali.

○ **1749.** U 0,5 tona rude sadrži se izvesna količina gvožđa. Pošto je odbačeno 0,2 tona raznih primesa, koje sadrže prosečno 12,5 % gvožđa, procenat gvožđa u preostaloj rudi povećao se na 20. Koliko je gvožđa ostalo u rudi?

○ **1750.** U jednoj leguri odnos cinka i bakra je 1 : 2, a u drugoj 2 : 3. U kojoj razmeri treba pomešati ove legure, da bi se dobila legura u kojoj je odnos cinka i bakra 17 : 27?

12.4.3 Problemi o radu

△ **1751.** Jedan radnik bi završio posao za 10 časova. Ako mu drugi pomogne 2 časa, posao će biti završen za 6 časova. Za koje bi vreme drugi radnik sam završio ovaj posao?

△ **1752.** Bazen se može napuniti vodom kroz jednu cev za 20 časova. Ako se voda toči iz još jedne cevi istovremeno, bazen se napuni za 8 časova. Za koje bi se vreme napunio bazen, ako se voda pusti samo iz druge cevi?

△ **1753.** Bazen se može napuniti kroz dve cevi. Ako je prva otvorena 5 minuta, a druga 8 minuta, u bazen uđe 340 litara vode. Ako je pak prva cev otvorena 8 minuta, a druga 5 minuta, onda u bazen uđe 310 litara vode. Koliko litara vode istoči u minuti svaka cev posebno?

□ **1754.** Dva radnika mogu da završe neki posao za 12 dana. Posle zajedničkog rada od 5 dana jedan se radnik razboli, pa je drugi sam nastavio sa radom i dovršio posao za sledećih 17,5 dana. Za koliko dana može taj posao da završi svaki radnik radeći sam?

○ **1755.** Tri omladinske brigade treba da grade put određene dužine prema utvrđenom planu. Dužine deonica tih brigada proporcionalne su brojevima 6, 5 i 4.

[17)] Finoća se izražava u promilima čistog metala.

Međutim, pred početak radova doneta je odluka da se deonice ovih brigada odnose kao 1 : 5 : 4. Usled toga deonica jedne brigade biće za 9 km kraća od prvobitno planirane dužine. Izračunati dužinu tog puta.

○ **1756.** Jedna brigada može da završi neki posao za 10, a druga za 15 dana. Na tom poslu angažovana je trećina prve i deo druge brigade, toliko da se posao može, završiti za 12 dana. Koji je to deo druge brigade? (Izraziti u procentima).

△ **1757.** Ivica je izračunao da će štampanje završiti tri dana pre roka ako svakog dana odštampa dva tabaka preko norme. Ako, pak, odštampa svakog dana četiri tabaka preko norme, štampanje će biti završeno pet dana pre roka. Koliko tabaka je Ivica dužan da odštampa i u kom roku?

□ **1758.** Na izradi jednakih detalja po porudžbini, na jednoj mašini je rađeno 7 časova, a na drugoj 4 časa. Posle toga utvrđeno je da je izrađeno $\dfrac{5}{9}$ od cele porudžbine. Zatim su obe mašine radile zajedno još 4 časa, pa je ostalo da se izradi još $\dfrac{1}{18}$ naručenih detalja. Za koje bi vreme svaka mašina pojedinačno pripremila naručene detalje?

□ **1759.** Za istovar robe sa parobroda korišćena su 4 velika krana iste snage. Posle 2 sata istovar je ubrzan sa još 2 manja, međusobno jednaka krana. Posle 3 sata zajedničkog rada istovar je završen. Koliko bi sati svaki kran pojedinačno radio na istovaru parobroda?

○ **1760.** Po planu drvoseča je dužan da spremi 6 m^3 drva za loženje. Međutim, on je svakodnevno prebacivao plan za 60 % i na taj način, 12 dana pre roka prebacio ukupan plan za 226,8 m^3. Koliko kubnih metara drva je pripremio drvoseča?

○ **1761.** Dve pilane su počele zajedno da obrađuju 22400 m^3 drvene građe. Prema planu proizvodnje trebalo je da posao završe za 40 radnih dana. Posle 10 dana, zbog kvara na drugoj pilani, ova smanji svoju proizvodnju za 25 %, pa je prva za isti procenat povećala svoju proizvodnju. Tako je ostatak posla završen za 28 dana. Koliko je kubnih metara građe trebalo svaka pilana da obradi dnevno po planu?

△ **1762.** "Zoran i ja, reče Duško, možemo završiti neki posao za 20 dana, no, ako mi date Nikolu umesto Zorana možemo završiti posao za 15 dana."

"Imam bolju kombinaciju, reče Nikola, ako uzmem Zorana za pomoćnika, završićemo posao za 12 dana."

Za koliko bi dana svaki od njih završio taj posao?

□ **1763.** Bazen može da se prazni sa tri slavine. Ako se istovremeno otvore prva i druga, bazen se isprazni za 2 sata. Prva i treća slavina isprazne bazen za 72 minuta, a kroz drugu i treću slavinu bazen bi se ispraznio za sat i po. Za koliko bi se sati bazen ispraznio kroz jednu slavinu?

○ **1764.** Za punjenje bazena pripremljene su dve slavine. Prva bi sama napunila bazen za 4 sata i 30 minuta, a druga za 6 sati i 45 minuta. Na početku je otvorena prva slavina i bazen se punio tačno onoliko vremena koliko je potrebno da se bazen napuni sa obe ostvorene slavine. Zatim je otvorena i druga slavina dok se bazen nije napunio. Koliko je vremena bila otvorena druga slavina?

□ **1765.** Četiri radnika treba da urade jedan posao. Ako bi prvi, drugi i treći radili bez četvrtog radnika oni bi završili taj posao za 6 sati, a ako bi radili prvi, drugi i četvrti, završili bi za 7,5 sati. Međutim, ako rade samo treći i četvrti, za taj posao im treba 10 sati. Za koliko će sati završiti ako rade svi zajedno?

12.4.4 Problemi kretanja

△ **1766.** Putnik pođe na put i prelazi dnevno 30 km. Posle 6 dana pođe za njim drugi putnik i stigne ga za 9 dana hoda. Kojom brzinom se kreće drugi putnik?

△ **1767.** Iz Beograda pođe voz prema Loznici koja je udaljena 135 km i kreće se prosečnom brzinom od 8 metara u sekundi. Sat i po kasnije pođe iz Loznice prema Beogradu voz koji se kreće brzinom od 10 metara u sekundi. Gde i kada će se vozovi susresti?

△ **1768.** Vozeći uz reku, parobrod pređe 63 km za 5 časova, a isti taj put niz reku prelazi za 3 časa. Kojom se brzinom kreće ovaj parobrod na mirnoj vodi i kolika je brzina rečnog toka?

□ **1769.** Idući od Draginca prema autobuskoj stanici u Loznici pešak je, prešavši prvog časa 3 km, utvrdio da će zakasniti na autobus 30 min ako bude nastavio da ide ovom brzinom. Zbog toga je preostali deo puta prelazio brzinom od 4 km/h i tako je stigao na stanicu 40 minuta pre polaska autobusa. Odrediti koliko je od Draginca udaljena autobuska stanica u Loznici.

△ **1770.** Dva pešaka pođu istovremeno iz mesta A u mesto B. Prvi pešak tokom prve polovine vremena kretanja ide brzinom od 5 km na čas, a ostatak puta pređe brzinom od 4 km na čas. Drugi pešak je prvu polovinu puta prešao brzinom od 5 km na čas, a drugu polovinu brzinom od 4 km na čas.

Koji će pešak pre stići u mesto B? Koliko će kilometara u tom momentu biti ispred sporijeg, ako je od A do B 18 km?

□ **1771.** Biciklista je prešao 96 km za 2 časa brže nego što je planirao. Pri tome za svaki čas je, prešao 1 km više nego što je planirao da pređe za 1 čas i 15 minuta. Kojom se brzinom kretao biciklista?

□ **1772.** Lice A kretalo se čamcem nizvodno po reci prelazeći put iz mesta A do mesta B za 10 časova. Razdaljina između A i B iznosi 20 km. Naći brzinu toka reke kada se zna da je za isto vreme lice A prelazilo 2 km uzvodno, a 3 km nizvodno.

□ **1773.** Da pređe put između dva mesta A i B, autobus je utrošio izvesno vreme. Jednu četvrtinu tog vremena on je išao brzinom 45 km/h, a preostalo vreme brzinom 75 km/h. Naći prosečnu brzinu tog autobusa na celom putu AB.

□ **1774.** Za jednim automobilom, koji je krenuo iz mesta A, krene nakon pola sata drugi automobil i stigne ga nakon 2,5 sata vožnje. Tokom dalje vožnje oba vozila u istom smeru, uočeno je da je brži automobil bio, nakon jednog i po sata, 24 km ispred sporijeg. Odrediti srednje brzine ovih automobila.

□ **1775.** Motociklist je pošao iz mesta A u mesto B, gde bi trebalo da stigne u određeno vreme. Ako bude išao brzinom od 35 km/h, zakasniće 2 sata. Ako bude išao brzinom od 50 km/h stići će sat ranije. Odrediti udaljenost od mesta A do mesta B.

○ **1776.** Od Zvornika do Jelava ima 38 km. Iz Zvornika u Jelav u 10 časova i 30 minuta pošao je jedan biciklista krećući se brzinom 8 km na čas. Sledećeg dana u 13 časova on je krenuo obrnutim smerom (iz Jelava u Zvornik) brzinom 10 km na čas. I prvog i drugog dana on je preko jednog mosta, koji se nalazi na tom putu, prešao u isto vreme. Odrediti vreme prelaska bicikliste preko tog mosta.

□ **1777.** Na kružnoj stazi dugoj 1650 m kreću se dva motociklista konstantnim brzinama. Ako se motociklisti kreću u suprotnim smerovima susreću se svakog minuta; ako se kreću u istom smeru, motociklista koji ima veću brzinu sustiže drugog svaki jedanaest minuta. Odrediti brzine motociklista.

○ **1778.** Na čelu kolone biciklističke trke nalaze se biciklisti Aca i Miša, vozeći jedan pored drugog. Oni su toliko odmakli ostalim učesnicima trke, da ih do cilja niko ne može stići. Na 20 km pred ciljem Aci pukne guma. Miša je nastavio da vozi do cilja prosečnom brzinom od 40 km/h. Aca je zbog popravke gume izgubio 3 minuta, a onda je do cilja vozio prosečnom brzinom od 45 km/h. Ko je pobedio u trci i sa koliko metara prednosti?

△ **1779.** Voz se kreće brzinom 60 km/h iz Podgorice za Bar. Zatvoren signal prisili mašinovođu da zaustavi voz na pruzi. Tu se voz zadržao 3 minuta. Zatim je nastavio vožnju brzinom 75 km/h i u Bar stigao tačno po redu vožnje. Koliko kilometra ispred Bara stoji pomenuti signal?

○ **1780.** Rastojanje između mesta A i B voz je prešao za 23 časa, i to: polovinu puta brzinom 80 km/h, trećinu puta brzinom 60 km/h, a ostatak puta brzinom 40 km/h. Odrediti rastojanje između mesta A i B.

□ **1781.** Voz je pošao iz Niša 15 minuta kasnije nego što je bilo predviđeno. Zato je povećao brzinu, za 20 % više od predviđene brzine, za vreme dok nije nadoknadio zakašnjenje. Za koje je vreme od polaska iz Niša voz nadoknadio zakašnjenje?

○ **1782.** Voz je prešao most dug 225 m, vozeći stalnom brzinom, za 27 sekundi (računajući vreme od nailaska lokomotive na most do silaska posljednjeg vagona sa mosta). Zatim je voz prošao pored jednog pešaka, koji se kretao suprotno smeru voza, za 9 sekundi. Za to vreme pešak je prešao 9 m. Odrediti dužinu voza u metrima i njegovu brzinu kretanja u kilometrima na sat.

□ **1783.** Dva voza istovremeno polaze iz mesta A i B u susret jedan drugom. Svaki od njih, čim stigne u suprotno mesto, odmah se vraća nazad. Prvo susretanje vozova dešava se na 50 km od mesta A, a drugo na 30 km od mesta B. Kolika je udaljenost između mesta A i B? (Pretpostavlja se da su brzine kojima se kreću vozovi stalne).

□ **1784.** Hidrobus putuje od Beograda do Kladova prosečnom brzinom 60 km/h. U povratku, uzvodno, kretao se prosečnom brzinom od 40 km/h. Kolika je prosečna brzina hidrobusa na celom putu: Beograd-Kladovo-Beograd?

□ **1785.** Dva voza kreću istovremeno jedan drugom u susret, sa stanica Beograd i Bar (udaljenih 600 km). Prvi stiže u Bar 3 časa ranije nego drugi u Beograd. Za isto vreme za koje prvi voz pređe 250 km, drugi pređe 200 km. Odrediti brzine oba voza.

○ **1786.** Jedan veštački satelit leti iznad ekvatora stalno na istoj visini[18)] i načini pun krug za 20 časova. Treba lansirati drugi satelit na visini za 20 km većoj od visine

[18)] Zamislićemo da je zemlja idealna lopta.

prvog, koji takođe načini pun krug iznad ekvatora za 20 časova. Za koliko (km/h) se razlikuju brzine ovih satelita?

○ **1787.** Lansirana su dva veštačka satelita u podne 25. februara 2003. godine, tako da lete iznad ekvatora, oba brzinom od 6280 km/h, ne menjajući visinu. Onaj koji je za 10 km bliži zemlji načini pun krug za 20 časova. Samo dva minuta posle lansiranja oni su ušli u orbite i u tom momentu su bili jedan ispod drugog. Kada će prvi put biti ponovo u istom međusobnom položaju? (Uzeti $\pi = 3,14$).

○ **1788.** Brzina televizijskog satelita podešena je da se uvek nalazi iznad iste tačke na ekvatoru. Odrediti brzinu televizijskog satelita, koji se kreće na visini od 11000 kilometara. (Poluprečnik zemlje je približno 6370 kilometara).

○ **1789.** Dva satelita se kreću na visini od 10000 km jednakom brzinom od 2000 metara u sekundi, i to jedan od istoka na zapad, a drugi od zapada na istok. Sateliti su se mimoišli iznad Afrike u 12 časova. U koje će vreme svaki od njih preći iznad dijametralno suprotne tačke na ekvatoru?

○ **1790.** Dva satelita se kreću ravnomernim brzinama oko zemlje, u istom smeru, 8030 km iznad zemlje. Dok prvi načini tri kruga, drugi dva puta obiđe zemlju. Oni se svakog dana sustižu tačno jedanput. Izračunati brzine ovih satelita. (Uzeti: $\pi = 3,14$).

12.4.5 Razni problemi

□ **1791.** Po dvama paralelnim kolosecima kreću se dve kompozicije brzih vozova jedna drugoj u susret. Dužina prve kompozicije je 117,75 m, a dužina druge 130,75 m. Mimoilaženje ovih kompozicija trajalo je $3\frac{7}{45}$ sekundi. Ako bi se kompozicije kretale u istom smeru, tada bi preticanje druge od strane prve trajalo 28,4 sekundi. Odrediti brzine u km/h svake od kompozicija.

○ **1792.** Tri seljaka, Zoran, Dušan i Nikola, došli su na vašar sa svojim ženama. Imena žena su: Iva, Irena i Maja. Utvrditi ko je s kim oženjen, ako je poznato sledeće: svako od ovih šest lica platilo je za svaku kupljenu stvar onoliko dinara koliko je stvari kupilo; svaki muškarac potrošio je 63 dinara više od svoje žene; osim toga Zoran je kupio 23 stvari više od Irene, a Dušan 11 više od Ive.

□ **1793.** Koje godine XX veka je rođena Nada ako je u 2003. godini navršila za 30 godina više nego što iznosi zbir cifara njene godine rođenja?

○ **1794.** Prednja guma motocikla istroši se posle pređenih 25000 km, a zadnja posle 15000 km. Posle koliko pređenih kilometara treba promeniti mesta gumama da bi se obe istovremeno istrošile? Posle koliko pređenih kilometara motociklista mora uzeti nove gume?

○ **1795.** Autobus je od mesta A do mesta B po redu vožnje išao prosečnom brzinom od 60 km/h, a u povratku od B do A išao je prosečnom brzinom od 30 km/h.

a) Ako bi se prosečna brzina autobusa povećala za 25 % onda bi putovanje u oba smera trajalo 4 sata i 48 minuta. Koliko je mesto B udaljeno od mesta A?

b) Po dolasku u mesto B po redu vožnje autobus je zbog uzimanja goriva izgubio 48 minuta. Za koliko procenata mora povećati prosečnu brzinu u povratku iz mesta B, da bi stigao u mesto A po redu vožnje?

□ **1796.** U toku rata dva bombardera na Afričkom frontu pođu jedan drugom u susret iz baza A i B, koje su udaljene jedna od druge 1845 km. Avion iz baze A kretao se brzinom 450 km/h, a drugi 370 km/h. U isto vreme, iz baze A je krenuo lovački patrolni avion, brzinom 800 km/h, sa zadatkom da kontroliše prostor između bombardera. On je svoj zadatak izvršavao tako, što je leteo od A ka B do susreta sa drugim bombarderom, zatim se okrenuo i leteo u suprotnom smeru do susreta sa prvim avionom, opet se okrenuo ka drugom avionu, i tako sve dok se bombarderi nisu susreli. Koliko je goriva potrošio patrolni avion, ako mu za 100 km leta treba 120 litara kerozina?

○ **1797.** Olja i Mladen se penju pokretnim stepenicama, koje se kreću nagore. Mladen se penje dva puta brže od Olje (brzinom dva puta većom). On je stao na 15 stepenica, a Olja na 10 stepenica. Koliko stepenica (vidljivih) ima to pokretno stepenište?

□ **1798.** Suzana je potrošila izvesnu sumu novca pri kupovini tašne, knjige i pera. Ako bi tašna bila 5 puta jeftinija, pero 2 puta jeftinije, a knjiga 2,5 puta jeftinija nego što je stvarna cena, tada bi kupovina stajala 160 dinara. Ako bi tašna bila jeftinija 2 puta, pero 4 puta, a knjiga 3 puta, onda bi za takvu kupovinu Suzana platila 240 dinara. Koliko je ukupno novca potrošila Suzana?

○ **1799.** Posuda je napunjena stopostotnim alkoholom. Odlijemo 2 litra alkohola i dolijemo isto toliko destilovane vode. Ovaj postupak ponovimo još jednom, tj. odlijemo 2 litra mešavine i dolijemo 2 litra destilovane vode. Na taj način u posudi dobijamo 36 procentni rastvor alkohola. Koliko litara rastvora sadrži ova posuda?

○ **1800.** U nepunoj posudi nalazi se 85-procentni rastvor alkohola. Ako posudu dopunimo do vrha 21-procentnim rastvorom alkohola, sve to dobro promešamo, odlijemo onoliko tečnosti koliko smo dolili, pa posudu opet dopunimo do vrha 21-procentnim rastvorom alkohola, dobićemo rastvor koji sadrži 70 % alkohola. Koliki deo posude je bio ispunjen pre dolivanja?

○ **1801.** Noca je menjao zečeve za kokoške. Za svaka 2 zeca dobio je 3 kokoške. Svaka kokoška je snela onoliko jaja koliko iznosi trećina broja kokoški. Jaja je prodao tako da je za svakih 9 jaja uzeo onoliko dinara koliko kokoška snese jaja. Koliko je bilo kokoški, a koliko zečeva, ako je za jaja naplaćeno 72000 dinara?

○ **1802.** Jednu livadu za 30 dana popasu 64 krave. Na istoj livadi bi 36 krava moglo pasti 60 dana.

a) Koliko krava popase livadu za 35 dana?

b) Koliko bi dana paslo 50 krava?

□ **1803.** Prvog januara 1988, u 12 časova dva sata su pokazivala tačno vreme. Svakog dana prvi napreduje 2 minuta, a drugi toliko zaostaje. Kada će ova dva sata opet pokazivati isto vreme (prvi put), a kada će opet pokazati tačno vreme?

□ **1804.** Kazaljke na satu se poklapaju u 12 časova. Kada će se ponovo poklopiti? Koliko puta će se poklopiti za 12 časova?

□ **1805.** Koliko će vremena proteći od 4 časa do prvog poklapanja kazaljki na satu?

□ **1806.** U 6 časova kazaljke su jedna naspram druge, tako da obrazuju jednu duž. Koliko puta u toku 12 časova i kada će kazaljke ponovo biti u takvom položaju (tj. da budu jedna naspram druge i da obrazuju jednu duž)?

○ **1807.** Dušan je krenuo u školu između 7 i 8 sati ujutro, i to u trenutku kada su se velika i mala kazaljka poklopile. Vratio se kući između 1 i 2 sata popodne u trenutku kad su kazaljke zatvarale opružen ugao. Koliko je vremena proteklo od polasla do povratka?

○ **1808.** Nekoliko minuta posle 12 časova Nemanja je počeo da radi domaći zadatak i u tom momentu je pogledao na sat. Kad je završio ponovo je pogledao na sat i utvrdio da su kazaljke međusobno zamenile mesta. Kada je Nemanja počeo, a kada završio izradu domaćeg zadatka?

○ **1809.** Koncert je počeo između 18 i 19 časova, a završio se između 21 i 22 časa. Odrediti koliko dugo je trajao koncert, ako su minutna i satna kazaljka za to vreme zamenile mesta.

□ **1810.** Koliko vremena protekne od momenta kada kazaljke obrazuju opružen ugao, do momenta kada one zamene mesta? U koje vreme se to događa?

TRINAESTA GLAVA

13. NEJEDNAČINE

13.1 LINEARNE NEJEDNAČINE S JEDNOM NEPOZNATOM

△ **1811.** Rešiti nejednačine :

a) $2x - 4 < 0$; b) $-3x + 9 > 0$; c) $\dfrac{x}{2} - 1 > \dfrac{2x}{3} + 5$;

d) $0 < \dfrac{x}{4} - 1 + \dfrac{7x}{2} - \dfrac{2x+3}{3}$; e) $\dfrac{3x-1}{4} - \dfrac{2x-2}{5} > 2$;

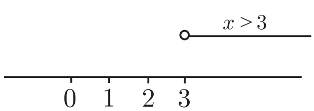
f) $\dfrac{5x-1}{4} - \dfrac{3x-13}{10} > \dfrac{5x+1}{3}$; g) $\dfrac{3x-1}{5} - \dfrac{x+1}{2} < 1 - \dfrac{x}{7}$;

h) $1 \leq \dfrac{2x+1}{5} - \dfrac{2-x}{3}$; i) $\dfrac{3x-1}{4} - \dfrac{3(x-2)}{8} - 1 \geq \dfrac{5-3x}{2}$;

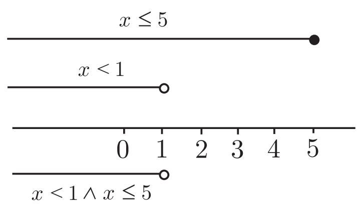
j) $\dfrac{3-2x}{5} + 8 \geq \dfrac{5x+2}{2} - x$; k) $1 + x - \dfrac{x-3}{4} \geq \dfrac{x+1}{4} - \dfrac{x-2}{3}$;

l) $\dfrac{1}{2}(3x-1) + \dfrac{x}{5} \leq 7x + 10,1$.

△ **1812.** Na sl. 57 je dat grafički prikaz rešenja nejednačine $x > 3$.



Sl. 57



Sl. 58

Rešiti sledeće nejednačine i njihove skupove rešenja prikazati grafički, kao što je prikazano na slici 57:

a) $x - 5 > 3x - 1$; b) $2x + 1 \geq -5x + 8$;

c) $\dfrac{x+1}{3} - \dfrac{2x+2}{6} - 2 > \dfrac{5x-1}{3} - 5$; d) $\dfrac{x}{6} + \dfrac{2x-1}{3} \leq \dfrac{x-1}{3} - \dfrac{x}{4} + 3$.

△ **1813.** Dokazati da sledeće nejednačine nemaju rešenja:

a) $3x > 5 + 3x$; b) $\frac{1}{3}x - \frac{x-2}{2} > \frac{x+2}{2} - \frac{2x-6}{3}$.

△ **1814.** Dokazati da je svaki realan broj x rešenje sledeće nejednačine:

a) $x < x + 1$; b) $\frac{x+4}{2} - \frac{x+6}{3} < 1 + \frac{2x+9}{3} - \frac{x+6}{2}$;

c) $(x-2)(x+3) + (x+4)^2 \geq 2x(x+4) + x$.

△ **1815.** Primer grafičke interpretacije rešenja konjunkcije, odnosno sistema nejednačina, dat je na prethodnoj strani, sl. 58, za slučaj $x < 1 \land x \leq 5$. Zajedničko rešenje prikazano je ispod brojne ose.

Rešiti i grafički prikazati rešenja sledećih sistema nejednačina:

a) $5x - 1 < 2x + 8 \land -2x + 1 < 2 - x$; b) $(x+1)^2 - (x-1)^2 \leq 6 \land x \geq -1$;

c) $\frac{-2x+4}{3} < x - 3 \land \frac{x+11}{2} < x$; d) $x + 1 \leq \frac{3}{2}x + \frac{1}{3} \land 4x - 2 > 5 - 5x$;

e) $3x - 6 < 0 \land -x + 1 > 2 \land 2x - 1 > -5$.

△ **1816.** Uverite se da je skup rešenja sistema nejednačina prazan u slučajevima:

a) $x < 1 \land x > 2$: b) $\frac{5(x+2)}{3} < \frac{5}{3} \land \frac{3(x+3)}{5} > 3$;

c) $\frac{3x+5}{15} + \frac{2x}{5} < -\frac{6x+10}{15} \land \frac{8x-9}{24} + \frac{2x}{3} > \frac{5}{8}$.

△ **1817.** Rešiti sisteme nejednačina:

a) $\frac{7-x}{2} - 3 < \frac{3+4x}{5} - 4$

$\frac{5}{3}x + 5(4-x) > 2(4-x)$

b) $0,4x + \frac{7}{3} < \frac{2}{3}x - 1,2$;

$5x + 17 > 9x - 63$

c) $3x - 2 > 6x + 7$

$5x + 3 < 6x - 10$

d) $\frac{5x}{4} - \frac{6x-1}{4} < \frac{4x+1}{12} - \frac{1}{6}$

$\frac{2x+1}{5} - \frac{2-x}{3} > 1$

e) $\frac{3}{4}x + \frac{7}{3} - \frac{x}{2} > \frac{8}{5} - \frac{x}{3} + \frac{613}{120}$

$\frac{3x-1}{5} - \frac{x+1}{2} < 1 - \frac{x}{7}$

□*f)* $2x - 3 < 3x - 4$

$x + 8 > 3x + 2$

$3x - 2 > x + 2$

$5x - 1 < 4x + 6$

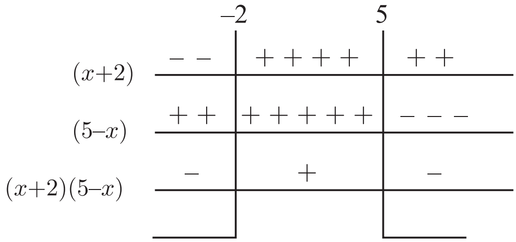
□ **1818.** U skupu celih brojeva rešiti sistem nejednačina:

$$\frac{x-1}{2} - \frac{2x+3}{3} + \frac{x}{6} < 2 - \frac{x+5}{2} \land 1 - \frac{x+5}{8} + \frac{4-x}{2} < 3x - \frac{x+1}{4}.$$

○ **1819.** Rešiti nejednačine:

a) $|x-1|>2$; b) $|2x-5|<1$; c) $|x-3|\leq 4$; d) $|2x-3|<x$;
e) $|x+2|>|x|$; f) $x-|x|>1$; g) $|x+3|-|x+1|<2$; h) $||x|-2|\leq 1$.

□ **1820.** Nejednačinu $(x+2)(5-x)<0$ možemo rešiti grafički koristeći se znakom izraza $(x+2)$, $(5-x)$ i njihovog proizvoda. Kako se to može učiniti vidimo na slici 59.



Rešenje je $x<-2$ ili $x>5$

Sl. 59

Slično rešiti sledeće nejednačine:

a) $(x-2)(x+3)>0$; b) $(5-x)(x-7)>0$; c) $(x+3)(x+8)<0$;
d) $(2x-1)(3x+5)<0$; e) $x^2-4<0$; f) $4x^2-25>0$;
g) $1-x^2<0$; h) $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{1}{9}>0$; i) $(x-1)(x-2)^2>0$.

○ **1821.** Rešiti nejednačine:

a) $x^2+2x+1>0$; b) $4x^2+4x+1<0$; c) $x^2+x<6$;
d) $x^2-2x+5<0$; e) $x^2-x+1>0$; f) $2x^2-3x+7<0$;
g) $3x^2-2x+5>0$; h) $x^2+2x>6x-15$; i) $x^3-5x^2+10x-12<0$.

□ **1822.** Koristeći se činjenicom da je znak količnika $\dfrac{A}{B}$, $B\neq 0$, jednak znaku proizvoda $A\cdot B$, rešiti sledeće nejednačine:

a) $\dfrac{x-2}{x+1}>0$; b) $\dfrac{2x-3}{3x-2}<0$; c) $\dfrac{4x+1}{5x-3}>0$; d) $\dfrac{x+1}{x}<0$;

e) $\dfrac{x}{x-2}>0$; f) $\dfrac{x-1}{x+1}>1$; g) $\dfrac{2-x}{x+2}<2$; h) $\dfrac{x+1}{2x-3}<\dfrac{2}{3}$;

i) $\dfrac{1-x}{2x+3}>1$; j) $\dfrac{7}{7x-5}-\dfrac{3}{3x-2}<0$; k) $\dfrac{1}{1+6x}<\dfrac{2}{4x-5}$;

l) $\dfrac{1}{2x-1}<\dfrac{2}{3x+1}$; m) $\dfrac{x+1}{x+2}>\dfrac{x}{x+1}$; n) $\dfrac{1}{1-x}>\dfrac{1}{1+x}$;

○o) $\dfrac{1}{2-x}+\dfrac{5}{2+x}<1$; ○p) $\dfrac{x^2-1}{x^2+x+1}<1$; ○q) $\dfrac{x-1}{x}-\dfrac{x+1}{x-1}<2$;

○r) $\frac{x}{x-1} - \frac{2}{x+1} - \frac{8}{x^2-1} < 0$; ○s) $\frac{x^2-3x+1}{x-3} > 0$;

○t) $\frac{x^2+2x-3}{x^2-2x+8} > 0$.

○ **1823.** Rešiti sisteme nejednačina:

a) $1 < \frac{3x+10}{x+7} < 2$; b) $1 < \frac{3x-1}{2x+1} < 2$; c) $-1 \leq \frac{2x}{x^2+1} \leq 1$.

□ **1824.** U skupu prirodnih brojeva rešiti nejednačinu:

$$\frac{x+3}{x^2-4} - \frac{1}{x+2} < \frac{2x}{2x-x^2}.$$

○ **1825.** Rešiti nejednačine:

a) $x^2 - |x| < 0$ b) $x^2 - 3|x| + 2 > 0$; c) $x|x| - 4x < 0$;

d) $|x^2 - x - 4| < 2$; e) $|x| > \frac{1}{x}$; f) $|x| < \frac{2}{x-1}$;

g) $|x+1| > 2|x+2|$; h) $x - 1 < |x^2 - 5x + 4|$; i) $|x^2 - 2x - 3| < 3x - 3$;

j) $\left|\frac{x+2}{x+1}\right| > 1$; k) $\left|\frac{4x}{4x^2+1}\right| < 1$; l) $\left|\frac{-6x}{x^2+9}\right| > 1$.

○ **1826.** Rešiti sledeće nejednačine, u zavisnosti od vrednosti realnog parametra a:

a) $ax + 5 > 0$: b) $a(x-1) > x - 2$; c) $\frac{x+1}{8a} < \frac{x}{2a} + \frac{1-x}{6}$, $a \neq 0$;

d) $a^2x + 1 > a^4 - x$; e) $(x-a)(x+a) < (x+1)(x-1) + x(a+1)$;

f) $\frac{ax}{a-2} - \frac{x-1}{3} < \frac{2x+3}{4}$, $a \neq 2$; g) $\frac{x}{a} + \frac{1-3x}{2} < \frac{x+2}{4a}$, $a \neq 0$;

h) $(x+a)^2 < (x-1)^2 + a^2 + 1$.

□ **1827.** Za koje vrednosti parametra b jednačina $\frac{2b+5}{3} = \frac{5bx+1}{4}$ ima negativno rešenje?

□ **1828.** Odrediti m tako da rešenje jednačine $\frac{3}{x} = \frac{2m-1}{x+m}$ bude veće od 1.

□ **1829.** Za koje su vrednosti m pozitivna rešenja sistema jednačina:

$$2x - 7y = m$$

$$3x + 5y = 13?$$

□ **1830.** Za koje su vrednosti parametra a negativna rešenja sistema jednačina

$$3x - 6y = 1$$

$$5x - ay = 2?$$

$*$ **1831.** Za koje celobrojne vrednosti parametra m sistem jednačina

$$a)\ \begin{aligned} mx - 2y &= 3 \\ 3x + my &= 4 \end{aligned} \qquad b)\ \begin{aligned} mx - y &= 5 \\ 2x + 3my &= 7 \end{aligned} \qquad c)\ \begin{aligned} ax - 4y &= a + 1 \\ 2x - 2ay &= -1 \end{aligned}$$

ima rešenje (x, y) za koje važi $x > 0$, $y < 0$?

□ **1832.** Za koje vrednosti p su nenegativna rešenja sistema jednačina

$$\text{a)}\ \begin{aligned} px + y &= 1 \\ 2x + y &= 2 \end{aligned} \qquad \text{b)}\ \begin{aligned} px + 3y &= -p \\ 3x + py &= 8 \end{aligned}\ ?$$

□ **1833.** Odrediti vrednosti parametra k, tako da rešenja sistema jednačina:

$$\text{a)}\ \begin{aligned} (k+6)x - 3y &= k + 6 \\ (k+2)x + (k-1)y &= -6 \end{aligned} \qquad \text{b)}\ \begin{aligned} x - y &= 3k \\ 5x + y &= 9 \end{aligned}$$

zadovoljavaju uslov: $x > -\dfrac{1}{k}$, $y > 0$.

○ **1834.** Za koje vrednosti m sistem jednačina

$$\begin{aligned} (m+1)x - my &= 4 \\ 3x - 5y &= m \end{aligned}$$

ima rešenje (x, y), takvo da je $x - y < 2$?

$*$ **1835.** Marina, Nada i Persa imaju po jednu ili više novčanica od 1 eura. Marina ima najmanje novca, samo 1 euro, za koji je kupila 2 banane. Nada i Persa su odlučile da kupe banane za sav novac koji imaju. Nada je kupila 6, a Persa 11 banana. Da su sastavile novac Nada i Persa ne bi mogle da kupe 18 banana. Koliko staje jedna banana, ako je njena cena ceo broj centi (stotih delova eura)?

13.2 LINEARNE NEJEDNAČINE S DVE NEPOZNATE

△ **1836.** Prikazati u ravni xOy skup tačaka (x, y), takvih da je:

a) $x < -1$; b) $y < 0$; c) $y > 3$; d) $x^2 > 1$;

e) $y^2 < 4$; f) $|x| > 1$; g) $|x| < 2$; h) $|y| > -1$;

i) $|y| < 2$; j) $|y| < -3$; k) $|x| > 2 \wedge |x| < 3$; l) $|x| < 1 \wedge |y| < 2$.

□ **1837.** Rešiti nejednačine (rešenja prikazati u ravni xOy):

a) $x + y + 2 > 0$; b) $2y - 4x - 5 > 0$; c) $2x - y + 3 > 0$;

d) $|x| + |y| < 1$; e) $|x + y| < 1$; f) $y^2 - x^2 < 0$; g) $x^2 - y^2 + 2y - 1 < 0$.

□ **1838.** Rešiti sisteme nejednačina:

$$a)\ \begin{aligned} y - x - 1 &< 0 \\ 3x + y - 6 &> 0 \end{aligned} \qquad b)\ \begin{aligned} 2x + y - 2 &> 0 \\ x - 2y + 2 &< 0 \end{aligned} \qquad c)\ \begin{aligned} 2x + y - 4 &> 0 \\ 3x - y - 1 &> 0 \end{aligned}$$

□ **1839.** Rešiti sisteme nejednačina:

a) $x > 0$, $y > 0$, $x + y < 1$

b) $x > 0$, $y > 0$, $x - y + 1 > 0$, $x - y - 1 < 0$, $x + y - 4 < 0$

c) $x > 0$, $y > 0$, $x^2 < 1$, $y^2 < 4$

○ **1840.** Odrediti skup tačaka u ravni xOy, tako da važi:

a) $x + y = 1$, $y - 2x - 1 > 0$

b) $x^2 - 4y^2 = 0$, $x - y + 1 > 0$

c) $y + 7 > 0$, $2x - y + 4 < 0$, $x - y + 1 = 0$

d) $x > 2$, $y < 2$, $y = x - 4$

ČETRNAESTA GLAVA

14. REŠENJA ZADATAKA

1. Tačan je samo iskaz d). **2.** Jesu za formule: a), b), c).

3. a) 1 i 2, b) Formula ima beskonačno mnogo rešenja: $2, 5, 8, \ldots,$ c) Nema rešenja, d) $1, 2, 3, 6,$ e) Rešenja formule izrazićemo u vidu uređene dvojke (x, y): $(1, 6)$, $(2, 5)$, $(3, 4)$, $(4, 3)$, $(5, 2)$, $(6, 1)$, f) $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(2, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 1)$, g) $(1, 1)$, h) Nema rešenja, i) $(1, 1)$, j) 4, k) $(1, 1)$, $(2, 1)$.

4. a) 1, b) -1, c) 0. **5.** a) $\top$; b) $\top \wedge \bot = \bot$.

6. a) $x = 3$ ili $x = 4$; b) $x = 8$; c) $x = 1$ ili $x = 3$; d) Nema rešenja; e) $x = 1$, $y = 6$ ili $x = 2$, $y = 5$; f) $x = 1$¡ $y = -3$ ili $x = 2$, $y = -4$ ili $x - 3$, $y = -5$; g) $x = 1$, $y = 2$.

7. a) $\top$; b) $\bot$; c) $\top$. **8.** a) $\top$; b) $\top$; c) $\bot$; d) $\top$.

9. Samo je a) netačno, a ostale formule su tačne.

10. a) $\top$; b) $\top$; c) $\top$; d) Nema rešenja; e) $\bot$; f) $\top$; g) $\top$; h) $\top$ ili $\bot$; i) $\top$; j) nema rešenja.

11. 1) odgovara c), 2) odgovara a), 3) odgovara b) i 4) odgovara d).

12. a) $\top$, b) $\bot$, c) $\top$, d) $\top$, e) $\bot$, f) $\bot$, g) $\bot$, h) $\top$, i) $\bot$, j) $\top$.

13. Npr. a): Tvrđenje sledi iz $\top \vee \top = \top$ i $\top \vee \bot = \top$, jer $p \in \{\top, \bot\}$.

14. a) $\neg p \vee q$, b) $\neg(p \vee q)$, c) $p \vee \neg q$, d) $\neg p \vee \neg q$, e) $\neg p \wedge \neg q$, f) $\neg(p \wedge q)$, g) $\neg(p \vee q) \wedge (\neg p \vee q)$.

15. Pravilno su napisane negacije u slučajevima; b), c), d), f), g), h).

16. a) $\top$; b) $\bot$; c) $\top$; d) $\top$; e) $\bot$.

17. *Uputstvo*: Uporedi istinitosne tablice odgovarajućih formula.

18. $\bot$, $\top$, $\bot$, $\top$, $\top$, $\top$. **19.** Npr. a) Za $x = 1$ je $\top$; za $x = 2$ i $x = 3$ i $z = 3$ je $\bot$.

20. a)

p	$p \Rightarrow \neg p$
$\top$	$\bot$
$\bot$	$\top$

b)

p	q	$p \vee q$	$(p \vee q) \Rightarrow p$
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$

21. a) i b) su tačni, a c) i d) netačni iskazi. **22.** Vidi **zadatak 13.** **23.** $\top$, $\bot$, $\top$, $\bot$.

24. Datoj imlipkaciji odgovaraju rečenice: a), c) , d), f).

25. Dovoljan uslov je: a), b), d), e), f). Formula c) je potreban uslov.

26. Potreban b) i g); dovoljan a), c) i e); potreban i dovoljan d) i f).

27. b) i c). **28.** Tautologije su formule a), b), e) f), g). **29.** Slično **zadatku 20**.

30. a) Prema De Morganovoj formuli za negaciju disjunkcije dobija se

$$\neg(\neg p \vee q) \iff \neg(\neg p) \wedge \neg q \iff p \wedge \neg q.$$

b) Primenimo na levu stranu ekvivalencije De Morganovu formulu za konjunkciju:

$$\neg(\neg p \wedge q) \Longleftrightarrow \neg(\neg p) \vee \neg q \Longleftrightarrow p \vee \neg q.$$

31. a) $\neg(2 = 2 \vee 2 \neq 2) \Longleftrightarrow \neg(2 = 2) \wedge \neg(2 \neq 2) \Longleftrightarrow 2 \neq 2 \wedge 2 = 2$,

b) $2 \leq 0 \wedge \neg(3|6)$; c) $2 \notin \{1, 2\} \wedge 3 \notin \{1, 2\}$; d) $3 \neq 3 \vee 4 \neq 4$; e) $-2 \geq 1 \vee -1 \geq 0$;

f) $2 \notin \{1, 2\} \vee 1 \notin \{1, 2\}$; g) $2 \notin N \vee -3 \notin Z$; h) $\neg(2|4) \vee \neg(4|8)$; i) $2 \geq 3 \wedge \neg(3|6)$.

33. Slično prethodnom zadatku. **34.** Načini tablice istinitosnih vrednosti.

35. a) Pretpostavimo da $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg p \vee q)$ nije tautologija, odnosno, da za neke vrednosti svojih slova ima vrednost $\perp$. Na osnovu istinitosne tablice implikacije, to je moguće jedino u slučaju $\tau(p \Rightarrow q) = \top$, i $\tau(\neg p \vee q) = \perp$. Tada bi na osnovu tablice disjunkcije zbog $\tau(\neg p \vee q) = \perp$, bilo $\tau(\neg p) = \perp$ i $\tau(q) = \perp$, tj. $\tau(p) = \top$ i $\tau(q) = \perp$. Tada bi bilo $\tau(p \Rightarrow q) = \perp$, a to je protivrečno pretpostavci da $\tau(p \Rightarrow q) = \top$. Dakle, formula ne može imati vrednost $\perp$, pa je tautologija.

b) Pretpostavimo da $(\neg p \vee q) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$ nije tautologija, odnosno da za neke vrednosti svojih slova ima vrednost $\perp$. Tada bi, slično kao u zadatku a) bilo: $\tau(\neg p \vee q) = \top$ i $\tau(p \Rightarrow q) = \perp$. Iz druge jednakosti dalje sledi $\tau(p) = \top$, $\tau(q) = \perp$, pa je tada $\tau(\neg p) = \perp$, pa se dobija $\tau(\neg p \vee q) = \perp$, što protivreči pretpostavci da $\tau(\neg p \vee \tau q) = \top$. Formula ne može imati vrednost $\perp$, pa je tautologija.

Slično se postupa u ostalim slučajevima. Formule e) i f) nisu tautologije.

36. $(p \vee q) \Longleftrightarrow (\neg p \Rightarrow q)$; $(p \Longleftrightarrow q) \Longleftrightarrow \neg((p \Rightarrow q) \Rightarrow \neg(q \Rightarrow p))$. Osnovne logičke operacije se mogu izraziti pomoću disjunkcije i negacije. Na primer: $(p \wedge q) \Longleftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q)$, zatim $(p \Rightarrow q) \Longleftrightarrow (\neg p \vee q)$ i sl.

37. a) i b) $(\exists x \in N)x < 5$; c) $(\forall x \in Q)x \in R$; d) $(\forall x \in R)(x > 0 \vee x < 0 \vee x = 0)$;

e) $(\forall x \in R)\ x \cdot 1 = x$; f) $(\forall x \in Z)\ (x \in 2Z \vee x \in 2Z + 1)$; g) $(\exists x \in N)\ x \in 2N$;

h) $(\forall x \in N)\ x \in Z$; i) $(\exists x \in N)\ 2x - 4 = 0$; j) $(\forall x \in R)\ 0 \cdot x = 0$; k) $(\forall x \in Z)\ x \in Q$;

l) $(\exists x \in N)\ x|6$; m) $(\forall x)\ (x \in 2Z \Rightarrow x \in Z)$; n) $(\forall x \in N)\ x > 0$;

o) $(\exists x \in N)\ x > 1000$; p) $(\exists x)\ (x \in 2N \wedge x = 10)$.

38. a) $(\forall x \in N)(\forall y \in N)x + y \in N$; b) $(\forall x \in Z)(\forall y \in Z)x \cdot y \in Z$;
c) $(\forall x \in R)(\forall y \in R)x + y = y + z$; d) $(\forall x \in N)(\exists y \in N)y > x$;
e) $(\forall x \in Z)(\exists_1 y \in Z)x + y = 5$; f) $(\forall x \in Z)(\exists y \in Z)(\exists z \in Z)(y < x \wedge z > x)$;
g) $(\forall x \in N)(\forall y \in N)(\exists_1 z \in N)x + y = z$.

39. a) Postoji prirodan broj x koji je jednak 1. b) Postoji prirodan broj x koji je veći od 5. c) Postoji prirodan broj x koji je: jednak 1 ili veći od 5. d) Svaki je broj x jednak 0 ili je različit od 0, e) Svaki ceo broj je racionalan broj. f) Postoji ceo broj koji nije prirodan broj.

40. Sve formule su tačne.

42. Aca čita "Novosti", Miša "Sport", a Rajko "Politiku". **43.** Zoran.

44. Ubica je Buca, malo poznati građanin. Cenjeni deda je Riza, a poznati siledžija je Denis.

46. Pobedio je Novica Simić, jer Muja nije prvi, a Cane nije Simić. Drugi je Muja Jerotić, a treći Cane Ćamilović.

47. U Beogradu. **48.** Lela je učenik I_2. Nada i Vlada su iz I_1, a Cana i Ljilja iz I_3.

51. Milena uči ruski, likovna sekcija, Dragica nemački, dramska sekcija, Rajko francuski, muzička sekcija, Ješo je sportista, uči engleski.

52. Voja je fizičar iz Niša, Ljuba geograf iz Valjeva, Živko matematičar iz Loznice, Zvonko hemičar iz Bora.

54. Slično **zadatku 53**. **55.** Lice A uvek govori istinu.

56. Ako bismo znali ko je P, tada bismo lako odredili ko je I od preostale dvojice. (Na primer, postavili bismo pitanje: "*Da li je* $1 + 1 = 2$?" Ako bi upitani bio L, on bi odgovorio "Ne".) Dakle, treba sa dva pitanja saznati ko je P.

Prvo ćemo licu A postaviti pitanje: "*Šta bi mi ti odgovorio ako bih te pitao da li je lice B baš P*?" Podrazumeva se da su A i B tačno određena dva lica između tri prisutna. Pretpostavimo da dobijemo odgovor "Da". Tada postoje dve mogućnosti:1) Lice B je P, pa je lice A (L ili I) odgovorilo "Da". 2) Lice A je P pa pošto nekad laže, a nekad govori istinu, odgovorio je "Da". U svakom slučaju sigurno je da lice C nije P. Na isti način iz odgovora "Ne" zaključujemo da B ne može biti P.

Drugo pitanje glasi: "*Šta bi mi ti odgovorio ako bih te pitao da li je lice A baš P?*". Ako je odgovor na prvo pitanje bio "Da", pitanje se postavlja licu C, a ako je odgovor bio "Ne", pitanje se postavlja licu B. Ako je odgovor na drugo pitanje "Da", onda je P lice A, a ako je odgovor "Ne", onda je P lice koje nije odgovaralo na pitanje (ali ne A).

58. Šahović je prvi, Matanović drugi, Matulović treći.

59. Uslov 1) zapisujemo: $M \Rightarrow V = 1$. Zamenom implikacije preko disjunkcije, ovaj uslov dobija oblik: $\overline{M}+V = 1$. Ostali uslovi su: 2) $N+J = 1$, 3) $V \cdot \overline{Vl}+\overline{V} \cdot Vl = 1$, 4) $N \cdot Vl+\overline{N} \cdot \overline{Vl} = 1$, 5) $J \Rightarrow M \cdot N = 1$. Poslednji uslov zamenićemo sa: $\overline{J} + M \cdot N = 1$. Sada formiramo konjunkcije svih ovih iskaza i dobijamo posle sređivanja konjunkciju: $\overline{M} \cdot \overline{V} \cdot N \cdot Vl \cdot \overline{J} = 1$. Dakle, šah igraju samo Nada i Vlada.

60. Irenina izjava je: $A \Rightarrow \overline{R} \cdot \overline{I} = 1$, gde A označava da Anita ide u pozorište ($\overline{A}$ bi značilo: Anita ne ide u pozorište", tj. "Anita ide u bioskop") i slično. Pošto je Irena slagala, a implikacija je netačna samo u slučaju $\top \Rightarrow \bot$, sledi da je $\tau(A) = \top$ i $\tau(\overline{R} \cdot \overline{I}) = \bot$ ili u oznakama iskazne algebra: $A = 1$ i $\overline{R} \cdot \overline{I} = 0$. Sada, postupajući kao u prethodnim zadacima, dobijamo: $R \cdot M \cdot A \cdot \overline{I} = 1$, gde M označava da Ramiz (muž) ide u pozorište. Dakle, samo je Irena otišla u bioskop.

61. a) $\{3, 4\}$; b) $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$; c) $\{1, 2, 4\}$; d) $\{-4, 2, -10, 8\}$; e) $\{20\}$; f) $\emptyset$.

62. Tačna su tvrđenja a), c), f), g). **63.** a) $=$. b) $\subset$. c) $=$. d) $=$.

64. a) $2, 3, 4, 7$; b) $2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$; c) Rešenja su svi elementi skupa S.

65. a) $1, 2, 3, 4$; b) 2; c) 5; d) $2, 5, 6$; e) Rešenje je skup $x = \{1, 5\}$;
f) $(2, 2)$, $(2, 5)$, $(5, 2)$, $(5, 5)$, $(2, 10)$, $(10, 2)$, $(5, 10)$, $(10, 5)$, $(10, 10)$; g) $(3, 4)$, $(4, 3)$.

66. a) $x = 2, y = 1$; b) $x = 1, y = 3$; c) $x = 6, y = 3$; d) $x = 3, y = 6$; e) $x \neq 0 \wedge x = y$.

67. a) $\{a, e\}$; b), c) i d) $\emptyset$; e) $\{2, 4\}$; f) $\{2, 3\}$; g) $\{-2\}$; h) $A \cap B = \{x|\ 6|x\}$.

68. Rešenja su: $\{2, 3\}$, $\{2, 3, 4\}$, $\{2, 3, 5\}$, $\{2, 3, 4, 5\}$. **69.** Ne važi ni jedna od jednakosti.

70. a) $A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 6\}$. b) $A \cap C = A$. c) $(A \cup B) \cap C = A \cup B$ itd.

71. a) i c) $\emptyset$; b) $\{-2, -1, 0\}$; d) i e) $\{-2\}$.

72. $C_B(A) = \{8, 24\}$, $C_B(C) = \{4, 8, 12, 24\}$, $C_B(D) = \{1, 6, 8, 12, 24\}$.

73. $A \backslash B = \{a, b, c\}$, $B \backslash A = \{f\}$, $C \backslash (A \cup B) = \{g, h, \}$, $C_c(A) = \{f, g, h\}$,
$C_c(A \cap B) = \{a, b, c, f, g, h\}$ itd.

74. 1) a) $\{x|\ x \in A \wedge x \in B \wedge x \in C\}$; b) $\{x|\ x \in A \wedge x \in B \wedge x \notin C\}$;
c) $\{x|\ x \in A \vee x \in B \wedge x \notin C\}$; d) $\{x|\ x \in C \wedge x \notin A \wedge x \notin B\}$; e) $\{x|\ x \in B \wedge x \notin A \wedge x \notin C\}$;
2) a) $A \cap B \cap C$; b) $(A \cap B) \backslash C$; c) $(A \cup B) \backslash C$; d) $C \backslash (A \cup B)$; e) $B \backslash (A \cup C)$.

75. a) Skupu $(A \cup B) \backslash C$ odgovara zapis: $(D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4 \cup D_5 \cup D_6) \backslash (D_4 \cup D_5 \cup D_6 \cup D_7)$, odnosno: $D_1 \cup D_2 \cup D_3$. Skupu $(A \backslash C) \cup (B \backslash C)$ odgovara zapis: $(D_1 \cup D_2) \cup (D_2 \cup D_3)$, odnosno $D_1 \cup D_2 \cup D_3$. Slično se postupa i u ostalim slučajevima.

76. a) 1) 2; 2) 3; 3) 5; 4) 8; 5) 12; 6) 10; b) 1) 8 i 9; 2) 10 i 14; 3) 17 i 14.

77. Skup X je podskup skupa A. On sadrži zajedničke elemente sva tri data skupa i elemente skupa A koji se ne nalaze u skupovima B i C. Dakle: $X = \{1, 3, 18\}$.

80. Tačne su formule b), d), f), g), i).

81. *Uputstvo*: Treba nacrtati dijagrame skupova brojeva koji su deljivi sa 4, koji su deljivi sa 6 i koji su deljivi sa 10. (Imati na umu da se ovi skupovi seku. Npr. skup deljivih sa 4 seče skup deljivih sa 6 po skupu deljivih sa 12, jer je NZS $(4, 6) = 12$.). Na tabli je ostalo 634 broja.

82. Smeđe oči i smeđu kosu ima najmanje $(14 + 15) - 20 = 9$ učenika itd.

83. a) 56; b) 15; c) 44. **84.** a) 5 % b) 45 %.

85. Označimo sa S_{alg}, S_{an}, S_{geo}, S_{log} skupove matematičara koji se bave redom, algebrom, analizom, geometrijom i logikom. Prema uslovima zadatka: $(S_{alg} \cup S_{log}) \subset S_{an}$, $S_{geo} \subset S_{log}$, $(S_{an} \cap S_{geo}) \subset S_{alg}$. Drugi uslov može da se napiše i ovako $S_{geo} \cup S_{log} = S_{log}$. Ako to zamenimo u prvi uslov, dobijemo: $(S_{alg} \cup S_{geo} \cup S_{log}) \subset S_{an}$, tj. najviše matematičara se bavi analizom. Iz prethodnog zaključka sledi specijalno $S_{geo} \subset S_{an}$ ili $S_{an} \cap S_{geo} = S_{geo}$, te treći uslov postaje $S_{geo} \subset S_{alg}$, što nam sa drugim uslovom i pomenutom činjenicom $S_{geo} \subset S_{an}$ kazuje da se najmanje matematičara bavi geometrijom.

86. Na primer $P(N) = \{\varnothing\}$.

87. 1) Na primer: c) $A \times B = \{(a,2),(a,3),(b,2),(b,3)\}$, $A \times B \neq B \times A$, ako su A i B bilo koji skupovi. 2) Na primer a) $A^2 = A \times A = \{(1,1)\}$.

88. a) $2 < 3$ ili $2 \neq 3$. b) $2 = 2$ ili $2|2$ itd.

89. 2) a) $1,3,5$; b) $1,3,5$; c) $2,4,6$; d) $2,4,6$.

90. 1) a) $\top$; b) $\perp$; c) $\perp$; d) $\top$; e) $\perp$. 2) a) $2,4,6,8$; b) 2; c) $2,4$; d) 8.

91. Uobičajeno je da sa R označavamo refleksivnost, sa S simetričnost, sa AS antisimetričnost i sa T tranzitivnost relacija. Navedene relacije imaju redom ova svojstva:

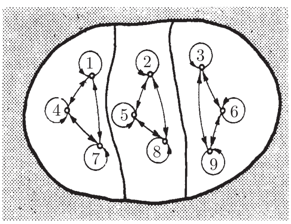
a) R, S, T; b) T; c) T; d) S; e) R, AS, T; f) R, AS, T; g) R, AS, T.

Relacija ekvivalencije je relacija pod a), a relacije poretka su e), f), g).

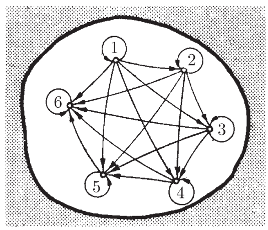
92. Ovo nije relacija ekvivalencije ranije refleksivna, tj. $\neg(\forall x \in A)\ x\rho x$. Recimo: $\neg(1\ \rho\ 1)$.

93. a) Videti sl. 60; b) Uverimo se da ima osobine R, S, T.

c) Klase ekvivalencije skupa A u odnosu na relaciju ρ su $\{1,4,7\}$, $\{2,5,8\}$, $\{3,6,9\}$.



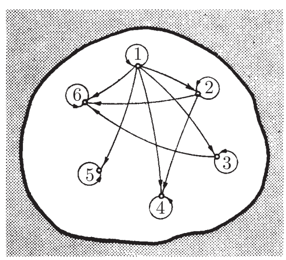
Sl. 60



Sl. 61

94. a) Prema definiciji relacije $\leq$, tačna je ova formula: $x \leq x \iff x < x \vee x = x$. Međutim, desna strana ekvivalencije je tačna za svako x, jer je tačna formula $x = x$ za svako x, pa je tačna i disjunkcija $x < x \vee x = x$. Prema tome, tačno je i: $x \leq x$. Dakle, tačna je: $x\rho x$, pa je relacija *refleksivna*. Lako se dokazuje formula $x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$, tj. relacija je *antisimetrična*. Relacija je *tranzitivna*, jer iz $x \leq y \wedge y \leq z$, (sabiranjem nejednakosti) dobija se $x + y \leq y + z$, odnosno $x \leq z$. b) Rešenje je na priloženoj slici 61. c) Priložena je tablica dole levo.

ρ	1	2	3	4	5	6
1	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
2	$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
3	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
4	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$
3	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\top$
6	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\top$



Sl. 62

ρ	1	2	3	4	5	6
1	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
2	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\top$
3	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\top$
4	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\perp$
5	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\perp$
6	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\top$

95. a) Relacija je *refleksivna* jer se svaki broj sadrži u samom sebi $(x|x)$. Iz pretpostavke $x|y$ i $y|x$, sledi $y = kx$ i $x = ly$ za neke l, k iz N. No, tada je $y = kly$, tj. $k \cdot l = 1$, odakle sledi $k = 1$, $l = 1$ ili $k = -1$, $l = -1$, a to znači $x = y$. Prema tome, relacija je *antisimetrična*. Iz pretpostavke $x|y$ i $y|z$, sledi $y = kx$ i $z = ly$, za neke k i l iz Z. Tada je $z = klx$, što znači $x|z$. Dakle, relacija je *tranzitivna*. Pošto relacija ima svojstva R, AS, T, ona je *relacija poretka*. b) Graf je prikazan na sl. 62

c) Tablica je data gore.

d) Relacija nije antisimetrična na skupu Z, jer, na primer: $2|(-2)$ i $-2|2$, ali $2 \neq -2$.

96. a) *Refleksivnost*: $(x,y)\rho(x,y)$, jer je $x + y = x + y$. *Simetričnost*: $(x,y)\ \rho\ (x_1,y_1) \Rightarrow (x_1,y_1)\rho(x,y)$. Ovo je tačno jer važi: $x+y_1 = x_1+y \Rightarrow x_1+y = x+y_1$ (samo su leva i desna strana jednakosti zamenile mesta). *Tranzitivnost*: $(x,y)\rho(x_1,y_1) \wedge (x_1,y_1)\rho(x_2,y_2) \Rightarrow (x,y)\rho(x_2,y_2)$, ili: $x + y_1 = x_1 + y \wedge x_1 + y_2 = x_2 + y_1 \Rightarrow x + y_2 = x_2 + y$. Zaista, ako saberemo prve dve jednakosti dobićemo: $x + y_1 + x_1 + y_2 = x_1 + y + x_2 + y_1$, a odavde je $x + y_2 = x_2 + y$. Slično postupamo u slučaju b).

97. a) $f(1) = a$, $f(2) = b$, $f(3) = c$, $f(4) = d$, $f(5) = a$, $f(6) = b$;

b) $f(x) = a \Rightarrow x \in \{1,5\}$, $f(x) = b \Rightarrow x \in \{2,6\}$, $f(x) = c \Rightarrow x = 3$ itd.

98. a) $f(a) = d$, itd. $f(f(d)) = f(c) = b$, jer je $f(d) = c$; b) b, d, c.

99. 1) a) $f(a) = 1$; b) $f(b) = 1$; c) $f(c) = 2$ itd. 2) a) a, b; b) c; c) d, e;

d) Nema rešenja u skupu A.

100. a) $\begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} a\,b \\ a\,a \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a\,b \\ a\,b \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a\,b \\ b\,a \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a\,b \\ b\,b \end{pmatrix}$.

101. 1) a) 0; b) Sve su tačke nepokretne. Preslikavanje $f(x) = x$ je identično (jedinično) preslikavanje. c) -1; d) Nema nepokretnih tačaka, jer ne postoji x za koje je tačna formula x+1 $= x$.

2) a) a, b, c; b) a, b, c, d, e; c) Nema nepokretnih tačaka.

3) a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & a & b \\ 1 & 2 & a & b \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & a & b \\ 1 & b & a & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & a & b \\ 1 & a & a & 2 \end{pmatrix}$ i sl.

c) Na primer: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & a & b \\ a & 1 & 2 & b \end{pmatrix}$; d) Na primer $\begin{pmatrix} 1 & 2 & a & b \\ 2 & a & b & 1 \end{pmatrix}$ i sl.

102. a) 24; b) 1; c) 2; d) 720; e) 24.

103. a) $f^2 = \begin{pmatrix} p & q & r \\ q & r & p \end{pmatrix}$; b) $f^3 = \begin{pmatrix} p & q & r \\ p & q & r \end{pmatrix}$, tj. f^3 je identično preslikavanje.

c) $f^4 = \begin{pmatrix} p & q & r \\ r & p & q \end{pmatrix}$, tj. $f^4 = f$, (jer je $f^4 = f^3 \circ f$, a $f^3 = I$ – identično preslikavanje);

d) $f^5 = \begin{pmatrix} p & q & r \\ q & r & p \end{pmatrix}$, tj. $f^5 = f^2$; e) $f^6 = \begin{pmatrix} p & q & r \\ p & q & r \end{pmatrix}$, tj. $f^6 = I$.

Uopšte, primećujemo da postoji pravilnost kojom se f^n (n iz N) svodi na f, f^2 ili I. Ta pravilnost određena je formulama: $f^{3k+1} = f$, $f^{3k+2} = f^2$, $f^{3k} = I$, gde je $k = 0, 1, 2, \ldots$

104. a) x je $3k$, gde je $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$; b) x je $3k + 1$, $k = 0, 1, 2, \ldots$; c) x je $3k + 2$, gde je $k = 0, 1, 2, \ldots$.

105. a) Prema definiciji je $f \circ g = f(g(x))$, pa je u datom slučaju $f(g(x)) = x + 1$; b) $f(g(x)) = x + 1$; c) $f(g(x)) = (x + 1) + 1$, odnosno $f(g(x)) = x + 2$; d) $f(g(x)) = x + 2$.

106. $f^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ p & q & r & s \end{pmatrix}$, $g^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ q & p & r & s \end{pmatrix}$, $h^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ q & r & p & s \end{pmatrix}$.

107. a) $f^{-1}(f(x)) = x$, tj. $f^{-1}(2x-1) = x$. Stavimo da je $2x-1=t$, odakle je $x = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}$. Dobijamo: $f^{-1}(t) = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}$, odnosno $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$. Tada je $f \circ f^{-1} = 2 \cdot \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\right) - 1$, tj. $f \circ f^{-1} = x$, a $f^{-1} \circ f = \frac{1}{2}(2x-1) + \frac{1}{2}$, odnosno $f^{-1} \circ f = x$. Slično se postupa i u ostalim zadacima. Dobijamo: b) $f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$, c) $f^{-1}(x) = 2x$, d) $f^{-1}(x) = -\frac{4}{3}x + \frac{4}{3}$.

108. Postupamo kao u zadatku 107. Rešenja su: a) $f(x) = \frac{3x}{2} - \frac{7}{2}$; b) $f(x) = x - 3$; c) $f(x) = \frac{2x}{3} + \frac{7}{3}$; d) $f(x) = \frac{x}{16} + \frac{17}{16}$; e) $f(x) = \frac{x}{4}$; f) $f(x) = x + 3$.

109. 1) a) $p * n = n$; b) $n \circ n = n$; c) $(p * p) \circ (n * p) = p \circ n$, a $p \circ n = p$, pa je $(p * p) \circ (n * p) = p$, d) $p \circ (p * (n \circ (p * p))) = p$.

2) a) x je n, jer je $p * n = n$, b) Rešavanje jednačine $(p * x) * n = p$, svodi se na rešavanje jednačine $p * x = n$, jer je $n * n = p$. Rešavanjem $p * x = n$ dobija se za promenljivu x vrednost n, c) n, d) Rešavanje jednačine $(p * x) \circ (n * x) = n$ svodi se na rešavanje ove dve jednačine: $p * x = n$, $n * x = n$, jer je tačna formula $n \circ n = n$. Jednačina $p * x = n$ ima rešenje n, a jednačina $n * x = n$ ima rešenje p, a kako je nemoguće da u jednoj jednačini ista nepoznata ima dve različite vrednosti, to ova jednačina nema rešenja u skupu $\{p, n\}$.

110. Operacija $*$ je komutativna jer su tačne ove jednakosti: $a * b = b * a$, $a * c = c * a$, $b * c = c * b$.

a) c, b) c, c) b, d) a, b, c, e) Stavljajući redom za x vrednosti a, b, c, nalazimo da formula $a * x = x * b$ ne može da bude tačna, znači, jednačina nema rešenja u skupu $\{a, b, c\}$, f) Rešavanje jednačine $(x * x) * a = b$ svodi se na rešavanje jednačine $x * x = c$, jer je $c * a = b$. Rešenje jednačine $x * x = c$ je a, g) Jednačina nema rešenja. Do ovog zaključka dolazimo ispitujući istinitosnu vrednost formule $a * x = x$ za razne vrednosti promenljive x iz skupa $\{a, b, c\}$.

111. a)

$*$	1	2	3	4	6	9
1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	1	2	2	1
3	1	1	3	1	3	3
4	1	2	1	4	2	1
6	1	2	3	2	6	3
9	1	1	3	1	3	9

b) Skup S je zatvoren u odnosu na operaciju $*$, jer, kako se vidi iz tablice $x*y$ je iz S, za svaki par brojeva x, y iz S.

c) Operacija $*$ je komutativna jer je očigledno tačna formula $NZD\ (x, y) = NZD(y, x)$, što se može proveriti i u tablici. Npr. $3*2 = 1$, $2*3 = 1$; $4*6 = 2$, $6 * 4 = 2$ itd.

112. Komutativne su operacije c) i e).

113. a)

$*$	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	2	3	4	5	6
3	3	3	3	4	5	6
4	4	4	4	4	5	6
5	5	5	5	5	5	6
6	6	6	6	6	6	6

$\circ$	1	2	3	4	5	6
1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	2	2	2	2
3	1	2	3	3	3	3
4	1	2	3	4	4	4
5	1	2	3	4	5	5
6	1	2	3	4	5	6

b) Operacije $*$ i $\circ$, su komutativne, jer su tačne formule: $x * y = y * x$, odnosno $x \circ y = y \circ x$, za sve x i y iz skupa A.

114. Na osnovu datih tablica, slično prethodnim primerima, proverimo osobine datih operacija.

1) Abelova grupa.

2) a) je asocijativna i komutativna. c) je tablica komutativne grupe, d) takođe. Operacija e) je asocijativna i ima jedinični elemenat.

115. Dokažimo da je tačna jednakost: $x \square (y \triangle z) = (x \square y) \triangle (x \square z)$.
$x \square (y \triangle z) = x \cdot (y \triangle z) + x + (y \triangle z)$, tj. $x \square (y \triangle z) = x \cdot (y + z + 1) + x + y + z + 1$. Dakle,

$$x \square (y \triangle z) = xy + xz + 2x + y + z + 1 \qquad (1)$$

Zatim, $(x\Box y)\triangle(x\Box z) = (xy+x+y)\triangle(xz+x+z)$, tj. $(x\Box y)\triangle(x\triangle z) = xy+x+y+xz+x+z+1$, odnosno

$$(x\Box y)\triangle(x\Box z) = xy+xz+2x+y+z+1. \tag{2}$$

Iz jednakosti (1) i (2) sledi distributivnost operacije $\Box$ prema operaciji $\triangle$.

116. a) AKR, ARK, KAR, KRA, RAK, RKA; c) 0123, 0132, 0213, 0231, 0312, 0321, 1023, 1032, 1203, 1230, 1302, 1320, 2013, 2031, 2103, 2130, 2301, 2310, 3012, 3021, 3102, 3120, 3201, 3210.

117. a) $4! = 24$; b) Od svih permutacija, od $4!$, treba oduzeti one koje počinju sa 0, a ima ih $3!$ (videti rešenje prethodnog zadatka): $4! - 3! = 18$; c) 96.

118. a) 120; b) 360. **119.** a) $5!$; b) $3!$; c) $(3!)^2$. **120.** $2 \cdot 3!$.

121. Niz obavezno počinje i završava se crnom kuglicom. Svakoj od $4!$ permutacija crnih kuglica odgovara $3!$ različitih rasporeda belih kuglica. Ukupno postoji $4! \cdot 3! = 144$ različita rasporeda.

122. Peta kuglica mora biti iste boje kao prva, šesta kao druga, itd. Prema tome, različite rasporede dobijamo permutovanjem istobrojnih kuglica (za svaku boju po $5!$ mogućnosti) i biranjem raznih boja na prva četiri mesta (a to je $4!$ mogućnosti). Ukupno ima $4! \cdot (5!)^4$ mogućnosti.

123. *aabbc*, *aabcb*, *aacbb*, *ababc*, *abacb*, *abbac*, *abbca*, *abcab*, *abcba*, *acabb*, *acbab*, *acbba*, *baabc*, *baacb*, *babac*, *babca*, *bacab*, *bacba*, *bbaac*, *bbaca*, *bbcaa*, *bcaab*, *bcaba*, *bcbaa*, *caabb*, *cabab*, *cabba*, *cbaab*, *cbaba*, *cbbaa*. Ima 30 permutacija, po formuli: $p = \dfrac{5!}{2! \cdot 2!} = 30$.

124. Ovih brojeva ima: $\dfrac{6!}{3! \cdot 3!} = 20$. **125.** 20.

126. Postavimo jednog dečaka na jedno mesto za stolom. Tada raspored ostalih određujemo isto kao raspored kuglica u **zadatku 121**: ukupno ima $3! \cdot 4! = 144$ rasporeda. Ako bi se prvi dečak pomerio na neko drugo mesto, tada raspored ostalih (u 144 pomenute mogućnosti), jednih prema drugima, ne menja se. Prema tome, imamo 144 razne mogućnosti.

127. Ovi brojevi mogu počinjati ciframa 1, 2, 3. Ima ih ukupno: $3 \cdot \dfrac{6!}{4!} = 90$.

128. a) To je broj permutacija od preostalih elemenata: 1, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4 i iznosi $\dfrac{9!}{4! \cdot 3!} = 2520$; b) 560; c) 210.

129. Isključujemo one permutacije u kojima su 3 ili 4 kuglice iste boje jedna do druge. Povoljnih rasporeda ima 34.

130. *aei*, *aeo*, *aeu*, *aio*, *aiu*, *aou*, *eio*, *eiu*, *eou*, *iou*.

131. $\dbinom{28}{3} = 3276$. **132.** $\dbinom{18}{2} \cdot \dbinom{10}{1} = 1530$. **133.** 190.

134. Neka je na rođendanu bilo n prisutnih. Tada je $\dbinom{n}{2} = 120$, odnosno $\dfrac{n(n-1)}{2} = 120$ ili $n(n-1) = 240 = 16 \cdot 15$. Izlazi da je $n = 16$. Dušan je imao 15 gostiju.

135. $\dbinom{7}{3} = 35$. **136.** $\dbinom{4}{2} \cdot \dbinom{5}{2} \cdot \dbinom{7}{3} = 2100$.

137. $(4! \cdot 3! \cdot 5!) \cdot 3!$. Poslednji činilac, $3!$, označava da se plava, crvena i žuta boja mogu rasporediti na 6 načina.

138. Na sl. 63 crni kružići označavaju položaje dečaka, a beli mesta na koja se mogu rasporediti devojčice. Na 5 mesta treba razmestiti 3 devojčice, a to je moguće učiniti na $\dbinom{5}{3}$ načina. Osim toga, dečake i devojčice u svakom rasporedu možemo permutovati. Ukupno ima $4! \cdot \dbinom{5}{3} \cdot 3!$, odnosno 1440 različitih načina.

Sl. 63

139. Ukupan broj boja dobijenih mešanjem dveju, triju, itd. osnovnih boja, jednak je broju kombinacija druge, treće, itd. klase, od 6 osnovnih boja. Moguće je načiniti ukupno $\binom{6}{1}+\binom{6}{2}+\binom{6}{3}+\binom{6}{4}+\binom{6}{5}+\binom{6}{6}$, odnosno 63 boje, što znači da jedno polje šahovske table neće biti obojeno.

140. Slično prethodnom zadatku, ukupan broj delegacija je 1023.

141. a) $20 = 2\cdot 2\cdot 5$. Kombinujući činioce dobijamo: 2, 5, $2\cdot 2$, $2\cdot 5$. Broj 20 je još deljiv sa 1 i sa 20 pa ima ukupno 6 delilaca. b) 9, c) 16,

d) Svaki činilac $p_1, p_2, \dots p_k$ može da učestvuje u formiranju delilaca ili ne učestvuje, tj. za svaki činilac postoje dve mogućnosti, pa je ukupan broj delilaca $2\cdot 2\cdots 2 = 2^k$.

142. Od 16 karata možemo uzeti 8 na $\binom{16}{8}$ načina, a od 4 dame dve se mogu izabrati na $\binom{4}{2}$ načina. Prema tome, ukupan broj mogućnosti je $\binom{16}{8}\cdot\binom{4}{2}$.

143. Broj dana jednak je zbiru kombinacija od pet elemenata:

$$\binom{5}{1}+\binom{5}{2}+\binom{5}{3}+\binom{5}{4}+\binom{5}{5}=31.$$

144. Moguće je da prvi menja jednu, bilo koju marku, za bilo koje dve ili bilo koje dve marke za bilo koje četiri marke drugog filateliste. Ukupan broj različitih načina menjanja je:

$$\binom{4}{1}\cdot\binom{5}{2}+\binom{4}{2}\cdot\binom{5}{4}=70$$

145. a) Šest paralelnih horizontalnih duži određuje $\binom{6}{2}=15$ pravougaonika dužine 5 cm. Sa šest vertikalnih pravih, svaki od ovih pravougaonika podeljen je na $\binom{6}{2}$ pravougaonika. Dakle, pravougaonika je ukupno $\binom{6}{2}\cdot\binom{6}{2}=225$. Među njima ima 25 kvadrata površine 1 cm^2, 16 kvadrata površine 4 cm^2, 9 kvadrata površine 9 cm^2, 4 kvadrata površine 16 cm^2, i dati kvadrat, ukupno je 55 kvadrata. b) 204.

146. Slično prethodnom zadatku. Paralelograma ima $\binom{m+2}{2}\cdot\binom{m+2}{2}$.

147. Bez dobitka ima $\binom{8}{6}$ mogućnosti. Bar jedan dobitak imaćemo pri kupovini jedne od $\binom{12}{6}-\binom{8}{6}=896$ kombinacija.

148. Prvu grupu od 10 ljudi možemo odabrati na $\binom{30}{10}$ načina, drugu na $\binom{20}{10}$, treću na $\binom{10}{10}=1$ načina, a sve tri grupe na $\binom{30}{10}\cdot\binom{20}{10}$ načina.

149. Slično prethodnom zadataku: $\binom{8}{2}\cdot\binom{6}{2}\cdot\binom{4}{2}=2520$ načina.

150. $\binom{9}{2}\cdot\binom{7}{3}=504$ načina.

151. Lift se može tri puta zaustaviti na $10\cdot 9\cdot 8$ načina, a u svakoj kombinaciji tri putnika mogu izaći na $3!$ načina. Ukupno ima $10\cdot 9\cdot 8\cdot 3! = 4320$ mogućnosti.

152. Slično **zadatku 138**. Ima $\binom{10}{6}=210$ načina.

153. Od svih trojki tačaka, koje sadrže fiksiranu tačku, oduzimamo broj kolinearnih trojki. 1° Ako je fiksirana tačka teme velikog kvadrata: $\binom{8}{2} - 3 = 25$. 2° Ako je fiksirana tačka središte stranice kvadrata: $\binom{8}{2} - 2 = 26$. 3° Ako je fiksirana tačka centar kvadrata: $\binom{8}{2} - 4 = 24$.

154. a) Varijacije četvrte klase bez ponavljanja, 360 ukupno. b) Varijacije četvrte klase sa ponavljanjem, 1296 ukupno.

155. Dve nule mogu biti na kraju, takvih slučajeva ima 36, ili u sredini, takođe 36 slučajeva. Ima ukupno 72 tražena broja.

156. a) Tretirajući cifre 123 kao jedan broj, recimo a, zadatak svodimo na prebrojavanje trocifrenih brojeva od 3 cifre: a, 4, 5, njih je 6. Od toga dva broja imaju cifre 4 i 5 ispred ostalih cifara. b) Permutovanjem broja 123, prethodni broj slučajeva uvećava se 6 puta, itd.

157. $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 60480$.

158. Prvu cifru možemo odabrati na 5 načina (1, 3, 5, 7 ili 9). Druga cifra može biti 0 ili neka od četiri preostale posle upisivanja prve cifre, dakle, ima 5 mogućnosti. Za treću cifru imamo na izboru preostale 4 cifre, itd. Imamo ukupno $5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 600$ petocifrenih brojeva. Od njih sa 10 su deljivi oni koji se završavaju cifrom 0, a ovih ima onoliko koliko se četvorocifrenih brojeva može načiniti ciframa 1, 3, 5, 7, 9. To iznosi: $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$. Prema tome, traženih brojeva ima $600 - 120$, tj. 480.

159. Načinimo trojke parnih i trojke neparnih brojeva. Ima ih ukupno $\binom{5}{3} \cdot \binom{5}{3}$. Dobijene šestorke permutujemo i imamo $\binom{5}{3} \cdot \binom{5}{3} \cdot 6! = 72000$. Svih 10 cifara su ravnopravne, pa sa 0 počinje 7200 brojeva. Traženih šestocifrenih brojeva ima 64800.

160. Dve trojke možemo razmestiti na $\dfrac{10 \cdot 9}{2}$ načina, a za cifre 1 i 2 ima 2^8 načina. Traženih brojeva ima $5 \cdot 9 \cdot 2^8 = 11520$.

161. Ispred cifre 4 može biti bilo koji dvocifren broj, a njih ima 90.

162. 1000.

163. To su svi brojevi od cifara 1, 1, 1, 0, 0; ili 1, 2. 0, 0, 0 ili 3, 0, 0, 0, 0. Ima ih 15.

164. Četvorocifrenih brojeva ima 54, a trocifrenih 162. **165.** 10000.

166. To su brojevi koji se završavaju cifrom 0 (ima ih $4 \cdot 3 \cdot 2$) i koji se završavaju cifrom 5 (ima ih $3 \cdot 3 \cdot 2$). Takvih brojeva ima ukupno 42.

167. $3! + \dfrac{3!}{2!} + \dfrac{3!}{2!} = 12$.

168. Postoji tačno 5 kombinacija koje tačno pogađaju tri ili četiri rezultata. Kako postoji 16 mogućih kombinacija, to su potrebne bar 4 kolone. Sledeći primer od 4 kolone pokazuje da su 4 kolone i dovoljne

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{array}$$

(Jedinica označava pobedu domaćina, a dvojka pobedu gosta). Ako je broj pobeda domaćina jednak 0, 1, 3 ili 4, onda jedna od prve dve kolone sadrži bar tri pogodka. Ako je broj pobeda domaćina jednak 2 i prvu utakmicu dobio je domaćin (gost), onda treća (četvrta) kolona ima tačno tri pogotka.

169. Ako sa 1 označimo postojanje zuba, a sa 0 nedostatak zuba na nekom mestu, onda će broj svih različitih rasporeda zuba biti varijacije s ponavljanjem 68. klase od elemenata 1 i 0, a njih ima $2^{68} = (2^4)^{17} = 16^{17}$.

170. 30.

171. Kada bi 5 ljudi sedelo u jednum redu, bilo bi ukupno 5! različitih rasporeda. Međutim, zbog kružnog rasporeda, po 5 običnih permutacija predstavljaju jedan isti kružni raspored. Ukupan broj rasporeda je $4! = 24$. Savetovanje je završeno 24. januara.

172. Na svakom ukrštanju linija moguće je odabrati smer "desno" ili "gore", označimo ih sa d i g. Ceo put u oznaci predstavlja neku permutaciju od 14 elemenata, da kojih su 9 slova d i 5 slovo g. Ovakvih permutacija ima $\dfrac{14!}{9! \cdot 5!} = 2002$.

173. 36.

174. Za svaki komad kupljenog peciva upišimo broj 1, a ako nije kupljena neka vrsta peciva nećemo upisati ništa. Između oznaka za kupljene pojedine vrste peciva upišemo 0, da bismo ih odvojili. (Ovu 0 upisujemo i ako nismo kupili neku vrstu peciva.) Na taj način biće upisane obavezno tri 0 za odvajanje četiri vrste peciva i ukupno sedam jedinica. Na primer, ako kupimo 2 pogačice 3 devreka i 2 krofne, pisaćemo 1100111011, a ako kupimo samo 7 kifli, pisaćemo 0111111100. U svakom slučaju (svaka mogućnost) to je jedna permutacija sa ponavljanjem, a njih ima $\dfrac{10!}{7! \cdot 3!} = 120$.

175. Ako se od okruglog stola izdvoji jedan vitez, zadatak se može rešavati slično **zadatku 138**. Neka je, recimo, ser Lanselot ustao od stola. Tada imamo dve vrste kombinacija.

1° Ako ser Lanselot ulazi u izbor, onda se isključuju dva njegova suseda, a od preostalih 9 biraju se 4 viteza, ali da među njima nema suseda. Imamo $\binom{6}{4} = 15$ kombinacija.

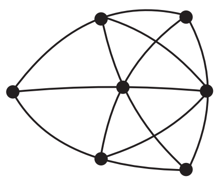
2° Ako ser Lanselot nije među odabranima onda i njegova dva suseda dolaze u obzir, pa od 11 biramo 5 vitezova, i to na $\binom{7}{5} = 21$ način. Postoji ukupno 36 mogućnosti.

176. a) Sličnu **zadatku 127**. Postoji $4! \cdot 5! : 2 = 1440$ načina. (Delimo sa dva, jer ogrlicu možemo ubrnuti za 180°, a tada, na primer, rasporedi *abcd* i *dcba* predstavljaju jednu istu ogrlicu.)

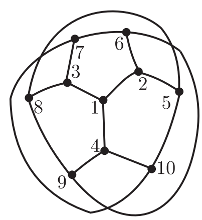
b) i c) Postoji samo jedna takva ogrlica.

177. Rešenje je prikazano na slici 64. Ima 7 linija.

178. Tačan redosled takmičara je $EDACB$.



Sl. 64



Sl. 65

179. Gradove ćemo označavati brojevima $1, 2, \ldots$ Neka je grad 1 povezan direktnim avionskim linijama sa gradovima 2, 3 i 4. Iz grada 1 se sa najviše jednim presedanjem može stići (preko gradova 2, 3 i 4) u još najviše 6 gradova. Najveći broj gradova je dakle manji ili jednak 10. Deset gradova se mogu povezati avionskim linijama, tako da budu zadovoljeni uslovi zadatka, recimo kako je pokazano na slici 65.

180. Sednemo u autobus. Uzmemo dve vrste, npr. brezu i lipu, i sadimo po jednu vrstu duž svake ulice. Kad pređemo raskršće promenimo vrstu drveta, sve dok se ne vratimo na početak. U preostalim ulicama zasadimo kesten. Lako se dokaže da smo ovim ispunili zahtev. (Broj 2000 je važan samo zbog toga što smo paran broj puta promenili vrstu drveta, tj. na kraju smo ponovo na istoj vrsti.)

181. Npr. a) $n = 3$. **182.** a) $n = 9$.

184. Tačna je rečenica c).

185. Pretpostavimo suprotno, tj. pretpostavimo da je $\sqrt{3} = \dfrac{p}{q}$, gde su p i q uzajamno prosti brojevi. Dalje, kao u poznatom dokazu da je $\sqrt{2}$ iracionalan broj, dolazimo do protivrečnosti.

186. Slično prethodnom zadatku. Pretpostavimo da je $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ racionalan broj: $\sqrt{2}+\sqrt{3}=p$. Kvadriranjem jednakosti dobijemo $5 + 2\sqrt{6} = p^2$, odnosno $\sqrt{6} = \dfrac{1}{2}(p^2 - 5)$. Ovo nije moguće, jer je leva strana jednakosti iracionalan broj (što se dokazuje slično prethodnom zadatku) a desna racionalan. Siedi da je početna pretpostavka pogrešna. Svi dati brojevi, osim $\sqrt{2}(\sqrt{2} - \sqrt{8})$ i $(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)$, su iracionalni.

187. Nije tačno, jer je, na primer $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = 4$.

188. Za $a = 0$ ne vredi implikacija.

189. a) $(2Z, +)$ je grupa jer su ispunjene aksiome grupe: 1° Zbir dva parna broja je paran broj. 2° Sabiranje je asocijativno. 3° 0 je jedinični (neutralni) elemenat sabiranja. 4° Svaki paran, ceo broj z ima inverzan broj $-z$, jer je $z + (-z) = 0$. Od ostalih struktura samo $(A, \cdot)$, gde je $A = \{-1, 1\}$ predstavlja grupu, to je slučaj g).

190. d) $-x^2 + y^2 = -x^2 - xy + xy + y^2 = -x(x + y) + y(x + y) = (-x + y)(x + y) = -(x - y)(x + y) = -(x + y)(x - y)$.

191. a) Koristimo aksiome o saglasnosti relacije $\leq$ sa sabiranjem i množenjem i osobinu: $a > 0 \Rightarrow -a < 0$. Dakle, iz $x > 0 \wedge y > 0$ dobijamo $-x < 0 \wedge -y < 0$, pa kako je $3 > 0$ i $5 > 0$, imamo: $-3x < 0 \wedge -5y < 0$. Dalje je $-3x - 5y < 0$, a odavde $-(3x + 5y) < 0$, što daje: $3x + 5y > 0$.

192. a) S donje strane su ograničeni skupovi A, C, D, E.

b) S gornje strane su ograničeni skupovi A, C, D, E.

193. Gornja i donja međa skupa A je 6, a gornja i donja međa skupa B je 0. Skup C nema ni gornju ni donju među, tj. ne postoji ni najmanji ni najveći broj koji je elemenat skupa C. Skup D takođe nema ni gornju ni donju među ($\sqrt{5} \notin D$). Skup E ima gornju među, broj $\sqrt{3}$, a donju među nema.

194. Ako su a i b racionalni brojevi, $a < b$, tada je i $\dfrac{a+b}{2}$ racionalan broj i još je $a < \dfrac{a+b}{2} < b$. (Iz $a < b$ sledi: $a + a < a + b$, odakle je $a < \dfrac{a+b}{2}$ itd.)

195. b) Ako su a i b celi brojevi tada je po pretpostavci $a + b = 2k + 1$, gde je k takođe ceo broj. Dalje je:
$$\begin{aligned} a + b = 2k + 1 &\iff a + b - 2b = 2k + 1 - 2b \\ &\iff a - b = 2(k - b) + 1 \\ &\iff a - b = 2m + 1, \quad \text{gde je } m = k - b \text{ ceo broj.} \end{aligned}$$

197. b) Prema definiciji iz prethodnog zadatka je

$$|x| = \begin{cases} x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases} \text{ i } |y| = \begin{cases} y, & y > 0 \\ 0, & y = 0 \\ -y, & y < 0 \end{cases} \text{ i } |xy| = \begin{cases} xy, & xy > 0 \\ 0, & xy = 0 \\ -xy, & xy < 0 \end{cases}$$

Iz prva dva uslova dobijamo: $|x| \cdot |y| = \left\{\begin{array}{c} x \cdot y, (x > 0 \wedge y > 0) \vee (x < 0 \wedge y < 0) \\ 0, x = 0 \vee y = 0 \\ -x \cdot y, (x > 0 \wedge y < 0) \vee (x < 0 \wedge y > 0). \end{array}\right)$. odnosno $|x| \cdot |y| = \begin{cases} xy, xy > 0 \\ 0, xy = 0 \\ -xy, xy < 0 \end{cases}$. Upoređivanjem ovog uslova i uslova za $|xy|$, po definiciji dolazimo do jednakosti $|xy| = |x| \cdot |y|$.

198. a) $|x| < a \iff |x| - a < 0 \iff \begin{cases} x - a < 0, x \geq 0 \\ -x - a < 0, x < 0 \end{cases} \iff 0 \leq x < a \vee -a < x < 0 \iff -a < x < a$.

c) Tačno je: $-|x| \leq x \leq |x|$ i $-|y| \leq y \leq |y|$. Sabiranjem ovih nejednakosti dobijamo: $-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|$, a to je isto što i $|x + y| \leq |x| + |y|$.

199. c) $|2x-3| = \begin{cases} 2x-3, 2x-3>0 \\ \quad 0, 2x-3=0 \\ 3-2x, 2x-3<0 \end{cases}$. Dakle, za $x > \dfrac{3}{2}$ imamo jednačinu $2x-3=1$, odakle je $x=2$. Za $2x-3=0$ nema rešenja, a za $x<\dfrac{3}{2}$ je $3-2x=1 \Rightarrow x=1$. Rešenja su $x=1$ ili $x=2$.

200. a) Označimo kao na tabeli desno promene znakova za izraze: $(x+1)$, $(x-2)$, x i $(3-x)$. Po definiciji imamo npr. za $x<-1$: $|x+1| = -x-1$, $|x-2| = -x+2$, $\operatorname{sgn}(x) = -1$, $|3-x| = 3-x$ i $\operatorname{sgn}(x+1) = -1$, pa je vrednost izraza: $(x-5)$. Dalje, za $x=-1$ je -6; za $x \in (-1,0)$ je $(3x-3)$, za $x=0$ je -2, za $x\in(0,2]$ je $x+3$; za $x\in[2,3]$ je $(5-x)$ i za $x>3$ je: $(x-1)$. Postupamo slično i u ostalim slučajevima: b) za $x<-1$ je $(2x+1)$; za $x=-1$ je 0; za $x\in(-1,0)$ je $(-2x-1)$; za $x=0$ je 0 i za $x>0$ je 1 itd.

		-1	0		2 3
$x+1$	$-$	$+$	$+$ $+$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$ $-$	$+$	$+$
x	$-$	$-$	$+$ $+$	$+$	$+$
$3-x$	$+$	$+$	$+$ $+$	$+$	$-$

201. $-333\cdot(-1)$, ili $-11\cdot(-3)$, ili $-37\cdot(-9)$.

202. Ti brojevi su $36m$ i $36n$, pa $m+n=8$ i $D(m,n)=1$. Rešenja su.: 36 i 252; 108 i 180.

203. Ako olovka staje x para, imamo uslove: $1100 < 9x < 1200$ i $1500 < 13x < 1600$. Odavde je $122 < x < 134$ i $115 < x < 124$, tj. $122 < x < 124$. Dakle, $x = 123$ pare, odnosno $x = 1,23$ dinara.

204. $2^9\cdot 5^9 = 512\cdot 1953125 = 1\,000\,000\,000$.

205. Kako je $2520 = 2^3\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7$, sledi da ovaj broj treba pomnožiti najmanje sa $2\cdot 5\cdot 7$, da bi se dobilo: $(2^3\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7)\cdot(2\cdot 5\cdot 7) = (2^2\cdot 3\cdot 5\cdot 7)^2$, odnosno: $2520\cdot 70 = 420^2$.

206. Slično prethodnom zadatku: $n=18$, $k=30$.

207. To je broj $2^3\cdot 3^2 = 72$.

208. Brojevi koji se pominju u zadatku su činioci broja 1452784. Stoga, rastavimo taj broj na činioce: $1452784 = 4\cdot 363196 = 4\cdot 4\cdot 90799 = 2^4\cdot 31\cdot 2929 = 2^4\cdot 31\cdot 29\cdot 101$. (Činilac 31 se može naslutiti jer dati broj mora biti deljiv sa 30 ili 31). Dakle, 31 je poslednji dan meseca. Redni broj meseca povratka može biti jedino 8 (leto je). Broj dece je 2, kućni broj je 101. Porodica ostaje na letovanju 29 dana, pa je poslednji dan letovanja 28. avgust. (Redovni godišni odmor ne može trajati 101 dan.)

209. Pretpostavimo da među napisanim brojevima postoji najveći i neka je to broj a. Tada je $4a = b+c+d+e$, gde su b, c, d, e susedni brojevi. No, tada imamo: $4a-b-c-d-e=0$, odnosno $(a-b)+(a-c)+(a-d)+(a-e)=0$. Ni jedan od izraza u zagradama ne može biti negativan, jer je $a=\max\{a,b,c,d,e\}$. Ali, tada je ova jednakost moguća jedino ako su sve zagrade jednake 0, pa je $a=b=c=d=e$, a slično zaključimo da je i $a=f$.

210. Proizvod dva dvocifrena broja veći je od 100 i manji je od 10000, pa u obzir dolaze 444 i 4444. Kako je broj $444 = 3\cdot 4\cdot 37 = 12\cdot 37$, to daje jedno rešenje. Dalje je $4444 = 4\cdot 11\cdot 101$ i kako je 101 prost broj, to je broj 4444 nemoguće prikazati u obliku proizvoda dva dvocifrena broja.

211. Proizvod dva trocifrena broja veći je ili jednak $100\cdot 100 = 10000$, a manji od $1000\cdot 1000 = 1000000$, pa je očigledno ili petocifren ili šestocifren.

Ako je proizvod $77777 = 7\cdot 11111 = 7\cdot 41\cdot 271$, onda je $77777 = 287\cdot 271$, jer su svi brojevi $(7, 41, 271)$ prosti.

Ako je proizvod $777777 = 7\cdot 111111 = 7\cdot 111\cdot 1001 = 7\cdot 7\cdot 11\cdot 13\cdot 3\cdot 37$, onda očigledno nema rešenja. Najmanji trocifren broj koji se može formirati od datih činilaca je broj 111, a najveći 777. Kako je u oba slučaja drugi činilac (7007 odnosno 1001) četvorocifren, to ne postoje trocifreni brojevi čiji je proizvod 777777.

212. Kako je zbir svih brojeva jednak 0, zaključujemo da je broj pozitivnih i broj negativnih brojeva isti, a kako je proizvod svih brojeva 1, sledi da negativnih brojeva ima $2k$ (paran broj). Znači listova ima $4k$, a ovaj broj je deljiv sa 4.

213. Od broja pluseva ne zavisi koji znak ostaje na kraju jer se svakim brisanjem broj pluseva smanji ili poveća za jedan. Broj minusa se ili ne menja (kad brišemo + i $-$), ili se smanji za dva (kad brišemo dva minusa). Prema tome, ako je broj minusa paran, na kraju ostaje plus, a ako je broj minusa neparan, na kraju ostaje minus.

214. Pođimo po krugu suprotno kretanju kazaljke na časovniku i vratimo se u početnu tačku. Jasno je, da su pri tome, brojevi prelaza od plusa na minus i od minusa na plus jednaki. Označimo broj prelaza sa d. Pošto posle svakog plusa stoji ili plus ili minus, biće $p = x + d$; pošto posle svakog minusa, stoji ili minus ili plus to je $m = y + d$. Odatle je: $d = p - x = m - y$.

215. Napišimo brojeve veće do 8 onako kako je pokazano u tabeli. U svakoj vrsti prvi sabirak je isti kod svih deset brojeva. (Na primer, u drugoj to je 8, u trećoj 16, u prvoj 0 itd.). U svakoj koloni je, pak, svaki drugi sabirak isti. Kako su četiri broja u svakoj vrsti negativni, a četiri pozitivni, to će zbir svih prvih sabiraka u svakoj vrsti biti 0, bez obzira na raspored minusa. Iz istih razloga zbir drugih sabiraka u svakoj koloni je 0. Samim tim je zbir svih brojeva u tabeli jednak nuli.

1	2	$\cdots$	8
$8+1$	$8+2$	$\cdots$	$8+8$
$\vdots$	$\vdots$		$\dots$
$56+1$	$56+2$	$\cdots$	$56+8$

216. $(n+1)\cdot(n+2)\cdots(n+n-1)\cdot 2n = \dfrac{1\cdot 2\cdot 3\cdots n(n+1)(n+2)\cdots(2n-1)\cdot 2n}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n} =$

$$\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)(2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)\cdot 2^n\cdot(1\cdot 2\cdot 3\cdots n)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n} = 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)\cdot 2^n.$$

(Izdvojili smo u brojiocu parne činioce $(2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n)$, zatim iz svakog izdvojili dvojku, pa skratili razlomak sa $(1\cdot 2\cdot 3\cdots n)$. Na kraju je $1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)$ neparan broj.)

217. a) Razliku brojeva $100a + 10b + c$ i $100c + 10b + a$ napisaćemo u obliku $99a - 99c = 99(a-c) = 3^2\cdot 11(a-c)$. Ona je očigledno deljiva sa 11, a nije deljiva sa 11^2, pa stoga nije kvadrat prirodnog broja.

b) Kako je $10x + y - (10y + x) = 9(x - y)$, to je ova razlika potpun kvadrat ako i samo ako je $x - y = 1$, $x - y = 4$ ili $x - y = 9$.

218. Kvadrat celog broja može se završavati samo jednom od cifara: 0, 1, 4, 5, 6, 9. Primeri $10^2 = 100$ i $12^2 = 144$, pokazuju da 0 i 4 zadovoljavaju zahteve. Za ostale cifre se može dokazati da nisu rašenja zadatka. (Analiziramo samo kvadrate dvocifrenih brojeva, jer oni određuju zadnje dve cifre kvadrata).

219. Kako je $528 = 6\cdot 8\cdot 11$ i 11 ne može biti cifra, takav broj ne postoji.

220. Kako je $210 = 2\cdot 3\cdot 5\cdot 7$ to traženi brojevi mogu biti: a) trocifreni sa ciframa 5, 6 i 7. Takvih imamo tačno $3\cdot 2\cdot 1 = 6$. b) četvorocifreni sa ciframa 2, 3, 5, 7, a takvih je opet samo 6, jer moraju biti manji od 3000, što znači da moraju počinjati sa 2. c) četvorocifreni sa ciframa 1, 5, 6, 7, a takvih je tačno 6, jer oni moraju počinjati sa cifrom 1. Prema tome, ima ukupno 18 brojeva koji su manji od 3000 i čiji je proizvod cifara 210.

221. Broj $a = 123456789101112\dots 99100101$ ima zbir cifara: $20(1+2+3+4+5+6+7+8+9)+3 = 903 = 3k$. Dakle, a je složen broj deljiv sa 3, ali budući da nije deljiv i sa 9, ne može biti kvadrat celog broja.

222. Traženi broj N u dekadnom zapisu ima oblik $N = \overline{1abcde}$. Prema uslovu zadatka važi jednakost: $\overline{1abcde}\cdot 3 = \overline{abcde1}$. Neka je $x = \overline{abcde}$. Tada važi: $3(100000 + x) = 10x + 1$ odakle dobijamo $x = 42857$ i $N = 142857$.

223. Iz $\overline{abc1} = 3\cdot\overline{2abc}$ dobijamo $c = 7$, pa jednakost postaje: $\overline{ab71} = 3\cdot\overline{2ab7}$. Sada saznajemo da je $b = 5$ i slično da je $a = 8$. Dakle: $\overline{abc} = 857$.

224. Neka je a prva cifra broja. Sa b označimo broj koji se dobija izostavljanjem prve cifre. Prema uslovu treba da bude $2\overline{ab} = \overline{ba}$, ili $2(10^n\cdot a + b) = 10b + a$. Da bi brojevi, $2\overline{ab}$ i $\overline{ba}$ imali isti broj cifara, mora biti $a < 5$. Rešavanjem po b poslednja jednačina daje: $b = a\cdot\dfrac{199\cdots 9}{8}$. Kako su a i b cifre, ova jednakost ima smisla samo za $a = 8$, ali $a < 5$, pa dolazimo do protivrečnosti.

225. Iz $\overline{aabb} = k^2$,tj. iz $1100a + 11b = k^2$, $k\in Z$, dobijamo: $100a + b = \dfrac{k^2}{11}$, gde su a i b cifre veće od nule. Ova jednakost je zadovoljena samo za $a = 7$ i $b = 4$. Dakle: $7744 = 88^2$.

226. $8359\cdot 45 = 376155$. **227.** 444 nije deljivo sa 8.

228. Broj je deljiv sa 9 jer mu je zbir cifara 9 i sa 8, jer je 008 deljivo sa 8. Dati broj je deljiv i sa 36 i sa 72.

229. Ako 198700 podelimo sa 72 dobićemo ostatak 43. Znači, treba dopisati broj 29, jer je $72 - 43 = 29$.

230. Mora biti deljiv sa 4 i sa 9. Rešenja: 34452, 34056, 34956.

231. Ne može biti n jednocifren broj, jer bi, zbog $n^3 < 1000$ i $n^4 < 10000$, za zapisivanje brojeva n^2 i n^3 bilo upotrebljeno najviše sedam cifara. Ne može biti ni sa više od dve cifre, jer bi zbog $n^2 \geq 10^6$ i $n^3 \geq 10^8$ bilo potrebno 14 cifara. Dakle, n je dvocifren broj, pa iz $1000 \leq n^3 < 9999$ sledi da je $10 \leq n \leq 21$. Iz uslova $10000 \leq n^4 < 99999$ sledi da je $18 \leq n < 31$. Prema tome, n je jedan od brojeva: 18, 19, 21. (Ne može biti 20, jer npr. $20^3 = 8000$.). Proverom utvrdimo da je $n = 18$ i $18^3 = 5832$, $18^4 = 104976$.

232. Dokazaćemo da ne mogu biti svi brojevi neparni. Za svaki neparan broj $2k-1$ važi: $(2k-1)^2 = 4k^2 - 4k + 1 = 4k(k-1) + 1 = 8m + 1$, jer je $k(k-1)$, kao proizvod dva uzastopna broja, uvek paran broj. Dakle, $(2k-1)^2$ pri deljenju sa 8 daje ostatak 1. Ako su u našoj jednakosti svi dati brojevi neparni, onda leva strana jednakosti ima oblik $x_1^2 + x_2^2 + \cdots x_{1997}^2 = 8m + 1 + 8n + 1 + \cdots + 8p + 1 = 8(m + n + \cdots + p) + 1997 = 8(m + n + \cdots + p + 249) + 5 = 8q + 5$. Desna strana je kvadrat neparnog broja, pa ima oblik $x_{1998}^2 = 8r + 1$, što dovodi do protivrečnosti. Dakle, ne mogu svi brojevi biti neparni. Jasno je da ne može biti samo jedan broj paran. Na primer, ako je samo x_{1998} paran, onda bi on bio jednak zbiru neparnog broja neparnih, tj. bio bi neparan; kontradikcija! Ne može biti ni samo jedan broj sa leve strane neparan, jer bi tada zbir na levoj strani bio paran, a desna strana je neparna. Dakle, bar dva od datih brojeva su parni.

233. Zbir cifara broja je 300 i deljiv je sa 3, ali ne i sa 9, što važi i za sam broj. Ne može kvadrat broja biti deljiv sa 3, a da ne bude deljiv i sa 9, što potvrđuje da naš broj nije kvadrat.

234. $NZS(3, 4, 5, 6, 7) = 420$. Iz uslova zadatka sledi da je $420k > 999$, a iz nejednakosti da je $k = 3$, pa je traženi broj $420 \cdot 3 + 2 = 1262$.

235. a) Neka je n traženi broj. Tada je $n - 2$ deljivo sa 4, 5, 6, tj. $n - 2 = 60k$, $k \in N_0$. Znači, treba naći broj n oblika $60k + 2$ koji je deljiv sa 7. Od brojeva $k = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$, što nije teško proveriti, najmanji takav je $k = 3$, pa je najmanji broj knjiga na stolu 182.

b) Neka je broj $60k + 2$ deljiv sa 7. Tada je i broj $60k + 2 - 182 = 60(k - 3)$ deljiv sa 7, odnosno broj $k - 3$ je deljiv 7 odakle sledi da je k oblika $7m + 3$, $m \in N_0$. Tražena rešenja su $n = 60k + 2 = 60(7m + 3) + 2 = 420m + 182$, $m \in N_0$.

236. $NZS(7, 9, 12) = 252$. Taj broj je oblika $252k - 5$, gde je $k \in \{1, 2, 3\}$. Traženi brojevi su: 247, 499, 751.

237. Traženi broj je oblika $60k + 1$, gde je k prirodan broj, a 60 je NZS za 2, 3, 4, 5 i 6. Najmanji broj navedenog oblika, koji je deljiv sa 7, jeste broj 301, koji se dobija za $k = 5$.

238. Neka Zoran ima n godina. Pretpostavimo da Milica slavi drugi rođendan. Tada je n, tj. broj $(n - 2) + 2$ deljiv sa 2, a treba da bude $(n - 2) + 3$ deljivo sa 3, $(n - 2) + 4$ deljivo sa 4, zatim $(n - 2) + 5$ deljivo sa 5, a $(n - 2) + 6$ nije deljivo sa 6. Sledi da je $(n - 2)$ deljivo sa 2, sa 3, sa 4 i sa 5, pa je $n - 2 = k \cdot S(2, 3, 4, 5)$. Dakle, $n = 60k$, odnosno $n = 60$, jer za $k = 2$ nije n dvocifen broj. Broj $n = 60$ ne zadovoljava uslov, jer u tom slučaju deljivost važi i za četvrti po redu rođendan ($60 + 6$ deljivo je sa 6). Sličnim rezonovanjem utvrdimo da Milica slavi treći rođendan i $n - 3 = S(3, 4, 5, 6) = 60$, što znači da Zoran ima 63 godine.

239. Neka je traženi broj $\overline{xyz}$. Tada je $x + y + z = 10$ i $x - y + z$ je deljivo sa 11, što znači da $x - y + z$ može biti 0 ili 11. Drugi slučaj otpada, pa je očigledno $x + z - y = 0$, pa je $x + z = y = 5$. Traženi brojevi su 550, 451, 352, 253 154.

240. Kako je $n^2 - n + 2001 = n(n - 1) + 2001$ to je dati broj uvek neparan (jer je proizvod dva uzastopna prirodna broja $n - 1$ i n uvek paran), a neparan broj nikada nije deljiv sa parnim, pa ni sa brojem 2002.

241. Od pet uzastopnih neparnih brojeva najviše dva mogu biti deljivi sa 3 (ako je prvi deljiv sa 3, onda je i četvrti; ako je drugi deljiv sa 3, onda je i peti; ako je srednji deljiv sa tri, on je jedini sa tim svojstvom). Samo jedan od ovih pet brojeva je deljiv sa 5 i najviše jedan je deljiv sa 7. Ako uklonimo brojeve sa bar jednim od pomenutih svojstava, ostaće bar jedan broj koji nije deljiv ni sa 3, ni sa 5, ni sa 7.

242. Neka je $16a + 17b = m$ i $17a + 16b = n$. Proizvod mn je deljiv sa 11, pa je jedan od brojeva m ili n deljiv sa 11. Međutim $m + n = 33(a + b)$, pa je $m + n$ deljivo sa 11. Odavde sledi da su oba broja m i n deljivi sa 11, a njihov proizvod sa $11^2 = 121$.

243. Za bilo koji prirodan broj n krajnja cifra zbira n^2+n+1 biće 1, 3, 7 ili 9, pa n^2+n+1 ne može biti deljivo sa 2 ni sa 5. Međutim 2 je činilac broja 2004, a 5 je činilac broja 2005.

244. Zbirovi cifara ovog broja, broja a i broja b deljivi su sa 9. Zbir cifara nasumice odabranog broja je: $a \leq 2001 \cdot 9 = 18009$. Zbir cifara ovog broja je $b \leq 5 \cdot 9 = 45$. Dakle: $b \in \{9, 18, 27, 36, 45\}$, pa je zbir cifara broja b uvek jednak 9.

245. Od dva uzastopna prirodna broja jedan je paran, a svaki paran broj veći od 2 je složen broj.

246. Neka je dat proizvod: $(n^3-1) \cdot n^3 \cdot (n^3+1)$, gde je $n \in N$ i $n > 1$. Dokažimo prvo *deljivost sa 8.* Ako je $n = 2k$, paran broj, tada je $n^3 = 8n^3$. Ako je n neparan, onda su n^3-1 i n^3+1 dva uzastopna parna broja, pa je jedan deljiv sa 2, drugi sa 4, a njihov proizvod sa 8.

Deljivost sa 9. Ako je $3|n$, onda $9|n^3$. Ako je $n = 3k+1$, onda $9|(n^3-1)$, a za $n = 3k-1$ važi $9|(n^3+1)$.

Deljivost sa 7. Uzimajući u obizr činjenicu da se svaki prirodni broj može svrstati u jednu od klasa: $7k$, $7k \pm 1$, $7k \pm 2$, $7k \pm 3$, neposrednom proverom svih slučajeva, uverićemo se da je proizvod svaki put deljiv sa 7.

247. To su stepeni brojeva koji se završavaju jednom od cifara: 1, 3, 7, 9. Stepeni ovih brojeva takođe se završavaju jednom od ove četiri cifre. Ako se bilo koja dva elementa skupa A završavaju istom cifrom, njihova razlika se završava nulom, pa je deljiva sa 5, a ako su sva tri elementa sa različitim krajnjim ciframa, onda će se u zbiru neka dva pojaviti kombinacija $1+9$ ili $3+7$.

248. Zbog $252 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7$, izlazi da cifre traženog broja mogu biti 4, 9, 7 ili 6, 6, 7. Rešenja su: 947 i 479.

249. Neka je $a \leq b \leq c \leq d$. Tada je razlika najvećeg i najmanjeg:
$d = 9(111d + 10c - 10b - 111a)$, a ovo nije prost broj.

250. Ako bi, na primer, ostatak deljenja bio 21, onda bi prost broj p bio: $p = 30k + 21 = 3(10k+7)$, a ovo je složen broj. Slično se isključuju i svi ostali slučajevi.

251. Ostatak deljenja prostog broja p, $p > 3$, brojem 6 može biti 1, 2, 3, 4 ili 5. Ostaci: 2, 3, 4 isključuju se, jer bi u tim slučajevima p bio složen broj. Na primer, ako bi ostatak bio 4, imali bismo $p = 6k+4 = 2(3k+2)$, pa bi p bio složen broj itd.

252. Pretpostavimo da je skup prostih brojeva konačan i da su $p_1, p_2, \ldots, p_n$ svi prosti brojevi. Uočimo broj: $p_1 \cdot p_2 \cdots p_n + 1$. On nije deljiv ni sa jednim od prostih brojeva (ima uvek ostatak 1), pa je on ili prost, ili je deljiv nekim prostim brojem različitim od svih poznatih prostih brojeva $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Tako dolazimo do protivrečnosti.

253. Broj $p = 2$ zadovoljava uslove. Ako je $p \geq 3$, onda su $3p+1$ i $5p+1$ parni, a samim tim i složeni brojevi.

254. a) Ako je $p = 2$, onda je $3^p + p^3 = 3^2 + 2^3 = 17$, a to je prost broj. Ako je $p \geq 3$, tada je 3^p neparno i p^2 takođe neparno, pa njihov zbir mora biti paran, dakle i složen broj. Prema tome, jedino rešenje je $p = 2$.

b) Ako je $p = 2$, $p^2 + 14 = 18$, a to je složen broj. Za $p = 3$, dobijamo $p^2 + 14 = 23$. Za $p > 3$, $p = 6k-1$ ili $p = 6k+1$. Tada je $p^2 + 14 = 36k^2 \pm 12k + 1 + 14$ složen broj (deljiv sa 3),pa je $p = 3$ jedino rešenje.

255. a), c) i e) Prost broj p, $p \neq 3$, može biti oblika $3p-1$ ili $3p+1$. U svakom od slučajeva a), c), e), tada bi vrednosti navedenih izraza bili složeni brojevi. Dakle, u svim slučajevima je $p = 3$.

b) Za $p = 2$, $p^2 + 9 = 13$ što je rešenje zadatka. Ako je p veće od 2 onda je p i p^2 neparno, pa je $p^2 + 9$ paran broj, dakle i složen. Jedino rešenje zadatka je $p = 2$. d) Ako je $p = 2$ onda su $p+2$ i $p+4$ složeni. Ako je $p = 3$ onda je $p+2 = 5$, a $p+4 = 7$. Ako je $p > 3$, onda je p oblika: $6k-1$ ili $6k+1$. Ako je $p = 6k-1$, tada je $p+4 = 6k+3 = 3(2k+1)$, a to je složen broj. Slično za $p = 6k+1$, $p+2 = 6k+3$, pa je očigledno $p = 3$ jedino rešenje zadatka.

256. Dati zbir je uvek paran broj veći od 2. **257.** Kao prethodni zadatak.

258. Ako je $p = 2$, onda je $p^2 + 17 = 21$, a $p^3 + 17 = 25$ pa je tvrđenje tačno. Ako je $p \geq 3$, onda je p^2 i p^3 neparno, a brojevi $p^2 + 17$ i $p^3 + 17$ su parni i složeni, pa je tvrđenje dokazano za sve p.

259. Broj $p = 2$ ne zadovoljava prvi uslov. Za $p = 3$ je $8p+1 = 25$ složen broj. Ako je $p > 3$, on može pri deljenju sa 3 dati ostatak 2 ili 1. Ostatak ne može biti 2, tj. nije $p = 3k+2$ jer je tada $8p - 1 = 24k - 15$, a to je složen broj. Mora biti $p = 3k + 1$, ali je tada $8p + 1 = 24k + 9$, a to je složen broj (deljiv je sa 3).

260. Slično prethodnom zadatku. Samo $p = 3$ zadovoljava prvi uslov i tada je $8p^2 - 1 = 71$, a to je prost broj.

261. Neka je $N = 2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot 13$ (proizvod prostih brojeva manjih od 15). Tada su brojevi: $N + 2, N + 3, \ldots, N + 15, N + 16$ složeni, jer je svaki od njih deljiv nekim od brojeva: 2, 3, 5, 7, 11, 13.

262. Pretpostavimo, suprotno tvrđenju zadatka, da je broj cifara datog broja složen i iznosi $k\cdot n$, $(k,\ n > 1)$. Tada je $\underbrace{11\cdots 1}_{k\cdot n} = \underbrace{\underbrace{1\cdots 1}_{k}\ \underbrace{1\cdots 1}_{k}\cdots\underbrace{1\cdots 1}_{k}}_{n} = \underbrace{1\cdots 1}_{k}\cdot(\underbrace{1\underbrace{0\cdots 0}_{k-1}1\cdots 1\underbrace{0\cdots 0}_{k-1}}_{n-1}1)$, tj. dati broj mora biti složen, što je suprotno pretpostavci. Obrnuto tvrđenje ne važi, jer postoje brojevi sa prostim brojem cifara (jedinica) koji su složeni. Na primer, takav je broj $111 = 3\cdot 37$.

263. a) Dati broj je neparan, pa su svi njegovi prosti delioci oblika $4k + 1$ ili $4k + 3$. Kada bi svi bili oblika $4k + 1$, onda zbog $(4k + 1)(4l + 1) = 4(4kl + k + l) + 1$ i sam broj bi bio oblika $4k + 1$. Dakle, bar jedan od prostih delilaca datog broja mora biti oblika $4k + 3$.

b) Svaki prost broj, osim prostog broja 3, je ili oblika $3k - 1$ ili oblika $3k + 1$. Ako dati broj $3n - 1$ nema ni jedan prost činilac oblika $3k - 1$, onda su svi njegovi prosti činioci oblika $3k + 1$ No tada je, zbog $(3k+1)(3j+1) = 3(3kj+k+j)+1 = 3m+1$, proizvod svih prostih činilaca tog oblika takode je oblika $3m + 1$, što je nemoguće. Dakle, nemoguće je da dati broj nema ni jedan prost činilac oblika $3k - 1$.

264. Ne. Broj n mora biti oblika $3n+1$ ili $3n-1$, jer 1988 nije deljivo sa 3, pa n^2, a takođe i n, nije deljivo sa 3. Međutim, tada je $n^2 = (3n\pm 1)^2 = 3(n^2 \pm 2n)+1 = 3k+1$, a $1988 = 3\cdot 662+2$, što dovodi do protivrečnosti.

265. Neka su uzastopni prirodni brojevi: $n - 2$, $n - 1$, n, $n + 1$, $n + 2$, $n > 2$. Tada: a) zbir ovih brojeva je $5n$, a to je složen broj, i b) zbir kvadrata ovih brojeva je $5(n^2 + 2)$. Kako se za svako n ne može $n^2 + 2$ završavati sa 0 ili sa 5, tj. ne može biti deljivo sa 5, to ni izraz $5(n^2 + 2)$ ne može biti deljivo sa 25, što znači da poslednji izraz ne može biti kvadrat prirodnog broja.

266. Od 10 uzastopnih prirodnih brojeva pet su parni. Od ostalih pet neparnih brojeva najviše dva su deljiva sa 3, najviše jedan sa 5 i najviše jedan sa 7. Dakie, među datim brojevima postoji jedan koji nije deljiv ni sa 2, ni sa 3, ni sa 5, ni sa 7. Taj broj je uzajamno prost sa svakim od ostalih devet, jer zajednički prost delilac brojeva čija je razlika najviše 9 može biti samo jedan od brojeva 2, 3, 5 ili 7.

267. a) Neka su $p_1, p_2, \ldots, p_{80}$ $(p_1 = 1,\ p_{80} = n)$ svi delioci broja n. Tada je $n = \alpha_1 p_1$, $n = \alpha_2 p_2, \ldots, n = \alpha_{80} p_{80}$. Množenjem ovih jednakosti dobijamo jednakost $n^{80} = (\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{80})$ $(p_1 p_2 \ldots p_{80})$. Brojevi čiji je proizvod u prvoj zagradi su takođe svi delioci broja n samo u drugom poretku nego u drugoj zagradi, pa je $n^{80} = (p_1 \cdot p_2 \cdots p_{80})^2$, odnosno $p_1 \cdot p_2 \ldots p_{80} = n^{40}$.

b) Prema tvrđenju pod a) dobićemo $p_1 p_2 \ldots p_{1983} = n^{\frac{1983}{2}}$, a pošto je broj $n^{\frac{1983}{2}}$ ceo, n mora biti potpun kvadrat.

268. Ostaci deljenja ma kog broja sa 11 mogu biti: $0, 1, 2, \ldots, 10$, ukupno 11 mogućnosti. Prema tome, bar dva od dvanaest brojeva imaju iste ostatke (Dirihleov princip), pa je njihova razlika deljiva sa 11.

269. Dobijeni zbirovi mogu biti -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 – sedam različitih mogućnosti, a vrsta, kolona i dijagonala ima ukupno osam. (Dirhleov princip).

270. Neka su dati brojevi: $a_1, a_2, \ldots, a_{1000}$. Formirajmo niz: $a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, \ldots,$ $a_1 + a_2 + \ldots + a_{1000}$. Između 1000 članova ovog niza naći će se neki sa ostatkom 0, ili će dva imati iste ostatke deljenja sa 1000 itd.

271. Neka su to brojevi $a_1 < a_2 < a_3 \cdots < a_n < a_{n+1}$. Posmatrajmo brojeve $a_2 - a_1, a_3 - a_1, \ldots, a_{n+1} - a_1$ (ima ih n) i brojeve $a_2, a_3, \ldots, a_{n+1}$ (njih je takođe n). Na taj smo način dobili dve grupe sa ukupno $2n$ prirodnih brojeva manjih od $2n$. Među njima će postojati dva jednaka broja. Ta dva broja pripadaju različitim grupama. Neka su to brojevi $a_k - a_1$ i a_m. Onda je $a_k = a_1 + a_m$.

272. Goca može da napiše niz od 1999 brojeva zapisanih samo jedinicama: $1, 11, 111, \ldots$, $11\ldots1$. (Poslednji, najveći broj, ima 1999 cifara). Dokažimo da je jedan od ovih brojeva deljiv sa 1999. Ako ni jedan broj ne bi bio deljiv sa 1999, onda bi svaki od njih, pri deljenju sa 1999, imao jedan od ostataka: $1, 2, 3, \ldots 1998$. Budući da u nizu ima 1999 brojeva, a različitih ostataka je 1998, po Dirihleovom principu moraju postojati dva koji imaju jednake ostatke. Njihova razlika je broj oblika $11\ldots100\ldots0$ i mora biti deljiva sa 1999. Ovu razliku možemo napisati u obliku proizvoda: $11\ldots100\ldots0 = 11\ldots1 \cdot 10^k$. Kako su 1999 i 10 uzajamno prosti brojevi, jer 1999 nije deljiv ni sa 2, ni sa 5, sledi da je prvi broj proizvoda, tj. broj $11\cdots1$, deljiv sa 1999, a njega Goca zna da zapiše.

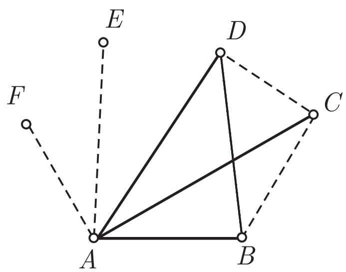
273. Pretpostavimo suprotno, tj. da su najviše po dva prijatelja boravili istovremeno u kafiću. Po uslovu, bilo je tačno 10 njihovih ulazaka. Od 5 prijatelja moguće je načiniti tačno $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ različitih parova, što znači da postoji najmanje 10 vremenskih intervala: $t_1, t_2, \ldots t_{10}$, u kojima su 10 različitih parova bili zajedno. Početak svakog intervala zahteva bar jedan ulazak nekog od 5 prijatelja, tj. bilo je bar 10 ulazaka. Međutim, na početku intervala t_1 unutra je već bio jedan od njih, koji je ušao ranije ili u tom momentu, pa mora biti najmanje 11 ulazaka, što je kontradikcija. Dakle, otpada suprotna pretpostavka.

274. Uočimo 16 disjunktnih podskupova čija je unija dati skup $\{1, 2, 3, \ldots, 25\}$. To su skupovi: $\{1, 4, 9, 16, 25\}$, $\{2, 8, 18\}$, $\{3, 12\}$, $\{5, 20\}$, $\{6, 24\}$, $\{7\}$, $\{10\}$, $\{11\}$, $\{13\}$, $\{14\}$, $\{15\}$, $\{17\}$, $\{19\}$, $\{21\}$, $\{22\}$, $\{23\}$. (Elementi podskupova su kvadrati, u prvom podskupu, ili brojevi oblika $p \cdot k^2$, gde je p prost broj.) Kako je izabrano 17 brojeva, to po Dirihelovom principu bar dva moraju biti iz istog podskupa. Očigledno je da su svaka dva broja iz istog podskupa takva, da im je proizvod potpuni kvadrat ($m^2 \cdot n^2$ ili $p^2k^2l^2$). Time je tvrđenje dokazano.

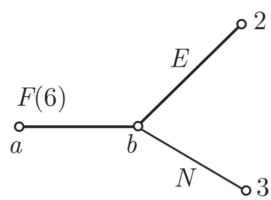
275. Postoji konačan broj četvorocifrenih brojeva (10^4) itd.

276. Može! U nizu $3, 3^2, \ldots, 3^n$, sreću se dva broja koji imaju jednake poslednje četiri cifre: 3^k i 3^l, $k < l$, $3^l - 3^k = 10^4 \cdot m$. Nije teško pokazati da je 3^{l-k} traženi stepen broja 3, tj, da je $3^{l-k} - 1 = 10^4 \cdot m_1$, gde je m_1 ceo broj.

277. Iz jedne tačke povlači se pet duži, pa najmanje tri moraju biti iste boje. Neka su to duži AB, AC, AD, sl. 66, i neka su plave. Ako bi bilo koja od duži BC, CD, BD bila plava, dobili bismo plavi trougao. Ako ni jedna od ovih duži nije plava, onda je trougao BCD crven.



Sl. 66



Sl. 67

278. Neka je a jedan od ovih naučnika. On se sa 16 preostalih naučnika sporazumeva na tri jezika, pa će biti najmanje šestorica s kojima se sporazumeva na istom jeziku – recimo na francuskom, sl. 67. Ako se od ovih 6 bilo koja dva, recimo m i n sporazumevaju među sobom na francuskom jeziku, onda su a, m, n tražena trojka. Ako se, pak, ova šestorica među sobom sporazumevaju na nemačkom i engleskom, onda se jedan od njih, recimo b, sporazumeva sa 5 drugih na dva jezika. Zbog toga, bar sa trojicom sporazumevaće se na jednom, recimo na nemačkom jeziku. Ako se od ove trojice bilo koja dva sporazumevaju među sobom na nemačkom jeziku, onda oni sa b čine traženu trojku. Ako takvog para nema, a znamo da se oni ne sporazumevaju ni na francuskom, onda se ova trojica među sobom sporazumevaju na engleskom jeziku.

279. Pretpostavimo da su u svakom trenutku sve ekipe odigrale različit broj utakmica. Onda bi najmanji broj odigranih utakmica morao biti: $0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28$, ali to je, ustvari ukupan broj utakmica i tada su sve ekipe odigrale po 7 mečeva. Dakle, pretpostavka otpada.

280. Ako bismo, polazeći od slobodnog kraja bilo koje od već povučenih duži, konstruisali pet novih duži, dobili bismo umesto jednog pet slobodnih krajeva, dakle, za četiri više. Tako se pri svakom konstruisanju pet novih duži broj slobodnih krajeva uveća za četiri. Tako dobijemo niz brojeva: $1, 5, 9, 13, \ldots$, koji se mogu opisati formulom: $n \equiv 1 \pmod 4$. Pošto je $700 \equiv 0 \pmod 4$ to 700 ne pripada ovom nizu, pa je Slađana sigurno pogrešila u brojanju.

281. a) $2 \equiv -1 \pmod 3 \Rightarrow 2^{100} \equiv (-1)^{100} \pmod 3 \equiv 1 \pmod 3$. Ostatak deljenja je 1.

b) $2^2 \equiv -1 \pmod 5 \Rightarrow 2^{100} \equiv (-1)^{50} \pmod 5 \equiv 1 \pmod 5$.

282. a) $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120 = -1 \pmod{11}$, $6 \cdot 9 = 54 \equiv -1 \pmod{11}$, $7 \cdot 8 = 56 \equiv 1 \pmod{11}$ i $10 \equiv (-1) \pmod{11}$, pa je $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 9 \cdot 10 \equiv (-1) \cdot (-1) \cdot 1 \cdot (-1) \pmod{11} \equiv -1 \pmod{11}$. Ostatak deljenja je 10.

b) $3^3 = 27 \equiv 1 \pmod{13}$ itd. Ostatak je 3.

c) $1987 \equiv 1 \pmod{331}$ itd. Ostatak je 1.

283. Za svaki n iz a), b), c), d), e) treba dokazati: $n \equiv 0 \pmod{10}$.

284. Primetimo da je $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$, zatim $3^3 = 27$ i $4^3 = 64$, pa je $3^3 \equiv 1 \pmod{13}$ i $4^3 \equiv -1 \pmod{13}$, pa je $3^{105} \equiv 1 \pmod{13}$ i $4^{105} \equiv -1 \pmod{13}$ i odatle $3^{105} + 4^{105} \equiv 0 \pmod{13}$.

Na isti način $4^3 \equiv -2 \pmod{11}$, $4^{15} \equiv 1 \pmod{11}$ i $4^{105} \equiv 1 \pmod{11}$. Zatim $3^5 \equiv 1 \pmod{11}$ i $3^{105} \equiv 1 \pmod{11}$ pa je $3^{105} + 4^{105} \equiv 2 \pmod{11}$.

285. Ako vitez odseče jednu glavu zmaju, broj glava poraste za 9. Ako odseče 17 glava, broj glava povećava se za 3. Ako odseče 21 glavu, broj glava smanji se za 21, a ako odseče 33 glave, broj glava se poveća za 15. Prema tome, posle svakog vitezovog udarca mačem, broj glava kod zmaja menja se za broj koji je deljiv sa 3. Kako broj 1987 pri deljenju sa 3 daje ostatak 1, to će broj glava zmaja uvek pri deljenju sa 3 davati ostatak 1, pa nikad ne može biti jednak nuli.

286. $n \equiv 0 \pmod 5 \Rightarrow 3(n^2 + n) + 7 \equiv 2 \pmod 5$; $n \equiv 1 \pmod 5 \Rightarrow 3(n^2 + n) + 7 \equiv 3 \pmod 5$; $n \equiv 2 \pmod 5 \Rightarrow 3(n^2 + n) + 7 \equiv 0 \pmod 5$; $n \equiv 3 \pmod 5 \Rightarrow 3(n^2 + n) + 7 \equiv 3 \pmod 5$; $n \equiv 4 \pmod 5 \Rightarrow 3(n^2 + n) + 7 \equiv 2 \pmod 5$; Dakle, traženi brojevi su oblika $n = 5k + 2$, gde je $k = 0, 1, 2, \ldots$

287. $x \equiv \pm 1 \pmod 5 \Rightarrow x^4 = 1 \pmod 5$; $x \equiv \pm 2 \pmod 5 \Rightarrow x^4 \equiv 1 \pmod 5$. Dakle, ako nije $x \equiv 0 \pmod 5$, tada je $x^4 \equiv 1 \pmod 5$. Odavde sledi $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + e^4 \equiv 0 \pmod 5$

288. Broj a možemo izraziti kao: $7k$ ili $7k \pm 1$ ili $7k \pm 2$ ili $7k \pm 3$, pa zaključujemo da ostatak deljenja broja a^2 sa 7 može biti: 0, 1, 2, 4. Zbir bilo koja dva od ovih ostataka ne može biti 7 ni 0, sem kad su oba 0, a to je kad su, recimo a^2 i b^2 deljivi sa 7, a tada su takođe a i b deljivi sa 7.

289. Slično prethodnom zadatku.

290. a) Ako bi bilo koja dva od brojeva $a, 2a, \ldots, (p-1)a$ pripadala istoj klasi, onda bi njihova razlika, recimo $k \cdot a$, $k < p$, bila deljiva sa p. To nije moguće, jer je p prost broj, $k < p$ i a nije deljivo sa p.

b) Prema a) zaključujemo da od brojeva $a, 2a, \ldots, (p-1)a$, svaki pri deljenju sa p daje samo jedan od ostataka: $1, 2, \cdots, (p-1)$, ali ne mora biti ovim redom. Stoga je:
$a \cdot 2a \cdots (p-1)a \equiv 1 \cdot 2 \cdots (p-1) \pmod p$. Brojevi $1, 2, \ldots, (p-1)$ su uzajamno prosti sa p, pa se poslednja kongruencija može skratiti. Ostaje: $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$, pa je $a^{p-1} - 1$ deljivo sa p.

291. $\overbrace{11\cdots 1}^{p-1} = \dfrac{\overbrace{99\cdots 9}^{p-1}}{9} = \dfrac{1\overbrace{00\cdots 0}^{p-1}-1}{9} = \dfrac{10^{p-1}-1}{9}$. Kako 10 nije deljivo sa p, to je brojilac, a otuda i naš broj, deljiv sa p (prema prethodnom zadatku).

292. Brojevi a i b takođe su prirodni i mogu se izraziti na jedan od načina: $a = 5m$, ili $a = 5m \pm 1$ ili $a = 5m \pm 2$, odnosno: $b = 5n$, ili $b = 5n \pm 1$, ili $b = 5n \pm 2$, gde su m i n prirodni brojevi. Tada su brojevi a^2 i b^2 oblika: $a^2 = 5p$ $(= 25m^2)$, ili $a^2 = 5p + 1$ $(= 25m^2 \pm 10m + 1 = 5(5m^2 \pm 2m) + 1)$, ili $a^2 = 5p + 4$ $(= 25m^2 \pm 10m + 4 = 5\,(5m^2 \pm 2m) + 4)$, odnosno $b^2 = 5q$, ili $b^2 = 5q + 1$, ili $b^2 = 5q + 4$. Sada je lako utvrditi da je proizvod deljiv sa 5 ako je $a^2 = 5p$ ili $b^2 = 5q$. U protivnom, ako su a i b oba oblika $5k + 1$ ili oba oblika $5k + 4$, tada je razlika deljiva sa 5. Ako se ovi oblici razlikuju, onda je zbir deljiv sa 5.

293. Na primer: a) $n \in N$ i $x = [x] + \alpha$, $0 \le \alpha < 1$, pa je $n + x = n + [x] + \alpha$, tj. $[n + x] = n + [x]$;

c) Po definiciji je $[a] \le a$, pa je $\left[\frac{b}{a}\right] \le \frac{b}{a}$. Zbog toga je $a \cdot \left[\frac{b}{a}\right] \le a \cdot \frac{b}{a} = b$.

e) $a = [a] + \alpha$, $0 \le \alpha < 1$ i $b = [b] + \beta$, $0 \le \beta < 1$. Dalje je: $[a + b] = [[a] + [b] + \alpha + \beta] = [a] + [b] + [\alpha + \beta]$, prema a). Dakle: $[a + b] \ge [a] + [b]$, a znak jednakosti važi samo za $\alpha + \beta < 1$.

294. U nizu: $1, 2, \ldots, N$, svaki q-ti član je deljiv sa q, a takvih brojeva je $\left[\frac{N}{q}\right]$. Od njih je ponovo svaki q-ti deljiv sa q itd. Otuda sledi traženi zaključak za $n!$ i p.

295. Broj $n!$ ima onoliko nula koliko puta se 5 pojavljuje kao činilac u razvoju proizvoda (jer će svaka petica pomnožena sa 2 dati činilac 10, tj. pojaviće se u faktorijelu 0).

a) $\left[\frac{60}{5}\right] + \left[\frac{60}{5^2}\right] + \left[\frac{60}{5^3}\right] + \cdots = 12 + 2 = 14$ nula.

b) Za $n \le 49$ ima manje od 11 nula. Za $n = 50$ ima 12 nula. Za $n \ge 50$ ima 12 ili više od 12 nula. Ne postoji n takav da se $n!$ završava sa 11 nula.

296. $S = \left[1 + \frac{1}{x}\right] + \left[1 + \frac{1}{x+1}\right] + \cdots + \left[1 + \frac{1}{x+k-1}\right] = 1 + \left[\frac{1}{x}\right] + 1 + \left[\frac{1}{x+1}\right] + \cdots + 1 + \left[\frac{1}{x+k-1}\right] = k + \left[\frac{1}{x}\right]$, jer je $x + 1 > 1, \ldots, x + k - 1 > 1$, pa je $\left[\frac{1}{x+1}\right] + \cdots + \left[\frac{1}{x+k-1}\right] = 0$. Kako je $\frac{1}{2} < x < 1$, to je $1 < \frac{1}{x} < 1$, pa je $\left[\frac{1}{x}\right] = 1$. Dakle: $S = k + 1$.

297. Uzmimo da je $a = [a] + \theta$ ili $a = [a] + \theta + \frac{1}{2}$, gde je $0 \le \theta < \frac{1}{2}$. Proveravanjem jednog, pa drugog slučaja, utvrđujemo tačnost date formule.

298. Koristićemo formulu iz prethodnog zadatka:

$$S = \left[\frac{n}{2} + \frac{1}{2}\right] + \left[\frac{n}{4} + \frac{1}{2}\right] + \left[\frac{n}{8} + \frac{1}{2}\right] + \cdots + \left[\frac{n}{2^{k+1}} + \frac{1}{2}\right] + \cdots =$$
$$= [n] - \left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n}{2}\right] - \left[\frac{n}{4}\right] + \left[\frac{n}{4}\right] - \left[\frac{n}{8}\right] + \cdots + \left[\frac{n}{2^k}\right] - \left[\frac{n}{2^{2k-1}}\right] + \cdots$$

Ma koliki bio broj n, uvek se može naći dovoljno veliki broj k da je $0 < \frac{n}{2^{k+1}} < 1$, pa je $\left[\frac{n}{2^{k+1}}\right] = 0$ i svaki sledeći sabirak u S takođe će biti jednak 0. Sada u zbiru S poništimo suprotne sabirke i dobijemo: $S = n$.

299. Kako je $\sqrt[3]{1} = 1$ i $\sqrt[3]{8} = 2$, to je $[\sqrt[3]{1}] = [\sqrt[3]{2}] = \cdots = [\sqrt[3]{7}] = 1$. Dalje je $\sqrt[3]{27} = 3$, pa je $[\sqrt[3]{8}] = [\sqrt[3]{9}] = \cdots = [\sqrt[3]{26}] = 2$, zatim $[\sqrt[3]{27}] = [\sqrt[3]{28}] = \cdots = [\sqrt[3]{80}] = 3$ itd. Za $7 \le n \le 7$ je zbir na levoj strani jednakosti jednak 7, a očigledno, za $7 \le n \le 26$ je taj zbir jednak $2n - 7$. Ovaj manjak od 7 jedinica nadoknadićemo sa sledećih 7 brojeva. Dakle: $[\sqrt[3]{1}] + [\sqrt[3]{2}] + \cdots + [\sqrt[3]{33}] = 2 \cdot 33 = 66$. To je jedino rešenje: $n = 33$.

300. Na primer b). Broj k može biti oblika: $k = 3p$ ili $k = 3p + 1$ ili $k = 3p + 2$.

Za $k = 3p$ imamo: $\left[\frac{k}{3}\right] + \left[\frac{k+1}{3}\right] + \left[\frac{k+2}{3}\right] = \left[\frac{3p}{3}\right] + \left[\frac{3p+1}{3}\right] \left[\frac{3p+2}{3}\right] = [p] + \left[p + \frac{1}{3}\right] + \left[p + \frac{2}{3}\right] = p + p + \left[\frac{1}{3}\right] + p + \left[\frac{2}{3}\right] = 3p = k$.

Za $k = 3p + 1$ imamo: $\left[\frac{k}{3}\right] + \left[\frac{k+1}{3}\right] + \left[\frac{k+2}{3}\right] = \left[\frac{3p+1}{3}\right] + \left[\frac{3p+2}{3}\right] \left[\frac{3p+3}{3}\right] = \left[p + \frac{1}{3}\right] + \left[p + \frac{2}{3}\right] + [p + 1] = [p] + \left[\frac{1}{3}\right] + p + \left[\frac{2}{3}\right] + p + 1 = 3p + 1 = k$.

Za $k = 3p + 2$ imamo: $\left[\frac{k}{3}\right] + \left[\frac{k+1}{3}\right] + \left[\frac{k+2}{3}\right] = \left[\frac{3p+2}{3}\right] + \left[\frac{3p+3}{3}\right] \left[\frac{3p+4}{3}\right] = \left[p + \frac{2}{3}\right] + [p + 1] + \left[p + 1 + \frac{1}{3}\right] = p + \left[\frac{2}{3}\right] + p + 1 + p + 1 + \left[\frac{1}{3}\right] = 3p + 2 = k$.

301. Odstupanje je $|a-a'|$: a) 2, b) 0,15, c) 0,057, d) 0,00274, e) 0,029.

302. a) 0,18, b) 0,037, c) 0,22, d) $\sqrt{1,21}=1,1$, pa je odstupanje 0,11, e) 0,027, f) 0,025, g) 0,1.

303. Apsolutnu grešku označićemo sa $\triangle$, a relativnu sa ρ.

a) $\triangle=1$, $\rho=\dfrac{\triangle}{\overline{a}}=\dfrac{1}{4}=0,25$; b) $\triangle=0,235$, $\rho=0,002$ itd.

304. $2,3\le a\le 2,4$ (jer je $2,35-0,05=2,3$ i $2,35+0,05=2,4$). Relativna greška je $\rho=\dfrac{\triangle}{a}\le\dfrac{0,05}{2,35}$, pa je $\rho\le 0,0213$ itd.

305. a) $a=6,5\pm1,5$, jer $\dfrac{5+8}{2}=6,5$ i $|6,5-5|=1,5$.

b) $a=3,7\pm0,1$, c) $a=2,79\pm0,01$, d) $a=15,3835\pm0,0005$.

306. Za manju približnu vrednost uzećemo donju granicu broja m, a za veću približnu vrednost uzećemo gornju granicu broja n. Prema tome, imamo: $2,344\le a\le 2,37$, pa je $a=2,357\pm0,013$. Relativna greška je $\rho\le\dfrac{0,013}{2,344}$, tj. $\rho\le 0,0056$, ili u procentima: 0,56 %.

307. $1,41425\pm0,00005$ ima 4 sigurne decimale. Broj $1,7320505\pm0,0000005$ ima 6 sigurnih decimala.

308. a) $8,38\pm0,03$, b) $8,66\pm0,06$, c) $8,94\pm0,09$, d) $1,33\pm0,04$, e) $0,95\pm0,16$, f) $3,4\pm0,06$.

309. a) $20,3742\pm0,1914$, računajući na 4 decimale, a $20,38\pm0,2$ na 2 decimale itd.

310. 1) $8,71\le a\le 8,75$ i $5,03\le b\le 5,05$. Ove dve dvojne vrednosti daju podatke za ispunjavanje prve dve vrste tabele. Množeći prvu dvojnu nejednakost sa 2 dobićemo: $17,42\le 2a\le 17,5$. Dobijene granice upišemo u treću vrstu tabele itd. Konačno dobijemo: $x=4,27\pm0,05$.

	$\underline{p}$	$\overline{p}$
a	8,71	8,75
b	5,03	5,05
$2a$	17,42	17,5
$2a-b$	12,37	12,47
$(2a-b)\cdot a$	107,74	109,12
b^2	25,5	25,51
x	4,22	4,32

2) Računajući kao u prethodnom slučaju, dobijamo sledeće razultate:

a) $6,89\pm0,09$, b) $50,81\pm0,53$, c) $50,81\pm0,46$, d) $0,99\pm0,02$, e) $0,37\pm0,02$.

311. a) $7:8$, b) $5:7$, c) $27:32$, d) $8:7$, e) $5:8$.

312. Proverimo da li je proizvod spoljašnjih članova jednak proizvodu unutrašnjih.

313. a) $1:2=1:x$, b) $9:x=8:3$ c) $x:7=11:1$, d) $9:2x=5:3$,
e) $a:b=3:10$, f) $x:3=1:4$, g) $a:b:c:d=30:20:15:12$,
h) $(a+b):1=abx:1$, i) $x:a=a:c$.

314. a), c). **315.** a) Na primer: $5:2=10:2$ itd.

316. a) 6, b) 3, c) 0,6, d) 2,24, e) $\dfrac{1}{10}$. **317.** Da.

318. Po definiciji je $\dfrac{a}{m}=\dfrac{b}{n}=\dfrac{c}{p}=\cdots=\dfrac{1}{z}=k$ odakle je $a=km$, $b=kn$, $c=kp,\ldots$, $l=kz$, pa je: $\dfrac{\alpha a+\beta b+\gamma c+\cdots+\lambda l}{\alpha m+\beta n+\gamma p+\cdots+\lambda z}=\dfrac{\alpha km+\beta kn+\gamma kp+\cdots+\lambda kz}{\alpha m+\beta n+\gamma p+\cdots+\lambda z}=\dfrac{k(\alpha m+\beta n+\gamma p+\cdots+\lambda z)}{\alpha m+\beta n+\gamma p+\cdots+\lambda z}=$ $k=\dfrac{a}{m}=\dfrac{b}{n}=\dfrac{c}{p}=\cdots=\dfrac{l}{z}$. Na osnovu ove osobine izlazi, između ostalog, i: za $a\ne b$ iz $a:b=c:d$ sledi $(a+b):(c+d)=a:c$ i $(a-b):(c-d)=a:c$, ili recimo iz: $a:b:c=x:y:z$ sledi da je $(a+b+c):(x+y+z)=b:y$, ili npr. iz $a:b:c=x:y:z$ sledi $(2a-3c):(2x-3z)=b:y$ i slično.

319. a) $19:x=1:3$, b) $3:a=1:3$, c) $1:x=2:5$, d) $5:x=6:5y$, e) $x:y=3:10$.

320. Na primer: d) Date proporcije napišimo u obliku $\frac{a}{3}=\frac{b}{4}$, $\frac{b}{6}=\frac{c}{5}$ i $\frac{d}{7}=\frac{a}{6}$. Jednake razmere (razlomke) dobićemo ako brojiocima koji su označeni jednakim slovima dodelimo jednake imenioce. Tako iz prve dve proporcije dobijamo: $\frac{a}{9}=\frac{b}{12}$ i $\frac{b}{12}=\frac{c}{10} \Rightarrow \frac{a}{9}=\frac{b}{12}=\frac{c}{10}$. Uzimajući u obzir i treću proporciju imamo: $\frac{a}{9}=\frac{b}{12}=\frac{c}{10}$ i $\frac{d}{7}=\frac{a}{6} \Rightarrow \frac{a}{18}=\frac{b}{24}=\frac{c}{20}=\frac{d}{21}$. Konačno imamo: $a:b:c:d=18:24:20:21$.

Ostali rezultati: a) $a:b:c=3:5:10$; b) $m:n:p:q=12:9:18:4$;
c) $a:b:c:d:e=5:8:12:20:6$; d) $a:b:c=225:400=288$.

321. a) $x=18$, $y=36$, $z=54$, $t=90$; b) $x=22$, $y=33$, $z=44$, $t=99$;
c) $x=27$, $y=36$, $z=54$, $t=81$.

322. a) $x:y=4:5$ itd. $x=12$, $y=15$; b) $x=12$ i $y=16$.

323. a) $x=6$, $y=9$, $z=21$; b) $x=26$, $y=18$, $z=14$, $u=22$;
c) $a=30$, $b=72$, $c=32$; d) $a=45$, $b=120$, $c=36$; e) $a=14$, $b=16$, $c=18$, $d=20$.

324. Označimo $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}=t$. Tada važi $a_k=tb_k$, $k=1,2,\ldots,n$, pa dobijamo: $(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)=(t^2b_1^2+t^2b_2^2+\cdots+t^2b_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)=t^2(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)^2=(tb_1^2+tb_2^2+\cdots+tb_n^2)=(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2$.

325. a) Označimo: $t=\frac{ay-bx}{c}=\frac{cx-az}{b}=\frac{bz-cy}{a}$. Tada je $ay-bx=ct$, $cx-az=bt$, $bz-cy=at$, $\frac{y}{b}-\frac{x}{a}=\frac{c}{ab}t$, $\frac{x}{a}-\frac{z}{c}=\frac{b}{ac}t$, $\frac{z}{c}-\frac{y}{b}=\frac{a}{bc}t$, pa dobijamo $\frac{c^2+b^2+a^2}{abc}t=0$, odnosno $t=0$. Prema tome važi: $ay-bx=cx-az=bz-cy=0$, odakle dobijamo: $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$.

b) Prema osobinama produženih proporcija je: $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{a_2+a_3+\cdots+a_{n+1}}=\frac{a_1}{a_2}$, $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{a_2+a_3+\cdots+a_{n+1}}=\frac{a_1}{a_2},\cdots,\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{a_2+a_3+\cdots+a_{n+1}}=\frac{a_n}{a_{n+1}}$. Traženu jednakost dobijemo kad pomnožimo ove jednakosti.

326. (Ovo je tzv. *srazmerni račun*). Napravićemo šemu za rešavanje u sledećem obliku:

$$\begin{array}{llll} \uparrow\ 4,5\ m & \text{štofa} & \uparrow\ 19800 & \text{din.}\\ \mid\ 7\ m & \text{štofa} & \mid\quad x & \text{din.}\\ \hline \end{array}$$

Od brojeva 4,5, 19800, 7 i x treba načiniti proporciju. Pre toga treba utvrditi da li se radi o upravno ili obrnuto srazmernim veličinama. Strelica od x prema 19800 din. određuje razmeru $x:19800$. Znamo da za *više dinara* dobijamo *više metara štofa*, pa se radi o upravno srazmernim veličinama. To se označava drugom strelicom koja se postavlja ispred brojeva $4,5m$ i $7m$ i ima isti smer kao strelica ispred x. Redosled pisanja brojeva u razmerama određuje smer strelice. Tako dobijamo proporciju: $x:19800=7:4,5$ ili $\frac{x}{19800}=\frac{7}{4,5}$, odakle je $x=19800\cdot\frac{7}{4,5}=30800$ dinara. Toliko treba platiti za 7 m štofa.

327. Načinimo šemu i postavimo strelice kojim određujemo redosled brojeva u razmeri:

$$\begin{array}{llll} \mid\ 3 & \text{radnika} & \uparrow\ 12 & \text{časova}\\ \downarrow\ 4 & \text{radnika} & \mid\quad x & \text{časova}\\ \hline \end{array}$$

Ovde se radi o obrnuto srazmernim veličinama, jer za *više časova* rada dovoljno je *manje radnika*. Zbog toga su strelice suprotno usmerene. Dobijamo proporciju: $x:12=3:4$, odnosno $\frac{x}{12}=\frac{3}{4}$, odakle je $x=12\cdot\frac{3}{4}=9$ časova.

328. Iz proporcije za ostatak posla: $x:64=33:24$ dobijamo $x=88$ dana. Ceo posao urađen je za 104 dana.

329. 400 grama. **330.** 5,25 m štofa.

331. U ovom zadatku rešenje zavisi od dva para srazmernih veličina. Do rešenja možemo doći na sledeći način:

$$\begin{array}{ll|ll|ll} \uparrow & 60 \text{ eura} & \uparrow & 4 \text{ m štofa} & \uparrow & 75 \text{ cm širine} \\ | & x \text{ eura} & | & 8 \text{ m štofa} & | & 45 \text{ cm širine} \\ \hline \end{array}$$

Strelice kod m štofa i kod cm širine imaju isti smer, kao kod x eura, jer su i m štofa i cm širine upravno srazmerne nepoznatoj ceni. (Za više eura dobije se više m štofa i za više eura dobija se više cm širine.) Rezultat se dobija iz proporcije: $x : 60 = \frac{8}{4} \cdot \frac{45}{75}$. Na desnoj strani je tzv. *složena razmera*, koja se dobija množenjem prostih razmera). Konačno je: $x = 60 \cdot \frac{8}{4} \cdot \frac{45}{75} = 72$ eura

332.
$$\begin{array}{ll|ll|ll|ll} | & 28 \text{ radnika} & \uparrow & 17 \text{ dana} & \uparrow & 5440 \text{ m} & | & 8 \text{ časova dnevno} \\ \downarrow & 42 \text{ radnika} & | & x \text{ dana} & | & 5040 \text{ m} & \downarrow & 7 \text{ časova dnevno} \\ \hline \end{array}$$

(Smerovi strelica se određuju uvek u poređenju sa traženom veličinom. U ovom primeru određuje se koje su veličine upravno srazmerne i koje su obrnuto srazmerne nepoznatom broju dana). Odavde je:

$$x : 17 = \frac{28}{42} \cdot \frac{5040}{5440} \cdot \frac{8}{7}, \text{ odnosno } x = 17 \cdot \frac{28}{42} \cdot \frac{5040}{5440} \cdot \frac{8}{7} = 12 \text{ dana.}$$

333. 8500 dinara. **334.** 420 metara. **335.** 576 litara.

336. Nije. **337.** 5 časova dnevno.

338. Ovakav problem naziva se *račun podele*. Polazimo od proporcije: $x : y : z = \frac{1}{2400} : \frac{1}{4000} : \frac{1}{1500}$. Kad desnu razmeru uprostimo, dobićemo: $x : y : z = 5 : 3 : 8$, pri čemu je $x + y + z = 989,44$ eura. Dalje imamo: $x = 5k$, $y = 3k$, $z = 8k$, pa je $16k = 989,44$ eura, odnosno $k = 61,84$ eura. Prema tome: $x = 5 \cdot 61,84$ eura, odnosno $x = 309,2$ eura. Slično dobijamo: $y = 185,52$ eura i $z = 494,72$ eura.

339. Zoran je nasledio 112500 dolara, Dušan 75000 dolara i Nikola 90000 dolara.

340. Supa staje 720 dinara, glavno jelo 1200 dinara, salata 900 dinara.

341. 20000000, 32000000, 24000000. **342.** 12000000, 9000000, 4800000.

343. Bane je dobio 13600 dinara, Mirjana 10800, Nataša 8800.

344.
$$\begin{array}{lcccr|c|} a \text{ kg po } 7500 & \searrow & & \nearrow & 1300 & 13 \\ & & 6800 & & & \\ b \text{ kg po } 5500 & \nearrow & & \searrow & 700 & 7 \end{array}$$
(skratimo sa 100.) Uslovi su $a + b = 120$ i $a : b = 13 : 7$. Računom podele dobijamo: $a = 78$ kg i $b = 42$ kg.

345. Pomešaćemo jedan jači i jedan slabiji rastvor, kao u prethodnom primeru. Postoje dve kombinacije: a sa d i b sa c, ili a sa c i b sa d:

$$\begin{array}{llccr|l} a & 80\% & \searrow & & \nearrow\ 10 & 2 \\ b & 70\% & \searrow & & \nearrow\ 5 & 1 \\ & & & 50\% & & \\ c & 45\% & \nearrow & & \searrow\ 20 & 4 \\ d & 40\% & \nearrow & & \searrow\ 30 & 6 \end{array} \qquad \text{ili} \qquad \begin{array}{llccr|l} a & 80\% & \searrow & & \nearrow\ 5 & 1 \\ b & 70\% & \searrow & & \nearrow\ 10 & 2 \\ & & & 50\% & & \\ c & 45\% & \nearrow & & \searrow\ 30 & 6 \\ d & 40\% & \nearrow & & \searrow\ 20 & 4 \end{array}$$

Jedno rešenje je $a : b : c : d = 2 : 1 : 4 : 6$, a drugo $a : b : c : d = 1 : 2 : 6 : 4$.

346.

$$\begin{array}{llccr|c|c} a & 65\% & \searrow & & \nearrow\ 15 & 15 & 3 \\ b & 50\% & \searrow & 45\% & \nearrow\ 15 & 15 & 3 \\ c & 30\% & \nearrow & & \searrow\ 5+20 & 25 & 5 \end{array}$$

Tražena proporcija je $a : b : c = 3 : 3 : 5$.

347. 56 litara.

348. Pomešamo 50 g zlata finoće 600 jedinica, 50 g finoće 700 i 20 g finoće 800.

349. Mešamo 5 g zlata od 16 karata, 5 g zlata od 18 karata i 25 g čistog zlata. Dobićemo 35 g standard zlata.

350. Razmera delova u mešavini je: 8 : 3 : 1 : 7 ili 3 : 8 : 7 : 1.

351. Rastvor možemo kombinovati sa destilisanom vodom na tri načina. Najpovoljnije je pomešati destilisanu vodu sa pedesetpetprocentnim rastvorom.

352. Ovde je $P = 2628$ din, $p = 80$ %, traži se glavnica: $G = \dfrac{100 \cdot P}{p} = \dfrac{262800}{80} = 3285$ dinara. Za plaćanje u gotovom novcu popust je 657 dinara.

Koristeći decimalni zapis za procente, ovaj zadatak se može rešavati bez proporcija na sledeći način: $0,8c = 2628 \Rightarrow x = 2628 : 0,8 = 3285$ dinara itd.

353. Kod Vanje, umesto cene c sada je: $1,20 \cdot c \cdot 0,80 = 0,96c$, tj. za 4 % niže. Kod Cveleta: $0,80c \cdot 1,20 = 0,96c$, isto kao kod Vanje. Dakle, treba pazariti kod Vanje ili kod Cveleta, a kod Boška je najskuplje.

354. Suva materija drveta, koja ne isparava, predstavlja 36 % od 2,25 tona, tj. $p = 36$ %, $G = 2,25$ tona, pa je $P = \dfrac{G \cdot p}{100} = 0,81$ tona. Ova količina posle sušenja čini 54 % težine stabla (46 % je voda): $p = 54$ %, $P = 0,81$, $G = \dfrac{100 \cdot P}{p} = 1,5$ tona. Dakle, težina stabla se smanjila za 0,75 tona.

355. 3840 tona. **356.** 10 %.

357. Razred je sa uspehom završilo 87,5 %, a ponavlja razred 12,5 %.

358. Ako je $100c$ prvobitna cena, nova je $96c$, a povećanje u odnosu na novu cenu je $4c$. U procentima to je $4c : 0,96c = \dfrac{25}{6} = 4\dfrac{1}{6}$ %.

359. 6,7 %. **360.** 1550 grama. **361.** Uveća se za 44 %. **362.** $33\dfrac{1}{3}$ %.

363. 160 litara. **364.** 32,4 %. **365.** 80 predmeta. **366.** 125 kg.

367. 75 minuta. **368.** 21 %. **369.** 75 dinara. **370.** 64 %.

371. 20 %. **372.** 264 kg. **373.** 8750 dinara. **374.** Posuda 800 g, vode 1200 g.

375. 25 %. **376.** 28 %. **377.** 70,4 kg. **378.** 112 tona. **379.** 75000 dinara.

380. Po najnižoj ceni je prodato 8 kg robe $\left(\dfrac{3}{8} \text{ iznose } 30 \text{ kg}\right)$ itd. Nabavna cena je 9000 dinara po kg. Nabavna vrednost ukupne količine robe je 72000 dinara itd.

381. Ukupna nabavna cena je 480000 dinara, pa zarada iznosi 5%.

382. Prodato je 300 kg robe, a planirana cena bila je 6000 dinara.

383. $P = 1349$ stanovnika, $p = 35,5$ promila, $G = \dfrac{P \cdot 1000}{p} = \dfrac{1349 \cdot 1000}{35,5} = 38000$ stanovnika.

384. 1208 dinara. **385.** 55,5 grama. Finoća standard srebra je 925 promila.

386. Računajući da svaki mesec ima 30 dana, do kraja godine biće 160 dana. Imamo: $K = 32000$ dinara, $d = 160$ dana, $i = 9$ %, traži se kamata I. Iz proporcije za vreme računato u danima: $K : I = 36000 : id$ dobijamo: $I = \dfrac{K \cdot i \cdot d}{36000} = 1280$ dinara.

387. 16560 dinara. **388.** 1095000 dinara. **389.** Drugog novembra.

390. 2000 dinara. **391.** 70 %. **392.** 240 dana.

393. Oba iznosa uvećana za kamatu imaće istu vrednost posle 4 godine 7 meseci i 21 dan.

394. Pre osam meseci je uloženo 1200 dinara i pre devet meseci 3200 dinara sa kamatom 7,5 %.

395. Ukupna suma je 900000 dinara. Od toga 300000 dinara je uloženo sa 6 % kamate, 180000 dinara sa 8 % kamate i 420000 dinara sa 4 % kamate.

396. a) $\frac{2}{3}$; b) 0; c) -24; d) $\frac{7}{8}$; e) 2.

397. a) $a^2b^{-2}c^2$; b) $a^3bx^2y^{-1}$; c) $a^6b^{-1}c$.

398. a) x^5; b) $\frac{x}{y^2}$; c) $\frac{x^2}{y}$. **399.** a) $\frac{3a^2}{25}$; b) $\frac{1}{a^{12}b^{24}}$; c) $\frac{a}{b}$; d) $a^7 - 3 + \frac{4}{a^4} - \frac{5}{a^5}$.

400. a) n^2; b) $\frac{1}{m^3}$; c) $\frac{n}{m^2p^4}$.

401. a) 1) $-x^3 + 8x^2 - x + 1$; 2) $x^4 + x^3 + 7x^2 - 3x + 6$; 3) $12x^2 - 7x + 4$; 4) $-2x^2 - 6x^2y + 6xy^2 + y^2$; b) 1) 1; 2) $-7x$.

402. a) 1) $18m - 9n$; 2) $20a^2 - 3a$; 3) $2a^2 + 2b$; 4) $m^2 - 10m$; 5) $19a - 8b + c - 2d$; 6) $7x^2 - 3ax$; 7) $5a^4 - 3a^3b - a^2b^2 - 7ab^3$; 8) $4a^n - 7b^m$; 9) $-6x^{n+1} - 6x$; 10) $-11x^3 + 13x^2 - 4x - 1$.

b) 1) $8x^3 - 27y^3$; 2) $8x^3 + y^3$; 3) $x^4 - 1$; 4) $a^2 + b^2$; 5) $4z^4 + 19z^2 - 5$; 6) $2x^4 + 4x^3y - 10x^2y^2 - 3x^2y - 6xy^2 + 15y^3$; 7) $a^4 - 7a^3b + 13a^2b^2 - 6ab^3$; 8) $a^4 - 1$; 9) $-6a^5 + 7a^4b + 20a^3b^2 - 13a^2b^3 - 20ab^4$; 10) $15b^2 - 22bc + 8c^2$; 11) $2x^2 + 9x + 4$; 12) $2a^3 + 5a^2b - 5ab^2 + b^3$; 13) $x^3 - 2x^2 - 13x - 10$; 14) $x^4 - y^4$; 15) $a^4 - b^4$; 16) $xz^2 - yz^2$.

403. a) $10a^4 - 10a^3b + 4a^2b^2 - 20ab^3 + 2b^4$; b) $-6a^3b + 12ab^3 - 4b^4$; c) $-8a^4 + 16a^3b - 14a^2b^2 + 8ab^3 - 6b^4$.

404. a) 60; b) -3; c) $-\frac{55}{9}$; d) $1\frac{1}{2}$; e) 24; f) 6; g) 10, 32; h) 12, 08; i) $8\frac{1}{2}$.

405. Na primer: g) $A^2 = x^2 + y^2 + 4 - 2xy + 4x - 4y$, $A^3 = ((x - y) + 2)^3 = (x - y)^3 + 6(x - y)^2 + 12(x - y) + 8 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 + 6x^2 - 12xy + 6y^2 + 12x - 12y + 8$.

406. a) $(x + 1)^2$; b) $(2a + b)^2$; c) $(m - 3n)^2$; d) $(5x + 2y)^2$; e) $\left(\frac{1}{2} - x\right)^2$; f) $(0,8a^3 + 5)^2$.

407. a) $(k - 1)^3$; b) $(x + 1)^3$; c) $(3m - 2n)^3$.

408. Umesto ? treba da stoji: a) n^2; b) $9b^2$; c) $70bx$; d) a^2; e) $10b$; f) $9n^2$; g) $108a$; h) $96a$ i $48a^2$; i) $125m^3$ i $-15m$ (ili $-125m^3$ i $15m$).

409. a) $x^3 - 4x^2 + 13x - 9$; b) $x^2 + 2x + 3$; c) $3 - 10a - 9a^2$; d) $a^2 + 2b^2 - 2bc$.

410. Jedna od ideja je da se oslobodimo zagrada na obe strane jednakosti i sredimo dobijene polinome.

411. a) Iskoristiti jednakost $(m + n)^2 + (m - n)^2 = 2(m^2 + n^2)$.

b) Staviti: $a^2 + b^2 + c^2 = x$, $bc + ca + ab = y$. Tada leva strana ima oblik $(x + y)^2 - (x + 2y)x$.

c) Neka je $x + 2 = u$ i $xy + y = v$. Tada leva strana jednakosti daje $(u + v)^2 + (u - v)^2 = 2u^2 + 2v^2 = 2(x + 2)^2 + 2y^2(x + 1)^2$.

d) Stavljajući $x + y + z = 2s$ na levu stranu jednakosti dobićemo $x(2s - 2x)^2 + y(2s - 2y)^2 + z(2s - 2z)^2 = 4s^2(x + y + z) - 8s(x^2 + y^2 + z^2) + 4(x^3 + y^3 + z^3)$. Zamenimo $2s = x + y + z$ i dobićemo desnu stranu jednakosti.

412. a) $x^2 + 2xy + y^2 + x^2 - 2xy + y^2 = (x + y)^2 + (x - y)^2$.

b) $a^2 + ax + \frac{1}{4}x^2 + b^2 + bx + \frac{1}{4}x^2 + c^2 + cx + \frac{1}{4}x^2 + d^2 + dx + \frac{1}{4}x^2 = \left(a + \frac{1}{2}x\right)^2 + \left(b + \frac{1}{2}x\right)^2 + \left(c + \frac{1}{2}x\right)^2 + \left(d + \frac{1}{2}x\right)^2$.

413. Ako je $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$, tada je $P(1) = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0$. a) 1; b) 0; c) Zbog binoma $(x - 1)$ ceo proizvod od pet binoma je 0, pa je $P(1) = 15$.

414. Za polinom sa celim koeficijentima i različite cele brojeve a i b važi da je $p(a) - p(b)$ deljivo sa $a - b$. U našem slučaju, ako bi traženi polinom postojao, imali bismo za $a = 6$, $b = 2$ da je $a - b = 4$, $p(a) - p(b) = 2$, pa bi moralo da bude 2 deljivo sa 4, što je netačno. Dakle, ovakav polinom $p(x)$ ne postoji.

415. Polinom $p(x) - 7$ ima bar četiri celobrojne nule, pa je $q(x) = p(x) - 7 = (x - a_1)(x - a_2)(x - a_3)(x - a_4)q_1(x)$. Ako je $p(x) = 14$, onda je $q(x) = 7$, tj. $(x - a_1)(x - a_2)(x - a_3)(x - a_4)q_1(x) = 7$. Ovo je nemoguće, jer se 7 ne može rastaviti kao proizvod bar 4 različita cela broja.

416. a) Mora biti $x^3+4x^2+6x+4 = A(x+1)^3+B(x+1)^2+C(x+1)+D$, ili $x^3+4x^2+6x+4 = Ax^3 + (3A + B)x^2 + (3A + 2B + C)x + A + B + C + D$. Na osnovu teoreme o identičnoj jednakosti polinoma dobijamo: $A = 1$, $3A + B = 4$, $3A + 2B + C = 6$, $A + B + C + D = 4$. Odavde dobijamo: $A = 1 = B = C = D$, pa je $x^3 + 4x^2 + 6x + 4 = (x + 1)^3 + (x + 1)^2 + (x + 1) + 1$;

b) $2(x - 2)^3 + 3(x - 2) + 3$.

417. Stavimo $F(x, y) = x(y + 1) = (a + b)(a - b) = a^2 - b^2$, pa odredimo a i b iz uslova: $a + b = x$ i $a - b = y + 1$. Odavde dobijemo: $a = \dfrac{x + y + 1}{2}$ i $b = \dfrac{x - y - 1}{2}$, pa je $F(x, y) = \left(\dfrac{x + y + 1}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{x - y - 1}{2}\right)^2$. Ako stavimo: $a - b = x$ i $a + b = y + 1$, dobijamo drugo rešenje: $F(x, y) = \left(\dfrac{x + y + 1}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{y - x + 1}{2}\right)^2$.

418. $a = 3$, $b = 1$, $P = \pm(x^2 + x + 1)$. *Uputstvo*: Pretpostavimo da je $P = x^2 + px + q$ itd.

419. Za $x = 0$ dobija se $P(0) = 0$. Za $x = 1$ je $p(0) = -2 \cdot p(1)$, pa je $p(1) = 0$. Za $x = 2$, $2p(1) = -1 \cdot p(2)$, pa je i $p(2) = 0$. Dakle, $p(x) = x(x - 1)(x - 2)q(x)$. Zamenom u datu jednakost dobija se

(1) $\quad x(x - 1)(x - 2)(x - 3)q(x - 1) = (x - 3)x(x - 1)(x - 2)q(x)$ pa je $q(x) = q(x - 1)$

Rešenje $q(x) = c$ (c =const.) je jedino, jer ako bi $q(x)$ bio polinom

$$q(x) = a_0x^k + a_1x^{k-1} + \cdots + a_{k-1}x + a_k, \quad k \geq 1, \; a_0 \neq 0,$$

iz (1) bi sledilo

$$a_0(x - 1)^k + a_1(x - 1)^{k-1} + \cdots + a_{k-1}(x - 1) + a_k = a_0x^k + a_1x^{k-1} + \cdots + a_{k-1}x + a_k$$

Izjednačavanjem koeficijenta uz x^{k-1} dobija se da je: $ka_0 + a_1 = a_1$, a to je kontradikcija! Dakle, $p(x) = cx(x - 1)(x - 2)$.

420. Iz $P(x) = P(-x)$ zaključujemo da su svi koeficijenti uz neparne stepene x jednaki nuli.

421. a) Činioci slobodnog člana su ±1, ±2, ±3, ±6, a koeficijent najstarijeg člana je 1. Proveravanjem nalazimo da je $P(-2) = 0$ i $P(3) = 0$, pa su nule polinoma: $x_1 = -2$ i $x_2 = 3$. b) $x_1 = 1$, $x_2 = -1$. c) Koeficijent najstarijeg člana je 4, pa nule *mogu* biti: ±1, $\pm\dfrac{1}{2}$, $\pm\dfrac{1}{4}$. Proveravanjem dobijamo: $x_1 = 1$, $x_2 = \dfrac{1}{4}$. d) $x_1 = 1$, $x_2 = -2$. e) Dati polinom možemo napisati u obliku: $x(x^3 - 4x^2 - 7x + 10)$, pa na polinom u zagradi primenimo postupak kao u prethodnim zadacima: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = -2$, $x_4 = 5$.

422. Neka je $Q(x) = P(x) - P(-x)$. Polinom $Q(x)$ je najviše petog stepena, a ima šest nula: $x = \pm a$, $x = \pm b$, $x = \pm c$, pa je $Q(x) = 0$, tj. $P(x) = P(-x)$ za svako x.

423. Na primer, a) $mx - m = m(x-1)$; b) $15x^3y^2 + 10x^2y - 20x^2y^3 = 5x^2y(3xy + 2 - 4y^2)$;

c) $2m(x - 3) - 5n(3 - x) = 2m(x - 3) + 5n(x - 3) = (x - 3)(2m + 5n)$.

424. a) $4y(m - n) - m + n = 4y(m - n) - (m - n) = (m - n)(4y - 1)$;

b) $x^2 + xy + ax + ay = x(x + y) + a(x + y) = (x + y)(x + a)$;

c) $m^2x^4 - mnx^3 + 2mx^2 - 2nx - n + mx = mx^3(mx - n) + 2x(mx - n) + (mx - n) = (mx - n)(mx^3 + 2x + 1)$.

425. a) $16x^4 - 1 = (4x^2 - 1)(4x^2 + 1) = (2x - 1)(2x + 1)(4x^2 + 1)$;

b) $(x + 1)^2 - (2x - 1)^2 = ((x + 1) - (2x - 1))((x + 1) + (2x - 1)) = (2 - x) \cdot 3x$.

426. a) $\frac{1}{8}-b^3=\left(\frac{1}{2}-b\right)\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}b+b^2\right)$.

b) $(x+2y)^3+(x-y)^3=((x+2y)+(x-y))\big((x+2y)^2-(x+2y)(x-y)+(x-y)^2\big)=$ $(2x+y)(x^2+xy+7y^2)$; $x^6-64=(x^3-8)(x^3+8)$ itd.

$x^9+512=(x^3+8)(x^6-8x^3+64)=(x+2)(x^2-2x+4)(x^6-8x^3+64)$.

427. a) $\frac{1}{4}x^2+x+1=\left(\frac{1}{2}+1\right)^2$; b) $-x^3+9x^2y-27xy^2+27y^3=(3y-x)^3$.

428. a) $a^2-a-6=a^2-3a+2a-6=a(a-3)+2(a-3)=(a-3)(a+2)$ itd.

b) 1) $(a+1)(a+3)$; 2) $(2x-1)(x-2)$; 3) $\frac{1}{2}(y-4z)(y-2z)$; 4) $(n^2+2)(n-1)(n+1)$ itd.

429. a) 1) $3a^2-3b^2=3(a^2-b^2)=3(a-b)(a+b)$; 6) $ax^2-2ax+a=a(x^2-2x+1)=$ $a(x-1)^2$; 9) $a^7-a=a(a^6-1)=a(a^3-1)(a^3+1)=a(a-1)(a^2+a+1)(a+1)(a^2-a+1)$.

b) 1) $ax^2-3bx^2+3by^2-ay^2=a(x^2-y^2)-3b(x^2-y^2)=(x^2-y^2)(a-3b)=(x-y)(x+y)(a-3b)$; 5) $x^4+x^3-x^2+1=x^3(x+1)-(x^2-1)=x^3(x+1)-(x-1)(x+1)=(x+1)(x^3-x+1)$.

c) 1) $a^2-b^2-c^2+d^2-2ad-2bc=(a^2-2ad+d^2)-(b^2+2bc+c^2)=(a-d)^2-(b+c)^2=$ $(a-b-c-d)(a+b+c-d)$; 6) $\frac{1}{2}a^2+ab+\frac{1}{2}b^2=\frac{1}{2}(a^2+2ab+b^2)=\frac{1}{2}(a+b)^2$.

d) 1) $(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)$; 2) $(a+2)(a+3)(a+4)$; 3) $(a+1)(a+2)(a+3)$; 4) $a^2(a+1)^2(a^2-2a+2)$; 5) $(x-1)(x+3)^2$; 6) $(a^2+ab+b^2)(a-b+c)$; 7) $(x^2+y^2)(x^4-x^2y^2+y^4)$; 8) $(a+b)(b+c)(c-a)$.

430. a) 1) $x^4+4y^4+4x^2y^2-4x^2y^2=(x^2+2y^2)^2-4x^2y^2=(x^2+2y^2-2xy)(x^2+2y^2+2xy)$; 2) $(a^2+4a+8)(a^2-4a+8)$; 3)$(n^2-n+1)(n^2+n+1)$.

b) 1) $a^3+8+a^2-4=(a+2)(a^2-2a+4)+(a-2)(a+2)=(a+2)(a^2-a+2)$; 2) $(x-2)(x+4)^2$; 3)$(a-1)(a^2+3a+3)$; 4)$(x+1)(x+2)(x-3)$; 5) $a^3-6a^2+12a-8-12a+8+30-a=$ $(a-2)^3-(a-2)-12(a-3)=(a-2)(a-3)(a-1)-12(a-3)=(a-3)(a+2)(a-5)$; 6) $(x-1)(x+3)^2$.

c) 1) $x^{10}+x^9+x^8-(x^9+x^8+x^7)+(x^7+x^6+x^5)-(x^6+x^5+x^4)+(x^5+x^4+x^3)-(x^3+x^2+$ $x)+(x^2+x+1)=(x^2+x+1)(x^8-x^7+x^5-x^4+x^3-x+1)$; 2) $(a^2+a+1)(a^3-a^2+1)$; 3) $(x+1)^2(x^2+x+1)$; 4) $(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$.

d) 1) $(x-2)(x-3)(x^2+1)$; 2) $(x+2y)(x+4y)(x^2+4y^2)$;

3) Staviti $3xyz=xyz+xyz+xyz$. Dobijamo: $(x+y+z)(xy+yz+zx)$.

e) 1) $x^3+y^3+z^3-3xyz+xy^2+xz^2+yx^2+zx^2+xy^2-xy^2-xz^2-yx^2-yz^2-zx^2-zy^2$ itd. Dobija se: $(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy)$; 2) $(a+b-c)(a^2+b^2+c^2-ab+bc+ca)$; 3) $(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(b+c-a)$.

431. a) $a^2c+ac^2-b^2c-bc^2+ab(a-b)=c(a^2-b^2)+c^2(a-b)+ab(a-b)=(a-b)(c(a+$ $c)+b(a+c))=(a+c)(a-b)(b+c)$;

b) $(x-y)(x-z)(y-z)$; c) $3(a+b)(a+c)(b+c)$,

d) *Uputstvo*: Zameniti $c-a=-(a-c)=-((a-b)+b-c)$ itd. Dobija se: $(a-b)(b-c)(a-c)(ab+bc+ca)$.

e) $a^3(b-c)-a(b^3-c^3)+bc(b^2-c^2)=(b-c)(a^3-a(b^2+bc+c^2)+bc(b+c))=$ $(b-c)(b^2(c-a)+bc(c-a)-a(c^2-a^2))$ itd. Dobija se: $(b-c)(c-a)(b-a)(a+b+c)$;

f) $(a+b)(b+c)(c+a)$; g) *Uputstvo*: $2a+c-b=(a-b)+(a+c)$ itd.: $(a-b)(a+c)(b-c)$;

h) $(a-x)(x-y)(a-y)(a+x+y)$; i) Staviti: $a-c=(b-c)+(a-b)$ itd.: $d(b-c)(a-b)(a-c)$;

j) Staviti: $(c-a)^3=-(a-c)^3$ i $a-c=(b-c)+(a-b)$ itd.; $-3(b-c)(a-b)(a-c)$;

k) $(x-y)(z-x)(y-z)$; l) $(x-y)(y-z)(x-z)(x^2+y^2+z^2)$;

m) $(b+c)(a+b)(a+c)$; n) $(x^2+8x+10)(x+2)(x+6)$;

o) Pomnožimo prvu sa četvrtom i drugu sa trećom zagradom, pa stavimo: $y = x^2 + 11x + 24$ itd. Dobijemo: $(x^2 + 12x + 24)(x^2 + 13x + 24)$;

p) Staviti: $(a^2 + b^2)^3 = ((a^2 - c^2) + (b^2 + c^2))^3$ itd. Dobijamo: $3(a + c)(a - c)(a^2 + b^2)(b^2 + c^2)$.

432. Stavimo: $a^2 + a + 4 = x$. Tada je: $x^2 + 8ax + 15a^2 = (x + 3a)(x + 5a) = ((a^2 + a + 4) + 3a)((a^2 + a + 4) + 5a) = (a^2 + 4a + 4)(a^2 + 6a + 4) = (a + 2)^2(a^2 + 6a + 4)$.

433. a) $n^3 + 5n = n^3 - n + 6n = n(n - 1)(n + 1) + 6n$. Proizvod tri uzastopna prirodna broja, a to je $n(n - 1)(n + 1)$, deljiv je sa 2 i sa 3, a otuda i sa 6. Drugi sabirak, $6n$, takođe je deljiv sa 6.

b) $a^5 - a = (a - 1)a(a + 1)(a^2 + 1)$. Od tri uzastopna broja $a - 1$, a, $a + 1$ jedan je deljiv sa 3 i bar jedan je deljiv sa 2. Ako nijedan od njih nije deljiv sa 5, onda je broj a oblika $5k \pm 2$, a tada je broj $a^2 + 1 = (5k \pm 2)^2 + 1 = 25k^2 \pm 20k + 5$ deljiv sa 5. Dakle, $a^5 - a$ je deljiv sa $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$.

c) Slično kao a).

434. Prema prethodnom zadatku b) je $a^5 \equiv a \pmod 5$, pa je $a_1^5 + a_2^5 + \cdots + a_n^5 \equiv (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \pmod 5 \equiv 2005^{2004} \pmod 5$. Međutim $2005 \equiv 0 \pmod 5$, pa je $2005^{2004} \equiv 0 \pmod 5$. Dakle, traženi ostatak je 0.

435. a) $n^3 + 3n^2 - n - 3 = (n + 3)(n - 1)(n + 1)$. Za $n = 2k - 1$ imamo: $n^3 + 3n^2 - n - 3 = 8(k - 1) \cdot k(k + 1) = 48p$. (Proizvod tri uzastopna broja deljiv je sa 6.)

b) $(x^2 + 5x)(x^2 + 5x + 10) + 24 = (x^2 + 5x)^2 + 10(x^2 + 5x) + 25 - 1 = (x^2 + 5x + 5)^2 - 1 = (x^2 + 5x + 5 - 1)(x^2 + 5x + 5 + 1) = (x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4)$, a to je proizvod četiri uzastopna cela broja itd.

c) Dati broj N možemo transformisati: $N = 4a^2 + 3a + 5 = 3a^2 + 3a + 6 + a^2 - 1 = 3a(a + 1) + 6 + a^2 - 1$. Proizvod $a(a + 1)$ je deljiv sa 2, pa je $a(a + 1) = 2m$, $m \in Z$. Odnosno, $N = 6(m + 1) + (a^2 - 1)$. Broj koji nije deljiv ni sa 2 ni sa 3 pri deljenju sa 6 daje ostatak 1 ili 5, pa je oblika $6k \pm 1$. Tada je $a^2 - 1 = 36k^2 \pm 12k$. Prema tome: $N = 6(m + 1 + 6k^2 \pm 2k)$.

436. a) $n^2 + n + 2 = \dfrac{1}{4}((2n + 1)^2 + 7)$. Zaključujemo da $(2n + 1)^2$ mora biti deljivo sa 7, pa je i $2n + 1$ deljivo sa 7, tj. broj $(2n + 1)^2$ je deljiv sa 49. Odavde sledi da broj $n^2 + n + 2$ ne može biti deljiv sa 49, jer pri deljenju sa 49 daje ostatak 7.

b) $n^2 + 3n + 5 = \dfrac{(2n + 3)^2 + 11}{4}$ itd. Slično kao a).

c) $9n^2 + 3n - 2 = 3(3n^2 + n) - 3 + 1$ pri deljenju sa 3 daje ostatak 1. Dati polinom ne može biti deljiv sa 3, pa samim tim ne može biti deljiv ni sa 9.

437. Imamo da je $p^2 - 1 = (p - 1)(p + 1)$. Pošto je p neparan broj, brojevi $p - 1$ i $p + 1$ su dva uzastopna parna broja, pa je jedan od njih deljiv sa 2, a drugi sa 4, tj. $p^2 - 1$ je deljivo sa 8. S druge strane, brojevi $p - 1$, p, $p + 1$ su tri uzastopna cela broja, pa je jedan od njih sigurno deljiv sa 3. To nije p, jer je prost i veći od 3, pa zato to mora biti jedan od brojeva $p - 1$ ili $p + 1$. Dakle, $p^2 - 1$ je deljiv i sa 3 i sa 8, pa je deljiv sa 24.

438. Pošto a i b nisu deljivi sa tri, oni su oblika $a = 3k \pm 1$, $b = 3m \pm 1$. Broj a^6 je tada oblika $9k + 1$, a b^6 je oblika $9m + 1$, pa je razlika $a^6 - b^6$ deljiva sa 9.

439. Transformisaćemo dati izraz na sledeći način: $a^2 + ab + b^2 = (a - b)^2 + 3ab$ (1).

Po uslovu zadatka zadati izraz je deljiv sa 9, pa i sa 3, a pošto je drugi sabirak na desnoj strani jednakosti (1) deljiv sa 3 i prvi sabirak je deljiv sa 3. Broj $(a - b)^2$ je deljiv sa 3, pa je i broj $a - b$ deljiv sa 3, tj. $(a - b)^2$ deljiv je sa 9. Kako su brojevi $a^2 + ab + b^2$ i $(a - b)^2$ deljivi sa 9, to je i broj $3ab$ deljiv sa 9. Sledi da je bar jedan od brojeva a i b deljiv sa 3. Kako je razlika $a - b$ deljiva sa 3 i kako je jedan od brojeva a i b deljiv sa 3, to je i drugi od njih deljiv sa 3.

440. Neka je $2^n + n^2$ prost broj, $n \geq 2$. Ako je n paran broj, $2^n + n^2$ je broj deljiv sa četiri, dakle, složen broj. Zato je n neparan broj. Kako je $2^n + n^2 = (2^n + 1) + (n^2 - 1) = 3(2^{n-1} - 2^{n-2} + 2^{n-3} - \cdots + 1) + (n - 1)(n + 1)$, sledi da broj $(n - 1)(n + 1)$ nije deljiv sa 3. To je ispunjeno ako je broj n deljiv sa 3. Kako je n neparan broj deljiv sa 3, to $6|(n - 3)$.

441. a) $m - n$; b) $6 + p$; c) $a^2 + 1$; d) $(x - y)^3 : (y - x) = -(x - y)^2$; e) $4a^2 + 2a + 1$; f) $2a + 3$.

442. a) x^3-2x^2+6x-7; b) Količnik je $2x^3+3x^2+12x+32$ i ostatak 91. c) x^2-3x+5;
d) Prvo preuredimo polinome: $((a^3+1)x^3+(a^3+a^2-2)x^2+(1-a)x+a):((a^2-a+1)x^2+(a-2)x+1)$. Količnik je: $(a+1)x+a$. e) Količnik je x^3-x i ostatak x.
f) $x^6=\frac{1}{2}\cdot 2x^6$, itd. Količnik je $\frac{1}{32}(16x^4+24x^3+28x^2+30x+31)$, a ostatak $\frac{1}{32}(61x-31)$.

443. a) Količnik polinoma x^3+ax^2+bx-5 i x^2+x+1 je polinom oblika $(x-\alpha)$, pa je $x^3+ax^2+bx-5=(x-\alpha)(x^2+x+1)$. Sređivanjem dolazimo do uslova $a=\alpha+1$, $b=\alpha+1$, $-5=\alpha$. Odatle je $a=b=-4$. b) $a=-2$, $b=1$. Ostatak, polinom prvog stepena, ima koeficijente nule.
c) Iz $6x^4-7x^3+ax^2+3x+2=(x^2-x+b)(6x^2+px+q)$, dobijamo uslove $p-6=-7$, $q-p+6b=a$, $-q+bp=3$, $bq=2$. Odavde najpre nalazimo $p=-1$ itd. Na kraju dobijamo dva rešenja, $a=-7$, $b=-1$, ili $a=-12$, $b=-2$.

444. a) $Q(x)=x+1$, $R(x)=-2x$; b) $Q(x)=x^2+2$, $R(x)=x+1$.

445. a) $Q(x)=x^2-x+1$, $R(x)=6$; b) $Q(x)=2x^3+5x-5$, $R=0$; c) $x^2-1=(x-1)(x+1)$: prvo nađemo $Q_1(x)=P(x):(x-1)$, pa $Q(x)=Q_1(x):(x+1)=x^3+x+1$, $R=0$; d) $x^2+2x-3=(x-1)(x+3)$, $Q(x)=3x^2-2x-1$, $R=0$.

446. a) $P(1)=R=10$; b) $P(-5)=-171$; c) 22; d) 69.

447. a) Slobodan član je -21, pa cele nule mogu biti ±1, ±3, ±7, ±21. Proverom dobijamo $\alpha_1=1$, $\alpha_2=-3$, $\alpha_3=-7$, pa je $P(x)=(x-1)(x+3)(x+7)$; b) $(x+1)(x+3)(x+5)$;
c) Cele nule su: $\alpha_1=-2$, $\alpha_2=3$, a $(x+2)(x-3)=x^2-x-6$. Dalje imamo:
$(x^4-x^3-4x^2-2x-12):(x^2-x-6)=x^2+2$, pa je konačno $P(x)=(x+2)(x-3)(x^2+2)$;
d) $(x-1)(x+1)(x+2)(x^2+x+3)$; e) Cele nule su: $\alpha_1=3$, $\alpha_2=-5$ i $(x-3))(x+5)=x^2+2x-15$. Zatim: $(x^3-x^2-21x+45):(x^2+2x-15)=x-3$, pa je $P(x)=(x-3)^2(x+5)$;
f) Nalazimo: $\alpha_1=3$, $\alpha_2=-\frac{2}{3}$, pa je $3(x-3)\left(x+\frac{2}{3}\right)=3x^2-7x-6$. Zatim, $(9x^3-15x^2-32x-12):(3x^2-7x-6)=3x+2$. Konačno, $P(x)=(x-3)(3x+2)^2$; g) $(x+2)^2(x-3)^2$; h) $(x-1)^3(2x+5)$.

448. a) Po Bezuovom stavu je $P(-2)=0$, odnosno $3p^2-2p-8=0$. Kao u **zadatku 425**, nalazimo $p=2$ ili $p=-\frac{4}{3}$.
b) $x^2-1=(x-1)(x+1)$, pa je dati polinom deljiv sa $(x-1)$ i sa $(x+1)$. Zato je $P(1)=0$ i $P(-1)=0$, odakle je $p+q-12=0$ i $q-p-4=0$. Dakle, $p=4$, $q=8$;
c) $x^2-3x-4=(x-4)(x+1)$ itd., $p=q=-\frac{13}{4}$; d) $p=-7$, $q=-6$.

449. a) U datom polinomu zamenimo a sa $b-c$. Dobićemo: $(b-c)^3-b^3+c^3+3(b-c)bc=b^3-3b^2c+3bc^2-c^3-b^3+c^3+3b^2c-3bc^2=0$. Dakle, ako polazni polinom zamislimo kao $P(a)$ tada je $P(a)$ deljivo sa $a-(b-c)=a-b+c$. Sada znamo da je $P(a)=(a-b+c)\cdot Q(a)$ i razlaganjem na činioce, slično **zadatku 430**e) dobijamo $a^3-b^3+c^3+3abc=(a-b+c)(a^2+b^2+c^2+ab+bc-ac)$. Traženi količnik je $a^2+b^2+c^2+ab+bc-ac$.
b) Posmatrajmo dati izraz kao $P(a)$ i stavimo $a=b$. Dobijamo $P(b)=b(b+c)(b^2-c^2)+b(c+b)(c^2-b^2)+c(b+b)(b^2-b^2)=0$. Znači da je $P(a)$ deljivo sa $(a-b)$. Uzimajući dati izraz za polinom $P(b)$ i $P(c)$, sličnim razmišljanjem dolazimo do zaključka da je on deljiv i sa $(b-c)$ i sa $(c-a)$. Dakle, $P(a)=(a-b)(b-c)(c-a)\cdot N$, gde je N polinom, zapravo N je količnik polinoma $P(a)$ sa $(a-b)(b-c)(c-a)$. Kako je $P(a)$ polinom trećeg stepena po a, po b i po c, to mora biti: $N=\alpha a+\beta b+\gamma c$. Budući da su koeficijenti uz a, b, c jednaki, to je $\alpha=\beta=\gamma$, pa je $P(a)=\alpha(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$. Da bismo odredili α zamenićemo u gornju jednakost a, b i c nekim brojnim vrednostima, na primer: $a=2$, $b=1$, $c=0$. Dobićemo: $-6\alpha=-6$ odakle je $\alpha=1$, pa je $a(b+c)(b^2-c^2)+b(c+a)(c^2-a^2)+c(a+b)(a^2-b^2)=(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$.

450. a) $P(x)=nx^n(x-1)-(x^n-1)=(x-1)(nx^n-x^{n-1}-x^{n-2}-\cdots-1)=(x-1)f(x)$, pri čemu je $f(1)=0$.
b) $P(x)=(x^{2n+1}+1)^2$ itd.
c) $P(x)=(x^{2n}-1)-nx^{n-1}(x^2-1)=(x^2-1)(x^{2n-1}+x^{2n-1}+\cdots+x^2+1-nx^{n-1})=(x^2-1)Q(x)$. Kako je $Q(1)=0$, to je $Q(x)=(x-1)M(x)$, a otuda sledi:
$P(x)=(x^2-1)(x-1)M(x)=(x-1)^2(x+1)M(x)$.

451. Stavljajući u izraz: $(x+y+z)^3-(-x+y+z)^3-(x-y+z)^3-(x+y-z)^3$ redom: $x=0$, $y=0$, $z=0$, svaki put će ovaj izraz biti jednak nuli. To znači da je on deljiv sa xyz. Kako je uočeni izraz polinom trećeg stepena, to je količnik ova dva izraza konstanta, tj. $(x+y+z)^3-(-x+y+z)^3-(x-y+z)^2-(x+y-z)^3=Axyz$. Zamenjujući $x=1=y=z$, dobićemo $A=24$.

452. Videli smo (**zadatak 431**c)) da je $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3=3(a+b)(b+c)(c+a)$, pa je dovoljno dokazati da je $P(a,b,c)=(a+b+c)^{333}-a^{333}-b^{333}-c^{333}$ deljivo sa $a+b$, sa $b+c$ i sa $c+a$. Zaista, ako stavimo $a=-b$, dobijamo $P(-b,b,c)=0$, što znači da je $P(a,b,c)$ deljivo sa $a+b$ itd.

453. Dato je $P(1)=2$ i $P(2)=1$. Pri deljenju polinomom drugog stepena ostatak je polinom prvog stepena, pa je $P(x)=(x-1)(x-2)Q(x)+ax+b$. Zamenjujući $P(1)$ i $P(2)$, dobićemo: $a+b=2$ i $2a+b=1$, pa je $a=-1$, $b=3$. Traženi ostatak je $R(x)=-x+3$.

454. Slično prethodnom zadatku: $R(x)=2x^2-3$.

455. a) $R=P(1)=6$; b) $x^2-1=(x-1)(x+1)$ i $P(-1)=-6$ itd. Ostatak je $R(x)=6x$.

456. Polinom je paran, tj. $P(-x)=P(x)$. Prema tome, $P(-1)=P(1)=0$, pa je $P(x)$ deljivo sa $(x-1)(x+1)=x^2-1$.

457. Ako polinom sedmog stepena razložimo na proizvod dva polinoma, recimo $P(x)=M(x)\cdot N(x)$, tada stepen jednog polinoma nije veći od 3, neka je to, na primer, $M(x)$. Ako $P(x)$ za sedam vrednosti x prima vrednost $+1$ ili -1, to i $M(x)$ mora u tim slučajevima primati vrednosti $+1$ ili -1, pa će bar u četiri slučaja $M(x)$ biti jednako $+1$, ili će bar u četiri slučaja biti $M(x)=-1$. U prvom slučaju polinom trećeg stepena $M(x)-1$ imao bi četiri nule, a u drugom bi to važilo za polinom trećeg stepena $M(x)+1$, a to nije moguće.

458. a) $(x+y)^2$; b) $3a^2bc$; c) $x-y$; d) $3x-2$.

459. a) 1) 420, 2) x^3, 3) $12x^3y^2$, 4) $72x^4y^5$; b) 1) $(a+2)(a-1)$, 2) $xy(x-y)^3$, 3) $(x-y)(x+y)$; c) Rastavimo polinome na činioce, pa dobijemo NZS: $a^2b^2(x-y)^2(x+y)^2$; d) $(a-b)(a+b)(a^2-ab+b^2)$; e) i f) Svi polinomi su uzajamno prosti, pa je NZS jednak proizvodu datih polinoma.

460. $S(x)=x(x-1)^2(x+2)$ i $D(x)=(x-1)^2$. Postoje dve mogućnosti: $P(x)=D(x)$, $Q(x)=S(x)$ ili $P(x)=x\cdot D(x)=x^3-2x^2+x$, $Q(x)=(x+2)\cdot D(x)=x^3-3x+2$.

461. $(k-1)k(k+1)(k+2)+1=(k(k+1))((k-1)(k+2))+1=(k^2+k)(k^2+k-2)+1=(k^2+k)^2-2(k^2+k)+1=(k^2+k-1)^2$. Vidimo da je to kvadrat neparnog broja. Za $k=1997$ imamo: $1996\cdot1997\cdot1998\cdot1999+1=(1997^2+1997-1)^2=3990005^2=m^2$.

462. a) $k^2=\dfrac{4(10^{2n}-1)}{9}+\dfrac{10^{n+1}-1}{9}-\dfrac{6(10^n-1)}{9}=\dfrac{1}{9}(4\cdot10^{2n}+4\cdot10^n+1)=\dfrac{1}{9}(2\cdot10^n+1)^2$. Dakle, $k=\dfrac{1}{3}(2\cdot10^n+1)=\dfrac{200\ldots01}{3}=66\ldots67$, gde ima n cifara 6.

b) Uočimo da je $\dfrac{9}{9}\cdot(10^n+10^{n-1}+\cdots+10+1)=\dfrac{(10-1)(10^n+10^{n-1}+\cdots+10+1)}{9}=\dfrac{10^{n+1}-1}{9}$. Otuda je: $k^2=\dfrac{(10^{n+1}-1)(10^{n+1}+5)}{9}+1=\dfrac{10^{2(n+1)}+4\cdot10^{n+1}+4}{9}=\left(\dfrac{10^{n+1}+2}{3}\right)^2$. Prema tome: $k=\dfrac{10^{n+1}+2}{3}=\dfrac{100\ldots02}{3}=33\ldots34$, gde ima n cifara 3.

463. Za $2p=1$, tj. za $p=\dfrac{1}{2}$ je $\dfrac{1}{2}+q-q=\dfrac{1}{2}$, tj. $p+q-2pq=\dfrac{1}{2}$, a takođe i za $2q=1$. Obrnuto, $\left(p+q-2pq=\dfrac{1}{2}\right)\Rightarrow(2p+2q-4pq-1=0)\Rightarrow(2p-1)\cdot(1-2q)=0\Rightarrow(2p=1$ ili $2q=1)$.

464. Pretpostavimo da je na primer $a<c$ i transformišimo datu jednakost: $(a+b)^2-(c+d)^2=c-a$, tj. $(a+b-c-d)(a+b+c+d)=c-a>0$. Sledi da je $a+b-c-d>0$, pa kako je $a+b-c-d$ ceo broj, to znači da je $a+b-c-d\geq1$. To povlači da je $a+b+c+d\leq c-a$, odnosno da je $2a+b+d\leq0$, što nije moguće za prirodne brojeve a, b, d. Slično dokažemo i da nije $a>c$, pa mora biti $a=c$. Ako to zamenimo u datu jednakost dobićemo da je i $b=d$.

465. Do rešenja možemo doći slično **zadatku 449**b). Ovde dajemo drugu ideju. Označimo $y - z = a$, $z - x = b$, $x - y = c$. Primetimo da je $a + b + c = 0$ i otuda $a + b = -c$, pa je $(a+b)^5 = -c^5$, odnosno $(a+b)^5 + c^5 = 0$. Posle stepenovanja binoma $a+b$ dobijamo $a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5 + c^5 = 0$, a odavde je $a^5 + b^5 + c^5 = -5ab(a^3 + 2a^2b + 2ab^2 + b^3)$. Izraz u zagradi ćemo uprostiti, imajući na umu da je $a + b = -c$:

$$(a^3 + b^3) + 2ab(a + b) = (a + b)(a^2 + ab + b^2) = -c(a^2 + ab + b^2).$$

Prema tome: $a^5 + b^5 + c^5 = 5abc(a^2 + ab + b^2)$. Vraćajući x, y, z, dobijamo konačno:

$$(x - y)^5 + (y - z)^5 + (z - x)^5 = 5(x - y)(y - z)(z - x)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx).$$

466. Označimo $F(x,y) = x^{n-1} + x^{n-1}y + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1}$. Na osnovu Bezuove teoreme $F(x,y) = (x-y)Q(x,y) + ny^{n-1}$. Označimo sa d najveći zajednički delitelj brojeva $x-y$ i $F(x,y)$. Iz prethodne jednakosti sledi da je tada ny^{n-1} deljivo sa d. Kako je y uzajamno prost sa d (iz $d|(x-y)$ sledi $D(d,x) = D(d,y)$, što zajedno sa $D(x,y) = 1$ daje $D(d,x) = D(d,y) = 1$), to je broj n deljiv sa d.

467. Razložimo dati polinom: $(m-2n)(m-n)(m+n)(m+2n)(m+3n)$. Za $n = 0$ dobijamo $m^5 \neq 33$. Ako je $n \neq 0$, onda su svih pet činilaca različiti, a broj 33 se ne može napisati kao proizvod pet različitih celih brojeva.

468. Iz $2p + 1 = n^3$, $n \in N$, dobijamo: $2p = n^3 - 1 = (n-1)(n^2 + n + 1)$. Zbog $n^3 = 2p + 1$ izlazi da je n^3, a otuda i n, neparan broj i možemo staviti: $n = 2k + 1$. Tada dobijamo: $2p = 2k(4k^2 + 6k + 3)$, odnosno $p = k(4k^2 + 6k + 3)$. Po uslovu je p prost broj, pa mora biti $k = 1$ i $p = 13$.

469. U jednakosti $(x - a)(x - 10) + 1 = (x + b)(x + c)$ zamenimo $x = -b$. Dobijamo $(-b - a)(-b - 10) + 1 = 0$ i $(b + a)(b + 10) = -1$. Kako su a i b celi brojevi, biće $b + a = 1$ i $b + 10 = -1$, pa dobijamo dva rešenja: $(x-8)(x-10)+1 = (x-9)^2$ i $(x-12)(x-10)+1 = (x-11)^2$.

470. a) $x^2 + 2xy + y^2 + 2(y^2 + 2y + 1) + 2(x + y) + 1 = (x + y)^2 + 2(x + y) + 1 + 2(y + 1)^2 = (x + y + 1)^2 + (y + 1)^2 + (y + 1)^2$.

b) $y^2 + y(4x - 5z) + \frac{1}{4}(4x - 5z)^2 - \frac{1}{4}(4x - 5z)^2 + 8x^2 + 11z^2 - 12xz = \left(y + \frac{1}{2}(4x - 5z)\right)^2 + 4x^2 - 2xz + \frac{z^2}{4} + \frac{18z^2}{4} = \left(y + 2x - \frac{5}{2}z\right)^2 + \left(2x - \frac{z}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}z^2 + \frac{9}{4}z^2.$

471. Slično prethodnom zadataku. a) $P(x) = (x^2 - x + 1)(x^4 + 1) = \left(x^2 - x + \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\right)(x^4 + 1) = \left(\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right)(x^4 + 1) > 0.$

b) Slično prethodnom zadataku: $P(x,y,z) = \frac{1}{2}(2x - 3y - z)^2 + \frac{1}{2}(y + 2z)^2 + \frac{1}{2}z^2 \geq 0$.

c) $4(x + y)(x + z) \cdot x(x + y + z) + y^2z^2 = 4((x^2 + xy + zx) + yz)(x^2 + xy + xz) + y^2z^2 = 4(x^2 + xy + xz)^2 + 4yz(x^2 + xy + xz) + y^2z^2 = (2(x^2 + xy + xz) + yz)^2 \geq 0$.

d) $(x^2 - 7x + 6)(x^2 - 7x + 12) + 10 = (x^2 - 7x)^2 + 2 \cdot 9(x^2 - 7x) + 81 + 1 = (x^2 - 7x + 9)^2 + 1 > 0$.

472. a) $P(a,b,c) = (a-5)^2 + (b-7)^2 + c^2 + 1$, pa je minimalna vrednost polinoma $P(a,b,c) = 1$ za $a = 5$, $b = 7$, $c = 0$.

b) $P(a,b,c,d) = (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - d)^2$. Najmanja vrednost je 0 za $a = b = c = d$.

473. $(a^2 + b^2)^2$. Koristimo prethodni zadatak i prvu identičnost iz **zadatka 410**.

474. Za svaki prirodni broj n je $P_2(n) = n^3 - (n-1)^3 = 3n^2 - 3n + 1$. Stoga je $p_2(x) = 3x^2 - 3x + 1$.

475. Iz $2a^2 + 2b^2 + 2c^2 = 2ab + 2bc + 2ac$ dobijamo $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (a - c)^2 = 0$, odakle sledi: $a = b = c$.

476. Prebacimo sve na levu stranu jednakosti, kvadriramo i sredimo, pa ćemo dobiti $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - xz = 0$, a odavde, na osnovu prethodnog zadatka, sledi $x = y = z$.

477. Iz date jednakosti se jednostavno dobija $(a^2-b^2)^2+(c^2-d^2)^2+2(ab-cd)^2=0$, odakle je $a^2=b^2$, $c^2=d^2$ i $ab=cd$. Kako su a, b, c, d pozitivni brojevi, iz poslednjih jednakosti sledi: $a=b$ i $c=d$, pa je $a^2=ab=cd=c^2$ i $a=c$. Konačno je: $a=b=c=d$, što se i tvrdi.

478. a) $(a^2+1)^2(b^2+1)^2=a^2b^2+1+a^2+b^2+(2ab-2ab)=(ab+1)^2+(a-b)^2$.

b) Slično prethodnom $(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)=(abc-a-b-c)^2+(abc+bc+ac-1)^2$.

479. S obzirom da je $8^n+1=(2^3)^n+1=(2^n)^3+1=(2^n+1)(2^{2n}-2^n+1)$, broj 8^n+1 je uvek proizvod dvaju činilaca, od kojih nijedan nije jednak jedinici za proizvoljno $n\in N$.

480. Razlika dva neparna broja, $a-b=(2n-1)-(2k-1)=2(n-k)$, deljiva je sa 2, a po uslovu zadatka deljiva je sa 5, znači da je deljiva i sa 10, odnosno $a-b=10M$. Sledi da je $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)=10\cdot M(a^2+ab+b^2)$. Razlika kubova se završava nulom.

481. $P(x,y,z)=(2y-3z-x)(2x-3y+z)+5=0\cdot(2x-3y+z)+5=5$.

482. Iz $0\neq a^2\ (b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)=(b-a)(c-b)(a-c)$ dobijamo $a\neq b$, $b\neq c$, $c\neq a$. Nije teško dokazati da važi i obrnuto.

483. Koristeći uslov $x+y+z=0$, dobijamo $x^3+y^3+z^3=x^3+y^3-(x+y)^3=-3xy(x+y)$, odakle sledi da je broj $x^3+y^3+z^3$ deljiv sa 3.

484. a) Iz $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)=0$ dobijamo $xy+yz+zx=-\dfrac{1}{2}$. Kvadriranjem ove jednakosti dobijamo $x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+2(x^2yz+xy^2z+xyz^2)=\dfrac{1}{4}$ ili $x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+2xyz(x+y+z)=\dfrac{1}{4}$, pa je zbog $x+y+z=0$, odavde $x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2=\dfrac{1}{4}$. Sada dobijamo $x^4+y^4+z^4=(x^2+y^2+z^2)^2-2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)=\dfrac{1}{2}$.

b) Koristeći identitete: $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$, $x^3+y^3+z^3-3xy=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$ (videti **zadatak 430** e), $(xy+yz+zx)^2=x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+2xyz(x+y+z)$, $(x^2+y^2+z^2)^2=x^4+y^4+z^4+2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)$ i date jednakosti, dobijamo redom $xy+yz+zx=-\dfrac{a^2}{4}$, $xyz=-\dfrac{a^3}{4}$, $x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2=\dfrac{9a^4}{16}$ i $x^4+y^4+z^4=\dfrac{9a^4}{8}$.

c) $\dfrac{1}{6}(m^2-2p-3mn)$.

d) Iz $ac+bd=0$ sledi: $0=(ac+bd)(ad+bc)=ab(c^2+d^2)+cd(a^2+b^2)=ab+cd$, pa je $ab+cd=0$.

485. Neka je $a+c=k^2$ i $b+c=(k+1)^2$, $k\in N$. Tada je $a=k^2-c$ i $b=(k+1)^2-c$, pa je $ab+c=(k^2-c)\big((k+1)^2-c\big)+c=c^2-\big(k^2+(k+1)^2-1\big)\cdot c+\big(k(k+1)^2\big)=c^2-2k(k+1)c+(k(k+1))^2=(k(k+1)-c)^2$. Slično je $ab+a+b+c=(k^2-c)\big((k+1)^2-c\big)+k^2-c+(k+1)^2-c+c=c^2-\big(k^2+(k+1)^2+1\big)c+k^2(k+1)^2+k^2+(k+1)^2=c^2-2(k^2+k+1)c+(k(k+1))^2+2k(k+1)+1=c^2-2(k^2+k+1)c+(k^2+k+1)^2=(k^2+k+1-c)^2=(k(k+1)-c+1)^2$.

486. a) Ako ni a ni b ne bi bili deljivi sa 3, tj. ako je $a=3m\pm1$, $b=3n+1$, tada je $a^2+b^2=9m^2\pm6m+1+9n^2\pm6n+1=9(m^2+n^2)\pm6(m\pm n)+2$, što znači da pri deljenju a^2+b^2, odnosno pri deljenju c^2, sa 3 dobijamo ostatak 2. To nije moguće, jer bilo da je $c=3p$, bilo da je $c=3p\pm1$, kvadrat broja c ne daje ostatak 2. Otuda sledi traženi zaključak.

b) Kako je $60=3\cdot4\cdot5$, to je dovoljno dokazati da je bar jedan od brojeva a, b, c deljiv sa 3 ili sa 5, ili sa 4, odnosno da su dva parna. Deljivost sa 3 dokazali smo u prethodnom zadatku.

Deljivost sa 4. Ne mogu biti svi brojevi neparni, jer ako su a i b neparni onda je a^2+b^2, tj. c^2, a samim tim i c paran broj. Ne može biti samo c paran broj, jer bi tada broj c^2 bio deljiv sa 4, a zbir kvadrata dva neparna broja, u šta se lako možemo uveriti, ima oblik $4k+2$, tj. nije deljiv sa 4. Dakle, ako je samo jedan broj paran, onda je to ili a ili b. Neka je, na primer, $a=2k$, $b=2m+1$ i $c=2n+1$, tada iz $a^2=c^2-b^2$ dobijamo $4k^2=(2m+1)^2-(2n+1)^2=4m^2+4m-4n^2-4n$, odnosno $k^2=m(m+1)-n(n+1)$. Sledi da je k^2, a samim tim i k paran broj (kao razlika dva parna broja), tj. $k=2p$, pa je $a=2k=4p$. Dakle, a je deljivo sa 4. Proizvod abc je deljiv sa 4 i ako su dva od brojeva a, b, c parna.

Deljivost sa 5. Pretpostavimo da nijedan od brojeva a, b, c nije deljiv sa 5. Tada su oni oblika $5k\pm1$ ili $5k\pm2$, a njihovi kvadrati su oblika $5m+1$ ili $5m+4$. Nije teško uveriti se da u tom slučaju ne može biti $a^2+b^2=c^2$. Dakle, bar jedan od brojeva a, b, c mora biti deljiv sa 5.

487. Koristiti prvu identičnost iz **zadatka 410**.

488. $2(a+b)(a^2-ab+b^2)-3(a^2+b^2)=2(a^2-ab+b^2)-3(a^2+b^2)=-(a+b)^2=-1$.

489. Iz uslova $a+b=-c$ je $(a+b)^3=-c^3$ sledi: $a^3+b^3+c^3+3a^2b+3ab^2+3abc=3abc$, odnosno $a^3+b^3+c^3+3ab(a+b+c)=3ab$, pa je $a^3+b^3+c^3=3abc$. Iz $(a+b+c)^2=0$ je $a^2+b^2+c^2=-2(ab+bc+ca)$. Još jednom kvadriramo i dobijemo: $a^4+b^4+c^4+2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)=4(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2(a^2bc+b^2ac+c^2ab))$. Pošto je $a^2bc+ab^2c+abc^2=abc(a+b+c)=0$, biće $a^4+b^4+c^4=2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$. Sada levu stranu identičnosti, koju treba dokazati, transformišemo: $a^5(b^2+c^2)+b^5(a^2+c^2)+c^5(a^2+b^2)=a^2b^2(a^3+b^3)+a^2c^2(a^3+c^3)+b^2c^2(b^2+c^2)$. Sada zamenimo a^3+b^3 sa $3abc-c^3$ itd.

490. Kako je $a\neq b$, $b\neq c$, $c\neq a$ i $a^4(b-c)+b^4(c-a)+c^4(a-b)=a^4b-a^4c+b^4c-b^4a+c^4(a-b)=ab(a^3-b^3)-c(a^4-b^4)+c^4(a-b)=(a-b)(ab(a^2+ab+b^2)-c(a+b)(a^2+b^2)+c^4)=(a-b)(a^3b+a^2b^2+ab^3-ca^3-cab^2-ca^2b-cb^3+c^4)=$
$(a-b)(a^3(b-c)+a^2b(b-c)+ab^2(b-c)-c(b^3-c^3))=(a-b)(b-c)(a^3+a^2b+ab^2-cb^2-bc^2-c^3)=$
$(a-b)(b-c)(a^3-c^3+b(a^2-c^2)+b^2(a-c))=(a-b)(b-c)(a-c)(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)$, to bi ovaj izraz mogao biti jenak nuli ako i samo ako je $a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca=0$, a odavde zaključujemo (posle množenja sa 2) da je: $(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2=0$, odakle sledi: $(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2=0$. Ovo je moguće ako je $a+b=0$ i $b+c=0$ i $c+a=0$. Sledi da je $a=-b$ i $b=-c$, pa je $a=c$, što bi bilo suprotno pretpostavci da su brojevi a, b, c, različiti među sobom. Dakle, gornji izraz je zaista različit od nule.

491. a) Pošto je $r=p+q$, to $r^2=p^2+2pq+q^2$, pa je $(2pq)^2=(r^2-p^2-q^2)^2$, $4p^2q^2=r^4+p^4+q^4+2p^2q^2-2q^2r^2-2r^2p^2$, a odavde $2(p^2q^2+q^2r^2+r^2p^2)=p^4+q^4+r^4$. Treba još samo na obe strane dodati veličinu $2(p^2q^2+q^2r^2+r^2p^2)$.

b) *Uputstvo*: Zamenimo vrednosti a, b, c, izrazima preko k, m, n u levu stranu date jednakosti, izvršimo množenje i iskoristimo zadatak pod a).

c) Iz $(a+b+c)^2=0$ najpre dobijamo $(a^2+b^2+c^2)^2=-2(ab+bc+ca)$, pa kvadriranjem ove jednakosti uz dati uslov dobijemo: $(a^2+b^2+c^2)^2=4(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$. S druge strane je $(a^2+b^2+c^2)^2=a^4+b^4+c^4+2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$ itd.

d) Ako je $x=0$ ili $y=0$, onda je tvrđenje očigledno. Dokažimo to i za slučaj $x\neq 0$ i $y\neq 0$. Iz datih uslova i jednakosti $(x+y)^2-(x^2+y^2)=2xy$ i $(a+b)^2-(a^2+b^2)=2ab$, zaključujemo da je $xy=ab$, a odavde je $y=\dfrac{ab}{x}$. Zamenimo to u jednakost $x+y=a+b$ i dobijamo $x+\dfrac{ab}{x}=a+b$, odakle je $x^2-(a+b)x+ab=0$, odnosno $(x-a)\cdot(x-b)=0$. Prema tome, ili je $x=a$ pa je $y=b$, ili je $x=b$ pa je $y=a$. U oba slučaja važi traženi uslov.

492. Oduzmemo treću jednakost od prve i druge i dobijamo $a^3-c^3+x(a-c)=0$ i $b^3-c^3+x(b-c)=0$. Odavde imamo: $(a-c)(a^2+ac+c^2+x)=0$ i $(b-c)(b^2+bc+c^2+x)=0$. Po uslovu je $a\neq c$ i $b\neq c$, pa zaključujemo da je $a^2+ac+c^2+x=0$ i $b^2+bc+c^2+x=0$. Oduzimanjem ovih dveju jednakosti dobićemo: $a^2-b^2+ac-b=0$, odnosno $(a-b)(a+b+c)=0$. Kako je $a\neq b$, sledi da je $a+b+c=0$.

493. Jasno je da je $n^2+n^2=2n^2$ i $(n-1)^2+(n+1)^2=2n^2+2$. Treba još dokazati da postoji beskonačno mnogo prirodnih brojeva n, za koje postoje celi brojevi p i q takvi da je $(n+p)^2+(n-q)^2=2n^2+1$. Iz ove jednakosti dobijamo $2n(q-p)=p^2+q^2-1$. Stavljajući $q=p+1$ dobijamo: $n=p^2+p$. Dakle, traženi uslov zadovoljavaju brojevi $n=p^2+p$ i $q=p+1$, gde je p proizvoljan prirodan broj.

494. Datu jednakost pomnožimo sa 2 i dobićemo: $(a+b)^2+(b+c)^2+(c+d)^2+(d+a)^2=16$. Budući da su a, b, c, d nenegativni celi brojevi, odavde sledi samo jedna mogućnost: $a+b=2$, $b+c=2$, $c+d=2$, $d+a=2$, što daje sledeća rešenja: $a=b=c=d=1$ ili $a=0=c$, $b=2=d$ ili $a=2=c$, $b=0=d$.

495. Dati polinom izrazimo po promenljivoj m i rastavimo ga na činioce. $P(m)=m^4-(x^2-x)m^2+(x-1)^3=m^4-\big((x^2-2x+1)+(x-1)\big)m^2+(x-1)^3=m^4-(x-1)^2m^2-(x-1)m^2+(x-1)^3=m^2\left(m^2-(x-1)^2\right)-(x-1)\left(m^2-(x-1)^2\right)=\left(m^2-(x-1)^2\right)\left(m^2-(x-1)\right)=(m-x+1)(m+x-1)(m^2-x+1)=0$. Sada iz $P(m)=0$ sledi: $m-x+1=0$ ili $m+x-1=0$ ili $m^2-x+1=0$. Odavde dobijamo nule polinima $x=m+1$, $x=1-m$ ili $x=m^2+1$.

496. a) 1) $\dfrac{4}{3}$; 2) $\dfrac{2a}{7b}$; 3) $\dfrac{1}{5mn}$; 4) 3; 5) $\dfrac{x+y}{2xy}$; 6) $\dfrac{1}{2x}$; 7) $\dfrac{2}{3y^2}$;

b) 1) $\frac{a-2}{x+y}$; 2) $\frac{m-3n}{(m+3n)^2}$; 3) $\frac{1}{x-y}$; 4) $\frac{a-c}{2}$; 5) 2; 6) $-\frac{1}{3}$;

c) 1) $\frac{-x}{x+1}$; 2) $\frac{a-3}{a+2}$; 3) $\frac{a-3}{a(a^2-3a+9)}$; 4) $\frac{x+y-z}{x-y-z}$; 5) $\frac{a(b-4a)}{4a+b}$; 6) $\frac{2b-a}{4-a}$; 7) $\frac{x+y}{2x}$; 8) $\frac{a}{a+b}$; 9) $\frac{q^2}{p-q}$; 10) $\frac{x}{y}$; 11) $\frac{x}{y(3x-4y)}$; 12) $\frac{1}{a(a+2b)}$; 13) $\frac{x-2}{x+2}$; 14) $\frac{1-x}{3}$; 15) $\frac{a-4}{b}$;

d) 1) $\frac{c-d}{x^2+y^2}$; 2) $\frac{x-5}{x-1}$; 3) $\frac{a+2}{a+5}$; 4) $\frac{(a^2-ab+b^2)^2}{(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)}=\frac{a^2-ab+b^2}{a^2+ab+b^2}$; 5) $\frac{xy}{x^2-y^2}$; 6) $\frac{a+b-c}{a-b+c}$; 7) $\frac{1}{x+1}$; 8) $\frac{x-a}{x^2+a}$; 9) $\frac{a-b}{a-b-1}$; 10) $\frac{a^2+b^2}{b}$; 11) $\frac{a^2-a+1}{6(a+1)}$; 12) $\frac{x-4}{x-3}$; 13) $\frac{a}{a+b}$; 14) $\frac{2x-3}{x+1}$; 15) 1; 16) $\frac{a-2b}{a+b-c}$;

e) 1) $\frac{(x-y)(x-z)(y-z)(x+y+z)}{(x-y)(x-z)(y-z)}=(x+y+z)$; 2) $\frac{(n^2+8+4n)(n^2+8-4n)}{(4n+n^2+8)(x-1)}=\frac{n^2-4n+8}{x-1}$; 3) $\frac{(x^2+2-2x)(x^2+2+2x)}{(x^2+2-2x)(a-1)}=\frac{x^2+2x+1}{a-2}$; 4) $\frac{(x^6-64)^2}{((x^3-8)-4x(x-2))^2}=(x+2)^2(x^2+2x+4)^2$; 5) $\frac{a^{n-1}(2a+1)(4a^2-2a+1)}{a^n(4a^2+1-2a)(4a^2+1+2a)}=\frac{2a+1}{a(4a^2+2a+1)}$; 6) $\frac{a+b+c}{ab+ac+bc}$; 7) $a+b+c$; 8) $\frac{m+n+p}{2}$;

f) 1) $|a+2|=a+2$, za $a\geq -2$, $|a+2|=-a-2$ za $a<-2$, pa posle skraćivanja dobijamo $\frac{a(a-1)}{2}$ za $a>-2$, odnosno $-\frac{a}{2}$ za $a<-2$. Za $a=-2$ razlomak nije definisan; 2) $\frac{1}{m+2}$ za $m>3$ i za $m<0$, a $-\frac{1}{m+2}$ za $0<m<3$; 3) $-\frac{1}{x}$ za $x<2$ i $x\neq 0$, $\frac{1}{x}$ za $x>2$ i $x\neq 3$; 4) $\frac{1}{a+3}$ za $a>2$, $\frac{1}{a+1}$ za $a<2$, $a\neq -3$, $a\neq -1$; 5) $\frac{3+x}{x^2-1}$ za $x<0$, $\frac{2x^2+x+3}{x+x^2}$ za $0<x<1$, $\frac{3}{x}$ za $x\geq 1$; 6) $\frac{1}{1-3x}$ za $x<0$, $\frac{x+1}{(x-1)(3x-1)}$ za $0<x<1$, $x\neq\frac{1}{3}$, $\frac{1}{x-1}$ za $x>1$; 7) $-\frac{3}{x(2x+3)}$ za $x<3$, $x\neq 0$, $x\neq -\frac{3}{2}$, $\frac{1}{x}$ za $x>3$; 8) $-\frac{x+1}{x}$ za $x<-1$, $\frac{x+1}{2-x}$ za $-1\leq x<0$, $\frac{x+1}{x-2}$ za $x>0$, $x\neq 2$; 9) $\frac{k(k-1)}{k^2+1}$ za $k<0$, $\frac{k}{1-k}$ za $0\leq k<1$, $\frac{k}{k-1}$ za $k>1$.

497. a) $\frac{k^2-2}{k+2}=\frac{k^2-4+2}{k+2}=\frac{(k-2)(k+2)}{k+2}+\frac{2}{k+2}=k-2+\frac{2}{k+2}$. Razlomak ima celobrojne vrednosti kada je $\frac{2}{k+2}$ ceo broj. Celobrojne vrednosti su -7 za $k=-4$ ili $k=-3$ i -1 za $k=-1$ ili $k=0$; b) 0, -1, 9, 13; c) 2, 3, 5, 9, -7, -3, -1, 0.

498. a) 1) 1; 2) xy; 3) $\frac{xy}{2b}$; 4) $\frac{x}{2a}$; 5) $\frac{n}{4}$; 6) $-6a^3b$;

b) 1) $\frac{2y}{x}$; 2) $\frac{1}{2y}$; 3) $\frac{a^2y}{bx}$; 4) $-\frac{12}{5x}$; c) 1) $\frac{z}{3x}$; 2) $\frac{1456ay^4}{1035b^2x^2}$;

d) 1) $\frac{a+b}{x-y}$; 2) $\frac{b}{(b+1)(b+3)}$; 3) $\frac{a+3}{a^2+3a+9}$; 4) $\frac{(a-5)(a+3)}{a^2}$; 5) $\frac{a+2b}{3}$;

e) 1) a^2b^2; 2) $-8(x+y)$; 3) $\frac{(x-1)(x-3)}{(x+1)^2}$; 4) $\frac{3}{m-n}$;

f) 1) $\dfrac{2}{x-1}$; 2) a; 3) $\dfrac{1}{(a-2)(a+3)}$; 4) $\dfrac{x-7}{x+5}$.

499. a) 1) $\dfrac{x}{2}$; 2) $\dfrac{(a-b)^2}{ab}$; 3) $\dfrac{x-2y}{2}$; 4) $\dfrac{5a^2+b^2}{2ab}$; 5) $\dfrac{1}{6a}$;

b) 1) $\dfrac{6ab}{(a-b)(a+b)}$; 2) $\dfrac{3xy+3y^2}{x+2y}$; 3) $\dfrac{2b}{a(a-b)}$; 4) $\dfrac{1}{x+2}$; 5) 0; 6) -1; 7) $-\dfrac{1}{a}$;

8) Sabrati najpre dva poslednja razlomka itd.: $\dfrac{16a^5}{a^{16}-b^{16}}$; 9) 1.

c) 1) 2; 2) $-\dfrac{6}{x^2+3x+9}$; 3) 1; 4) $\dfrac{1}{b(b-a)}$; 5) 0; 6) a^2+2;

d) 1) 0: 2) 0; 3) 1; 4) 1; 5) 0; 6) 0;

e) 1) 0; 2) -2; 3) $\dfrac{1}{6a}$; 4) $\dfrac{1}{(a-x)(c-x)}$; 5) $\dfrac{1}{abc}$; 6) $x+y+z$; 7) $\dfrac{4}{a(a+4)}$.

500. a) $\dfrac{x-y}{xy}$; b) $\dfrac{y-x}{y^2}$; c) $\dfrac{2}{x}$; d) $\dfrac{-2}{(x-y)(x+y)}$; e) a; f) -1; g) 5; h) 1; i) $\dfrac{x-y}{x+y}$; j) $2a+3$; k) $\dfrac{x-1}{x^2-x-1}$; l) $\dfrac{x-y}{2}$; m) $\dfrac{1}{a+c}$.

501. Dati izraz treba prvo uprostiti, pa zameniti vrednosti promenljivih. a) 1; b) 20.

502. a) $\dfrac{9}{10}$; b) $y-1$; c) $-\dfrac{x}{a}$; d) $\dfrac{m+n}{m-n}$; e) $\dfrac{2xy}{x^2-y^2}$; f) $\dfrac{1}{x}$; g) $\dfrac{a^2+ab+b^2}{a^3}$; h) $\dfrac{x^2+2x}{2}$; i) x; j) $1-a-a^2$; k) $\dfrac{10x+3}{7x+2}$.

503. a) 0; b) $\dfrac{2(1+a^2)}{a}$; c) 1; d) $\dfrac{1}{a+5}$; e) 0; f) $\dfrac{a}{b}$; g) $\dfrac{1}{xy}$; h) $\dfrac{a-x}{a^3x^3}$; i) $a+b+c$; j) $\dfrac{b+1}{b-2a}$; k) $1+2x$.

504. a) 1; b) Sređivanjem dati izraz svodimo na $\dfrac{-a(b+c-a)}{2}$, a za date vrednosti a, b, c ovo je jednako 0,1; c) $-\dfrac{7}{24}$; d) $\dfrac{m^3}{2(m-1)}$.

505. Dati izrazi imaju vrednosti: a) 1; b) 4; c) 1; d) 4; e) 1; f) -1; g) $\dfrac{1}{a}$.

507. Posle izvršenih skraćivanja dobija se $A=p$.

508. a) Sređivanjem razlomak svodimo na $\dfrac{a^2-1}{2a-b}$ koji je jednak nuli za $a=1$ ili za $a=-1$, pri čemu je $b\neq\pm2$ i $b\neq0$.

b) Uz uslov $3a^2-1\neq0$, koji važi ako je a ceo broj i $a\neq-5$, dati izraz je jednak sa $\dfrac{1}{a+5}$, a ovo je ceo broj samo ako je $a+5=1$ ili $a+5=-1$, tj. ako je $a=-4$ ili $a=-6$.

c) Uz uslov: $a\neq b$ i $a\neq-b$, posle uprošćavanja dobijemo da je dati izraz jednak $(a-b)$, pa a i b moraju biti oba parna ili oba neparna.

509. Iz $B\cdot x=A$ dobijamo $x=A:B$. Traženi izraz je $\left(\dfrac{a}{b}-\dfrac{b}{a}\right):\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\right)=\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$.

510. a) $A=B=2$. Dovođenjem razlomaka sa desne strane jednakosti na zajednički imenilac dobićemo jednakost $\dfrac{4x}{x^2-1}=\dfrac{A(x+1)+B(x-1)}{(x-1)(x+1)}$, koja je za $x\neq1$ i $x\neq-1$ ekvivalentna sa

$4x = (A+B)x + (A-B)$. Koristeći, definiciju identične jednakosti dva polinoma, dobijamo $A+B=4$ i $A-B=0$, pa je otuda $A=B=2$.

b) $A=2$, $B=1$; c) $A=1$, $B=-2$, $C=0$; d) $A=1$, $B=2$, $C=0$; e) $A=1$, $B=3$, $C=-1$.

511. Pođimo od $x^2(a^2+b^2)+a^2y^2+b^2y^2=(x^2+y^2)(a^2+b^2)$, pa umesto a^2y^2 stavimo b^2x^2. Dobićemo $x^2(a^2+b^2)+b^2(x^2+y^2)=(x^2+y^2)(a^2+b^2)$. Posle deljenja sa $(x^2+y^2)(a^2+b^2)$ dobijamo traženu jednakost.

512. Neka je $a+\frac{1}{a}=k$. Tada je $a^3+\frac{1}{a^3}=\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(a^2-1+\frac{1}{a^2}\right)=k\left(a^2+2+\frac{1}{a^2}-3\right)=k\left(\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-3\right)=k(k^2-3)=(k^3-3k)\in Z$. (Nije teško uveriti se da je moguće samo $k=2$, odnosno $a=1$ – videti **zadatak 540**b).)

513. a) Označimo $\frac{1}{a}=b$. Tada je $a+b=1$ i $a\cdot b=1$, pa je $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=-1$ i $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)=-2$. Zbog toga je $a^5+\frac{1}{a^5}=a^5+b^5=(a^2+b^2)(a^3+b^3)-a^2b^2(a+b)=1$.

b) Stavimo $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=k\Rightarrow x=ka$, $y=kb$, $z=kc$. Tada je $(x^2+y^2+z^2)(a^2+b^2+c^2)=k^2(a^2+b^2+c^2)(a^2+b^2+c^2)=(ka^2+kb^2+kc^2)^2=(a\cdot ka+b\cdot kb+c\cdot kc)^2=(ax+by+cz)^2$.

c) Iz datog uslova je $b^2=ac$ itd.

d) Neka je $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=\frac{1}{k}$. Tada je: $a=kx$, $b=ky$, $c=kz$ i iz $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$, zbog datih uslova dobijamo $ab+bc+ca=0\Rightarrow k^2xy+k^2yz+k^2zx=0$, odakle dobijamo traženu jednakost.

e) Iz uslova je $a=1-b$ i $b=1-a$, pa je $\frac{a}{b^3-1}-\frac{b}{a^3-1}=\frac{1-b}{b^3-1}-\frac{1-a}{a^3-1}=\frac{1}{a^2+a+1}-\frac{1}{b^2+b+1}=\frac{(b-a)(a+b+1)}{(a^2+a+1)(b^2+b+1)}$. U brojiocu je $a+b+1=2$, a imenilac je $a^2b^2+ab^2+b^2+a^2b+ab+a+a^2+b+1=a^2b^2+ab(a+b)+a(a+b)+(a+b)+b^2+1=a^2b^2+ab+a+1+b^2+1=a^2b^2+b(a+b)+a+2=a^2b^2+a+b+2=a^2b^2+3$.

f) Slično **zadatku 484**.

g) $\frac{2xy}{x+z}=\frac{2ac}{(b+c)(a+b)}:\left(\frac{a}{b+c}+\frac{c}{a+b}\right)=\frac{2ac}{a^2+c^2+b(a+c)}$.

i) Iz $\left(\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}\right)\cdot\left(\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}+\frac{1}{a-b}\right)=0\cdot\left(\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}+\frac{1}{a-b}\right)=0$, dobijamo $\frac{a}{(b-c)^2}+\frac{b}{(c-a)^2}+\frac{c}{(a-b)^2}+\frac{(a+b)(a-b)+(b+c)(b-c)+(c+a)(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}=0$. Kako je poslednji razlomak $\frac{0}{(a-b)(b-c)(c-a)}=0$, sledi tražena jednakost. Međutim, iz $b=\frac{2ac}{a+c}$ sledi: $b(a+c)=2ac$, pa imamo: $\frac{2xz}{x+z}=\frac{2ac}{a^2+c^2+2ac}=\frac{2ac}{(a+c)^2}=\frac{b}{a+c}=y$.

514. Proizvod izraza u prvoj zagradi sa prvim sabirkom iz druge daje
$$1+\frac{c^2}{a-b}\left(\frac{b-c}{a^2}+\frac{c-a}{b^2}\right)=1+\frac{c^2}{a-b}\cdot\frac{b^3-b^2c+a^2c-a^3}{a^2b^2}=1+\frac{c^3}{a^2b^2}(c(a+b)-(a^2+ab+b^2)).$$
Iz uslova je $a+b=-c$, pa je ovaj proizvod $1-\frac{c^4(a^2+b^2+c^2+ab)}{a^2b^2c^2}+1-c^4\frac{a^2+b^2+c^2}{a^2b^2c^2}-\frac{c^3}{abc}$. Slično se izračunaju preostala dva proizvoda, saberu se i odrede se zbirovi $(a^2+b^2+c^2)$, $(a^3+b^3+c^3)$ i $(a^4+b^4+c^4)$ (videti rešenja **zadataka 483**, **484**, **489** i **491** c) itd.

515. Iz jednakosti $0 = ab\left(\frac{a+b}{2} - c\right) + bc\left(\frac{b+c}{2} - a\right) + ca\left(\frac{c+a}{2} - b\right) =$
$\frac{1}{2}(a^2b + ab^2 - 2abc + b^2c + bc^2 - 2abc + c^2a + ca^2 - 2abc) = \frac{a}{2}(b-c)^2 + \frac{b}{2}(c-a)^2 + \frac{c}{2}(a-b)^2$ i uslova da su a, b, c pozitivni brojevi, dobijamo $b - c = c - a = a - b = 0$, pa je $a = b = c$.

516. Označimo $t = \frac{x^2 - yz}{a} = \frac{y^2 - zx}{b} = \frac{z^2 - xy}{c}$. Tada je $\frac{a^2 - bc}{x} - \frac{b^2 - ca}{y} =$
$\frac{1}{x} \cdot \left(\frac{x^2 - yz}{t}\right)^2 - \frac{1}{x}\frac{y^2 - zx}{t}\frac{z^2 - xy}{t} - \frac{1}{y}\left(\frac{y^2 - zx}{t}\right)^2 + \frac{1}{y}\frac{x^2 - yz}{t}\frac{z^2 - xy}{t} =$
$\frac{1}{xyt^2}\{y(x^2 - yz)^2 - y(y^2 - zx)(z^2 - xy) - x(y^2 - zx)^2 + x(x^2 - yz)(x^2 - xy)\} = 0$, pa je $\frac{a^2 - bc}{x} = \frac{b^2 - cy}{y}$. Analogno dokazujemo $\frac{a^2 - bc}{x} = \frac{c^2 - ab}{z}$.

517. $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_n} = \frac{p_2 \dots p_n + p_1 p_3 \dots p_n + \cdots + p_1 p_2 \dots p_{n-1}}{p_1 \cdot p_2 \cdots p_n}$. U brojiocu zbira svi sabirci osim prvog deljivi su sa p_1, što znači da se razlomak ne može skratiti sa p_1.

518. Jednostavno se dokazuje da važi jednakost $(ax^2 + by^2 + cz^2)(a + b + c) - bc(y - z)^2 - ca(z - x)^2 - ab(x - y)^2 = (ax + by + cz)^2$, pa zbog $ax + by + cz = 0$ dobijamo:
$(ax^2 + by^2 + cz^2)(a + b + c) = bc(y - z)^2 + ca(z - x)^2 + ab(x - y)^2$. Deljenjem ove jednakosti sa $(a + b + c)\{bc(y - z)^2 + ca(z - x)^2 + ab(x - y)^2\} \neq 0$ dobijamo traženi rezultat.

519. Svodi se na prethodni zadatak.

520. Iz date jednakosti je
$a^2 = (a + b - c)^2 - b^2 = (a + 2b - c)(a - c)$ i $b^2 = (a + b - c)^2 - a^2 = (2a + b - c)(b - c)$ itd.

521. Pomnožimo datu jednakost sa $abc(a - b)$, pa posle pregrupisavanja imamo
$a^2b - b^2c - a^3bc + ab^2c^2 = ab^2 + ab^2c^2 - a^2c - ab^3c$, odakle dobijamo traženu jednakost.

522. Na osnovu osobina proporcije je $\frac{m}{(a+b)^2} + \frac{n}{(a+c)^2} = ka$, $\frac{n}{(b+c)^2} - \frac{p}{(a+b)^2} = kb$, $\frac{p}{(a+c)^2} + \frac{m}{(b+c)^2} = kc$, $k \neq 0$. Pomnožimo ove jednakosti redom sa p, m, $-n$, saberemo i dobijemo $ap + bm = cn$. Množeći iste jednakosti redom sa $\frac{1}{(b+c)^2}$, $-\frac{1}{(a+c)^2}$, $-\frac{1}{(a+b)^2}$, dobićemo drugu traženu jednakost.

523. a) Pomnožimo datu jednakost sa $abc(a + b + c)$ i dobijemo: $bc(a + b + c) + ac(a + b + c) + ab(a + b + c) - abc = 0$, koja posle rastavljanja na činioce daje: $(b + c)(c + a)(a + b) = 0$, odakle sledi da je $b + c = 0$ ili $c + a = 0$ ili $a + b = 0$.

b) Na osnovu a) je, na primer, $a = -b$, pa je zbog neparnog izložioca i $a^{2n-1} = -b^{2n-1}$. Zamenom u jednakost b) ovu svodimo na identičnost: $\frac{1}{c^{2n-1}} = \frac{1}{c^{2n-1}}$.

524. Proširimo prvi razlomak sa z i drugi sa xz: $S = \frac{z}{z + xz + xyz} + \frac{xz}{xz + xyz + xyz^2} + \frac{1}{1 + z + zx} = \frac{z}{z + xz + 1} + \frac{xz}{xz + 1 + z} + \frac{1}{1 + z + zx} = \frac{z + xz + 1}{1 + z + zx} = 1$. **525.** $\frac{a}{b}$.

526. Pomnožimo prvu jednakost sa q^2, drugu sa p^2, treću sa $-2pq$ i rezultate saberemo. Dobićemo: $(a_1q - b_1p)^2 + (a_2q - b_2p)^2 + (a_3q - b_3p)^2 = 0$, a odatle izvlačimo traženi zaključak.

527. Količnik datih polinoma napišimo u obliku $\frac{x^{2n} - 1}{x^2 - 1} : \frac{x^n - 1}{x - 1} = \frac{(x^n)^2 - 1}{x^n - 1} \cdot \frac{x - 1}{x^2 - 1} = \frac{x^n + 1}{x + 1}$. Dakle, n mora biti neparan broj, da bi bilo $x^n + 1 = (x + 1)(x^{n-1} - x^{n-2} + \cdots + 1)$.

528. Pošto je $2 = 3 \cdot \frac{2}{3} = 3\left(1 - \frac{1}{3}\right)$ dobijamo:

$$3\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3^2}\right)\left(1+\frac{1}{3^4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{3^{2^{n-1}}}\right) =$$

$$3\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1+\frac{1}{3^2}\right)\left(1+\frac{1}{3^4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{3^{2^{n-1}}}\right) = \cdots = 3\left(1-\frac{1}{3^{2^n}}\right).$$

529. a) Imamo sledeće jednakosti:

$$\begin{aligned}
1-\frac{1}{4} &= \frac{(2-1)(2+1)}{2\cdot 2} = \frac{1\cdot 3}{2\cdot 2}\\
1-\frac{1}{9} &= \frac{(3-1)(3+1)}{3\cdot 3} = \frac{2\cdot 4}{3\cdot 3}\\
1-\frac{1}{16} &= \frac{(4-1)(4+1)}{4\cdot 4} = \frac{3\cdot 5}{4\cdot 4}\\
&\vdots\\
1-\frac{1}{n^2} &= \frac{(n-1)(n+1)}{n\cdot n}.
\end{aligned}$$

Pomnožimo sve ove jednakosti i skratimo.

b) $S = \frac{2-1}{1\cdot 2} + \frac{3-2}{2\cdot 3} + \frac{4-3}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{n+1-n}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$.

530. Označimo prvu cifru (sleva) trocifrenog broja sa a. Ako su ostale cifre tog broja jednake nuli, traženi količnik je 100. Ako je bar jedna od ostalih cifara veća od nule, zbir cifara tog broja je veći ili jednak $a+1$, dok je sam broj manji od $(a+1)\cdot 100$, pa je traženi količnik manji od 100. Dakle, najveća vrednost količnika je 100, a dobija se za brojeve oblika $\overline{a00}$ $(a = 1, 2, \ldots, 9)$.

Označimo traženi broj sa $\overline{abc} = 100a + 10b + c$. Mora biti $a = 1$, jer je $\frac{100+10b+c}{1+b+c} < \frac{x\cdot 100 + 10b + c}{x+b+c}$, $x > 1$, ekvivalentno sa $100x + 100b + 100c + 10bx + cx + (10b+c)(b+c) < 100x + 100bx + 100cx + 10b + c + (b+c)(10b+c)$ odakle je $90b + 99c < 90bx + 99cx$. Dalje, mora biti $b = 9$, jer iz $\frac{190+c}{10+c} < \frac{100+10x+c}{1+x+c}$, $x < 9$, sledi: $190 + 190x + 190c + c + cx + c^2 < 1000 + 100c + 100x + 10cx + 10c + c^2$, odnosno: $10x + 9c < 90 + cx$, što je tačno zbog $x \le 8$. Na kraju, $c = 9$, jer iz $\frac{199}{19} < \frac{190+c}{10+c}$, $c \le 8$, sledi: $1990 + 199c < 19\cdot 190 + 19c$ odnosno $19c < 162$. Prema tome, količnik je najmanji za broj 199.

531. Prema uslovu je $y = \frac{x^2 + x^{-2}}{x^2 - x^{-2}} = \frac{x^4+1}{x^4-1}$, odakle dobijamo $x^4 = \frac{y+1}{y-1}$, pa je

$$z = \frac{x^4 + x^{-4}}{x^4 - x^{-4}} = \frac{x^8+1}{x^8-1} = \frac{\left(\frac{y+1}{y-1}\right)^2 + 1}{\left(\frac{y+1}{y-1}\right)^2 - 1} = \frac{y^2+1}{2y}.$$

532. Kako je $(ac+bd)^2 + 1 = (ac+bd)^2 + (ad-bc)^2 = a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2 = (a^2+b^2)(c^2+d^2)$, to su brojevi $ac+bd$ i a^2+b^2 uzajamno prosti, pa se dati razlomak ne može skratiti.

533. Iz date jednakosti je $\frac{a}{b} = \frac{q-p}{q}$ itd.

534. Izračunamo $y+1$, pa $y-1$ i dobijemo $\frac{y+1}{y-1} = x^{2n}$ itd.

535. a) Neka je $a = 1,000004$ i $b = 1,000002$. Tada dati razlomci postaju $\frac{1+a}{1+a+a^2}$ i $\frac{1+b}{1+b+b^2}$ i $a > b$. Zbog $a > b$ je $\frac{1+a}{a^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a} < \frac{1}{b^2} + \frac{1}{b} = \frac{1+b}{b^2} \Longleftrightarrow \frac{a^2}{1+a} > \frac{b^2}{1+b}$. Sada imamo $\frac{1+a+a^2}{1+a} = 1 + \frac{a^2}{1+a} > 1 + \frac{b^2}{1+b} = \frac{1+b+b^2}{1+b}$. Odavde zaključujemo $\frac{1+a}{1+a+a^2} < \frac{1+b}{1+b+b^2}$.

b) Označimo sa A i B date razlomke. Tada $\frac{1}{A} = 1 + \frac{a^n}{1+a+a^2+\cdots+a^{n-1}} =$ $1 + \frac{1}{\frac{1+a+a^2+\cdots+a^{n-1}}{a^n}} = 1 + \frac{1}{\frac{1}{a^n} + \frac{1}{a^{n-1}} + \cdots + \frac{1}{a}}$.

Slično: $\frac{1}{B} = 1 + \frac{1}{\frac{1}{b^n} + \frac{1}{b^{n-1}} + \cdots + \frac{1}{b}}$. Odavde izlazi da je $\frac{1}{A} > \frac{1}{B}$, pa je $A < B$.

536. a) $\frac{a^3+b^3+c^3}{3} \geq \sqrt[3]{a^3b^3c^3}$ – prema nejednakosti između sredina.

b) $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$ i $\frac{a^2+b^2+c^2}{3} \geq \sqrt[3]{a^2b^2c^2}$, ovo se pomnoži itd.

c) $2a^3 + 11 = (a^3+1+1) + (a^3+8+1) > 3\sqrt[3]{a^3 \cdot 1 \cdot 1} + 3\sqrt[3]{a^3 \cdot 8 \cdot 1} = 9a$

d) Kao u slučaju b).

U slučajevima a), b) i d) znak $=$ važi ako je $a = b = c$.

537. Koristeći jednakost $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 1$, levu stranu date nejednakosti možemo zapisati u obliku: $L =$
$$\frac{a_2+a_3+a_4+a_5}{a_1} \cdot \frac{a_1+a_3+a_4+a_5}{a_2} \cdot \frac{a_1+a_2+a_4+a_5}{a_3} \cdot \frac{a_1+a_2+a_3+a_5}{a_4} \cdot \frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{a_5}.$$

Koristeći nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine, dobijamo
$$L \geq \frac{4}{a_1} \cdot \sqrt[4]{a_2a_3a_4a_5} \cdot \frac{4}{a_2}\sqrt[4]{a_1a_3a_4a_5} \cdot \frac{4}{a_3}\sqrt[4]{a_1a_2a_4a_5} \cdot \frac{4}{a_4}\sqrt[4]{a_1a_2a_3a_5} \cdot \frac{4}{a_5}\sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4} = 1024.$$

538. Iz jednakosti $2x + 4y = 1$ dobijamo $x = \frac{1-4y}{2}$, $x^2 + y^2 - \frac{1}{20} = \frac{(1-4y)^2}{4} + y^2 - \frac{1}{20} =$ $\frac{1}{4}(1 - 8y + 20y^2) - \frac{1}{20} = \frac{1}{20}(10y-2)^2 \geq 0$. Prema tome važi $x^2 + y^2 \geq \frac{1}{20}$.

539. a) Polazeći od tačne nejednakosti $(a-b)^2 \geq 0$, dobijamo traženi zaključak. Znak jednakosti važi za $a = b$.

b) Primeniti prethodnu nejednakost na a i b, zatim na b i c, pa na a i c. Znak $=$ važi ako je $a = b = c$.

c) Svodi se na $(a-b)^2 \geq 0$.

540. a) Poći od Košijeve nejednakosti (prethodni zadatak). Znak $=$ važi za $a = b$.

b) Poći od $a^2 + 1 \geq 2a$. Znak $=$ važi za $a = 1$.

541. Kao prethodni zadatak.

542. Slično **zadatku 539** a): Iz $(a-b)^2 \geq 0$ sledi $b^2 \geq 2ab - a^2$, pa podelimo sa a.

543. Primenimo nejednakost iz prethodnog zadatka.

544. $\frac{x^2}{1+x^4} + \frac{1}{\frac{1+x^4}{x^2}} = \frac{1}{\frac{1}{x^2} + x^2} \leq \frac{1}{2}$, jer je $\frac{1}{x^2} + x^2 \geq 2$ na osnovu **zadatka 540**.

545. Neka je $a \leq b \leq c$. Tada za $\frac{a}{b} = \frac{1}{p} \leq 1$, $\frac{b}{c} = \frac{1}{q} \leq 1$, dobijamo $\frac{a}{c} = \frac{1}{pq}$, odnosno $\frac{c}{a} = pq$ i $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + pq \geq 3$. Iz $p \geq 1$, $q \geq 1$, je $(p-1)(q-1) \geq 0$, tj. $pq \geq p + q - 1$. Stoga je $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + pq \geq \left(\frac{1}{p} + p\right) + \left(\frac{1}{q} + q\right) - 1 \geq 3$ jer je $\frac{1}{p} + p \geq 2$ prema **zadatku 540**b).

546. a) Uzmimo brojeve $k \cdot x$ i $\frac{k}{x}$, $k > 0$, $x > 0$. Tada je:
$kx \cdot \frac{k}{x} = k^2$, a $kx + \frac{k}{x} = k\left(x + \frac{1}{x}\right) \geq 2k$. Zbir je najmanji za $x = 1$, pa su oba broja jednaka k.

b) Neka su $a - x$ i $a + x$ dati brojevi, gde je a konstanta. Tada je $(a-x) + (a+x) = 2a$ i $(a-x) \cdot (a+x) = a^2 - x^2$. Proizvod je najviše a^2, i to za $a = 0$, a to znači da su dati brojevi jednaki.

c) $\frac{x}{9x^2+4} = \frac{1}{9x + \frac{4}{x}}$ i dalje na imenilac primeniti prethodni rezultat. Rešenje: $x = \frac{2}{3}$.

547. a) Na osnovu nejednakosti iz **zadatka 539** imamo: $a^2 + b^2c^2 \geq 2abc$, $b^2 + c^2a^2 \geq 2abc$, $c^2 + a^2b^2 \geq 2abc$. Sabiranjem ovih nejednakosti dobijamo traženu nejednakost.

b) Neka je $b + c = 2x$, $c + a = 2y$, $a + b = 2z$. Tada je $a + b + c = x + y + z$, $a = y + z - x$, $b = x + z - y$, $c = x + y - z$, pa naša nejednakost postaje: $\frac{y+z-x}{x} + \frac{x+z-y}{y} + \frac{x+y-z}{z} = \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + \left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x}\right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y}\right) - 3 \geq 2 + 2 + 2 - 3 = 3$, na osnovu **zadatka 545** a).

c) Slično kao kod a), polazeći od $c(a^2+b^2) \geq 2abc$, $a(b^2+c^2) \geq 2abc$, $b(c^2+a^2) \geq 2abc$, dobijamo potvrdu za levu nejednakost. Za desnu stranu, pođimo od $2ab \leq a^2 + b^2$, odakle je $ab \leq a^2 + b^2 - ab$. Množenjem sa $(a+b)$ dobijamo $ab(a+b) \leq a^3 + b^3$. Slično se dobija $bc(c+a) \leq b^3 + c^3$ i $ca(c+a) \leq c^3 + a^3$. Saberemo i dobijemo desnu nejednakost.

548. Neka je $a = 1 + k$. Iz datog uslova dobijamo $b = 1 - k$. Izračunamo $a^4 + b^4 = (1+k)^4 + (1-k)^4 = 2k^4 + 12k^2 + 2 \geq 2$, jer je $k^4 \geq 0$ i $k^2 \geq 0$.

549. Iz $a + b \geq 1$, kvadriranjem dobijamo $a^2 + 2ab + b^2 \geq 1$. Dodamo ovoj nejednakosti očiglednu nejednakost $a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$ i dobijemo $a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}$. Posle kvadriranja i dodavanja očigledne nejednakosti $a^4 - 2a^2b^2 + b^4 \geq 0$, dobićemo traženu nejednakost.

550. Slično prethodnom zadatku.

551. Neka je $a = 1 + m$ i $b = 1 + n$. Tada je $a + b = 2 + (m+n)$, pa treba dokazati da je $m + n \leq 0$. Prema uslovu je $a^3 + b^3 = 2 + m^3 + n^3 + 3(m+n) + 3(m^2+n^2) = 2$. Odavde $(m+n)(m^2 - mn + n^2 + 3) + 3(m^2+n^2) = 0$. Kako je $3(m^2+n^2) \geq 0$, i $m^2 - mn + n^2 + 3 = \frac{1}{2}((m-n)^2 + m^2 + n^2) + 3 > 0$, to mora biti $m + n \leq 0$.

552. a) Pomnožimo sa 2 i dobijemo $2a^2 + 2b^2 + 2 \geq 2ab + 2a + 2b$, a odavde $(a^2 - 2ab + b^2) + (a^2 - 2a + 1) + (b^2 - 2b + 1) = (a-b)^2 + (a-1)^2 + (b-1)^2 \geq 0$.

b) Kao prethodni slučaj.

c) Podelimo desnom stranom nejednakosti i dobijamo: $\frac{a^2}{1+a^4} + \frac{b^2}{1+b^4} \leq 1$, što je tačno na osnovu nejednakosti iz **zadatka 544**.

d) Transformisanjem dobijamo $(a-b)^2(a+b)^2(a^2+b^2) \leq (a-b)^2(a^2+ab+b^2)^2$. Za $a = b$ važi jednakost. Ako je $a \neq b$, onda je $(a-b)^2 > 0$, pa imamo $(a+b)^2(a^2+b^2) \leq (a^2+ab+b^2)^2$ odakle je $(a^2+b^2)^2 + 2ab(a^2+b^2) \leq (a^2+b^2)^2 + 2ab(a^2+b^2) + a^2b^2$, a odavde je $0 \leq a^2b^2$, što je očigledno.

e) Nejednakost napišemo u obliku: $a^6 + b^6 + a^2b^2(a^2+b^2) \geq a^6 + b^6 + 2a^3b^3$. Odavde je $a^2b^2(a^2+b^2) \geq 2a^3b^3$. Ako je $a = b$ ili $ab = 0$, važi znak $=$. Ako je $ab \neq 0$ nejednakost se svodi na $a^2 + b^2 \geq 2ab$ (videti **zadatak 539**a).

553. a) $\frac{a}{2} < \frac{b}{2} \Rightarrow \frac{a}{2} + \frac{a}{2} < \frac{b}{2} + \frac{a}{2} \Rightarrow a < \frac{a+b}{2}$ itd.

b) $\frac{a}{b} \le \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} + 1 \le \frac{c}{d} + 1 \Rightarrow \frac{a+b}{b} \le \frac{c+d}{d}$. c) Slično sa b).

d) $a^2 + 1 > 0$, pa imamo tačne nejednakosti: $-a^2 - 1 \le a^2 - 1 < a^2 + 1$. Podelimo sa $a^2 + 1 > 0$ i dobijemo traženu nejednakost.

e) $\frac{a}{b} \le \frac{c}{d} \Rightarrow bc \ge ad$, pa je $\frac{a+c}{b+d} - \frac{a}{b} = \frac{bc - ad}{b(b+d)} \ge 0$, jer je $b > 0$, $d > 0$ i $bc > ad$. Sledi da je $\frac{a+c}{b+d} > \frac{a}{b}$ itd.

554. Neka je a najveći član. Tada je d najmanji, jer je $d = b \cdot \frac{c}{a} = c \cdot \frac{b}{a}$, pa zbog $\frac{c}{a} < 1$ i $\frac{b}{a} < 1$, je $d < b$ i $d < c$. Na osnovu osobina proporcija iz $a : b = c : d$ sledi $\frac{a-b}{c-d} = \frac{a}{c} > 1$. Odavde je $a - b > c - d$, pa je $a + d > b + c$.

555. Neka je $b \le a$. Tada je $(a+b)^n \le (2a)^n = 2^n a^n < 2^n(a^n + b^n)$.

556. a) Prema **zadatku 539** b) polazimo od nejednakosti $x^2 + y^2 + z^2 \ge xy + yz + zx$, zamenimo $x = ab$, $y = bc$, $z = ca$ i dobijenu nejednakost podelimo sa abc.

b) $\frac{1}{a+b+c} < \frac{1}{a+b}$, $\frac{1}{a+b+c} < \frac{1}{b+c}$ i $\frac{1}{a+b+c} < \frac{1}{c+a}$ itd.

c) Podelimo sa abc i iskoristimo **zadatak 540** a).

d) Pomnožimo sa abc i posle sređivanja dobijemo $a(b^2-c^2)^2 + b(c^2-a^2)^2 + c(a^2-b^2)^2 \ge 0$, što je tačno.

e) Datu nejednakost dobijamo iz
$a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + a^2c + ac^2 - 2abc - 2abc - 2abc = a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2 \ge 0$.

557. Za prirodne brojeve važi $ab \le abc$, $bc \le abc$, $ca \le abc$.

558. Primeniti nejednakost iz **zadatka 539** b).

559. Koristimo nejednakost aritmetičke geometrijske sredine: $k + \frac{3}{k} + \frac{9}{k^2} = \frac{k}{3} + \frac{k}{3} + \frac{k}{3} + \frac{3}{k} + \frac{9}{k^2} \ge 5\sqrt[5]{\frac{3 \cdot 9 \cdot k^3}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot k^3}} = 5$. Znak jednakosti se postiže za $\frac{k}{3} = \frac{3}{k} = \frac{9}{k^2}$, tj. za $k = 3$. Tražena minimalna vrednost je 5, za $k = 3$.

560. Neka je $a + b = k$. Tada je $a + b \ge 2\sqrt{ab}$, odnosno $4ab \le (a+b)^2$, pa je $4ab \le k^2$. Sledi da je: $a + b + \frac{3}{a+b} + \frac{9}{4ab} \ge k + \frac{3}{k} + \frac{9}{k^2}$, pa se problem svodi na prethodni zadatak.

561. Koristimo nejednakosti između sredina.

562. Iz $x + y + z = a$ dobijamo $a - x = y + z$, $a - y = z + x$, $a - z = x + y$. Dalje kao prethodni zadatak.

563. $a + 6b = a + 2b + 4b \ge 3\sqrt[3]{8ab^2}$. Slično je $b + 3c = b + c + 2c \ge 3\sqrt[3]{2bc^2}$ i $c + 4a = c + 2a + 2a \ge 3\sqrt[3]{4a^2c}$. Množenjem ovih nejednakosti dobijamo: $(a+6b)(b+3c)(c+4a) \ge 27\sqrt[3]{64a^3b^3c^3} = 108abc$.

564. Na osnovu date jednakosti imamo: $x+y+z = (x+y+z)\cdot 1 = (x+y+z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = 3 + \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y}\right) + \left(\frac{z}{x} + \frac{x}{z}\right) \ge 9$, prema nejednakosti iz **zadatka 540** a).
Sem toga, iz date jednakosti je i $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$ odakle je $yz + zx + xy - xyz = 0$. Prema tome, $(x-1)(y-1)(z-1) = (x+y+z) - (yz + zx + xy - xyz) - 1 \ge 8$.

565. Iz date nejednakosti dobijamo $ab - a - b + 1 < 0$, odakle je: $(a-1)(b-1) < 0$, što je tačno, jer je $a - 1 > 0$ i $b - 1 < 0$.

566. Iz datog uslova dobijamo $b = \dfrac{2ac}{a+c}$, pa kad to zamenimo u razlomke na levoj strani nejednačine, dobićemo $\dfrac{a+b}{2a-b} + \dfrac{c+b}{2c+b} = \dfrac{a+3c}{2a} + \dfrac{3a+c}{2c} = \dfrac{2ac+3(a^2+c^2)}{2ac} = 1 + \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{a}{c}+\dfrac{c}{a}\right) \geq 4$. (Videti **zadatak 540** a).)

567. Napišemo nejednakost u obliku $(a-b)^2(a+b)^2 \leq (a-b)^2(a-b)^2$, što se svodi na očiglednu nejednakost $4ab \leq 0$.

568. Pođemo od nejednakosti $x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx$ (videti **zadatak 539** b)), pa odavde dobijamo: $3(x^2+y^2+z^2) \geq x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx) = (x+y+z)^2 = 1$.

569. $2(x^2+y^2+z^2)-2(xy+yz+zx) = (x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2 \geq 0 \Rightarrow 2(x^2+y^2+z^2)-2 \geq 0$.

570. a) Nejednakost je tačna ako je $\left(x+\dfrac{1}{x}\right) - \left(a+\dfrac{1}{a}\right) \geq 0$, a ona se svodi na tačnu nejednakost: $\dfrac{(ax-1)(x-a)}{ax} \geq 0$.

b) $a^k + \dfrac{1}{a^k} - \left(a^{k-i} + \dfrac{1}{a^{k-i}}\right) = (a^k - a^{k-i}) + \left(\dfrac{1}{a^k} - \dfrac{1}{a^{k-i}}\right) = \dfrac{(a^i-1)(a^{2k-i}-1)}{a^k} \geq 0$, jer su (a^i-1) i $(a^{2k-i}-1)$ istog znaka.

c) Slično prethodnom zadatku.

571. Razlikovaćemo tri slučaja.

1° $x \leq 0$. Tada su svi sabirci polinoma nenegativni pa je vrednost polinoma ≥ 1.

2° $0 < x < 1$. Polinom napišemo u obliku $x^8 + x^2(1-x^3) + (1-x) > 0$, jer su svi sabirci pozitivni.

3° $x \geq 1$. Transformišemo polinom $x^5(x^3-1) + x(x-1) + 1 > 0$, jer su prva dva sabirka nenegativni.

572. Primenimo nejednakost između sredina:

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1} \geq n\sqrt[n]{\frac{a_1}{a_2}\cdot\frac{a_2}{a_3}\cdots\frac{a_{n-1}}{a_n}\cdot\frac{a_n}{a_1}} = n\sqrt[n]{1} = n.$$

573. Slično prethodnom zadatku. **574.** Videti rešenje **zadatka 572**.

575. Imamo očigledne nejednakosti: $\dfrac{1}{2} < \dfrac{2}{3}$, $\dfrac{3}{4} < \dfrac{4}{5}$, $\dfrac{5}{6} < \dfrac{6}{7}, \ldots, \dfrac{99}{100} < \dfrac{100}{101}$, koje pomnožimo, pa je $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{5}{6}\cdots\dfrac{99}{100} < \dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{6}{7}\cdots\dfrac{100}{101}$. Neka je $x = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{5}{6}\cdots\dfrac{99}{100}$; tada poslednja nejednakost postaje $x < \dfrac{1}{101x}$, odakle je $x^2 < \dfrac{1}{101} < \dfrac{1}{100}$, pa je $x < \dfrac{1}{10}$.

576. Transformišemo levu stranu nejednakosti $\dfrac{a_1^2+a_1+1}{a_1}\cdot\dfrac{a_2^2+a_2+1}{a_2}\cdots\dfrac{a_n^2+a_n+1}{a_n} = \left(a_1+\dfrac{1}{a_1}+1\right)\cdot\left(a_2+\dfrac{1}{a_2}+1\right)\cdots\left(a_n+\dfrac{1}{a_n}+1\right) \geq 3^n$. (Videti **zadatak 540** a).)

577. Neka je $a_1^2+a_2^2+a_3^2+\cdots+a_n^2 = b$. Treba da dokažemo da je $b \geq \dfrac{1}{n}$, uz uslov: $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n = 1$. Tačno je $\left(\dfrac{a_1}{b}-1\right)^2 + \left(\dfrac{a_2}{b}-1\right)^2 + \left(\dfrac{a_3}{b}-1\right)^2 + \cdots + \left(\dfrac{a_n}{b}-1\right)^2 \geq 0$, ili $\dfrac{a_1^2+a_2^2+a_3^2+\cdots+a_n^2}{b^2} - 2\dfrac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{b} + n \geq 0$, odakle dobijamo $\dfrac{b}{b^2} - \dfrac{2}{b} + n \geq 0$, odnosno $n \geq \dfrac{1}{b}$. Dakle, $b \geq \dfrac{1}{n}$, što je i trebalo dokazati.

578. a) Uočimo da je: $\frac{1}{2^2} < 1 - \frac{1}{2}$, $\frac{1}{3^2} < \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$, $\frac{1}{4^2} < \frac{1}{3} - \frac{1}{4}, \cdots$, uopšte: $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)} = \frac{n-(n-1)}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$. Slično je $\frac{1}{(n-1)^2} < \frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1}$. Sabirajući ove nejednakosti dobićemo: $S < 1 - \frac{1}{n}$, a tim pre je $S < 1$.

b) Slično prethodnom zadatku. Koristimo jednakost:

$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{(2n+1)-(2n-1)}{2(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2(2n-1)} - \frac{1}{2(2n+1)}.$$

c) $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-3)(2n-1) = \sqrt{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdots (2n-3)^2(2n-1)^2} = \sqrt{1 \cdot (2n-1)} \cdot \sqrt{3 \cdot (2n-3)} \cdots \sqrt{(2n-3) \cdot 3} \cdot \sqrt{(2n-1) \cdot 1} < \frac{1+(2n-1)}{2} \cdot \frac{3+(2n-3)}{2} \cdots \frac{(2n-3)+3}{2} \cdot \frac{(2n-1)+1}{2} = n^n$.

579. Iz $\frac{p}{q} < \frac{a}{b}$ dobijamo $aq - bp > 0$ i slično $br - as > 0$ i $aq - bp > 0$. Budući da su to sve celi brojevi, to je $br - as \geq 1$ i $aq - bp \geq 1$. Sada imamo: $b(qr - ps) = bqr - aqs + aqs - bps = q(br - as) + s(aq - bp) \geq q + s$. Kako je $qr - ps = 1$, biće odavde $b \geq q + s$.

580. $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + n \cdot n! = (2-1) \cdot 1! + (3-1) \cdot 2! + (4-1) \cdot 3! + \cdots + ((n+1)-1)n! = 2 \cdot 1! - 1! + 3 \cdot 2! - 2! + 4 \cdot 3! - 3! + \cdots + (n+1) \cdot n! - n! = 2! - 1! + 3! - 2! + 4! - 3! + \cdots + (n+1)! - n! = (n+1)! - 1 < (n+1)!$.

581. a), b), d) i e) su tačni iskazi. Na primer, u slučaju e), ako bi neke tri tačke bile kolinearne, onda bi sve četiri tačke bile komplanarne, na osnovu teoreme o ravni određenoj tačkom i pravom i aksiome o pravoj koja pripada ravni.

582. Koristimo kontrapoziciju.

583. Koristiti teoremu o ravni određenoj pravom i tačkom.

584. Koristiti aksiome pripadanja.

585. Ako ravni α i β imaju zajedničku pravu recimo p, a prava p prodire ravan y, onda je ta prodorna tačka zajednička tačka ravni α, β i γ. Date ravni ne mogu imati još jednu zajedničku tačku, jer bi tada imale zajedničku pravu (videti teoremu o preseku dve ravni).

586. Dve prave koje sadrže tačku P određuju jednu ravan, a prave p i q pripadaju toj ravni na osnovu aksiome.

587. Ako bi takve dve prave postojale, neka su to prave a i b, one bi prema poznatoj teoremi određivale jednu ravan, recimo ravan α. Međutim, tada bi prave p i q imale sa ravni α po dve zajedničke tačke (presečne tačke sa pravim a i b), pa bi one (prema aksiomi) obe pripadale ravni α. To nije moguće po definiciji mimoilaznih pravih. Postoji najviše jedna prava koja sadrži tačku C i seče dve mimoilazne prave.

588. $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ pravih.

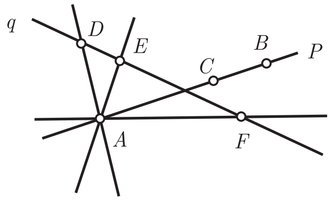
589. a) Najviše različitih pravih biće određeno ako su ma koje tri tačke skupa nekolinearne. Tada svake dve tačke određuju jednu pravu, pa će broj pravih biti jednak $\frac{10 \cdot 9}{2} = 45$.

b) Najviše ravni biće određeno ako su bilo koje 4 tačke nekomplanarne. Tada će svake tri tačke odrediti jednu ravan. Biće ukupno $\frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120$ ravni.

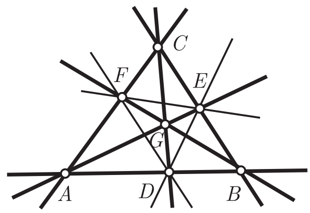
590. Određeno je 6 presečnih tačaka.

591. Svaka od tri tačke jednog podskupa određuje pravu sa svakom od tri tačke drugog podskupa i ta dva podskupa određuju još po jednu pravu: $3 \cdot 3 + 2 = 11$ pravih, videti sl. 68.

592. Šest disjunktnih trojki sadržalo bi 18 tačaka. Pošto imamo samo 7 tačaka, zaključujemo da svaka tačka pripada bar dvema trojkama, a 4 tačke se nalaze istovremeno u trima trojkama. Dakle, datih 7 tačaka raspoređene su, na primer, kao tačke A, B, C, D, E, F i G na sl. 69. Određeno je ukupno 9 pravih.



Sl. 68



Sl. 69

593. Određeno je 20 tačaka. **594.** Ima 10 pravih.

595. Ima 10 ravni: ABC, ABD, ABE, ACD, ACE, ADE, BCD, BCE, BDE i CDE.

596. Nikoje 3 od 12 datih tačaka nisu kolinearne. (Ako bi neke tačke bile kolinearne, onda bi svaka od preostalih 9 tačaka bila sa njima komplanarna, pa bi bilo bar 9 komplanarnih četvorki.) Četiri komplanarne tačke određuju jednu ravan, a četiri nekomplanarne tačke određuju 4 ravni. Prema tome, traženi broj je $\dfrac{12 \cdot 11 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3} - 6 \cdot 3 = 220 - 18 = 202$ ravni.

597. Određuju ukupno $\dfrac{n(n-1)}{2} - 2k$ pravih.

598. Svaka petorka nekomplanarnih tačaka određuje po 10 ravni, za 9 više nego petorka komplanarnih tačaka. Traženi broj je $\dfrac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} - 9k$ ravni. **599.** 16 pravih.

600. a) Svaka tačka sa pravom p određuje jednu ravan i tačke A, B, C određuju još jednu ravan, ukupno 4 ravni.

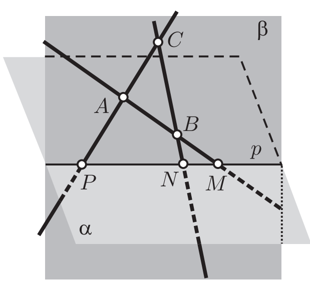
b) Svake dve prave određuju po jednu ravan itd. Ukupno ima 6 ravni. c) 4 ravni.

601. Iz $\dfrac{n(n-1)}{2} = 15$ dobijamo $n(n-1) = 30$, odnosno $n(n-1) = 6 \cdot 5$. Dakle, $n = 6$.

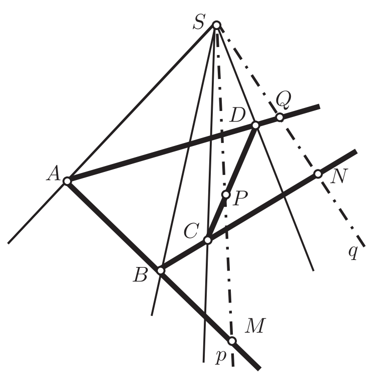
602. Slično prethodnom zadatku. Iz $n(n-1)(n-2) = 120 = 6 \cdot 5 \cdot 4$ dobijamo $n = 6$.

603. Slično **zadatku 601**. Ima 5 tačaka. **604.** Videti **zadatke 601** i **602**. Ima 32 tačke.

605. Videti **zadatak 596**. Šest tačaka određuju 14 ravni, prave sa tačkama ukupno $6 \cdot 6 = 36$ ravni i tu su još α i β. Ima ukupno 52 ravni.



Sl. 70



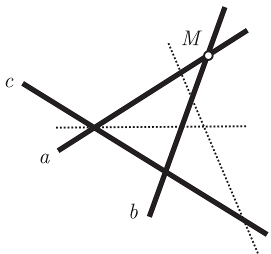
Sl. 71

606. Tačke A, B i C određuju jednu ravan, recimo β, sl. 70. Na osnovu aksioma pripadnosti zaključujemo da ravan sadrži prave AB, BC i AC, a samim tim sadrži i tačke M, N i P. Dakle, prema aksiomi i teoremi o preseku dve ravni, ravni α i β seku se po nekoj pravoj, recimo po pravoj p. Prema uslovu tačke M, N i P su zajedničke tačke ravni α i β, pa samim tim pripadaju pravoj p. Dakle, M, N i P su kolinearne tačke L, što se i tvrdilo.

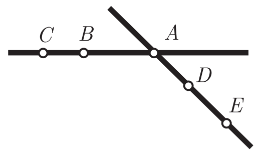
607. Tačke M, N i P pripadaju presečnoj pravoj ravni ABC i $A_1B_1C_1$. (Videti prethodni zadatak.)

608. Neka se ravni SAB i SCD seku po pravoj p (sl. 71). Pravoj p pripadaju tačke S, M i P. Neka se, dalje, ravni SBC i SAD seku po pravoj q. Pravoj q pripadaju tačke S, N i Q. Prave p i q se seku (imaju zajedničku tačku S), pa određuju jednu ravan koja sadrži M, N, P i Q.

609. Ako je $a \cap b = \{M\}$ i ako sve prave ne sadrže tačku M, onda postoji prava, recimo c, koja seče prave a i b u dvema tačkama različitim od M. U tom slučaju prava c pripada ravni određenoj pravim a i b. Svaka druga prava mora seći prave a, b i c najmanje u dve različite tačke, pa će, prema aksiomi, pripadati istoj ravni, sl. 72.



Sl. 72



Sl. 73

610. Neka su A, B i C kolinearne tačke četvorke A, B, C, D. Pretpostavimo da tačke D i E ne pripadaju ovoj pravoj, sl. 73. Tada, na osnovu datog uslova, prave AB i DE moraju imati zajedničku tačku (A ili B). Neka je $AB \cap DE = \{A\}$. Ako bi prave AB i DE bile različite, onda četvorka B, C, D, E ne bi imala tri kolinearne tačke, što dovodi do protivrečnosti. Dakle, prave AB i DE se poklapaju, pa pravoj AB pripada najmanje pet tačaka: A, B, C, D i E.

611. Pretpostavimo suprotno. Tada, ako je $B - A - D$, a onda su tačke B i D sa raznih strana tačke A, pa na osnovu $A - B - C$ sledi $A - C - D$, što je suprotno pretpostavci. Dakle, nije $B - A - D$.

612. Iz $A - O - B$ i $A - O - C$ sledi da su tačke B i C sa iste strane tačke O, pa stoga nije $B - O - C$.

613. i **614.** Videti prethodni zadatak. Koristiti aksiome rasporeda.

615. a) $BCADE$; b) $BAEDC$.

616. $a \cap b = \emptyset$, jer ako bi prava a sekla pravu b, onda bi skup S imao tačke sa raznih strana prave b, što je suprotno pretpostavci.

617. i **618.** Videti prethodni zadatak.

619. Ako poluprava Op nije paralelna sa ravni π, onda ona pripada pravoj koja prodire ravan π, ali tačka prodora ne pripada polupravoj Op.

620. Tačni su iskazi a), c), d) i f).

621. Svake dve prave koje se seku određuju 8 konveksnih uglova (četiri opružena). Od tri prave možemo načiniti tri dvojke, koje određuju $3 \cdot 8$, tj. 24 konveksna ugla. Pri tome smo opružene brojali po dva puta (svaka prava učestvuje u formiranju dva para). Dakle, određeno je svega 18 konveksnih uglova.

622. Svake dve poluprave sa zajedničkom početnom tačkom, ako ne pripadaju jednoj pravoj određuju jedan konveksan i jedan nekonveksan ugao.

a) Određeno je $\dfrac{n(n-1)}{2}$ konveksnih uglova, a isto toliko i nekonveksnih.

b) Opruženi ugao je konveksan, pa je konveksnih $\dfrac{n(n-1)}{2}+k$, a nekonveksnih $\dfrac{n(n-1)}{2}-k$.

623. a) 0; b) 1; c) 2.

624. Slično **zadacima 601** i **602**: $\dfrac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3} = \dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$, a odavde je $n = 7$ tačaka.

625. Jedna prava deli ravan na dve oblasti. Sledeća prava formira četiri oblasti. Treća prava preseca prethodne dve i određuje još tri oblasti itd. a) 7 oblasti, b) 11 oblasti, c) 16 oblasti.

626. 10 diedara.

627. Ako je p prava određena tačkama A i B, tada svih n tačaka pripada pravoj p. Zaista, ako bi među datim tačkama postojala tačka M van prave p, tada bi postojale tri nekolinearne tačke A, B i M, što je suprotno pretpostavci.

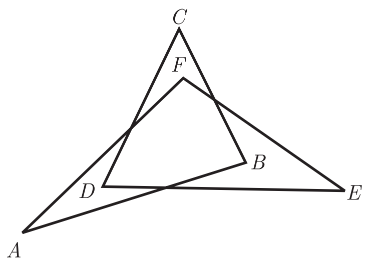
628. Devet paralelnih pravih deli ravan na 10 delova. Ako se 9 pravih seku u jednoj tački one dele ravan na 18 delova. Slično, 8 paralelnih pravih i deveta, koja ih seče, dele ravan na 18 delova. Dokazaćemo da su 10 i 18 jedine moguće vrednosti za $n < 19$.

Pretpostavimo da je u ravni dat konačan skup pravih. Prave tog skupa dele ravan na izvestan (konačan) broj delova. Proširimo taj skup još jednom pravom p koja seče ostale prave u ukupno k tačaka. Tih k tačaka dele pravu p na $k+1$ delova. Prema tome, broj delova na koje je podeljena ravan, povećao se za $k+1$.

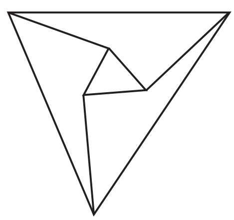
Neka se od 9 pravih u ravni, bar dve od njih seku. Označimo te prave sa q i r. Prave q i r dele ravan na 4 dela. Svaka od ostalih 7 pravih seče bar jednu od pravih q i r. Prema tome, pridruživanjem pravim q i r svake nove prave, broj delova na koje je podeljena ravan poveća se bar za 2. Zato 9 pravih, od kojih se bar 2 seku, dele ravan na ne manje od $4 + 2\cdot 7 = 18$ delova. Time je dokaz završen.

629. a) Linija predstavljena na slici 74 zadovoljava uslov zadatka.

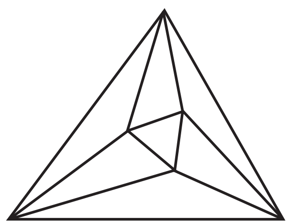
b) Ako zatvorena izlomljena linija seče svaku svoju duž tačno jedanput, onda svaka njena duž seče tačno jednu od ostalih duži. Duži koje se seku obrazuju parove, pa se izlomljena linija sastoji iz parnog broja duži i ne može ih imati tačno sedam.



Sl. 74



Sl. 75



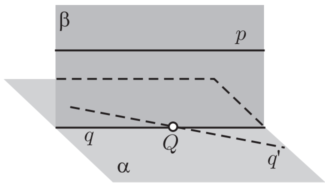
Sl. 76

630. Oba slučaja su moguća. Slučaj a) je na sl. 75, a slučaj b) na sl. 76.

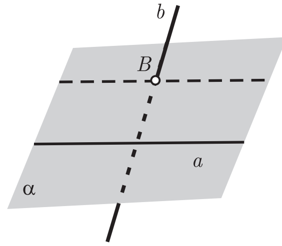
631. Neka je p ivica poluravni i neka je a proizvoljna prava koja (svim svojim tačkama) pripada poluravni $p\alpha$. Prava a ne može seći ivicu p, jer bi tada neke njene tačke bile s druge strane prave p u ravni α, tj. bile bi van poluravni $p\alpha$. Izlazi, po definiciji, da je $a \parallel p$. To važi i za svaku drugu pravu b koja pripada poluravni $p\alpha$: dakle, i $b \parallel p$. Sada, na osnovu tranzitivnosti paralelnosti, zaključujemo da je $a \parallel b$.

632. Pretpostavimo da prava c ne seče ni jednu od pravih a i b i dolazimo u sukob sa aksiomom paralelnosti.

633. Prave p i q određuju neku ravan β. Neka je Q zajednička tačka prave q i ravni α. Tačka Q je zajednička tačka ravni α i β, pa se ove dve ravni seku po nekoj pravoj q' (po teoremi o preseku dveju ravni). Dokazaćemo najpre da je $p \parallel q'$, sl. 77. Ako prave p i q' ne bi bile paralelne, one bi se morale seći jer pripadaju istoj ravni β, a ako bi se sekle, onda bi njihova zajednička tačka pripadala ravni α. To je protivrečno uslovu da prava p nema zajedničkih tačaka sa ravni α. Dakle, prave p i q' su paralelne, ali tada na osnovu aksiome paralelnosti zaključujemo da je $q' = q$, pa je $q \subset \alpha$, što se i tvrdilo.



Sl. 77



Sl. 78

634. Pretpostavimo da postoji prava c takva da je $a \parallel c$ i $c \parallel b$. Tada, na osnovu tranzitivnosti paralelnosti, sledi da je $a \parallel b$, a to je suprotno pretpostavci da su prave a i b mimoilazne.

635. Po pretpostavci prava b ne pripada ravni α, pa, samim tim, ne može seći pravu a. (Ako bi prave a i b imale zajedničku tačku, onda bi prava b imala dve zajedničke tačke sa ravni α i, prema aksiomi, pripadala bi ravni α.) Prema aksiomi paralelnosti postoji tačno jedna prava u ravni α (dakle, različita od b) koja sadrži tačku B i paralelna je pravoj a. Stoga, prava b ne može biti paralelna sa a. Zaključujemo da ne postoji ravan koja sadrži prave a i b, pa su ove prave mimoilazne.

636. Tačni su svi navedeni iskazi.

637. Prave a i b se ne seku, jer ako bi one imale zajedničku tačku, recimo tačku A, tada bi prava b pripadala ravni α, (prava b i ravan α imale bi zajedničke tačke A i B), što je suprotno pretpostavci. Prema aksiomi paralelnosti postoji tačno jedna prava koja sadrži tačku B i paralelna je sa a. Ta prava pripada ravni α pa je različita od b, sl. 78. Zbog toga b ne može biti paralelna sa a. (Ne mogu postojati dve prave koje sadrže tačku B i paralelne su sa a.)

Preostaje jedina mogućnost – prave a i b se mimoilaze.

638. a) Paralelne prave a i b određuju najviše jednu ravan. Tačke M, N, P određuju najviše jednu ravan. Svaka prava sa svakom tačkom može da odredi po jednu ravan, što daje najviše šest ravni. Prema tome, određeno je najviše osam ravni. b) 13 ravni.

639. 4 ravni. **640.** a) 6 ravni, b) 15 ravni, c) $\dfrac{n(n-1)}{2}$ ravni.

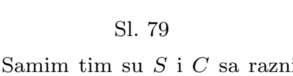
641. Ravan α određena je pravom a i nekom pravom b_1 koja seče pravu a i paralelna je pravoj b. Slično se određuje ravan β.

642. Koristiti činjenicu da su prave a i p ili paralelne ili se seku.

643. Ako ravan α sadrži neku pravu koja seče pravu a i paralelna je ravni β, onda je $\alpha \parallel \beta$. U protivnom, ravni α i β se seku po pravoj paralelnoj pravoj a (videti **zadatak 633**).

644. Koristiti teoremu o paralelnosti dve ravni.

645. Neka je α ravan određena pravom a i tačkom C. Prava b ne pripada ovoj ravni. Tražena prava je paralelna pravoj b ako je $b \parallel \alpha$, a ako je $b \cap \alpha = \{B\}$, onda je to prava BC. Traženi skup je unija ravni α i β iz **zadatka 641**, bez tačaka datih pravih, dakle, to je skup $(\alpha \cap \beta) \backslash (a \cap b)$.



Sl. 79

646. Tačka C može da se poklapa sa jednom od tačaka A, B, S ili imamo jedan od sledećih slučajeva: $A-B-C$, $C-A-B$, $A-C-S$, $S-C-B$. Neka je, na primer $A-B-C$, sl. 79. Iz $A-B-C$ i $A-S-B$, na osnovu aksiome sledi $A-S-C$, pa je $AS+SC=AC$, odnosno, $SC=AC-AS$ (1). Iz $A-S-B$ sledi da su tačke A i S sa iste strane tačke B, a iz $A-B-C$ sledi da su A i C sa raznih strana tačke B. Samim tim su S i C sa raznih strana tačke B, pa $S-B-C$. Otuda izlazi $SC=SB+BC$ (2). Sabirajući jednakosti (1) i (2) dobijamo $2SC=AC+BC+(SB-AS)$. Zbir u zagradi jednak je nuli, jer $SB=AS$, pa je $SC=\dfrac{1}{2}(AC+BC)$. Slično postupamo i u ostalim slučajevima.

647. $MN=\dfrac{m}{2}$.

648. Neka je S središte duži AB i O središte duži CB. Ako sa x označimo dužinu duži CB, imaćemo $\frac{x}{2}=\frac{k}{2}-\frac{2}{5}k=\frac{1}{10}k$. Prema tome, dužina duži CB je $\frac{1}{5}k$, a dužina duži AC je $\frac{4}{5}k$.

649. $A_1A_{100} = 11 \cdot B_1B_{10}$, pa dužina duži A_1A_{100} je 110.

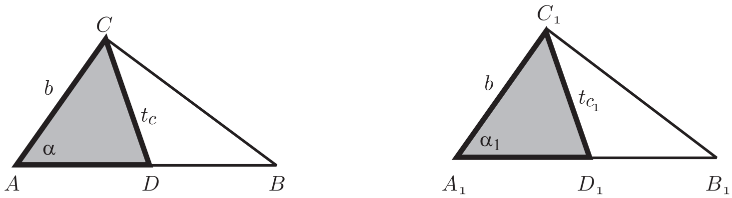
650. Neka su α i β naporedni uglovi. Tada je $\alpha+\beta = 180°$. Ugao između simetrala jednak je zbiru $\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}=\frac{\alpha+\beta}{2}=90°$. Dakle, ugao između simetrala je prav, pa su one normalne među sobom. Važi i obrnuto.

651. $45°30'$. **652.** Iz $\alpha-(90°-\alpha)=(180°-\alpha)-\alpha$, dobijamo $\alpha = 67°30'$.

653. Ako je $\alpha+\beta = 90°$, onda $(180°-\alpha)+(180°-\beta) = 360°-(\alpha+\beta) = 270°$.

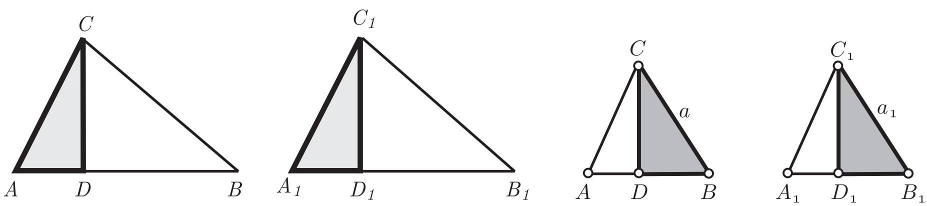
654. Da bi dva suplementna ugla imala komplemente, oni moraju biti pravi. Dakle $\varphi = \theta = 90°$, $\alpha = \beta = 0°$.

655. Neka su jednake težišne linije $CD = t_c$ i $C_1D_1 = t_{c1}$. Uočimo trouglove ACD i $A_1C_1D_1$, sl. 80. Za ova dva trougla važi: $AC = A_1C_1$ i $CD = C_1D_1$ (po pretpostavci je $b = b_1$ i $t_c = t_{c1}$). Tačke D i D_1 su središta stranica AB i A_1B_1, pa su duži AD i A_1D_1 jednake polovinama stranica c i c_1. Zbog toga iz $c = c_1$ sledi da je $AD = A_1D_1$. Dakle, trouglovi ACD i $A_1C_1D_1$ su podudarni, na osnovu stava SSS. Odavde po definiciji izlazi da je i $\alpha = \alpha_1$. No, tada za trouglove ABC i $A_1B_1C_1$ važi $b = b_1$ i $c = c_1$ i $\alpha = \alpha_1$, pa, na osnovu stava SUS, oni su podudarni.



Sl. 80

656. $\sphericalangle ADC = \sphericalangle A_1D_1C_1$ (pravi uglovi), $CD = C_1D_1$ i $\sphericalangle ACD = \sphericalangle A_1C_1D_1$ (pretpostavka). Sledi $\triangle ACD \cong \triangle A_1C_1D_1$ (stav USU), pa $AC = A_1C_1$ i $\sphericalangle CAD = \sphericalangle C_1A_1D_1$. Sem toga je $AB = A_1B_1$ (pretpostavka), pa je $ABC \cong \triangle A_1B_1C_1$ (stav SUS), sl. 81.



Sl. 81 Sl. 82

657. Videti prethodni zadatak. Mora se dokazati da je $A-D-C$. (Pretpostavimo da je $D-A-C$ i koristeći teoremu o spoljašnjem uglu trougla dokažemo da u tom slučaju $\sphericalangle BAC$ nije oštar.)

658. a) Pravougli trouglovi BCD i $B_1C_1D_1$ su podudarni, jer $BC = B_1C_1$, $CD = C_1D_1$ (pretpostavka) i $\sphericalangle BDC = \sphericalangle B_1D_1C_1$ (pravi uglovi) i uglovi CBD i $C_1B_1D_1$ su oba oštra. ($\triangle BCD \cong \triangle B_1C_1D_1$ po stavu SSU.) Otuda, na osnovu definicije podudarnosti, $\sphericalangle ABC = \sphericalangle A_1B_1C_1$, pa je $\triangle ABC \cong A_1B_11C_1$ (stav SUS), sl. 82.

b) Dokazati da $A-D-C$, $AD = A_1D_1$, $DC = D_1C_1$ itd.

c) Dokazati da je $\beta = \beta_1$ i $\gamma = \gamma_1$ itd.

659. a) Neka je tačka M središte duži AB i M_1 središte duži A_1B_1. Iz podudarnosti trouglova AMC i $A_1M_1C_1$ (stav SSS), sledi da je $\alpha = \alpha_1$ itd.

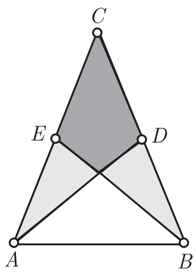
b) Neka je $CD = t_c$ i E tačka takva da $C - D - E$ i $CD = DE$. Iz podudarnosti trouglova BCD i AED sledi $AE = BC$. Na isti način dobijamo tačku E_1, tako da je $A_1E_1 = B_1C_1$, a samim tim i $AE = A_1E_1$ itd.

c) Neka je $CD = h_c$ i $CM = t_c$. Dokazujemo prvo podudarnost trouglova CDM i $C_1D_1M_1$, zatim podudarnost trouglova $BCM = B_1C_1M_1$ itd.

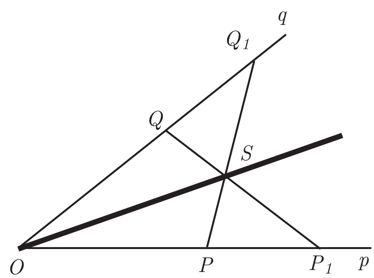
660. Ako je S središte duži AB, tada su pravougli trouglovi ASM i BSM podudarni itd.

661. Pravougli trouglovi OPM i OQM su podudarni. **662.** Slično prethodnom zadatku.

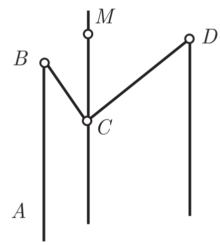
663. Ako su AD i BE težišne duži koje odgovaraju kracima BC i AC, $AC = BC$, tada su trouglovi ACD i BCE podudarni po stavu SUS ($AC = BC$, $CD = CE$ – kao polovine jednakih duži i $\sphericalangle ACB$ zajednički). Otuda sledi $AD = BE$, sl. 83.



Sl. 83



Sl. 84



Sl. 85

664. Prema datim uslovima je $\triangle OP_1Q \cong \triangle OQ_1P$ (stav SUS), pa je $\sphericalangle OPS = \sphericalangle OQ_1S$ i $\sphericalangle OPQ_1 = \sphericalangle OQP_1$. Odavde sledi da su i suplementi ovih drugih uglova jednaki: $\sphericalangle P_1PS = \sphericalangle Q_1QS$. Sada je $\triangle SPP_1 \cong \triangle SQQ_1$ (stav USU), pa je $SP = SQ$. Prema tome $\triangle OPS \cong \triangle OQS$ (stav SSS) itd, sl. 84.

665. Slično prethodnom zadatku.

666. Neka je M središte stranice AB i neka je $CM = AM = BM$. Uglovi na osnovicama jednakokrakih trouglova ACM i BCM su jednaki među sobom itd.

667. Konstruišimo pravu CM paralelnu sa AB, sl. 85. Na osnovu teoreme o uglovima uz transverzalu, sledi da $\sphericalangle BCM = \sphericalangle ABC = 36°17'$ i $\sphericalangle MCD = \sphericalangle CDE = 52°43'$. (U oba slučaja radi se o naizmeničnim uglovima.) Prema tome, $\sphericalangle BCD = 36°17' + 52°43' = 80°$.

668. Trougao ABS je jednakokraki itd.

669. Trouglovi ABM i ACM su jednakokraki itd.

670. Trougao ABM je jednakokraki, pa je $\sphericalangle BMA = \sphericalangle BAM$. Sem toga $\sphericalangle BAM = \sphericalangle AMN$, kao naizmenični uglovi itd.

671. Uglovi CMN i CNM su jednaki među sobom.

672. Trouglovi ABD i ACE su podudarni po stavu SUS itd.

673. Trouglovi ABM i ABN su podudarni po stavu USU, pa je $AM = BN$ i $BM = AN$. Zbog toga su trouglovi AMN i BMN podudarni, pa je $\sphericalangle AMN = \sphericalangle BNM$.

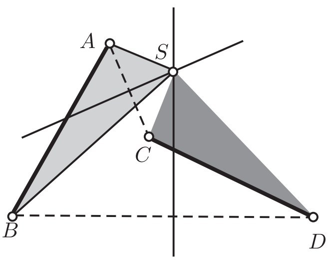
674. Neka je zajednička tačka normale AM i odgovarajuće simetrale ugla tačka P. Tada su trouglovi APB i MPB podudarni po stavu USU, pa je $MB = AB$ itd.

675. Lako se dokazuje da su trouglovi AEK i BDL jednakokraki, a zatim da su trouglovi ABM i DEN podudarni itd.

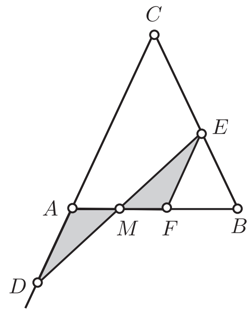
676. Treba dokazati da su trouglovi CMS i CNS jednakokraki.

677. Slično **zadatku 633**.

678. Neka se simetrale duži AC i BC seku u tački S, sl. 86. Tada iz $SA = SC$, $SB = SD$ i $AB = CD$ sledi $\triangle ABS \cong \triangle CDS$ (stav SSS). Zadatak ima još jedno rešenje. To je tačka S_1 u kojoj se seku simetrale duži AD i BC. Trouglovi ACS i BDS nisu podudarni.



Sl. 86



Sl. 87

679. Neka je F tačka osnovice AB, tako da je $EF \parallel AC$, sl. 87. Nije teško dokazati da je trougao BEF jednakokraki, odakle je $EF = EB$, a samim tim $EF = AD$. Dalje je $\triangle ADM \cong \triangle MEF$ pa je $DM = ME$.

680. U ravni postoji jednakostranični trougao stranice 1. Bar dva od njegovih temena obojena su istom bojom, pa je stranica određena tim temenima tražena duž.

681. a) Bez smanjenja opštosti možemo pretpostaviti da se duži skupa P nalaze na brojnoj pravoj. Neka su $a_1, a_2, \dots, a_n$ levi krajevi duži iz skupa P i neka je $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$, a $b_1, b_2, \dots, b_n$ desni krajevi duži iz skupa P i $b_n \leq b_{n-1} \leq \cdots \leq b_1$. Tada važi $a_n \leq b_n$. (Ako bi bilo $a_n > b_n$, onda duž sa levim krajem a_n i duž sa desnim krajem b_n nemaju zajedničkih tačaka, što je kontradikcija.) Tačka a_n je zajednička tačka svih duži skupa P. Zaista, ako je $[a_i, b_j]$ duž iz skupa P tada važi $a_i \leq a_n \leq b_n \leq b_j$.

b) Neka je r prava ravni π koja je normalna na pravu p. Svaki od poligona skupa P normalno projektujemo na pravu r. Svaka od tih projekcija je duž i svake dve takve duži se seku, jer se svaka dva poligona iz skupa P seku. Na osnovu tvrđenja pod a) sledi da postoji tačka A prave r zajednička svim projekcijama. Prava q koja sadrži tačku A i normalna je na pravoj r seče sve poligone iz skupa P i paralelna je pravoj p.

682. Trougao ACD je jednakokraki.

683. Treba dokazati da su trouglovi BDS i CES jednakokraki.

684. Koristiti osobine uglova sa paralelnim kracima.

685. Pretpostavimo da se ravni α i β, normalne na pravoj p, seku po pravoj c. Neka je $p \cap \alpha = \{A\}$ i $a \ni A$ prava normalna na c. Ravan određena pravim p i a seče ravan β po pravoj $b \neq a$, koja bi morala biti paralelna sa a i istovremeno sadržati presečnu tačku pravih a i c, što je nemoguće. Dakle, $\alpha \parallel \beta$.

686. Neka su a i b paralelne prave i α ravan normalna na a. Označimo sa A i B tačke prodora pravih a i b kroz α. Prava AB normalna je na a i b (videti prethodni zadatak) itd.

687. Postaviti neku ravan koja sadrži datu pravu i posmatrati preseke ove ravni sa datim ravnima itd.

688. Koristiti kontrapoziciju.

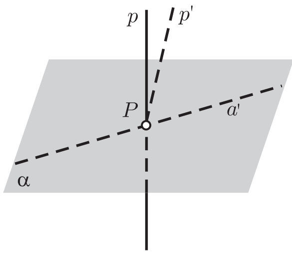
689. Posmatrati presek date ravni i ravni određene pravim a i b.

690. Trouglovi ABM i CDM su jednakokraki, pa je zajednička težišna linija MS normalna na obe osnovice AB i CD, pa je prema *Košijevoj teoremi* normalna i na ravan $ABCD$.

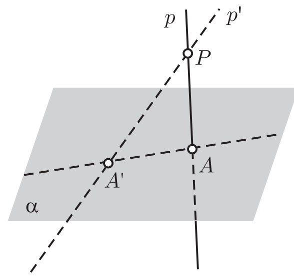
691. Razlikujemo dva slučaja: $P \in \alpha$ ili $P \notin \alpha$.

Neka je najpre $P \in \alpha$ i neka je p prava koja je normalna na ravni α u tački P. Ako bi postojala još jedna prava p', $p' \neq p$, koja sadrži tačku P i normalna je na α, onda bi prave p i p'

određivale neku ravan, koja bi sekla ravan α po nekoj pravoj a', sl. 88. Tada bi, po definiciji obe prave p i p' bile normalne na pravoj a', što nije moguće, jer svaka prava u nekoj ravni kojoj i sama pripada, ima tačno jednu normalu. Znači, prava p je jedina normala na ravni α u tački P, $P \in \alpha$.



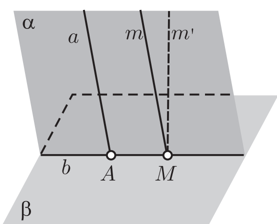
Sl. 88



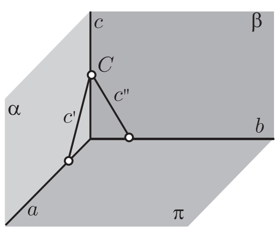
Sl. 89

Ako $P \notin \alpha$, neka je $p \ni P$ prava normalna na α i neka je A zajednička tačka prave p i ravni α. Pretpostavimo da postoji još jedna prava $p' \ni P$, različita od p, normalna na ravni α. Neka je $p' \cap \alpha = \{A'\}$, sl. 89. Pošto je $p' \neq p$, to je i $A' \neq A$ pa postoji jedinstvena prava AA'. Ako je tačna pretpostavka ($p' \neq p$ i $p' \perp \alpha$), onda postoje dve različite prave p i p' koje sadrže tačku P i normalne su na pravoj AA'. Pošto je ovo nemoguće, sledi da je pretpostavka pogrešna. Prema tome, i u slučaju $P \notin \alpha$, postoji samo jedna normala p, $p \ni P$, ravni α.

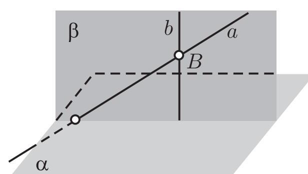
692. Neka je α proizvoljna ravan koja sadrži pravu a i neka je b presečna prava ravni α i β, sl. 90. Neka je m proizvoljna prava ravni α, različita od a, koja sadrži tačku $M \in b$ i normalna je na pravoj b. Tada je $b||a$. Dokazaćemo da je proizvoljno izabrana prava m normalna i na ravni β. Pretpostavimo da prava m nije normalna na ravni β, već da je normalna neka druga prava $m' \ni M$, različita od m. Ako bi to bilo tačno, onda bi prema prethodnom zadatku, prava m' bila paralelna pravoj a, što je protivrečno aksiomi paralelnosti. (Ne mogu postojati dve različite prave m i m', koje sadrže tačku M i paralelne su pravoj a.) Dakle, $m' = m$, što znači da je $m \perp \alpha$. Zaključujemo da je po definiciji ravan α normalna na ravni β.



Sl. 90



Sl. 91



Sl. 92

693. Bilo koje dve ravni ili su paralelne ili se seku po nekoj pravoj. Neka su α, β i π date ravni i neka je $\alpha \perp \pi$, $\beta \perp \pi$, $\alpha \cap \pi = a$ i $\beta \cap \pi = b$. Pretpostavimo da se ravni α i β seku po nekoj pravoj c, sl. 91. Ako prava c nije normalna na ravni π, onda ona nije normalna bar na jednoj od pravih a i b. Neka je C neka tačka prave c. Tada u ravni α postoji prava $c' \ni C$, normalna na π, a u ravni β postoj prava $c'' \ni C$, takođe normalna na π. Pošto je bar jedna od pravih c' i c'' različita od c, onda su c' i c'' dve različite normale iz tačke C na ravan π. Ovo nije moguće, što znači da je $c' = c''$ i da je to zajednička prava ravni α i β, odnosno da je to prava c. Dakle, ako se ravni α i β seku, onda je njihova presečna prava normalna na ravni π.

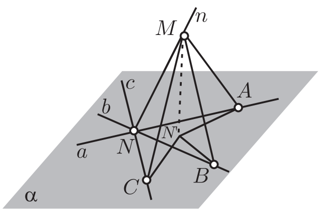
Ako su prave a i b paralelne, onda su ravni α i β takođe paralelne. Zaista, ako bi se ravni α i β sekle, onda bi njihova presečna prava morala biti paralelna sa ravni π, a istovremeno, prema prethodnom zaključku, morala bi biti normalna na ravni π. Ovo je nemoguće, pa zaključujemo, ako je $a \parallel b$, onda je $\beta \parallel \alpha$.

694. Neka je B ma koja tačka prave a i b, $b \ni B$, prava normalna na ravni α, sl. 92. Prave a i b su različite, pa određuju neku ravan β, koja je normalna na ravni α.

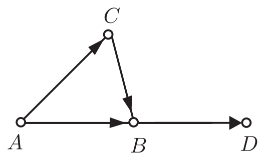
Dokažimo da ne postoji neka druga ravan β', različita od β, koja sadrži pravu a i normalna je na ravni α. Ako bi postojala takva ravan β', onda bi prema prethodnom zadatku presečna prava ravni β i β', a to je prava a, bila normalna na ravni α, što je suprotno pretpostavci. Dakle, ravan β određena je jednoznačno.

695. Neka je N zajednička tačka pravih a, b, c, n, sl. 93. Odredimo na pravim a, b, c redom tačke A, B, C tako da je $NA = NB = NC$. Tada su trouglovi AMN, BMN, CMN podudarni po stavu SUS, pa je $AM = BM = CM$. Pretpostavimo da je podnožje normale iz M na ravan α neka tačka N' i $N' \neq N$. Tada su pravougli trouglovi AMN', BMN' i CMN' podudarni po stavu SSU. Sledi da je $AN' = BN' = CN'$, pa je prava NN' simetrala duži AB i duži BC. Otuda sledi da su tačke A, B, C kolinearne. To nije moguće, jer onda ne može biti $NA = NB = NC$. Sledi da nije $N' \neq N$. Prema tome, N je podnožje normale iz M na α, pa je $n \perp \alpha$.

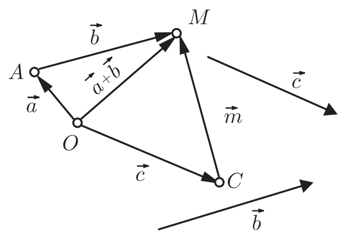
696. Po definiciji zbira vektora je $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$, pa kako je $\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{CA}$ i $\overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{BC}$ izlazi $-\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB}$, a odatle sledi $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CA} = 2\overrightarrow{AB}$, što se i tvrdilo, sl. 94



Sl. 93



Sl. 94

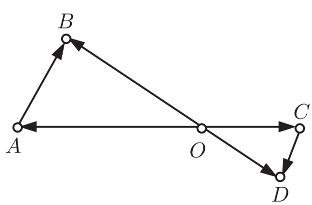


Sl. 95

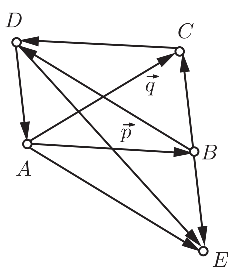
697. Na slici 95 sa O smo označili početnu tačku datog vektora $\overrightarrow{a}$. Zatim smo vektor $\overrightarrow{b}$ "nadovezali" na $\overrightarrow{a}$ i dobili vektor $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$. Zatim smo konstruisali vektor $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{c}$ i dobili vektor $\overrightarrow{m} = \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}$.

698. Slično prethodnom zadatku.

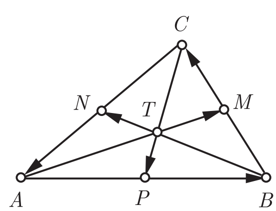
699. Iz trouglova OAB i OAC na slici 96 izračunavamo $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}$. Prema uslovu je $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = k(\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC})$. Koristeći se aksiomom sa strane 95, odavde dobijamo $\overrightarrow{OB} - k \cdot \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} - k \cdot \overrightarrow{OC}$. Vektor na levoj strani jednakosti je kolinearan sa $\overrightarrow{BD}$, a vektor na desnoj strani sa $\overrightarrow{AC}$. Ovo je moguće samo ako je $\overrightarrow{OB} - k \cdot \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{0}$ i $\overrightarrow{OA} - k \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{0}$, a odavde proizlaze tražene jednakosti.



Sl. 96



Sl. 97



Sl. 98

700. Vektori $\overrightarrow{u}$ i $\overrightarrow{v}$ su kolinearni ako je $\overrightarrow{u} = k \cdot \overrightarrow{v}$.

a) Kolinearni su $\overrightarrow{m}_1$, $\overrightarrow{m}_2$ i $\overrightarrow{m}_5$, jer $\overrightarrow{m}_5 = 2\overrightarrow{m}_2 = \overrightarrow{m}_1$, b) Kolinearni su $\overrightarrow{n}_2$, $\overrightarrow{n}_3$ i $\overrightarrow{n}_4$.

701. $\overrightarrow{MB} = -\frac{1}{2}\vec{b} + \vec{a}$.

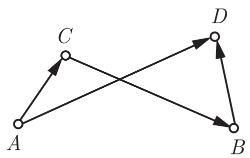
702. Videti sliku 97. $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \vec{q} - \vec{p}$; $\overrightarrow{CD} = -\vec{p}$; $\overrightarrow{DA} = -\overrightarrow{BC} = \vec{p} - \vec{q}$; $\overrightarrow{BD} = -(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}) = -(\vec{p} - \vec{q} + \vec{p}) = \vec{q} - 2\vec{p}$; $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE} = \vec{p} + (-\overrightarrow{BC}) + \vec{p} + \vec{p} - \vec{q} = 2\vec{p} - \vec{q}$; $\overrightarrow{CE} = 2(-\overrightarrow{BC}) = 2\vec{p} - 2\vec{q}$; $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE} = \vec{p} - \vec{q} + 2\vec{p} - \vec{q} = 3\vec{p} - 2\vec{q}$.

703. Množeći prvi vektor sa 2, a drugi sa 3 dobijamo $2\vec{a} + 3\vec{b} = \vec{0}$, pa su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ kolinearni.

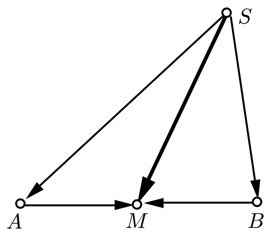
704. Ako zamenimo $\vec{a}$ iz prve jednakosti u drugu, dobićemo $\vec{b} = \vec{c} + \vec{k}(\vec{b} - k\vec{c})$, odakle izlazi $\vec{b}(1-k) = \vec{c}(1-k^2)$, odnosno $\vec{b} = \vec{c}(1+k)$. Dakle, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ su kolinearni. Ako $\vec{b} = \vec{c}(1+k)$ zamenimo u prvu jednakost, dobićemo $\vec{a} = \vec{c}(1+k) - k\vec{c}$, odnosno $\vec{a} = \vec{c}$.

705. Iz trougla ABM je $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$, sl. 98. Na isti način, iz trouglova BCN i CAP dobijamo $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$ i $\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. Sabiranjem ove tri jednakosti dobijamo $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA})$. Vektori $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ i $\overrightarrow{CA}$ zatvaraju trougao, pa je njihov zbir nula vektor. Prema tome $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} = \vec{0}$.

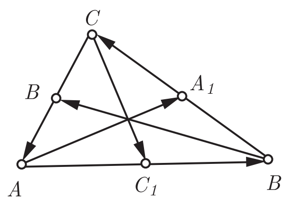
706. Ma kakve bile tačke A, B, C, D važi jednakost $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$, odakle izlazi: $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{CB}$. Međutim, $-\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BC}$, pa dobijamo $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$, sl. 99.



Sl. 99



Sl. 100



Sl. 101

707. Prema datom uslovu je $\vec{m} + \vec{n} + \vec{p} = \vec{0}$, odnosno $3\vec{a} - 2\vec{c} + 4\vec{d} + 2\vec{b} - \vec{a} - 3\vec{d} + 3\vec{c} - \vec{a} - \vec{b} = \vec{0}$. Odavde sređivanjem dobijamo $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$, što znači da vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ i $\vec{d}$ zatvaraju mnogougao.

708. Prema slici 100 računamo: $\overrightarrow{SM} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AM}$ i $\overrightarrow{SM} = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{BM}$. Saberemo ove jednakosti vodeći računa o tome da je $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} = \vec{0}$.

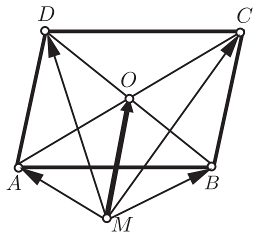
709. Iz trougla ABA_1 je $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA_1}$, a iz trougla ACA_1 je $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA_1}$, sl. 101. Saberemo ove jednakosti i vodeći računa o činjenici da su vektori $\overrightarrow{BA_1}$ i $\overrightarrow{CA_1}$ suprotni, odnosno da je $\overrightarrow{BA_1} + \overrightarrow{CA_1} = \vec{0}$, dobijamo: $2\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$. Slično dokazujemo i ostale jednakosti.

710. Prema prethodnom zadatku je: $2\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}$ i $2\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}$, sl. 102. Sabiranjem ovih jednakosti i zatim deljenjem sa 4 dobijamo traženu jednakost.

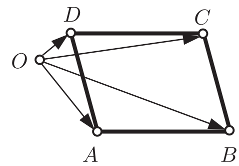
711. $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ itd.

712. Traženi vektori su razlike datih vektora, na primer, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \vec{c} - \vec{a}$.

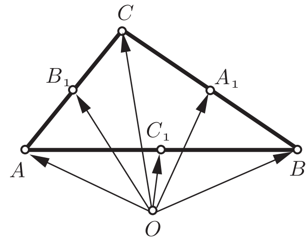
713. Zbog $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$ imamo $\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$, odakle je $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$, sl. 103. Važi i obrnuto.



Sl. 102



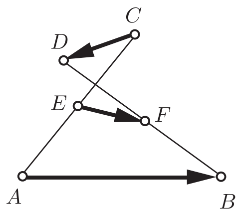
Sl. 103



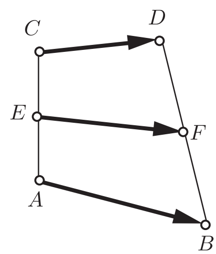
Sl. 104

714. Iz trougla OAC_1 dobijamo $\overrightarrow{OC_1} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, a na isti način iz trouglova OBA_1 i OCB_1 dobijamo $\overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ i $\overrightarrow{OB_1} = \overrightarrow{OC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$, sl. 104. Sabiranjem ovih jednakosti dobićemo $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA})$, pa kako je izraz u zagradi nula-vektor, ostaje traženi zaključak.

715. Na slikama 105 i 106 su prikazana dva ovakva slučaja. U oba slučaja imamo jednakosti: $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF}$ i $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DF}$. Sabiranjem ovih jednakosti dobijamo $2\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$, jer je $\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{0}$ i $\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{0}$ (zbir suprotnih vektora).

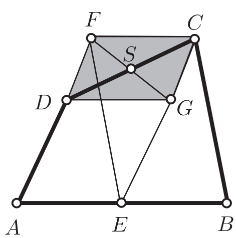


Sl. 105

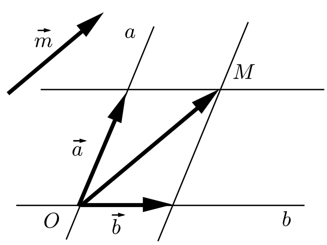


Sl. 106

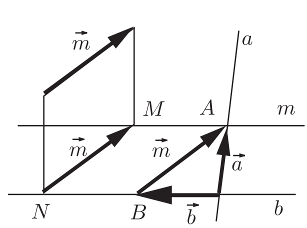
716. Četvorougao $EBCF$ je paralelogram pa $CF = BE$ i $CF \parallel BE$, sl. 107. Slično, iz četvorougla $AEGD$ dobijamo $DG = AE$ i $DG \parallel AE$. Prema tome, $CF = DG$ i $CF \parallel DG$, pa je četvorougao $CFDG$ paralelogram i njegove dijagonale CD i FG se polove, pa $S \in FG$.



Sl. 107



Sl. 108



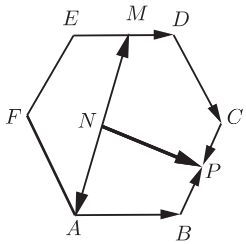
Sl. 109

717. a) Konstrukcija je prikazana na slici 108. Najpre je konstruisan vektor $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{m}$, a zatim kroz M prave paralelne datim pravim.

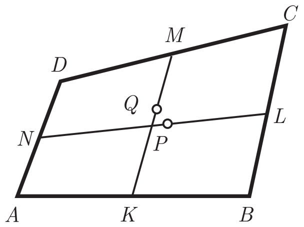
b) Najpre je konstruisan vektor $\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{m}$ (N je proizvoljna tačka prave b), a zatim kroz M prava m paralelna sa b. Tako se dobija tačka A itd, sl. 109.

c) i d) Slično prethodnim slučajevima.

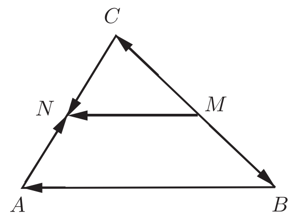
718. Uočimo da je $\overrightarrow{NP}=\overrightarrow{NM}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CP}$ i $\overrightarrow{NP}=\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BP}$, pa sabiranjem dobijamo $2\overrightarrow{NP}=\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AB}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AF}$. Dakle, $\overrightarrow{NP}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AF}$, sl. 110.



Sl. 110



Sl. 111



Sl. 112

719. Neka je P središte duži NL, Q središte duži MK i O proizvoljna tačka u prostoru, sl. 111. Biće $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{NP}$, zatim $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BL}+\overrightarrow{MP}$, pa $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DN}+\overrightarrow{NP}$ i $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CL}+\overrightarrow{LP}$. Otuda je $4\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}$. Na isti način dobijamo da je $4\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}$, pa su vektori $\overrightarrow{OP}$ i $\overrightarrow{OQ}$ jednaki, dakle, $P=Q$.

720. Neka je $\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_3}+\overrightarrow{OA_4}+\overrightarrow{OA_5}=\overrightarrow{\varepsilon}$. Rotirajmo petougao oko tačke O za 72°. Tada se vektori $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OA_2}$, $\overrightarrow{OA_3}$, $\overrightarrow{OA_4}$ i $\overrightarrow{OA_5}$ preslikavaju redom u vektore $\overrightarrow{OA_2}$, $\overrightarrow{OA_3}$, $\overrightarrow{OA_4}$, $\overrightarrow{OA_5}$ i $\overrightarrow{OA_1}$, pa se zbir na levoj strani jednakosti neće promeniti. Odavde sledi da je obavezno $\overrightarrow{\varepsilon}=\overrightarrow{0}$ (jer, ako je novi zbir $\overrightarrow{\varepsilon}$, onda je $\sphericalangle(\varepsilon,\varepsilon_1)=72^\circ$ i $\overrightarrow{\varepsilon}=\overrightarrow{\varepsilon_1}$).

721. Kako je $\overrightarrow{TA}=\overrightarrow{TO}+\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{TB}=\overrightarrow{TO}+\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{TC}=\overrightarrow{TO}+\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{TD}=\overrightarrow{TO}+\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{TE}=\overrightarrow{TO}+\overrightarrow{OE}$, to je $\overrightarrow{TA}+\overrightarrow{TB}+\overrightarrow{TC}+\overrightarrow{TD}+\overrightarrow{TE}=5\overrightarrow{TO}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}$. Po prethodnom zadatku, imamo da je $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{O}$, pa je zbog toga, $5\overrightarrow{TO}=\overrightarrow{TA}+\overrightarrow{TB}+\overrightarrow{TC}+\overrightarrow{TD}+\overrightarrow{TE}$.

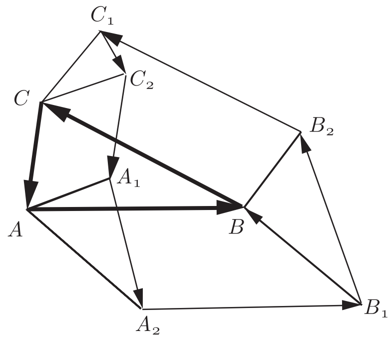
722. Prema slici 112 je $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AN}$ i $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CN}$. Sabiranjem ove dve jednakosti dobijamo traženi zaključak (vektori $\overrightarrow{MB}$ i $\overrightarrow{MC}$ su suprotni, a takođe $\overrightarrow{AN}$ i $\overrightarrow{CN}$): $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$, pa je po definiciji $MN\parallel AB$ i $MN=\frac{1}{2}AB$.

723. Prema **zadatku 715** je $2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A_1B_1}$, a $2\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{C_1D_1}$. U paralelogramu $ABCD$ je $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{CD}$, a u paralelogramu $A_1B_1C_1D_1$ je $\overrightarrow{A_1B_1}=-\overrightarrow{C_1D_1}$, pa je $\overrightarrow{MN}=-\overrightarrow{PQ}$. Otuda sledi da je $MNPQ$ paralelogram.

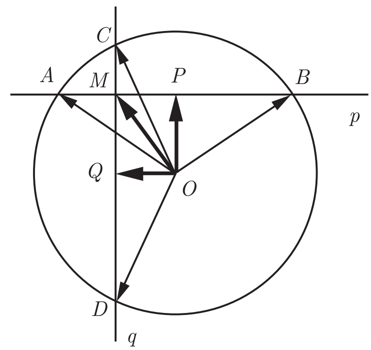
724. Dijagonale petougla izrazimo kao zbirove dveju susednih stranica-vektora i dokažimo da je zbir vektora dijagonala nula vektor, što pokazuje da ovi vektori mogu da zatvore mnogougao.

725. Tačke A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 određuju jedan šestougao, sl. 113. Ako orijentišemo stranice ovog šestougla dobićemo jednakost $\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2B_1}+\overrightarrow{B_1B_2}+\overrightarrow{B_2C_1}+\overrightarrow{C_1C_2}+\overrightarrow{C_2A_1}=\overrightarrow{0}$, odnosno $\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{B_1B_2}+\overrightarrow{C_1C_2}+\overrightarrow{A_2B_1}+\overrightarrow{B_2C_1}+\overrightarrow{C_2A_1}=\overrightarrow{0}$. Iz datih paralelograma dobijamo $\overrightarrow{A_2B_1}=\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B_2C_1}=\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{C_2A_1}=\overrightarrow{CA}$, pa kako je $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{0}$, sledi da je $\overrightarrow{A_2B_1}+\overrightarrow{B_2C_1}+\overrightarrow{C_2A_1}=\overrightarrow{0}$. Ostaje da je $\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{B_1B_2}+\overrightarrow{C_1C_2}=\overrightarrow{0}$, što znači da vektori $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{B_1B_2}$ i $\overrightarrow{C_1C_2}$ zatvaraju trougao. Prema tome duži A_1A_2, B_1B_2 i C_1C_2 mogu biti stranice nekog trougla, ma kako da su izabrani pomenuti paralelogrami.

726. Neka su $\overrightarrow{OP}$ i $\overrightarrow{OQ}$ vektori normalni na prave p i q, sl. 114. Po poznatoj osobini je P središte tetive AB, pa je, prema **zadatku 708**: $2\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$. Slično je $2\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}$. Četvorougao $OPMQ$ je pravougaonik itd.

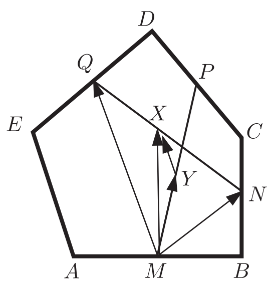


Sl. 113

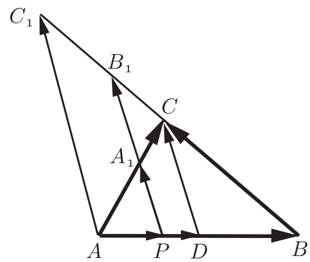


Sl. 114

727. Tačke X i Y su središta duži QN i PM i $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}$, sl. 115. Dalje je $\overrightarrow{MX}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{MQ}+\overrightarrow{MN})=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\frac{\overrightarrow{DE}}{2}+\frac{\overrightarrow{BC}}{2}\right)$ i $\overrightarrow{MY}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}\right)$, a $\overrightarrow{YX}=\overrightarrow{MX}-\overrightarrow{MY}=\frac{1}{2}\left(\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}}{2}\right)=\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}}{4}$. Dakle, $\overrightarrow{AE}=4\overrightarrow{YX}$, što znači da je $AE\parallel YX$ i $AE=4YX$.



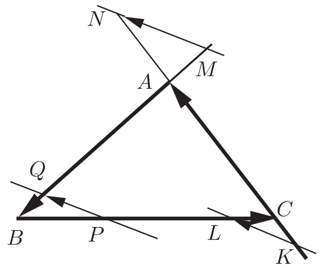
Sl. 115



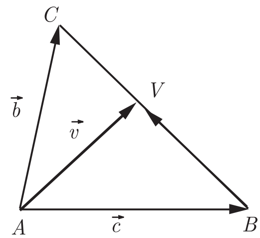
Sl. 116

728. Neka je C_1 tačka iza C u odnosu na B_1, takva da je $CC_1=BC$, sl. 116. Tada je DC srednja linija trougla ABC_1 i $\overrightarrow{DC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC_1}$ (videti **zadatak 722**), a $\overrightarrow{AC_1}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CC_1}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}$. Neka je $\overrightarrow{AD}=k\cdot\overrightarrow{AP}$. Tada je (prema **zadatku 699**) $\overrightarrow{DC}=k\cdot\overrightarrow{PA_1}$. Kako je $BA=2AD=2k\cdot AP$ i $BP=BA-AP=(2k-1)\cdot AP$, to je $BA:BP=\frac{2k}{2k-1}$. Zbog toga je $\overrightarrow{AC_1}=\frac{2k}{2k-1}\overrightarrow{PB_1}$. Sada izrazimo $\overrightarrow{PA_1}$ i $\overrightarrow{PB_1}$ preko $\overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{BC}$: $\overrightarrow{PA_1}=\frac{1}{k}\overrightarrow{DC}=\frac{1}{2k}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC})$ i $\overrightarrow{PB_1}=\frac{2k-1}{2k}AC_1=\frac{2k-1}{2k}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC})$. Sada dobijamo traženi zaključak $\overrightarrow{PA_1}+\overrightarrow{PB_1}=\left(\frac{1}{2k}+\frac{2k-1}{2k}\right)(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC})=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}$.

729. Označimo sa a, b i c dužine stranica BC, CA i AB, sl. 117. Tada je $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CN}=\frac{a}{c}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\frac{a}{b}\overrightarrow{CA}=a\left(\frac{1}{c}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{a}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{b}\overrightarrow{CA}\right)=a\,\overrightarrow{p}$. Slično se dobija $\overrightarrow{PQ}=b\,\overrightarrow{p}$ i $\overrightarrow{KL}=c\,\overrightarrow{p}$, odakle sledi tvrđenje zadatka.



Sl. 117



Sl. 118

730. Imamo. $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DE}$ itd.

731. Iz $\dfrac{CV}{BV} = \dfrac{n}{m}$ na osnovu osobina proporcija dobijamo $\dfrac{CV + BV}{n + m} = \dfrac{BV}{m}$, odnosno $\dfrac{BC}{m+n} = \dfrac{BV}{m} \Rightarrow BV = \dfrac{m}{m+n}BC$. Sada imamo $\overrightarrow{AV} = \vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BV} = \vec{c} + \dfrac{m}{m+n}\overrightarrow{BC} = \vec{c} + \dfrac{m}{m+n}(\vec{b} - \vec{c})$, odakle je $\vec{v} = \dfrac{m\vec{b} + n\vec{c}}{m+n}$. Ako je $\dfrac{m}{n} = k$, dobijamo $\vec{v} = \dfrac{\vec{c} + k\vec{b}}{1+k}$, sl. 118.

732. Treba dokazati teoremu u oba smera! Uočimo sliku 119.

1° Neka su A, B, C kolinearne tačke i $AC : CB = m : n$. Tada je $\overrightarrow{AC} = \dfrac{m}{n}\overrightarrow{CB}$, pa je $\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \dfrac{m}{n}(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC})$. Odavde je $\overrightarrow{OC} = \dfrac{n}{m+n}\overrightarrow{OA} + \dfrac{m}{m+n}\overrightarrow{OB}$. Ako stavimo $k = \dfrac{n}{m+n}$, dobićemo traženu jednakost.

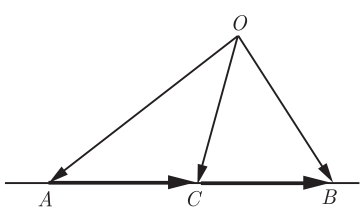
2° Neka je $\overrightarrow{OC} = k\cdot\overrightarrow{OA} + (1-k)\overrightarrow{OB}$. Dokazaćemo da su A, B, C kolinearne tačke. Stavljajući na levoj strani jednakosti $1 = k + (1-k)$, dobićemo $k\cdot\overrightarrow{OC} + (1-k)\overrightarrow{OC} = k\cdot\overrightarrow{OA} + (1-k)\overrightarrow{OB}$. Odavde je $k(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}) = (1-k)(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC})$, odnosno $k\cdot\overrightarrow{AC} = (1-k)\overrightarrow{CB}$. Odavde sledi da je $\overrightarrow{AC} \parallel \overrightarrow{CB}$, što znači da su A, B, C kolinearne tačke. (Kraj dokaza.)

Iz poslednje jednakosti zaključujemo:

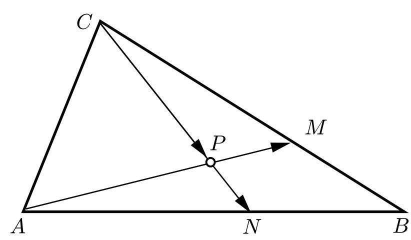
a) Ako je $k = 0$, onda je $\overrightarrow{CB} = \vec{0}$, tj. $C = B$.

b) Za $k = 1$ je $\overrightarrow{AC} = \vec{0}$, pa je $A = C$.

c) Za $0 < k < 1$ je $k > 0$ i $1 - k > 0$, pa vektori $\overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{CB}$ imaju isti smer. Otuda zaključujemo da je C unutrašnja tačka duži AB.



Sl. 119



Sl. 120

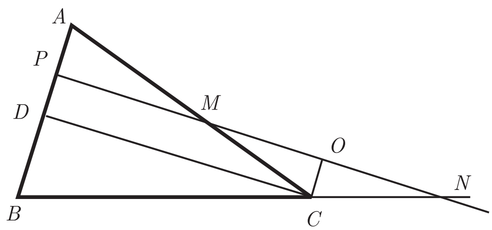
733. Iz datog uslova je $\overrightarrow{SC} = -\overrightarrow{SA} - \overrightarrow{SB}$, odnosno $\overrightarrow{CS} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB}$. Ako je O neka tačka van prave AB, tada je, prema prethodnom zadatku $\overrightarrow{OC} = k\overrightarrow{OA} + (1-k)\overrightarrow{OB}$. Po definiciji zbira vektora je $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CS}$, pa je $\overrightarrow{OS} = k\cdot\overrightarrow{OA} + (1-k)\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB}$. Budući da je $\overrightarrow{SA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OS}$ i $\overrightarrow{SB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OS}$, biće $\overrightarrow{OS} = k\cdot\overrightarrow{OA} + (1-k)\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OS} + \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OS}$. Odavde je:

$3\overrightarrow{OS} = (k+1)\overrightarrow{OA} + (2-k)\overrightarrow{OB}$, odnosno $\overrightarrow{OS} = \frac{k+1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2-k}{3}\overrightarrow{OB}$. Nije teško uveriti se da je $\frac{k+1}{3} + \frac{2-k}{3} = 1$, pa po prethodnom zadatku sledi da $S \in AB$.

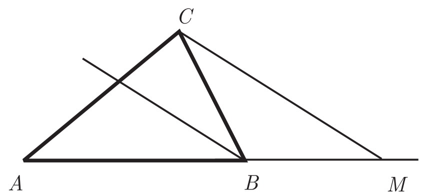
734. Prema **zadatku 732** je $\overrightarrow{OC} = \frac{7}{10}\overrightarrow{OA} + \frac{3}{10}\overrightarrow{OB}$, a po definiciji zbira vektora $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CS}$. Iz datog uslova je $\overrightarrow{SC} = -\overrightarrow{SA} - \overrightarrow{SB}$, odnosno $\overrightarrow{CS} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB}$. Zamenimo $\overrightarrow{SA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OS}$ i $\overrightarrow{SB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OS}$, pa je $\overrightarrow{CS} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - 2\overrightarrow{OS}$. Prema tome, $\overrightarrow{OS} = \frac{7}{10}\overrightarrow{OA} + \frac{3}{10}\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - 2\overrightarrow{OS}$, pa je odavde $\overrightarrow{OS} = \frac{17}{30}\overrightarrow{OA} + \frac{13}{30}\overrightarrow{OB}$.

735. Na primer, u slučaju c) imamo rešenje prema slici 120. Koristićemo rezultate **zadatka 732**. Najpre je $\overrightarrow{CN} = \frac{2}{5}\overrightarrow{CA} + \frac{3}{5}\overrightarrow{CB}$. Zbog kolinearnosti važi $\overrightarrow{CP} = k \cdot \overrightarrow{CN}$, a prema uslovu je $\overrightarrow{CB} = \frac{10}{7}\overrightarrow{CM}$, pa dobijamo jednakost $\overrightarrow{CP} = \frac{2k}{5}\overrightarrow{CA} + \frac{30k}{35}\overrightarrow{CM}$. Budući da su A, P, M kolinearne tačke, mora biti $\frac{2k}{5} + \frac{30k}{35} = 1$. Odavde je $k = \frac{35}{44}$, pa je $\overrightarrow{CP} = \frac{7}{22}\overrightarrow{CA} + \frac{15}{22}\overrightarrow{CM}$, što znači da je $AP : PM = 15 : 7$. Slično izračunamo da je $CP : PN = 35 : 9$, a takođe i slučajeve a) i b).
a) $AP : PM = 4 : 1$ i $CP : PN = 3 : 2$, b) $CP : PN = 6 : 1$ i $AP : PM = 4 : 3$.

736. $PM + PN = PO - OM + PO + ON = 2PO + ON - OM = 2PO = 2CD$, jer je trougao CMN jednakokraki, sl. 121. (Videti **zadatak 671**.)



Sl. 121



Sl. 122

737. BCM je jednakokraki trougao pa je $\sphericalangle BMC = \sphericalangle BCM$. U trouglu BCM ugao ABC je spoljašnji, pa je $\sphericalangle ABC = 2\sphericalangle BCM$. Prema tome, ugao BCM jednak je uglu kojeg simetrala ugla ABC obrazuje sa stranicom BC. Kako su ova dva ugla naizmenični, simetrala ugla ABC i prava CM su paralelne, sl. 122.

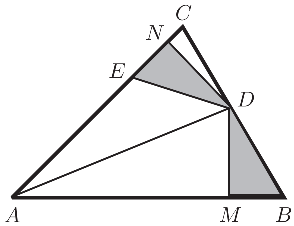
738. Slično prethodnom zadatku.

739. Na primer, $\alpha_1 + \beta_1 = \beta + \gamma + \alpha + \gamma > \alpha + \beta + \gamma$.

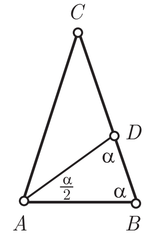
740. Neka je M zajednička tačka simetrale ugla α i stranice BC. Tada je $\sphericalangle AMC = \beta + \frac{\alpha}{2}$ i $\sphericalangle AMB = \gamma + \frac{\alpha}{2}$ pa je $\sphericalangle AMC - \sphericalangle AMB = \beta - \gamma$.

741. Ako je trougao pravougli, prav ugao je jednak zbiru oštrih uglova (ili jedan oštar ugao jednak je razlici pravog i drugog oštrog ugla). Obrnuto, ako je $\alpha = \beta + \gamma$, onda iz $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ sledi $\alpha + \alpha = 180°$, odakle je $\alpha = 90°$. Ako je $\alpha = \beta - \gamma$, onda je $\beta = \alpha + \gamma$ itd.

742. Neka je DM normala na AB i DN normala na AC. Pravougli trouglovi AMD i AND imaju zajedničku stranicu AD i jednake oštre uglove, $\sphericalangle DAM = \sphericalangle DAN$ (DA je simetrala ugla BAC), pa su oni podudarni, sl. 123. Iz podudarnosti zaključujemo da je $DM = DN$. U trouglu CDE ugao kod temena D jednak je uglu α trougla ABC, pa kako je γ zajednički ugao ovih trouglova, zaključujemo da je $\sphericalangle CED = \beta$. Uočimo sada osenčene trouglove BDM i EDN. Imamo: $\sphericalangle DEN = \beta$, $\sphericalangle DNE = \sphericalangle BMD = 90°$ i $DN = DM$, pa su ova dva trougla podudarna i zbog toga je $DE = BD$.



Sl. 123



Sl. 124

743. Na osnovu teoreme o zbiru unutrašnjih uglova u trouglu, imamo: $4\varphi+5\varphi+6\varphi = 180°$, odnosno $15\varphi = 180°$. Odavde je $\varphi = 12°$, a unutrašnji uglovi trougla su $4\varphi = 48°$, $5\varphi = 60°$ i $6\varphi = 72°$.

744. Slično prethodnom zadatku, dobijamo $\theta = 6°40'$. Unutrašnji uglovi trougla su $93°20'$, $46°40'$ i $40°$, a spoljašnji $86°40'$, $133°20'$ i $140°$.

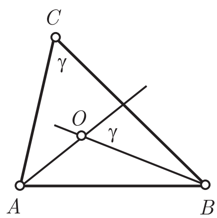
745. U oba slučaja izlazi da su unutrašnji uglovi datog trougla $70°$, $80°$ i $30°$.

746. Trougao BCD je jednakokraki i $\sphericalangle BDC = \sphericalangle BCD$ i $2\sphericalangle BCD + \beta = \alpha + \beta + \gamma$, odakle je $\sphericalangle BCD = \dfrac{\alpha+\gamma}{2}$. Kako je $\sphericalangle ACD + \dfrac{\alpha+\gamma}{2} = \gamma$, sledi $\sphericalangle ACD = \dfrac{\gamma-\alpha}{2}$.

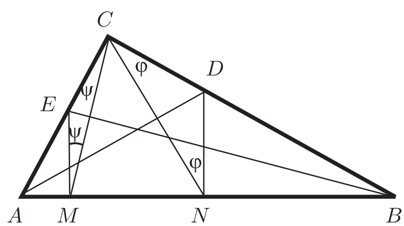
747. Prema priloženoj slici 124 je $\alpha + \alpha + \dfrac{\alpha}{2} = 180°$, odakle dobijamo $\alpha = 72°$. Ugao kod vrha je $36°$.

748. Neka je $\alpha_1+\beta_1 = 270°$. Tada iz $\alpha_1 = \beta+\gamma$ i $\beta_1 = \alpha+\gamma$ dobijamo $\beta+\gamma+\alpha+\gamma = 270°$, odnosno $180° + \gamma = 270°$, pa je $\gamma = 90°$.

749. U trouglu ABO, sl. 125 je $\gamma = \dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{\beta}{2}$ (osobina spoljašnjeg ugla trougla ABO), pa je $\alpha + \beta = 2\gamma$. Tada iz $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ dobijamo $3\gamma = 180°$, odnosno $\gamma = 60°$.



Sl. 125



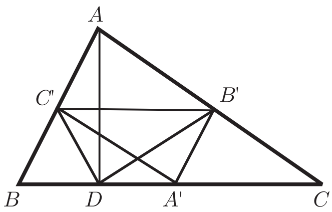
Sl. 126

750. i **751.** Uglovi sa normalnim kracima.

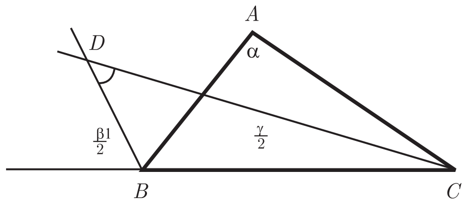
752. Kako je $\triangle ACD \cong \triangle AND$, ($\sphericalangle ACD = \sphericalangle AND$, $AD = AD$, $\sphericalangle CAD = \sphericalangle DAN$) sledi da je $CD = DN$, $\sphericalangle CND = \sphericalangle DCN = \varphi$, pa je $\sphericalangle BDN = 2\varphi$. Iz podudarnosti trouglova BEM i BEC sledi da je $\sphericalangle AEM = 2\psi$. Uočimo da je $\sphericalangle AEM = \sphericalangle NBD$ (uglovi sa normalnim kracima). Dakle, $\sphericalangle BDN + \sphericalangle NBD = 2(\varphi + \psi) = 90°$, odnosno $\varphi + \psi = 45°$, a odavde je $\sphericalangle MCN = 45°$, sl. 126.

753. Pošto je $AC > AB$, to je raspored tačaka B, D, A' i C sledeći: $B - D - A' - C$. Zatim imamo $\sphericalangle B = \sphericalangle B'A'C$ (saglasni, uglovi) i $\sphericalangle B'DC = \sphericalangle C$, jer je DB' težišna linija koja odgovara hipotenuzi u pravouglom trouglu ADC, pa je trougao DCB' jednakokraki, sl. 127. $B'A'C$ je spoljašnji ugao kod temena A' trougla $DA'B'$, pa je $\sphericalangle B'A'C = \sphericalangle B'DA' + \sphericalangle DB'A'$, odakle $\sphericalangle A'B'D = \sphericalangle B'A'C - \sphericalangle B'DA' = \sphericalangle B - \sphericalangle C$. Na sličan način se dokazuje i da je $\sphericalangle DC'A' = \sphericalangle B - \sphericalangle C$.

754. Rezultat je $9°$.



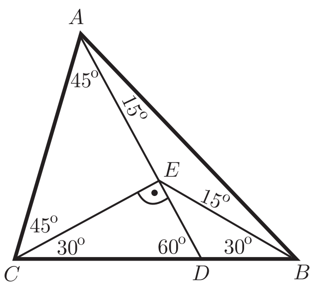
Sl. 127



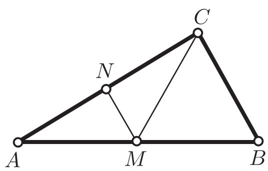
Sl. 128

755. U trouglu BCD je $\frac{\beta_1}{2}$ spoljašnji ugao, pa je, prema teoremi o spoljašnjem uglu $\frac{\beta_1}{2} = \sphericalangle BCD + \sphericalangle BDC$, odnosno $\frac{\beta_1}{2} = \frac{\gamma}{2} + \sphericalangle BDC$. Međutim, u trouglu ABC je $\beta_1 = \alpha + \gamma$, pa je $\frac{\beta_1}{2} = \frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2}$. Iz ove i prethodne jednakosti dobijamo $\frac{\gamma}{2} + \sphericalangle BCD = \frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2}$, odakle je $\sphericalangle BDC = \frac{\alpha}{2}$, sl. 128.

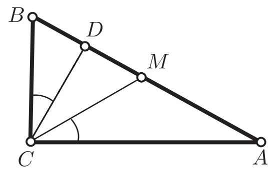
756. Neka je E podnožje normale iz vrha C na pravu AD, sl. 129. Kako je $\sphericalangle ADC = 60^\circ$, to je $2 \cdot DE = DC$, pa zbog $2 \cdot BD = DC$ sledi $DB = DE$. Kako je $\sphericalangle DBE = \sphericalangle DEB$ i $\sphericalangle BDE = 120^\circ$, to je $\sphericalangle DBE = 30^\circ$. Slično, iz $\sphericalangle EBC = \sphericalangle ECB$ $(= 30^\circ)$ sledi $EC = EB$. Zbog $\sphericalangle EAB = \sphericalangle EBA$ $(= 15^\circ)$ imamo $EA = EB$, pa je $EC = EA$. Kako je $\sphericalangle AEC = 90^\circ$, to iz jednakokrakog trougla CEA $(EC = EA)$ sledi $\sphericalangle EAC = \sphericalangle ECA = 45^\circ$. Sada se lako dobije da je $\sphericalangle BAC = 60^\circ$ i $\sphericalangle ACB = 75^\circ$.



Sl. 129



Sl. 130



Sl. 131

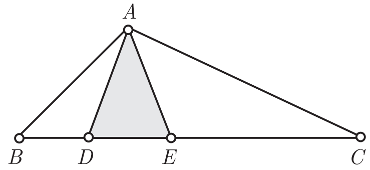
757. Neka je N središte katete AC. Tada je duž MN srednja linija trougla ABC, pa je $MN \parallel BC$, odnosno $MN \perp AC$. Tada iz $MN = MN$, $AN = CN$ i $\sphericalangle ANM = \sphericalangle CNM$, sledi da su trouglovi AMN i CMN podudarni, pa $CM = AM = \frac{1}{2}AB$, sl. 130.

758. Neka je CD visina, a CM težišna linija. Ugao BCD jednak je uglu α (videti **zadatak 751**). U prethodnom zadatku dokazali smo da je $CM = AM$, pa je $\sphericalangle ACM = \alpha$. Otuda izlazi da je $\sphericalangle BCD = \sphericalangle ACM$, sl. 131.

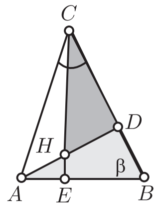
759. Koristiti prethodni zadatak.

760. Po konstrukciji unutrašnji uglovi trouglova ABD i ACE jednaki su unutrašnjim uglovima datog trougla ABC. Tako dobijamo $\sphericalangle ADB = \sphericalangle BAC = \sphericalangle AEC$, pa na osnovu stava o naporednim uglovima $\sphericalangle ADE = \sphericalangle AED$. Prema tome, ADE je jednakokraki trougao, sl. 132.

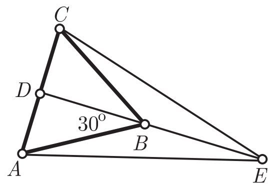
761. Koristiti osobine unutrašnjih uglova trougla. Zadatak ima dva rešenja: 75°, 70°, 35° ili 75°, 80°, 25°.



Sl. 132



Sl. 133



Sl. 134

762. Trouglovi ABE i ACD su jednakokraki, sl. 132, pa izračunavanjem dobijamo uglove $\sphericalangle AEB = 90^\circ - \dfrac{\beta}{2}$ i $\sphericalangle ADC = 90^\circ - \dfrac{\gamma}{2}$. Sada traženi ugao nalazimo iz trougla ADE: $\sphericalangle DAE = 180^\circ - \left(90^\circ - \dfrac{\beta}{2} + 90^\circ - \dfrac{\gamma}{2}\right) = \dfrac{\beta+\gamma}{2} = 45^\circ$.

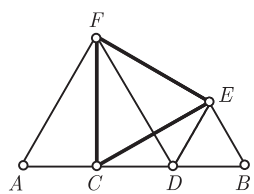
763. Pravougli trouglovi ABD i BCE imaju zajednički oštar ugao β, sl. 133, pa je $\sphericalangle BAD = \sphericalangle BCE$ (po teoremi o zbiru unutrašnjih uglova u trouglu). Sledi da su pravougli trouglovi ABD i CHD podudarni (jer $AB = CH$ po pretpostavci). Otuda izlazi da je $AD = CD$. Prema tome, pravougli trougao ACD je jednakokraki, pa je $\sphericalangle ACD = 45^\circ$.

Slično postupamo i kad je $\sphericalangle ACB$ tup. (Izračunavamo tada $\sphericalangle ACD = 135^\circ$.)

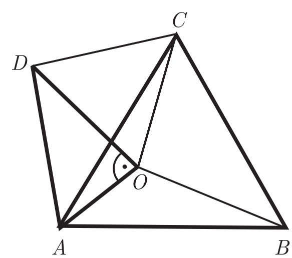
764. Unutrašnji uglovi jednakostraničnog trougla su po 60°. Visina BD polovi ugao ABC pa $\sphericalangle CBD = 30^\circ$, kao što je prikazano na slici 134 (videti **zadatak 677**). Po pretpostavci je trougao BCE jednakokraki i $\sphericalangle BCE = \sphericalangle BEC$. Kako je $\sphericalangle CBD = 30^\circ$ spoljašnji ugao, koji je nesusedan pomenutim uglovima, izlazi da je $\sphericalangle CEB = 15^\circ$. Sada je lako dokazati da je $\sphericalangle AEC = 30^\circ$, pa $\sphericalangle ABC + \sphericalangle AEC = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ$.

765. Nije teško dokazati da su trouglovi AKM, BLK i CML podudarni i $MK = KL = LM$.

766. Lako se dokazuje da su trouglovi CDF i EDF podudarni, pa sledi $CF = EF$ i $\sphericalangle CFE = 60^\circ$. Otuda izlazi da je CEF jednakostranični trougao, sl. 135.



Sl. 135

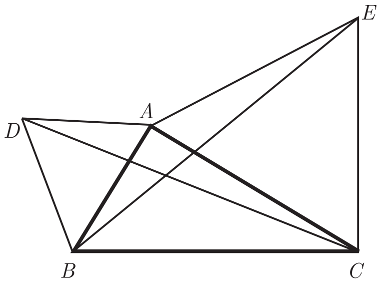


Sl. 136

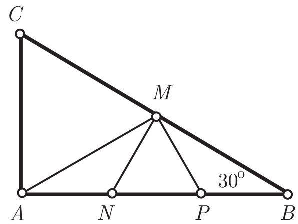
767. Prema rešenju **zadatka 539** b), data jednakost važi samo ako je $a = b = c$. Dakle, trougao je jednakostranični.

768. Neka je O data tačka u jednakostraničnom trouglu ABC, sl. 136. Izaberimo tačku D s one strane prave AC s koje nije B, tako da je trougao COD jednakostranični. Budući da je $\sphericalangle COD = 60^\circ$, sledi da je $\sphericalangle AOD = 90^\circ$. Dokazaćemo da je AOD traženi pravougli trougao. Jedna kateta je duž AO, druga je $OD = OC$, a hipotenuza je $AD = OB$, jer je $\triangle ACD \cong \triangle BCO$. ($AC = BC$ i $CD = CO$ kao stranice jednakostraničnih trouglova i $\sphericalangle ACD = 60^\circ - \sphericalangle ACO = \sphericalangle BCO$, sl. 136.)

769. Neka je E tačka s one strane prave AC s koje nije B, takva da je trougao ACE jednakostranični, sl. 137. Trougao BCE je traženi (slično prethodnom zadatku). Jednakost duži BE i CD sledi iz podudarnosti trouglova ABE i ADC.



Sl. 137

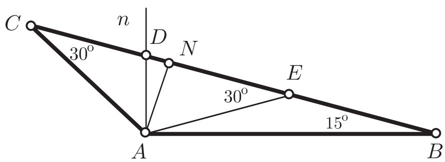


Sl. 138

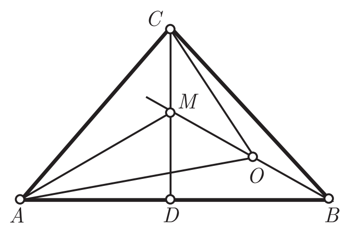
770. Ako je $\sphericalangle ABC = 30°$, onda je $\sphericalangle ACB = 60°$, pa kako je $AM = CM$ sledi da je trougao ACM jednakostranični. Stoga $\sphericalangle MAN = 30°$ i $\sphericalangle AMN = 30°$, pa je $AN = MN$, sl. 138. Ako je P središte duži NB, onda se može dokazati da je trougao MNP jednakostranični, odakle sledi traženi zaključak.

771. Neka je E tačka duži BD takva da je $\sphericalangle AED = 30°$, sl. 139. Izračunavanjem unutrašnjih uglova uverićemo se da su trouglovi ACE, ADE i ABE jednakokraki. Otuda dobijamo $AC = AE$, $AE = DE$ i $AE = BE$, pa sledi $BD = 2AC$.

772. Koristićemo sliku 139. Trougao ABD je dati pravougli trougao. Kao što smo videli u prethodnom zadatku $AE = \dfrac{1}{2}BD$. Ako je AN visina na hipotenuzu BD, iz trougla AEN je jasno da je $AN = \dfrac{1}{2}AE$, pa je $AN = \dfrac{1}{4}BD$.



Sl. 139



Sl. 140

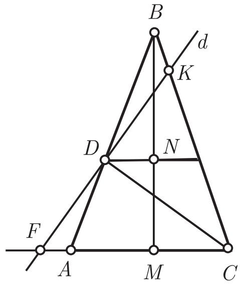
773. Neka je CD visina trougla ABC, sl. 140, i neka je M zajednička tačka ove visine i prave BO. Tada je $\sphericalangle MAB = \sphericalangle MBA = 30°$. U trouglu ABC je $\sphericalangle CAB = 50°$, pa je $\sphericalangle CAM = \sphericalangle MAO = 20°$. Visina CD polovi ugao od $80°$, pa je $\sphericalangle ACM = 40°$. U trouglu ABO ugao AOM je spoljašnji, pa je $\sphericalangle AOM = 10° + 30° = 40°$. Sledi da su trouglovi AMO i AMC podudarni (zajednička stranica AM i po dva jednaka ugla). Otuda $AC = AO$, pa je trougao ACO jednakokraki i $\sphericalangle ACO = 70°$.

774. Visina na osnovicu deli ugao kod vrha na dva ugla, od kojih je jedan jednak jednom od uglova između visine i osnovice (uglovi sa normalnim kracima).

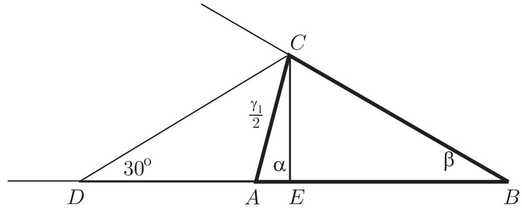
775. Videti **zadatak 758**. Imamo: $\alpha - \beta = 16°$, pa kako je $\alpha + \beta = 90°$, dobijamo $\alpha = 53°$ i $\beta = 37°$.

776. Trougao CDF je podudaran trouglu CDK, odakle sledi $FD = DK$. Dakle, duž DN je polovina srednje linije trougla FCK, pa je samim tim $DN = \dfrac{1}{4}CF$, sl. 141.

777. U pravouglom trouglu CDE je $CD = 2CE$, pa je $\sphericalangle CDE = 30°$. U trouglu CDA je ugao α spoljašnji, pa iz $\alpha - \dfrac{\gamma_1}{2} = 30°$, zbog $\gamma_1 = \alpha + \beta$, dobijamo $\dfrac{\alpha}{2} - \dfrac{\beta}{2} = 30°$, odnosno $\alpha - \beta = 60°$, sl. 142.

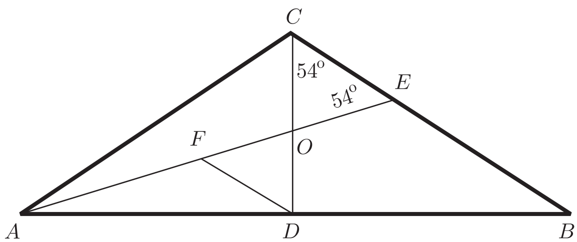


Sl. 141



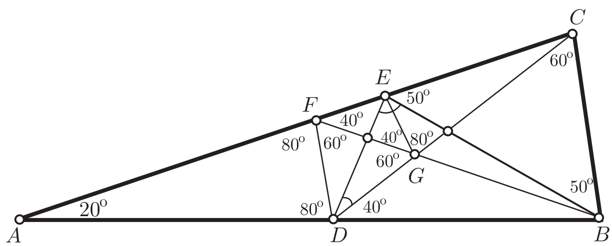
Sl. 142

778. Neka AE seče DC u O, sl. 143. Ugao α trougla ABC je $36°$ (jer je $2\alpha = 180 - 108°$). Zbog toga polovina ugla BAC, tj. ugao CAE iznosi $18°$. Koristeći dva poznata ugla u trouglu ACE, to su uglovi $108°$ i $18°$, izračunamo $\sphericalangle AEC = 180° - 108° - 18° = 54°$. Kao što znamo, duž CD polovi stranicu AB i dati ugao ACE, pa je $\sphericalangle BCD = 54°$. Dakle, trougao OCE je jednakokraki, pa je $CO = OE$. Neka je F središte duži AE. Kako je i D središte duži AB, to je duž DF srednja linija trougla ABE, pa je paralelna sa BE. Zbog toga su uglovi kod temena F i D u trouglu ODF jednaki uglovima kod temena E i C u trouglu OCE (kao naizmenični). Dakle, i trougao ODF je jednakokraki, pa je $OD = OF$. Sada imamo $CO = OE$ i $OD = OF$, odakle je $CO + OD = OE + OF$, odnosno $CD = EF$. Kako je $AE = 2EF$ to je i $AE = 2CD$.

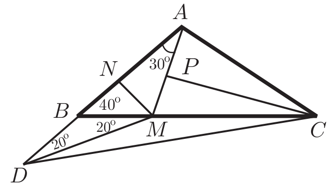


Sl. 143

779. Neka je tačka F, $F \in AC$, takva da je $\sphericalangle CBF = 60°$ i neka CD seče BF u tački G, sl. 144. Dati trougao je jednakokraki, pa je $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ACB = 80°$. Dakle, $\sphericalangle ACD = 80° - 60° = 20°$, pa je i trougao ADC jednakokraki. Ovaj trougao je podudaran trouglu ABF, pa je $AF = AD$. Znači, i trougao ADF je jednakokraki s uglovima od $80°$ na osnovici DF. Kako je $\sphericalangle CDB = 40°$, to je $\sphericalangle FDG = 60°$. Zaključujemo da su trouglovi DFG i BCG jednakostranični (imaju sve unutrašnje uglove od $60°$). U trouglu BCE je $\sphericalangle CEB = 180° - 80° - 50° = 50°$, pa je i ovaj trougao jednakokraki i $CE = BC$. Kako je $BC = CG$, to je i $CE = CG$, pa je trougao CEG jednakokraki i $\sphericalangle CEG = \sphericalangle CGE = 80°$.



Sl. 144

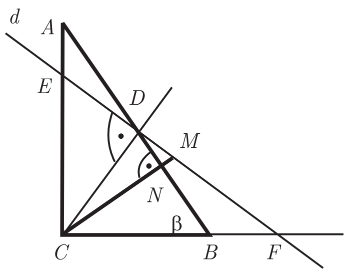


Sl. 145

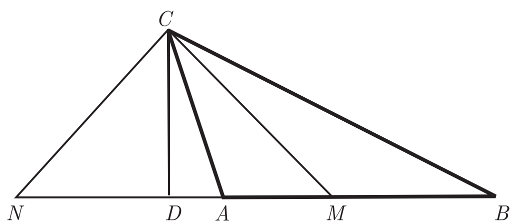
Sada imamo: $\sphericalangle EGF = 180^\circ - 60^\circ - 80^\circ = 40^\circ$, pa kako je i $\sphericalangle EFG = 40^\circ$, to je trougao EFG jednakokraki i $GE = EF$. Dakle, $GE = EF$, $DG = DF$ i $DE = DE$, pa je $\triangle DGE \cong \triangle DFE$. Sledi da je prava DE simetrala ugla $CDF = 60^\circ$, pa je $\sphericalangle CDE = 30^\circ$. Prava DE je simetrala i ugla GEF, koji iznosi 100°, pa je $\sphericalangle BED = 80^\circ$. Dakle, traženi uglovi su $\sphericalangle CDE = 30^\circ$ i $\sphericalangle BED = 80^\circ$.

780. Neka je M tačka stranice BC takva da je $CM = AC$, sl. 145. U jednakokrakom trouglu AMC je $\sphericalangle CAM = 70^\circ$, pa je $\sphericalangle MAD = 30^\circ$. Odredimo podnožje N normale iz M na AD. Trougao AMN je polovina jednakostraničnog trougla, pa je $MN = \dfrac{1}{2}AM$. Neka je CP visina trougla ACM. Dokazaćemo da su trouglovi CMP i DMN podudarni. Tačka P je središte osnovice AM, pa je $MP = MN$. Trougao BDM je jednakokraki, jer je $BD = AD - AB = BC - AC = BC - CM = BM$. Ugao ABM je spoljašnji za taj trougao pa je $\sphericalangle BDM = \sphericalangle BMD = \dfrac{1}{2}\cdot 40^\circ = 20^\circ$. Takođe je $\sphericalangle MCP = 20^\circ$. Po stavu USU je $\triangle AMN \cong \triangle CMP$. Sledi da je $DM = CM$, pa je CMD jednakokraki trougao i $\sphericalangle MCD = \dfrac{1}{2}\sphericalangle BMD = 10^\circ$. Sada lako izračunamo da su uglovi: $\sphericalangle ACD = 50^\circ$, $\sphericalangle CAD = 100^\circ$ i $\sphericalangle ADC = 30^\circ$.

781. Duž CD je težišna linija pravouglog trougla ABC, a duž CM je težišna linija pravouglog trougla CEF, sl. 146. Stoga su trouglovi ACD i CFM jednakokraki i $\sphericalangle DAC = \sphericalangle DCA$, $\sphericalangle MCF = \sphericalangle MFC$. Kako je $\sphericalangle ACD = \sphericalangle MFC$ (sa normalnim kracima), to su sva četiri ugla u jednakokrakim trouglovima jednaka među sobom. Znači da je i $\sphericalangle MCF = \sphericalangle CAB = \alpha$. Vidimo da trougao BCN ima sa trouglom ABC zajednički ugao β i $\sphericalangle BCN = \alpha$. Sledi da ova dva trougla imaju jednake i preostale uglove, pa je $\sphericalangle BNC = \sphericalangle ACB = 90^\circ$.

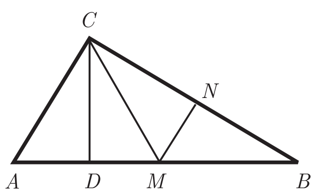


Sl. 146

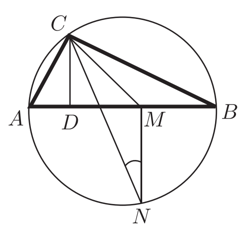


Sl. 147

782. Ako je CD visina, onda je $\sphericalangle BAC - 90^\circ = \sphericalangle ACD$, pa je $\sphericalangle ACD = \beta$. Ako izrazimo uglove DCN i DCM preko α i β, dobićemo da je $\sphericalangle DNC = \dfrac{\alpha}{2} - \dfrac{\beta}{2} = \sphericalangle DMC$, pa je trougao CMN jednakokraki i $CM = CN$, sl. 147.



Sl. 148



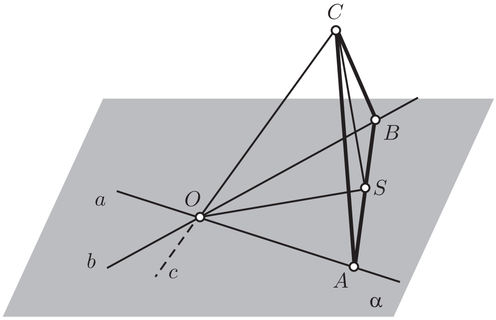
Sl. 149

783. a) Neka su CD i CM visina i težišna linija i neka je N podnožje normale iz M na BC, sl. 148. Tada su pravougli trouglovi MDC i ADC podudarni (zajednička kateta CD i oštri uglovi kod C jednaki). Zbog toga je $AD = DM$. Podudarni su i pravougli trouglovi CMD i CMN (zajednička hipotenuza CD i jednaki oštri uglovi kod C). Sledi da je $MN = DM = AD$, pa je

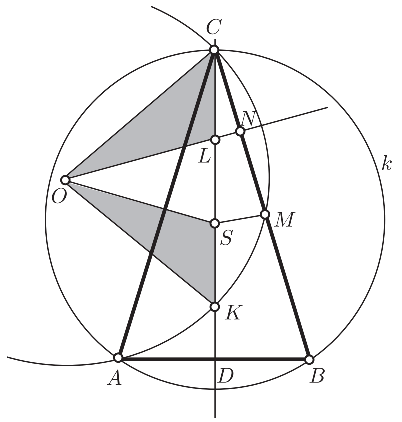
$AM = 2MN$. Kako je $MB = AD$, biće $MB = 2MN$. Otuda zaključujemo da je u pravouglom trouglu MBN oštar ugao kod B jednak $30°$. Zbog toga je u pravouglom trouglu BCD ugao DCB od $60°$, a to znači i da je $\sphericalangle BCM = 30° = \sphericalangle ACD = \sphericalangle DCM$, pa je $\sphericalangle ACB = 90°$ i $\sphericalangle BAC = 60°$.

b) Neka je N tačka u kojoj simetrala ugla ACB seče opisani krug trougla, sl. 149. Kroz istu tačku i središte M prolazi simetrala stranice AB. Zbog toga je $\sphericalangle MNC = \sphericalangle DCN$ (sa paralelnim kracima), pa je i $\sphericalangle NCM = \sphericalangle MNC$. Sledi da je $MN = CM$, pa je M centar opisanog kruga trougla ABC. Samim tim je $\sphericalangle ACB = 90°$ i lako se izračunaju i ostali uglovi: $\sphericalangle CAB = 67°30'$ i $\sphericalangle ABC = 22°30'$.

784. Neka je O zajednička tačka pravih a, b i c i tačke A, B i C na datim pravim tako da je $OA = OB = OC$, sl. 150. Tada su $\triangle OAC$ i $\triangle OBC$ jednakostranični, pa je $AC = BC = OA = OB$. Sledi da su trouglovi ABC i ABO podudarni po stavu SSS. Dakle, trougao ABC je jednakokraki pravougli, kao i trougao OAB, i njihove visine OS i CS su jednake među sobom i jednake polovini hipotenuze. Stoga je $\triangle OCS \cong \triangle OAS$ – to su, takođe, jednakokraki pravougli trouglovi, pa je $CS \perp OS$ i $CS \perp AB$. Otuda zaključujemo da je prava CS normalna na ravan određenu pravim a i b, a $\sphericalangle COS = 45°$ je nagibni ugao prave c prema ovoj ravni.



Sl. 150



Sl. 151

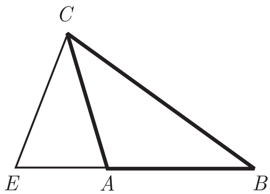
785. Uočimo pravougli trougao BXY sa oštrim uglom $\sphericalangle BXY = 30°$. Zbog $\sphericalangle AXZ = 90°$, sledi da je $\sphericalangle YXZ = 60°$. Slično se dokaže da su svi uglovi trougla XYZ po $60°$, pa je XYZ jednakostranični trougao. Dalje se lako dokaže da je $BX = 2AX$ itd.

786. Neka je N središte duži CM i L pesek simetrale duži CM sa visinom CD. Neka su O i S centri opisanih krugova trouglova ACM i ABC, sl. 151. Uglovi OLS i ABC su jednaki kao uglovi sa normalnim kracima, a slično utvrdimo i da je $\sphericalangle OSC = \sphericalangle BAC$. Iz jednakosti $\sphericalangle ABC$ i $\sphericalangle BAC$ (na osnovici jednakokrakog trougla) sledi da je $\sphericalangle OLS = \sphericalangle OSL$ i zbog toga je $OL = OS$. Sada vidimo da su trouglovi OCL i OKS podudarni po stavu SSU. (Duži OK i OC su jednake kao poluprečnici istog kruga, $OL = OS$, a $\sphericalangle OLC = \sphericalangle OSK$ kao suplementni jednakim uglovima OLS i OSL. Uglovi OLC i OSK su tupi jer su suplementni uglovima na osnovici jednakokrakog trougla OLS.) Iz ove podudarnosti sledi da je $SK = CL$. Duž NL je srednja linija trougla CSM, pa je $CL = \frac{1}{2}CS = \frac{1}{2}r$, a onda je i $SK = \frac{1}{2}r$. Konačno je $CK = CS + SK = \frac{3}{2}r$, što se i tvrdilo.

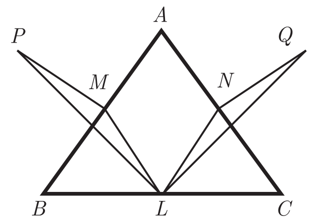
787. a) Iz $\alpha - \beta = 2\gamma$ dobijamo $\alpha = \beta + \gamma + \gamma$. Prema **zadatku 741** ako je $\alpha = \beta + \gamma$, onda je $\alpha = 90°$, pa je očigledno $\alpha > 90°$.

b) Trougao ACE je jednakokraki sa osnovicom AE, sl. 152, pa je $\sphericalangle CEA = \sphericalangle CAE = \alpha_1 = \beta + \gamma$. Otuda sledi da je $\sphericalangle ACE = 180° - 2\beta - 2\gamma = \alpha + \beta + \gamma - 2\beta - 2\gamma = \alpha - \beta - \gamma = 2\gamma - \gamma = \gamma$, pa je $\sphericalangle ACE = \sphericalangle ACB$.

788. Ma kakve bile date tačke A, B, C, D, E i F, postoji neki konveksan mnogougao, kome su temena neke od datih tačaka, takav da nijedna od datih tačaka nije van ovog mnogougla. Neka su A, B i C tri susedna temena ovog mnogougla i neka je b prava, koja sa mnogouglom ima zajedničku samo tačku B. Tada je $\sphericalangle ABC \geq 120°$ ili $\sphericalangle ABC < 120°$. Ako je $\sphericalangle ABC \geq 120°$, onda je u trouglu ABC zbir uglova BAC i BCA manji od 60° ili jednak 60°, pa je jedan od njih manji od 30° ili jednak 30°. Ako je $\sphericalangle ABC < 120°$, onda prave AB, BC, BD, BE i BF određuju bar jedan ugao manji od 30°.

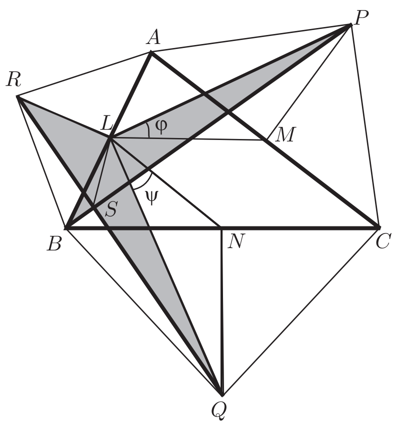


Sl. 152



Sl. 153

789. Duž LM je srednja linija trougla ABC, sl. 153, pa je $LM = \frac{1}{2}AC$, a samim tim je $LM = NQ$. Na isti način je $LN = MP$. Kako su srednje linije paralelne odgovarajućim stranicama, to su uglovi BML i LNC podudarni sa $\sphericalangle BAC = \alpha$ kao uglovi sa paralelnim kracima. Prema tome, $\sphericalangle LMP = 90° + \alpha$ i $\sphericalangle LNQ = 90° + \alpha$, odnosno $\sphericalangle LMP = \sphericalangle LNQ$, pa je trougao LMP podudaran trouglu NQL i $LP = LQ$.



Sl. 154

790. Visine RL, QN i PM pravouglih trouglova polove stranice AB, BC i AC datog trougla ABC. Na osnovu prethodnog zadatka je $LP = LQ$. Označimo uglove trouglova LQN i LPM sa $90° + \gamma$, $\sphericalangle LQN = \sphericalangle MLP = \varphi$ i $\sphericalangle NLQ = \sphericalangle LPM = \psi$ (vidi prethodni zadatak). Imamo: $90° + \gamma + \varphi + \psi = 180°$, odnosno $\gamma + \varphi + \psi = 90°$. Otuda dobijamo da je $\sphericalangle PLQ = \varphi + \gamma + \psi = 90°$, sl. 154. Prema tome, trouglovi BLP i RLQ su podudarni ($BL = LR = \frac{1}{2}AB$, $LP = LQ$ i $\sphericalangle BLP = \sphericalangle BLQ + 90° = \sphericalangle BLQ + \sphericalangle BLR = \sphericalangle QLR$), pa je $BP = QR$. Neka BP seč RQ u S i neka je $\sphericalangle BSR = \theta$. Zbir uglova u trouglu BRS je $\theta + 45° - \sphericalangle LRS + 45° + \sphericalangle LBS = 180°$. Kako je $\sphericalangle LRS = \sphericalangle LBS$, dobijamo $\theta + 90° + \sphericalangle LBS - \sphericalangle LBS = 180°$, odakle je $\theta = 90°$, pa je $BP \perp RQ$.

791. U pravouglom trouglu hipotenuza je najduža stranica.

792. Pođimo od $a < b + c$, pa dodajmo na obe strane nejednakosti a. Dobićemo da je $2a < a + b + c \Rightarrow a < s$, gde smo sa s označili poluobim trougla $s = \dfrac{a+b+c}{2}$.

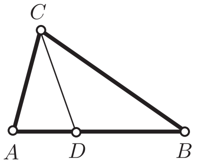
793. To su trouglovi sa stranicama 2, 4, 4 ili 3, 3, 4.

794. Neka je CD simetrala ugla ACB, sl. 155. Tada je $\sphericalangle ADC > \sphericalangle BCD$, kao spoljašnji ugao trougla BCD. Kako je $\sphericalangle BCD = \sphericalangle ACD$, sledi da je $\sphericalangle ADC > \sphericalangle ACD$, pa je $AC > AD$. Slično dokazujemo da je $BC > BD$.

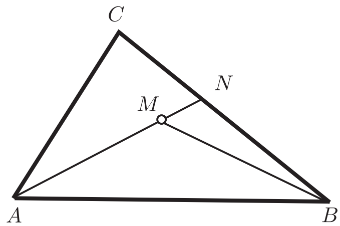
795. Produžimo AM do preseka N sa stranicom BC, sl. 156.

a) Ugao ANB je spoljašnji ugao trougla ACN, pa je zbog toga $\sphericalangle ANB > \sphericalangle ACN$. Slično, AMB je spoljašnji ugao trougla BMN, pa je $\sphericalangle AMB > \sphericalangle ANB$. Zbog tranzitivnosti nejednakosti izlazi $\sphericalangle AMB > \sphericalangle ACB$.

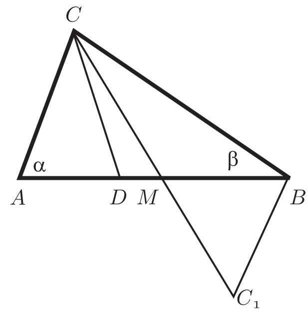
b) U trouglu ACN je $AC + CN > AN$. Odavde dobijamo $AC + CN + NB > AN + NB$, pa kako je $CN + NB = CB$, to daje nejednakost $AC + CB > AN + NB$. Međutim, u trouglu MBN je $MN + NB > MB$, a odavde $AM + MN + NB > AM + MB$. Zbog $AM + MN = AN$, izlazi da je $AN + NB > AM + MB$. Sada iz $AC + CB > AN + NB$ i $AN + NB > AM + MB$, sledi $AC + CB > AM + MB$.



Sl. 155



Sl. 156



Sl. 157

796. Pretpostavimo da je $BC > AC$, pa je $\alpha > \beta$, sl. 157. Dokažimo najpre da je $D-M-B$. Neka je C_1 tačka takva da je M središte duži CC_1. Tada je $BC_1 = AC$ i $BC_1 \parallel AC$ i $\sphericalangle BC_1M = \sphericalangle ACM$ (iz podudarnih trouglova ACM i BC_1M). Kako je po pretpostavci $BC > AC$, to je $BC > BC_1$, pa je $\sphericalangle BC_1M > \sphericalangle BCM$. Sledi da je $\sphericalangle ACM > \sphericalangle BCM$, pa je $M \in DB$, tj. $D - M - B$. Dalje je $\sphericalangle CMD = \beta + \sphericalangle BCM$ i $\sphericalangle CDM = \alpha + \sphericalangle ACD$ (spoljašnji uglovi). Kako je $\alpha > \beta$ i $\sphericalangle ACD > \sphericalangle BCM$, to je $\sphericalangle CDM > \sphericalangle CMD$, pa je u trouglu CDM: $CM > CD$.

797. $PA + PB > AB$, zatim $PB + PC > BC$ i $PC + PA > CA$, pa saberemo ove nejednakosti.

798. a) Slično prethodnom zadatku.

b) Koristimo tačku C_1, kao u **zadatku 796**, sl. 157.

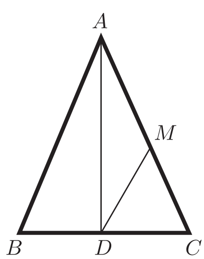
799. $t_a > b - \dfrac{a}{2}$, $t_b > c - \dfrac{b}{2}$, $t_c > a - \dfrac{c}{2}$, pa saberemo.

800. Neka je M tačka na slici 156. **U zadatku 795** videli smo da je $AM+BM < AC+BC$, $BM + CM < AB + AC$ i $AM + CM < AB + BC$. Sabiranjem ovih nejednakosti dobijamo $2(AM + BM + CM) < 2(AB + BC + AC)$. Primenjujući na trouglove ABM, BCM i ACM nejednakosti trougla dobijamo $AM + BM > AB$, $BM + CM > BC$ i $CM + AM > CA$, odakle sabiranjem dobijamo $AM + BM + CM > \dfrac{AB + BC + CA}{2}$.

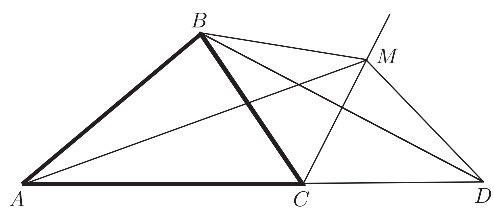
801. Označimo desnu stranu nejednakosti sa A i izračunajmo

$$A^2=(a+b-c)^2(a+c-b)^2(b+c-a)^2=(a^2-(b-c)^2)(b^2-(c-a)^2)(c^2-(a-b)^2)<a^2b^2c^2.$$

802. Iz trougla DMC, sl. 158, dobijamo $|DC - DM| < CM$. Kako je $DC = DB$, biće $|DB - DM| < CM$. Međutim, $CM = AC - AM = AB - AM$, pa je $|DB - DM| < AB - AM$.



Sl. 158

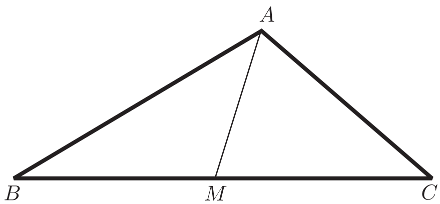


Sl. 159

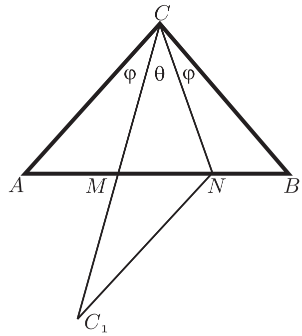
803. Na pravoj AC izaberimo tačku D, takvu da je $A - C - D$ i $CD = CB$. Očigledno je simetrala CM ugla BCD ujedno i simetrala duži BD, pa je $MD = MB$, sl. 159. U trouglu ADM važi $AM + MD > AD = AC + CD$, a odavde je $MA + MB > AC + BC$.

804. Slično prethodnom zadatku.

805. Neka su u trouglu ABC unutrašnji uglovi α, β i γ i AM težišna linija koja odgovara najvećoj stranici BC. Ako je $BC > 2AM$, onda je $\frac{BC}{2} > AM$, odnosno $BM > AM$. Odavde zaključujemo da je u trouglovima ABM i ACM ugao BAM veći od β i ugao CAM veći od γ. Prema tome, izlazi da je $\sphericalangle BAM + \sphericalangle CAM > \beta + \gamma$, odnosno $\alpha > \beta + \gamma$. Iz osobina nejednakosti sledi da je $\alpha + \alpha > \alpha + \beta + \gamma$, odnosno $\alpha > \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$. Kako je ugao $\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$ prav, to je ugao α tup, sl. 160. Slično dokazujemo i ostale slučajeve.



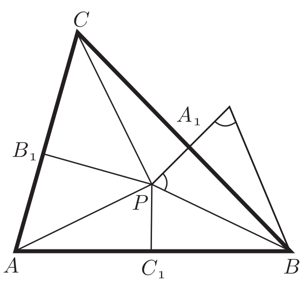
Sl. 160



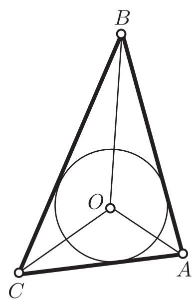
Sl. 161

806. Lako se dokazuje da su trouglovi ACM i BCN podudarni, pa je $CM = CN$ i $\sphericalangle ACM = \sphericalangle BCN = \varphi$, sl. 161. Dakle, trougao MNC je jednakokraki, pa je $\sphericalangle CMN$ oštar a $\sphericalangle AMC$ je zbog toga tup. Prema tome, u trouglu AMC je $\sphericalangle AMC > \sphericalangle MAC$, pa je $AC > MC$. Neka je C_1 tačka takva da je M središte duži CC_1. Nije teško dokazati podudarnost trouglova AMC i NMC_1. Iz ove podudarnosti sledi da je $NC_1 = AC$, pa je $NC_1 > CN$, a $\sphericalangle NCC_1 > \sphericalangle NC_1C$ (ugao naspram veće stranice u trouglu CC_1N). Budući da je $\sphericalangle NC_1C = \varphi$, sledi traženi zaključak.

807. Neka su A_1, B_1 i C_1 podnožja normala iz P na BC, CA i AB. Očigledno je $d = \min\{PA_1, PB_1, PC_1\}$, $D = \max\{PA, PB, PC\}$. Od šest uglova sa zajedničkim temenom P, ne mogu svi biti manji od $60°$. Neka je, na primer, $\sphericalangle A_1PB \geq 60°$, sl. 162. Tada je $PB \geq 2PA_1$. Pošto je $D \geq PB$ i $PA_1 \geq d$, sledi $D \geq 2d$. Znak jednakosti važi ako su svi uglovi sa zajedničkim temenom P jednaki $60°$ (tada je $\triangle ABC$ jednakostranični, a P njegov centar).



Sl. 162



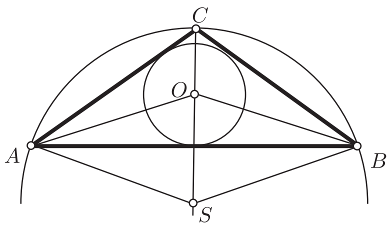
Sl. 163

808. Neka su $AD = h_a$ i $BE = h_b$ visine trougla ABC. Po pretpostavci je $h_a \geq a$ i $h_b \geq b$. Za duži h_a i h_b važi $h_a \geq h_b$ ili $h_a \leq h_b$. Ako je $h_a \geq h_b$, onda iz $h_b \geq b$ izlazi da je $h_a \geq b$. Međutim, u pravouglom trouglu ACD, duž b je hipotenuza, pa je $h_a \leq b$. Dobijamo $h_a \geq b \wedge h_a \leq b \Rightarrow h_a = b$, pa je trougao ABC pravougli (ugao ACB je prav). Ako je $h_a \leq h_b$ dolazimo do sličnog zaključka.

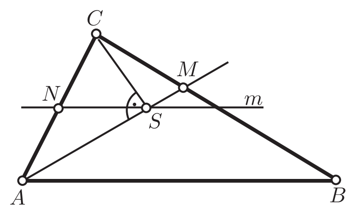
809. Neka se, na primer, poklapaju ortocentar i centar upisanog kruga. Ova pretpostavka ekvivalentna je pretpostavci da su visine ujedno i simetrale uglova. Izvodeći zaključke slično kao u **zadatku 677**, dolazimo do zaključka da ove prave sadrže simetrale stranica, a takođe i težišne linije. Slično rasuđujemo i u ostalim slučajevima.

810. Neka je u trouglu ABC tačka O centar upisanog kruga i $\alpha \geq \gamma \geq \beta$, sl. 163. U trouglu AOB je $\frac{\alpha}{2} \geq \frac{\beta}{2}$, pa je $OB \geq OA$, a u trouglu AOC je $\frac{\alpha}{2} \geq \frac{\gamma}{2}$, pa je $CO \geq AO$. Dakle, od duži AO, BO i CO najkraća je duž AO.

811. Neka je O centar upisanog, a S centar opisanog kruga, sl. 164. Prava OS je simetrala duži AB, pa je $OA = OB$, odakle sledi da je $\frac{\alpha}{2} = \frac{\beta}{2}$, odnosno $\alpha = \beta$. Sledi da je ABC jednakokraki trougao, pa teme C pripada pravoj OS. Kako je $SA = SC$ (poluprečnici opisanog kruga) i $SB = SC$, to je $\sphericalangle SAC = \frac{\gamma}{2}$ i $\sphericalangle SBC = \frac{\gamma}{2}$. Ugao SAC je pravima AB i AO podeljen na tri jednaka dela, pa je $\alpha = \beta = \frac{2}{3} \cdot \frac{\gamma}{2} = \frac{\gamma}{3}$. Dalje, iz $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\gamma}{3} + \frac{\gamma}{3} + \gamma = 180^\circ$, dobijamo $\gamma = 108^\circ$, pa je $\alpha = \beta = 36^\circ$.



Sl. 164



Sl. 165

812. Prava m sadrži srednju liniju trougla, pa je $m \parallel AB$, a tačka N je središte stranice AC, tj. $AN = NC$. Uglovi BAS i ASN su jednaki (naizmenični), pa kako je AS simetrala ugla BAC, sledi da je $\sphericalangle ASN = \sphericalangle NAS$, sl. 165. Sledi da je $SN = AN = NC$, što znači da je tačka N centar kruga opisanog oko trougla CAS, a $\sphericalangle ASC = 90^\circ$ (osobina pravouglog trougla).

813. Trougao ABD mora biti jednakokraki, $AB = BD$. Kako je već $BD = AD$, to je trougao ABD jednakostraničan, pa je $\sphericalangle BAD = 60^\circ$. Znači da je $\sphericalangle ACB = 30^\circ$.

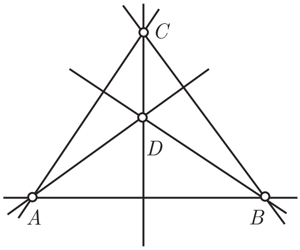
814. a) Dokažimo da je $KL \parallel NP$. Trougao AKL je jednakokraki, jer je $AK = AL$. Međutim, kako je $BN = AC$ i $CP = AB$, sledi da je $AB + BN = AC + CP$, odnosno $AN = AP$, pa je trougao ANP jednakokraki. Pošto su uglovi kod zajedničkog vrha A ovih dvaju jednakokrakih trouglova unakrsni, znači da su i jednaki, pa sledi da su im jednaki i uglovi na osnovicama KL i NP. Kako je $\sphericalangle AKL = \sphericalangle ANP$, a ovi uglovi su naizmenični, to je $KL \parallel NP$. Na isti način se dokazuje paralelnost ostalih odgovarajućih stranica.

b) Iz prethodnog zaključka sledi da je svaka simetrala unutrašnjeg ugla trougla ABC ujedno i simetrala dveju naspramnih stranica šestougla (koristimo osobine jednakokrakih trouglova).

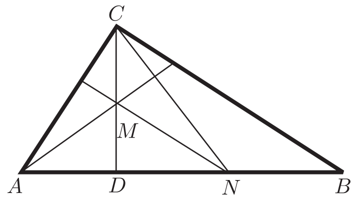
815. Iz uslova je $\frac{4}{5}\alpha = 90^\circ$, odnosno $\alpha = 67^\circ 30'$. Ako je $h_c = CD$, onda je trougao ACD jednakokraki pravougli, pa je $AD = CD$. Sada se lako dokazuje podudarnost trouglova BCD i HAD. (Videti rešenje **zadatka 763**.)

816. Tačke A, B i C ne mogu biti kolinearne, jer bi u protivnom postojale dve različite normale DC i DB na pravu AB iz tačke D. Prema tome, postoji trougao ABC kome su prave CD i BD visine na stranice AB i AC. Dakle, tačka D je ortocentar, pa je AD visina stranice BC, tj. $AD \perp BC$, sl. 166.

817. Duž MN je srednja linija trougla BCD, pa je paralelna sa BC, odnosno $MN \perp AC$. Pošto je i $CD \perp AN$, sledi da je tačka M ortocentar trougla ANC, pa je AM treća visina ovog trougla i $AM \perp CN$, sl. 167.

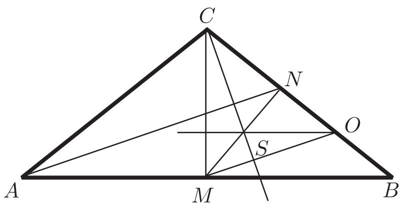


Sl. 166

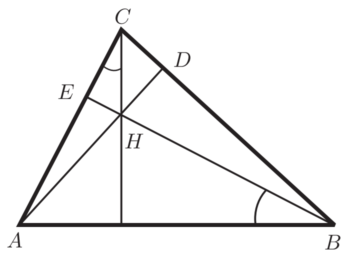


Sl. 167

818. Neka je tačka O središte duži BN, sl. 168. Duž OS je srednja linija trougla MBN, pa je prava OS paralelna osnovici AB, a samim tim, prava OS je normalna na visinu CM datog trougla. Kako je (po pretpostavci) $MN \perp CO$, sledi da su prave MN i OS visine trougla CMO, pa je tačka S ortocentar ovog trougla. Prema tome, prava CS je treća visina trougla CMO, pa je $CS \perp OM$. Dalje, u trouglu ABN, duž OM je srednja linija, pa je duž OM paralelna sa pravom AN. Stoga, kako je $CS \perp OM$, biće i $CS \perp AN$, što se i tvrdilo.



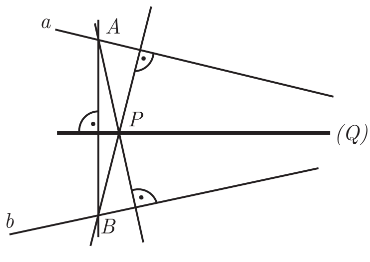
Sl. 168



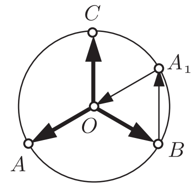
Sl. 169

819. Neka se ove visine seku u H. Tada je CH treća visina trougla. Zbog toga je $\sphericalangle ACH = \sphericalangle ABE$ i $\sphericalangle BCH = \sphericalangle BAD$ (uglovi sa normalnim kracima) itd, sl. 169.

820. Izabraćemo tačke A i B na pravim a i b, tako da tačka P bude ortocentar trougla ABQ. U tom cilju konstruišemo pravu AP, normalnu na b i pravu PB normalnu na a, sl. 170. Zbog toga je tačka P ortocentar trougla ABQ, pa kroz nju prolazi i treća visina PQ. Sada kroz tačku P konstruišemo normalu na pravu AB i to je tražena prava PQ.



Sl. 170



Sl. 171

821. Kroz središte C_1 duži AB konstruišemo pravu CC_1 (kao PQ u prethodnom zadatku). Prava kroz C_1, paralelna sa $B(C)$, seče pravu $A(C)$ u tački B_1, koja je središte stranice $A(C)$. Težišna linija BB_1 seče pravu $C_1(C)$ u tački T koja se traži.

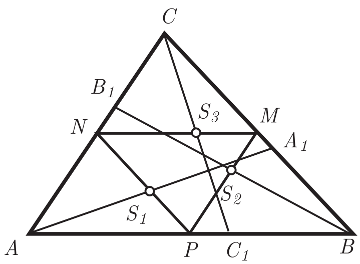
822. $\overrightarrow{TA} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{TB} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{BN}$ i $\overrightarrow{TC} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{CP}$ itd. Koristimo osobine težišta i **zadatak 705**.

823. Imamo jednakosti $\overrightarrow{MT} = \vec{a} + \overrightarrow{AT}$, $\overrightarrow{MT} = \vec{b} + \overrightarrow{BT}$ i $\overrightarrow{MT} = \vec{c} + \overrightarrow{CT}$. Saberemo ove jednakosti i iskoristimo rezultat prethodnog zadatka.

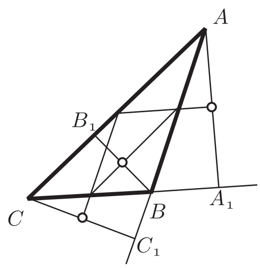
824. $\overrightarrow{T_1T_2} = \overrightarrow{T_1A_1} + \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2T_2}$, $\overrightarrow{T_1T_2} = \overrightarrow{T_1B_1} + \overrightarrow{B_1B_2} + \overrightarrow{B_2T_2}$ i $\overrightarrow{T_1T_2} = \overrightarrow{T_1C_1} + \overrightarrow{C_1C_2} + \overrightarrow{C_2T_2}$. Saberemo ove tri jednakosti i iskoristimo zaključke iz **zadatka 822**.

825. Ako produžimo poluprečnik OA do preseka A_1 sa krugom, dobićemo vektor $\overrightarrow{A_1O}$ koji je jednak vektoru $\overrightarrow{OA}$, sl. 171. Kako je $\overrightarrow{A_1O} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{A_1B}$, sledi da mora biti $\overrightarrow{OC} = -\overrightarrow{A_1B}$, odnosno $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{BA_1}$, pa je $AB = OA = OA_1$. Dakle, $\sphericalangle A_1OB = 60^\circ$, pa je $\sphericalangle AOB = 120^\circ$ itd.

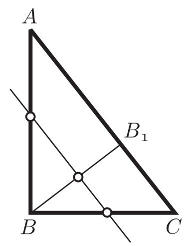
826. Središta S_1, S_2, S_3 duži AA_1, BB_1, CC_1, pripadaju srednjim linijama trougla. Ove srednje linije obrazuju trougao MNP, sl. 172, a nijedna od tačaka S_1, S_2, S_3 ne poklapa se sa M, N, P. Pošto ne postoji prava koja seče tri stranice trugla MNP, to tačke S_1, S_2, S_3 ne mogu biti kolinearne.



Sl. 172



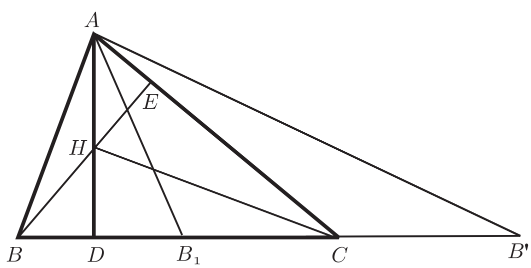
Sl. 173



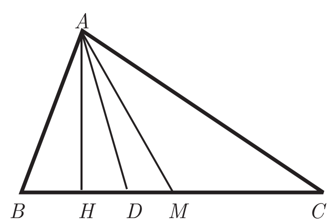
Sl. 174

827. Koristiti rezultat prethodnog zadatka, sl. 173. Ako je trougao pravougli, sl. 174, onda su središta visina kolinearne tačke.

828. Neka je u trouglu ABC stranica AC veća od AB. Tada je i $\beta > \gamma$. Neka su AD i BE visine i H ortocentar. Na pravoj BC odredimo tačku B_1, takvu da je D središte duži BB_1. Mora biti $D - B_1 - C$, što znači da je $DB_1 < DC$, a otuda i $BD < CD$. (Ako bi bilo $D - C - B'$, sl. 175, tada bi trougao ABB' bio jednakokraki i $\sphericalangle AB'C = \beta$. Međutim, u trouglu $AB'C$ bi ugao γ bio spoljašnji i $\gamma > \beta$, što je suprotno pretpostavci.) Sada se lako dokazuje da je $BH < CH$. (Možemo koristiti i zakon kontrapozicije.)



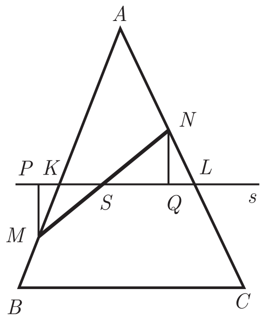
Sl. 175



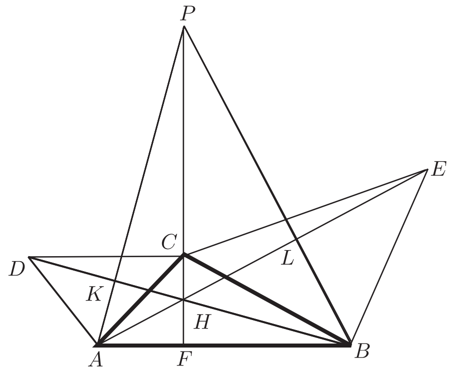
Sl. 176

829. Neka je $AC > AB$. Tada, razmišljajući slično kao u prethodnom zadatku, zaključujemo da je $\sphericalangle BAH < \sphericalangle CAH$, sl. 176, a odavde $\sphericalangle BAH < \dfrac{\alpha}{2}$, pa je $B - H - D$. Sem toga, u **zadatku 796** dokazali smo da je $D - M - C$.

830. Neka su P i Q podnožja normala iz M i N na s, sl. 177. Iz podudarnosti trouglova MPS i NQS zaključujemo da je $MP = NQ$, pa se može utvrditi da su podudarni trouglovi KMP i LNQ, odakle je $KP = LQ$ itd.



Sl. 177

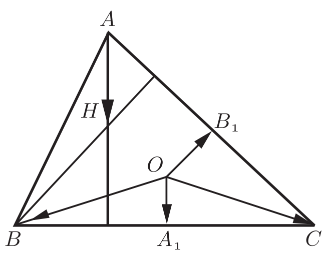


Sl. 178

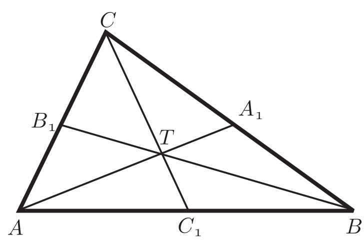
831. Neka su K i L tačke duži BD i AE takve da je $AK \perp BD$ i $BL \perp AE$. Dokazaćemo da se prave AK, BL i CF seku u jednoj tački. Neka je $AK \cap CF = \{P\}$, sl. 178. Tada su trouglovi DAB i ACP podudarni ($AD = AC$ i uglovi sa normalnim kracima), pa je $AB = CP$. Neka je sada $BL \cap CF = \{P_1\}$. Slično prethodnom dokazu, utvrdićemo da je $AB = CP_1$, pa iz tranzitivnosti podudarnosti izlazi $CP = CP_1$. Iz aksioma podudarnosti sledi da je $P = P_1$. Dakle, imamo trougao ABP, a njegove visine su upravo prave AE, BD, CF, pa ove prave imaju zajedničku tačku H.

832. $\overrightarrow{OA} = \dfrac{1}{3}(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON})$, $\overrightarrow{OB} = \dfrac{1}{3}(\overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP})$, $\overrightarrow{OC} = \dfrac{1}{3}(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OP})$. Sada je $\overrightarrow{OT}_{ABC} = \dfrac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = \dfrac{2}{9}(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP})$ i $\overrightarrow{OT}_{MNP} = \dfrac{1}{3}(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP})$. Dakle, $\overrightarrow{OT}_{ADC} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{OM}_{MNP}$, pa su tačke O, T_{ABC} i T_{MNP} kolinearne.

833. Označimo sa A_1 i B_1 središta duži BC i CA. Tada je $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OA_1}$ (1), $\overrightarrow{OA_1} = \lambda\overrightarrow{HA}$ i $\overrightarrow{OB_1} = \mu\overrightarrow{HB}$ (2), jer je $OA_1 \parallel AH$ i $OB_1 \parallel BH$, sl. 179. Pošto je A_1B_1 srednja linija trougla ABC, biće $\overrightarrow{A_1B_1} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ (3). Iz (2) i (3) dobijamo $-\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{HB} - \overrightarrow{HA}) = \mu\overrightarrow{HB} - \lambda\overrightarrow{HA}$, pa je $\lambda = \mu = -\dfrac{1}{2}$. Najzad, zbog (1) imamo $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{OH}$.



Sl. 179



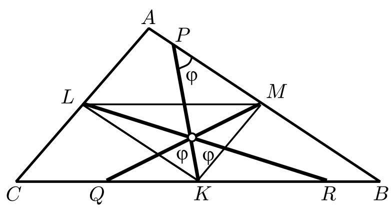
Sl. 180

834. Izaberimo proizvoljnu tačku M i vektore $\overrightarrow{MA_1}, \overrightarrow{MA_2}, \dots, \overrightarrow{MA_6}$ označimo redom sa $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_6$. Tada je, na osnovu **zadatka 823**, $\overrightarrow{MT_1} = \dfrac{\vec{a}_6 + \vec{a}_1 + \vec{a}_2}{3}$, $\overrightarrow{MT_2} = \dfrac{\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3}{3}, \cdots,$

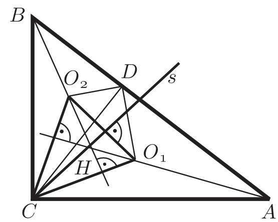
$\overrightarrow{MT_6} = \dfrac{\vec{a_5}+\vec{a_6}+\vec{a_1}}{3}$. Odredimo dve suprotne stranice, recimo $\overrightarrow{T_1T_2}$ i $\overrightarrow{T_4T_5}$ šestougla $T_1T_2T_3T_4T_5T_6$. Dobijamo $\overrightarrow{T_1T_2} = \overrightarrow{MT_2} - \overrightarrow{MT_1} = \dfrac{\vec{a_1}+\vec{a_2}+\vec{a_3}}{3} - \dfrac{\vec{a_6}+\vec{a_1}+\vec{a_2}}{3} = \dfrac{\vec{a_3}-\vec{a_6}}{3}$ i $\overrightarrow{T_4T_5} = \overrightarrow{MT_5} - \overrightarrow{MT_4} = \dfrac{\vec{a_4}+\vec{a_5}+\vec{a_6}}{3} - \dfrac{\vec{a_3}+\vec{a_4}+\vec{a_5}}{3} = \dfrac{\vec{a_6}-\vec{a_3}}{3}$, tj. $\overrightarrow{T_1T_2} = -\overrightarrow{T_4T_5}$, pa je $T_1T_2 \parallel T_4T_5$. Na isti način dokazujemo tvrđenje za ostale naspramne stranice.

835. Neka su u trouglu ABC težišne linije AA_1, BB_1, CC_1, težište T i neka je $AC < BC$, sl. 180. Treba dokazati da je $BB_1 > AA_1$. Posmatrajmo trouglove AC_1C i BC_1C kojima je stranica CC_1 zajednička, stranice AC_1 i C_1B jednake i $BC > AC$. Zaključujemo da je $\sphericalangle AC_1C < \sphericalangle BC_1C$. U trouglovima AC_1T i BC_1T je stranica TC_1 zajednička, stranice AC_1 i C_1B jednake i $\sphericalangle AC_1T < \sphericalangle BCT$, pa će za stranice naspram tih uglova važiti $AT < BT$. Pošto je $AT = \frac{2}{3}AA_1$ i $BT = \frac{2}{3}BB_1$, biće $AA_1 < BB_1$ što je i trebalo dokazati.

836. Neka je $BC \geq AB \geq CA$. Iz $PB = \dfrac{AB+AC}{2} = \dfrac{AB}{2} + \dfrac{AC}{2} = MB + \dfrac{AC}{2}$, sl. 181. Sledi da je $PM = \dfrac{AC}{2}$. Sem toga je i $MK = \dfrac{AC}{2}$, pa je $PM = MK$, zbog čega je $\sphericalangle PKM = \sphericalangle MPK = \varphi$. Kako je $\sphericalangle MPK = \sphericalangle LKP = \varphi$ (uglovi sa paralelnim kracima), biće $\sphericalangle LKP = \sphericalangle MKP$. Sledi da je KP simetrala ugla LKM. Slično se dokazuje da su MQ i LR simetrale uglova LMK i KLM trougla MLK, iz čega sledi da se sve te prave seku u jednoj tački.



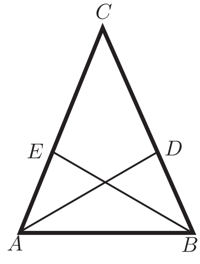
Sl. 181



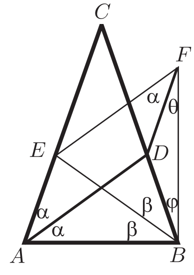
Sl. 182

837. Pošto su simetrale dvaju oštrih uglova sa međusobno normalnim kracima međusobno normalne, to je BO_2 kao simetrala ugla CBA normalna na simetralu CO_1 ugla ACD i AO_1, kao simetrala ugla CAB normalna na simetralu CO_2 ugla DCB, sl. 182. Presek simetrala uglova trougla ABC ($AO_1 \cap BO_2 = \{H\}$) je ortocentar trougla CO_1O_2, odakle sledi da je $CH \perp O_1O_2$.

838. 1° Treba dokazati: iz $\alpha = \beta$ sledi da je $AD = BE$, sl. 183. Trouglovi ABE i ABD su podudarni ($AB = AB$, $\alpha = \beta$, $\frac{\alpha}{2} = \frac{\beta}{2}$), pa je $AD = BE$.



Sl. 183



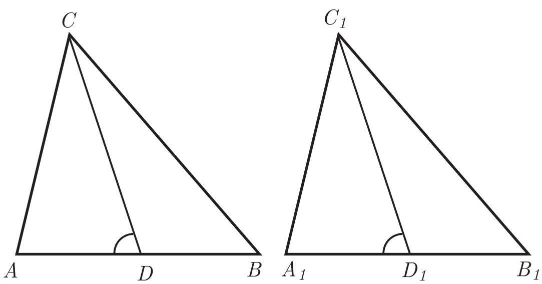
Sl. 184

2° Označimo uglove: $\sphericalangle CAB = 2\alpha$, $\sphericalangle CBA = 2\beta$. Neka su AD i BE simetrale ovih uglova. Treba dokazati: ako je $AD = BE$, onda je $AC = BC$. Koristićemo zakone kontrapozicije i trihotomije.

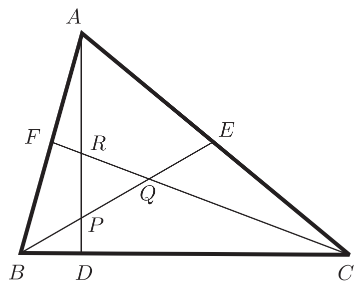
Pretpostavimo da je $AC < BC$. Tada je $2\alpha > 2\beta$, odnosno $\alpha > \beta$. Pošto trouglovi ABD i ABE imaju jednake stranice koje zahvataju uglove α i β, to je $BD > AE$. Neka je F tačka takva da je $EF \parallel AD$ i $DF \parallel AE$, sl. 184. Lako se dokazuje podudarnost trouglova ADE i DEF, pa je $EF = AD$, $DF = AE$ i $\sphericalangle DFE = \alpha$. Trougao BEF je jednakokraki ($EF = AD = BE$), pa je $\sphericalangle EFB = \sphericalangle BFE$, odnosno, prema slici 184, $\alpha + \theta = \beta + \varphi$. Odavde je $\alpha - \beta = \varphi - \theta$, pa je $\varphi > \theta$ (zbog $\alpha > \beta$). Tada zaključujemo da u trouglu BDF važi $DF > BD$. Kako je $DF = EA$, izlazi $EA > BD$. Međutim, ranije smo već utvrdili da je $BD > EA$, pa dolazimo do protivrečnosti. Dakle, nije $AC < BC$. Slično zaključujemo da nije ni $AC > BC$, pa ostaje jedino $AC = BC$.

839. Dovoljno je dokazati da je $\sphericalangle ADC = \sphericalangle A_1D_1C_1$ jer posle lako dobijamo da je $\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1$. Ako je $\sphericalangle ADC > \sphericalangle A_1D_1C_1$, onda primenom poznate teoreme na trouglove ADC i $A_1D_1C_1$ za koje je $AD = A_1D_1$ i $CD = C_1D_1$, dobijamo $CA > C_1A_1$ (1), sl. 185. Kako je $\sphericalangle ADC > \sphericalangle A_1D_1C_1$, to je $\sphericalangle BDC < \sphericalangle B_1D_1C_1$, pa primenom iste teoreme na trouglove DBC i $D_1B_1C_1$ dobijamo $CB < C_1B_1$ (2). Iz (1) i (2) dobijamo $CB - CA < C_1B_1 - C_1A_1$, što se protivi pretpostavci zadatka.

Slično se isključuje mogućnost $\sphericalangle ADC < \sphericalangle A_1D_1C_1$. Time je tvrđenje dokazano.



Sl. 185



Sl. 186

840. Neka je AD visina, BE simetrala ugla kod B, a CF težišna linija trougla ABC i neka su P, Q i R njihove presečne tačke, sl. 186. Pretpostavimo suprotno tvrđenju zadatka, da je $\triangle PQR$ jednakostranični. Tada je $\sphericalangle BPD = 60°$, pa je $\sphericalangle PBD = \sphericalangle ABP = 30°$. S druge strane, $\sphericalangle FQB = 60°$, pa je $\sphericalangle CFB = 90°$, tj. težišna linija CF je ujedno i visina trougla ABC. Dakle, $\triangle ABC$ je jednakokraki, a kako je $\sphericalangle ABC = 2 \cdot \sphericalangle PBD = 60°$, to je on jednakostranični. Sledi da je $P = Q = R$, suprotno pretpostavci da te tačke obrazuju trougao.

841. Uglovi na jednoj stranici paralelograma su suplementni. Stoga je $\alpha + \beta = 180°$, $\beta + \gamma = 180°$, odakle je $\alpha = \gamma$.

a) Dva ugla su po $62°17'$ i dva po $117°43'$.

b) Iz $\alpha + 3\alpha = 180°$ sledi da je $\alpha = 45°$. Drugi ugao je $135°$.

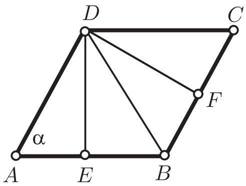
c) Iz $\alpha - \beta = 15°23'$ i $\alpha + \beta = 180°$ dobijamo $\alpha = 97°41'30''$ i $\beta = 82°18'30''$.

842. Tačni iskazi su a), b) i d).

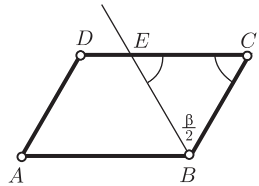
843. Iz $AE = EB$, $DE = DE$ i $\sphericalangle AED = \sphericalangle BED = 90°$ sledi da su trouglovi AED i BED podudarni, pa $AD = BD = AB$, tj. trougao ABD je jednakostranični, sl. 187. Stoga je $\alpha = 60°$ i $\beta = 120°$. Četvorougao $BFDE$ ima dva prava ugla i $\beta = 120°$, pa $\sphericalangle EDF = 60°$.

844. Nije teško uveriti se da se radi o simetrali tupog ugla. Tada iz trougla BCE, sl. 188 dobijamo relaciju $2\alpha + \dfrac{\beta}{2} = 180°$. Uzimajući u obzir činjenicu da $\alpha + \beta = 180°$, dobijamo traženi ugao $\alpha = 60°$.

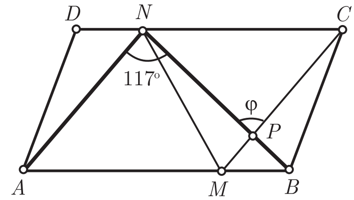
845. Na osnovu uslova $BM = DN$, zaključujemo da je i $AM = CN$, sl. 189. Zbog toga je četvorougao $AMCN$ paralelogram, pa je $CM \parallel AN$. Traženi ugao φ je naizmeničan sa uglom ANB, pa je $\varphi = \sphericalangle ANB = 117°$.



Sl. 187



Sl. 188



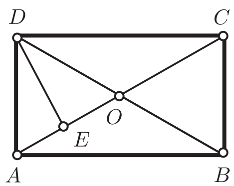
Sl. 189

846. 72° i 108°.

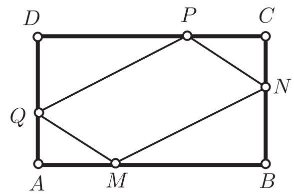
847. Dijagonale se polove, pa $AE = EO$. Sledi da su pravougli trouglovi ADE i ODE podudarni, pa je $AD = DO$. Kako je već $DO = AO$, sledi da je trougao AOD jednakostranični i $\sphericalangle AOD = 60^\circ$, sl. 190.

848. Prvo se dokaže da je četvorougao paralelogram, pa da su mu uglovi na jednoj stranici jednaki.

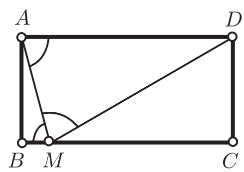
849. Iz podudarnosti pravouglih trouglova AMQ i CPN sledi da je $MQ = NP$. Na sličan način je $MN = PQ$, pa je četvorougao $MNPQ$ paralelogram, sl. 191.



Sl. 190



Sl. 191



Sl. 192

850. Nije teško dokazati da su pravougli trouglovi ABS i AB_1S podudarni, gde je S središte duži BB_1. Otuda sledi da je $\sphericalangle B_1AS = \sphericalangle BAS$. Osim toga je $\sphericalangle BAS = \sphericalangle ACE$ (naizmenični), pa je $\sphericalangle B_1AS = \sphericalangle ACE$ i trougao ACE je jednakokraki.

851. Uglovi BMA i MAD su jednaki, jer su naizmenični, sl. 192. Sledi da je $\sphericalangle AMD = \sphericalangle DAM$, pa je trougao ADM jednakokraki i $DM = AD$. Samim tim $MD = 2CD$, pa je pravougli trougao CDM polovina jednakostraničnog trougla. Odavde sledi da je $\sphericalangle CMD = 30^\circ$. Prema tome, $\sphericalangle AMB = \sphericalangle AMD = 75^\circ$.

852. Neka je ABC dati trougao i neka je $AB = BC = AC = \dfrac{a}{2}$.

1° Ako je tačka M teme datog trougla, recimo $M = A$, onda je zbir navedenih preseka $AB + AC = a$.

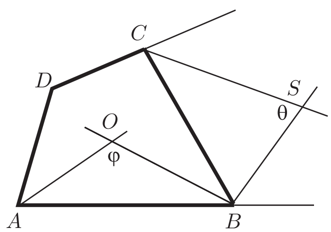
2° Ako je tačka M na nekoj stranici, recimo $M \in AC$, onda je $r = AC$, $p \cap BC = \{P\}$ i $q \cap AB = \{Q\}$ i pri tome su trouglovi AMQ i CMP jednakostranični, a četvorougao $BPMQ$ je paralelogram, pa je zbir preseka pravih p, q i r sa trougaonom površi $MP + MQ + AC = CP + BP + AC = BC + AC = a$.

3° Ako tačka M ne pripada ni jednoj stranici trougla, tada je $p \cap ABC = PP_1$, $q \cap ABC = QQ_1$ i $r \cap ABC = RR_1$ i pri tome dobijamo tri jednakostranična trougla i tri paralelograma. Kao u prethodnom slučaju dobijamo $PP_1 + QQ_1 + RR_1 = PM + MP_1 + QM + MQ_1 + RM + MR_1 = PR_1 + P_1Q + CR_1 + PB + CQ + P_1A = BC + AC = a$.

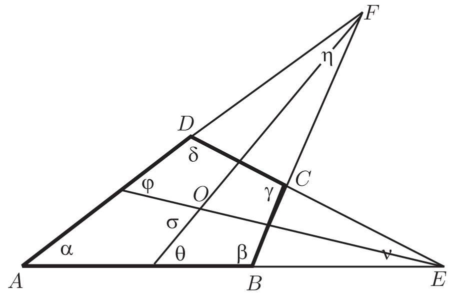
853. Neka su $AM = BN$ težišne linije. Duž MN je srednja linija trougla i $MN \parallel AB$. Neka je D tačka iza B u odnosu na A takva da je $BD = MN$. Tada je četvorougao $BDMN$ paralelogram, pa je $DM \# BN$, znači i $DM = AM$. Dakle, trougao ADM je jednakokraki, pa je $\sphericalangle MAB = \sphericalangle MDA$. Međutim, $\sphericalangle MDA = \sphericalangle NBA$ (saglasni), pa je $\sphericalangle MAB = \sphericalangle NBA$. Kako je $AB = AB$ i $AM = BN$, sledi da su trouglovi ABN i BAM podudarni, pa je $AN = BM$, odnosno $AC = BC$.

854. a) i b) Neka je Q podnožje normale iz P na pravu AD. Četvorougao $NPQD$ je pravougaonik, pa je $NP = DQ$. Treba dokazati još da je $PM = AQ$. To sledi iz podudarnosti pravouglih trouglova PAQ i APM (zajednička stranica AP, jedan ugao prav i jedan ugao jednak uglu na osnovici datog jednakokrakog trougla). Prema tome da li je tačka Q između A i D, ili je tačka Q na produžetku duži AD, dobijamo da je $AD = PM + PN$, ili $AD = PM - PN$, odnosno $AD = PN - PM$.

855. Neka je φ ugao između simetrala uglova α i β, sl. 193. Iz trougla ABO izračunamo: $\varphi = 180° - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} = \frac{1}{2}(360° - \alpha - \beta) = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma + \delta - \alpha - \beta) = \frac{1}{2}(\gamma + \delta)$. Neka su, dalje, BS i CS simetrale spoljašnjih uglova β_1 i γ_1. Tada je $\theta = 180° - \frac{1}{2}(\beta_1 + \gamma_1) = 180° - \frac{1}{2}(180° - \beta + 180° - \gamma) = \frac{1}{2}(\beta + \gamma)$.



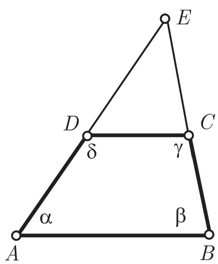
Sl. 193



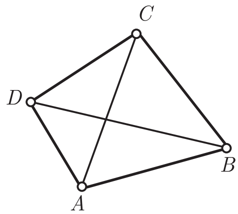
Sl. 194

856. Prema slici 194 izračunavamo: $\sigma = \theta + \frac{\nu}{2} = \alpha + \frac{\eta}{2} + \frac{\nu}{2}$ (koristimo osobine spoljašnjih uglova u trouglu). Zatim iz trouglova ABF i ADE izračunamo $\frac{\eta}{2}$ i $\frac{\nu}{2}$: $\frac{\eta}{2} = 90° - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}$ i $\frac{\nu}{2} = 90° - \frac{\alpha}{2} - \frac{\delta}{2}$. Prema tome, $\sigma = \alpha + 90° - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} + 90° - \frac{\alpha}{2} - \frac{\delta}{2} = 180° - \frac{\beta}{2} - \frac{\delta}{2} = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma + \delta) - \frac{\beta}{2} - \frac{\delta}{2} = \frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2}$.

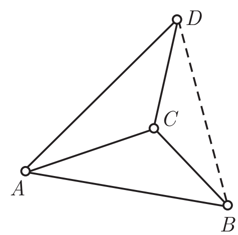
857. Neka su α i β uglovi na većoj osnovici i neka se produžeci krakova seku u tački E, sl. 195. Imamo sledeće jednakosti: $\sphericalangle CDE = \alpha$ i $\sphericalangle DCE = \beta$ (saglasni uglovi). U trouglu CDE ugao γ je spoljašnji i stoga $\gamma > \sphericalangle CDE$, odnosno $\gamma > \alpha$. Na isti način $\delta > \beta$. Sabiranjem ovih nejednakosti dobijamo $\gamma + \delta > \alpha + \beta$.



Sl. 195



Sl. 196



Sl. 197

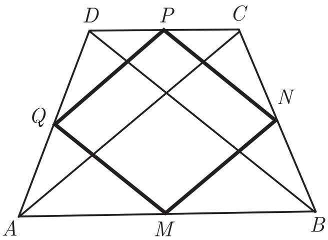
858. Ako su A, B, C kolinearne tačke, tada ne postoji trougao ABC. Neka je, recimo, $A - B - C$. Tada su uglovi ABD i CBD naporedni, pa makar jedan od njih nije oštar.

Ako su A, B, C, D temena jednog četvorougla onda možemo imati ili konveksan četvorougao, sl. 196 ili nekonveksan, sl. 197.

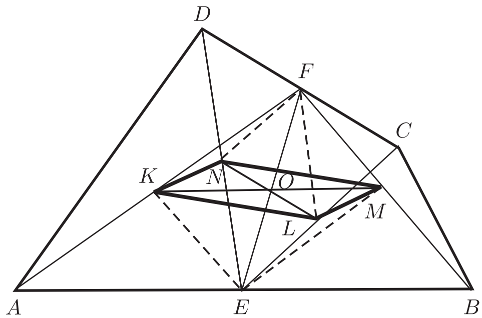
Ako je $ABCD$ konveksan četvorougao, tada uglovi tog četvorougla predstavljaju po jedan od uglova navedenih trouglova. Međutim, kako je $\alpha+\beta+\gamma+\delta=360°$, to bar jedan od ovih uglova mora biti veći ili jednak uglu od $90°$.

Ako je $ABCD$ nekonveksan četvorougao i ako je npr. C teme nekonveksnog ugla, tada bar jedan od uglova ACB, BCD, DCA mora biti veći ili jednak uglu od $120°$.

859. Poznato je da su dijagonale jednakokrakog trapeza jednake među sobom. Neka je $ABCD$ jednakokraki trapez i M, N, P, Q redom središta stranica AB, BC, CD, DA, sl. 198. U trouglu ABC duž MN je srednja linija, pa je $MN=\frac{1}{2}AC$. Slično se dokazuje da je $PQ=\frac{1}{2}AC$, zatim, da je $NP=\frac{1}{2}BD=MQ$. Otuda zaključujemo da je $MNPQ$ romb. Ako je $ABCD$ proizvoljan četvorougao, na sličan način se dokazuje da je $MNPQ$ paralelogram.



Sl. 198

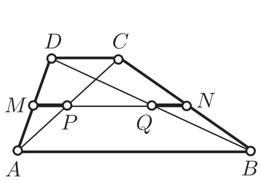


Sl. 199

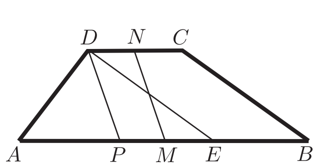
860. Neka su K, L, M, N središta navedenih duži, sl. 199. Dokazaćemo da se dijagonale KN i LN četvorougla $KLMN$ polove.

U trouglu CDE tačke L, N, F su središta stranica, pa je četvorougao $ELFN$ paralelogram i njegove dijagonale LN i EF se polove. Slično se dokazuje i da je četvorougao $EMFK$ paralelogram, pa mu se dijagonale KM i EF polove. Prema tome, tačka O je zajedničko središte duži LN i KM, pa se ove duži polove i $KLMN$ je paralelogram.

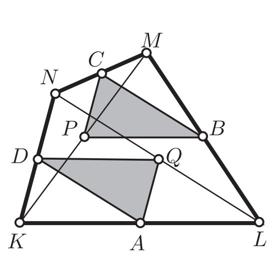
861. U trouglu ACD duž MP je srednja linija i $MP=\frac{1}{2}CD$. Iz trougla BCD dobijamo na isti način $NQ=\frac{1}{2}CD$, sl. 200. Po uslovu je $PQ=MP+NQ$. Sledi da je $MN=2CD$. Iz teoreme o srednjoj liniji trapeza dobijamo $AB+CD=2MN$, pa imamo $AB+CD=4CD$ odakle izlazi $AB=3CD$.



Sl. 200



Sl. 201

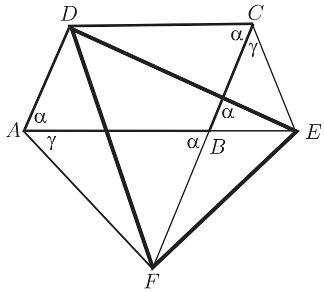


Sl. 202

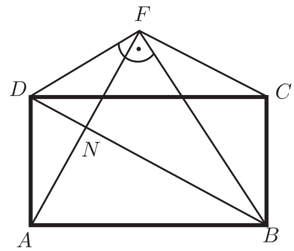
862. Neka su M i N središta osnovica AB i CD i $AB>CD$, sl. 201. Na osnovici AB odredimo tačke E i P, tako da su četvorouglovi $BCDE$ i $DPMN$ paralelogrami. Tada je $BE=CD$, pa je $AE = AB - CD$. Takođe je $PM = DN = \frac{1}{2}CD$, pa je $AP = AM - PM = \frac{1}{2}AB - \frac{1}{2}CD$. Kako je $AE = AB - CD$, to je $PE = AE - AP = \frac{1}{2}(AB - CD)$, upravo koliko i $MN = DP$. Konačno je $AP = PE = DP$, što znači da je P centar kruga opisanog oko trougla AED, pa je $\sphericalangle ADE = 90°$ (nad prečnikom). Dakle, $\sphericalangle BAD + \sphericalangle AED = 90°$, a $\sphericalangle AED = \sphericalangle ABC$ (sa paralelnim kracima).

863. Neka je $KLMN$ dati četvorougao. U trouglu KLN duž DQ je srednja linija pa $DQ = \frac{1}{2}KL$, sl. 202. U trouglu KLM je BP srednja linija, pa je $BP = \frac{1}{2}KL$. Sledi da je $DQ = BP$. Na sličan način sledi $AQ = CP$ i $AD = BC$. Prema tome, $\triangle DAQ \cong \triangle BCP$ (po stavu SSS). Slično se dokazuje da je $\triangle DAP \cong \triangle BCQ$.

864. Na osnovu osobina paralelograma i jednakokrakih trouglova imamo jednakosti $\sphericalangle BAD = \sphericalangle DCB = \sphericalangle CBE = \sphericalangle ABF = \alpha$, sl. 203 i i $\sphericalangle AFB = \sphericalangle BEC = \alpha$. Dalje je $\sphericalangle ECD = \alpha + \gamma = \sphericalangle DAF$ i $AF = AB = DC$ i $AD = BC = CE$, pa je trougao AFD podudaran trouglu CDE. Zbog toga je $DE = DF$.



Sl. 203

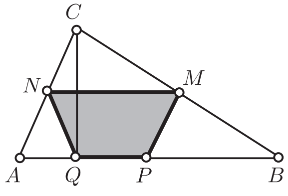


Sl. 204

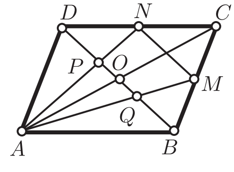
865. a) Nije teško dokazati da su pravougli trouglovi ABN i FBN podudarni među sobom, kao i AND sa FND. Otuda sledi da je trougao BFD podudaran sa pravouglim trouglom BAD, sl. 204. Zbog toga je ugao BFD prav, tj. duž BF je normalna na duž DF.

b) Dijagonala BD deli pravougaonik $ABCD$ na dva podudarna trougla ABD i CDB. Kako je trougao FBD podudaran trouglu ABD, sledi da su među sobom podudarni trouglovi DFB i BCD. Otuda je $DF = BC$ i $BF = CD$, a $\sphericalangle BDF = \sphericalangle CBD$. Sada sledi da su podudarni i trouglovi CDF i FBC (imaju jednake sve odgovarajuće stranice), pa je i $\sphericalangle CFD = \sphericalangle BCF$. Zbog jednakosti uglova kod temena B i D, kao i kod temena C i F, sledi da je u četvorouglu $BCFD$ zbir uglova kod B i C jednak $180°$. Dakle, prave BD i CF su paralelne. Otuda izlazi da je $BCFD$ trapez, i to jednakokraki, jer je $BC = DF$.

866. Duž MN je srednja linija trougla ABC, pa je $MN \parallel PQ$. Iz istih razloga je $MP \parallel AC$, pa nije $NQ \parallel MP$, sl. 205. Sledi da je četvorougao $MNQP$ trapez. Dokažimo još da je $MP \parallel NQ$. Zaista, $MP = \frac{1}{2}AC$ kao srednja linija trougla, a $NQ = \frac{1}{2}AC$ kao težišna linija koja odgovara hipotenuzi pravouglog trougla ACQ. Otuda $MP = NQ$.



Sl. 205



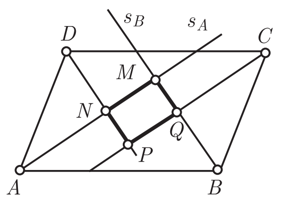
Sl. 206

867. Dijagonale AC i BD se polove. Stoga u trouglu ABC su AM i BO težišne linije, sl. 206, a tačka Q je težište. Na osnovu osobina težišnih linija zaključujemo da je $BQ = 2OQ$, odnosno, kako je BO polovina dijagonale DB, dobijamo $BQ = \frac{1}{3}BD$. Slično, iz trougla ACD dobijamo $DP = \frac{1}{3}BD$. Preostaje zaključak da je duž PQ takođe $\frac{1}{3}BD$.

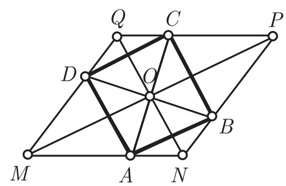
868. Rasuđujući kao u prethodnom zadatku, uočavajući težišta trouglova ABD i BCD, dolazimo do traženog zaključka.

869. Neka su temena K, L, M, N paralelograma redom na stranicama AB, BC, CD, DA paralelograma $ABCD$. Na osnovu podudarnosti trouglova AKN i MCL (po uslovu je NK paralelno i jednako sa LM itd.), zaključujemo da je $AK = CM$ i $AN = CL$, pa su četvorouglovi $AKCM$ i $ALCN$ paralelogrami i dijagonale im se polove, a zajedničko središte je središte O dijagonale AC.

870. Uočimo simetrale s_A i s_B uglova α i β, sl. 207. U trouglu ABM je zbir unutrašnjih uglova $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \sphericalangle AMB = 180°$, odnosno $\sphericalangle AMB = 180° - \frac{\alpha+\beta}{2}$. Kako su α i β suplementni uglovi, to $\frac{\alpha+\beta}{2} = 90°$, pa je $\sphericalangle AMB = 90°$. Na isti način se dokazuje da su i ostali uglovi četvorougla $MNPQ$ pravi.



Sl. 207



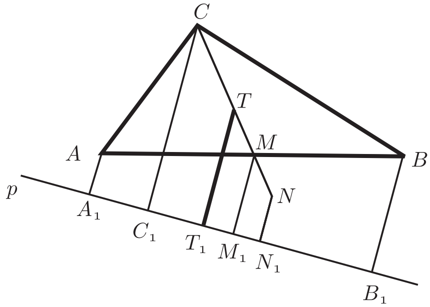
Sl. 208

871. Slično prethodnom zadatku. Dijagonale sa stranicama obrazuju četiri jednakokraka pravougla trougla, od kojih su po dva podudarna, pa se može dokazati da su stranice dobijenog četvorougla jednake među sobom. Ovo važi i za simetrale spoljašnjih uglova.

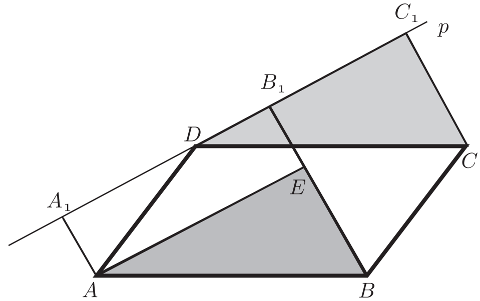
872. Dobijeni četvorougao je pravougaonik kome su stranice jednake dijagonalama romba.

873. Duži AC i BD normalne su jedna na drugoj. Iz podudarnosti trouglova ANO i BNO sledi da su duži AO i BO jednake. Tako dobijamo da je $OA = OB = OC = OD$. Dakle, četvorougao $ABCD$ ima jednake dijagonale koje se polove pod pravim uglom, pa zaključujemo da je on kvadrat, sl. 208.

874. Slično **zadatku 849**.



Sl. 209

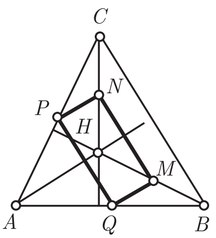


Sl. 210

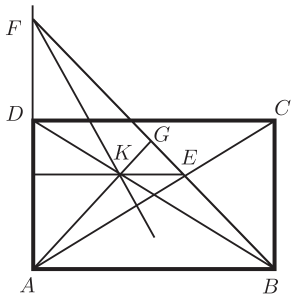
875. Neka je CM težišna linija, N tačka na produžetku težišne linije takva da je M središte duži TN, sl. 209, i neka su M_1 i N_1 podnožja normala iz M i N na p. Koristeći osobinu trapeza da je srednja linija jednaka poluzbiru osnovica, dobijamo (zbog $CT = \frac{2}{3}CM = TN$): $CC_1 + NN_1 = 2TT_1$. Ako na obe strane jednakosti dodamo TT_1, dobićemo $CC_1 + TT_1 + NN_1 = 3TT_1$. U trapezu TT_1N_1N srednja linija je MM_1, pa je $TT_1 + NN_1 = 2MM_1$, a kako je MM_1 istovremeno i srednja linija trapeza AA_1B_1B, to je $2MM_1 = AA_1 + BB_1$. Tako dobijamo traženu jednakost.

876. Neka je $A_1 - B_1 - C_1$. Konstruišimo tačku E na duži BB_1 takvu da je $AE \parallel A_1B_1$, sl. 210. Četvorougao AA_1B_1E je pravougaonik, pa je $B_1E = AA_1$, a trouglovi ABE i DCC_1 su podudarni, pa je $BE = CC_1$. Slično se dokazuje slučaj kad prava p seče stranicu AB ili BC. U tom slučaju imamo razliku duži AA_1 i CC_1.

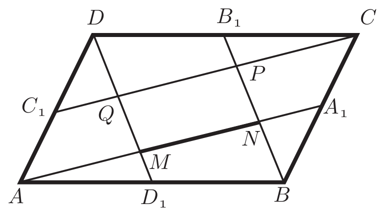
877. Duži MN i PQ su srednje linije trouglova BCH i BCA, sl. 211, pa su obe paralelne i jednake polovini stranice BC. Slično, duži MQ i NP su paralelne i podudarne duži AH. Dakle, četvorougao $MNPQ$ je paralelogram. Međutim, iz $BC \perp AH$ sledi $MN \perp NP$, pa je $MNPQ$ pravougaonik.



Sl. 211



Sl. 212



Sl. 213

878. Neka su E_1 i L_1 podnožja normala iz E na CD i iz L na BC. Nije teško dokazati da su trouglovi KEE_1 i FLL_1 podudarni.

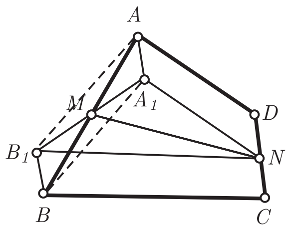
879. Neka je G presek pravih AK i BE. Trouglovi ABE i BAK su podudarni, pa je $\sphericalangle KAB = \sphericalangle EBA = 45°$. Zbog toga je $\sphericalangle AGB = 90°$, pa je $AG \perp EF$. U trouglu AEF tačka K je ortocentar, pa je i $FK \perp AC$, sl. 212.

880. Slično prethodnom zadatku. Uočimo ortocentar H trougla BCS. Lako se dokazuje da je četvorougao $CMSH$ paralelogram. (SH je srednja linija trougla ABN, pa je $SH \parallel AB$ i $SH = \frac{1}{2}AB = CM$.) Otuda je $MS \parallel CH$, odnosno $MS \perp SB$.

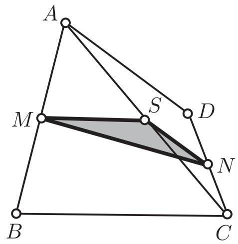
881. Kao u **zadatku 851** dokažemo da je trougao CDK jednakokraki sa osnovicom DK. Tačka M je središte osnovice, pa je $CM \perp DK$. Po uslovu je i $KN \perp CD$, pa je tačka N ortocentar trougla CDK. Dakle, DN je treća visina ovog trougla, pa je $DN \perp CK$.

882. Označimo sa P presek pravih CC_1 i BB_1 i sa Q presek pravih DD_1 i CC_1 Pošto je MD_1 srednja linija trougla ABN, a NA_1 srednja linija trougla PCB, sl. 213, biće $AM = \frac{1}{2}AN$ i $NA_1 = \frac{1}{2}CP$. Kako su trouglovi AMD_1 i CPB_1 podudarni, imamo $NA_1 = \frac{1}{4}AN$. Tako dobijamo da je $MN = \frac{2}{5}AA_1$.

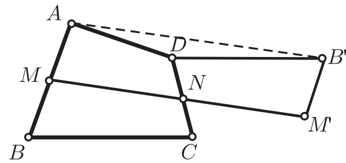
883. *I Način.* Neka su A_1 i B_1 takve tačke da su četvorouglovi AA_1ND i BB_1NC paralelogrami, sl. 214. Tada $AA_1 \parallel DN$ i $AA_1 = DN$, a $BB_1 \parallel CN$ i $BB_1 = CN$. Pošto je $DN = CN$ sledi da je četvorougao AA_1BB_1 paralelogram i duži AB i A_1B_1 polove jedna drugu. Dakle, $M \in A_1B_1$ i M je središte duži A_1B_1. Tada je $MN \leq \frac{1}{2}(A_1N + B_1N)$. Međutim, $A_1N = AD$, a $B_1M = BC$, pa je $MN \leq \frac{1}{2}(AD + BC)$.



Sl. 214



Sl. 215



Sl. 216

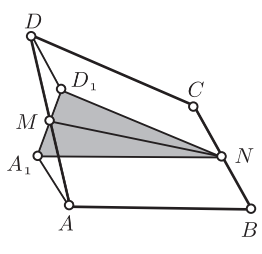
II način. Neka je S središte dijagonale AC. U trouglu MNS je $MN \leq SN + SM$. Duž SN je srednja linija trougla ACD, pa je $SN = \dfrac{1}{2}AD$. Na isti način $SM = \dfrac{1}{2}BC$, pa dobijamo $MN \leq \dfrac{1}{2}(AD + BC)$, sl. 215.

884. Neka je M' tačka prave MN takva da je N središte duži MM'. Tačka B' na slici 216 izabrana je tako da je četvorougao $DNM'B'$ podudaran četvorouglu $CNMB$. Iz $\sphericalangle NM'B' = \sphericalangle NMB$ sledi da je duž $M'B'$ paralelna sa AB, a pošto je tačka M središte duži AB i $M'B' = BM$, sledi $M'B' = AM$. Dakle, četvorougao $AMM'B'$ je paralelogram i $AB' = MM'$. Iz $B'D = BC$, sledi $AD + DB' = 2MM'$, odnosno $AD + DB' = AB'$, što je moguće samo ako $D \in AB'$, tj. ako je $BC \parallel AD$. Prema tome, četvorougao $ABCD$ je trapez.

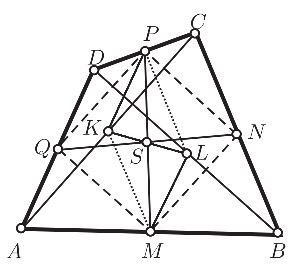
885. Sledi na osnovu prethodnog zadatka.

886. Neka MP seče NQ u tački O i neka je tačka S središte dijagonale AC. Dokazaćemo da je $S = O$. Imamo nejednakosti $MS + SP \geq MP$ i $NS + SQ \geq NQ$, gde znak $=$ važi samo ako je $S \in MP$ i $S \in NQ$, odnosno ako je $S = O$. Sabiranjem ovih nejednakosti dobijamo $MS + SP + NS + SP \geq MP + NQ$, odnosno $2MS + 2SP + 2NS + 2SQ \geq 2MR + 2NQ$. Kako su duži na levoj strani nejednakosti srednje linije trouglova ABC i ACD, to je $2MS = BC$, $2SP = AD$, $2NS = AB$, $2SQ = CD$, pa je $AB + BC + CD + DA \geq 2MP + NQ$. Znak $>$ otpada, jer je po datom uslovu $AB + BC + CD + DA = 2MP + 2NQ$, pa je $S = O$. Na isti način dokažemo da je tačka O središte dijagonale BD, pa kako se dijagonale polove, četvorougao $ABCD$ je paralelogram.

887. Neka su A_1 i D_1 takve tačke da su četvorouglovi $ABNA_1$ i CDD_1N paralelogrami, sl. 217. (Videti rešenje **zadatka 883**, I način.) Tada je $A_1N = AB$ i $D_1N = DC$, pa sledi da je $A_1N = D_1N$, tj. trougao A_1D_1N je jednakokraki. Duž MN polovi osnovicu A_1D_1 i ugao A_1ND_1 tj. $\sphericalangle A_1NM = \sphericalangle D_1NM$. Kako su ovo uglovi koje prava NM zahvata sa pravim AB i CD, to je tvrđenje dokazano.



Sl. 217

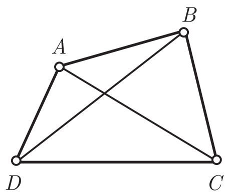


Sl. 218

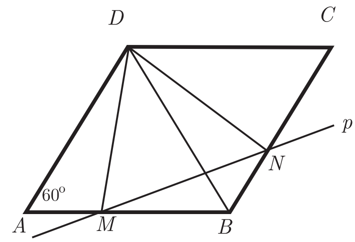
888. Slično **zadatku 859** dokazuje se da je četvorougao $MNPQ$ paralelogram. Otuda sledi da se duži MP i NQ polove. Neka je S njihova zajednička tačka. Duž KP je srednja linija trougla ACD, pa je KP paralelna i jednaka polovini duži AD, sl. 218. Iz istih razloga u trouglu ABD je duž LM paralelna i jednaka polovini duži AD. Sledi da je četvorougao $LMKP$ paralelogram, pa mu se dijagonale MP i KL polove. Dakle, tačka S je zajedničko središte duži MP, NQ i KL.

889. Slično **zadatku 887**.

890. Pretpostavimo da je $AB \geq AC$ (1). Tada je u trouglu ABC naspram veće stranice veći ugao, tj. $\sphericalangle BCA \geq \sphericalangle ABC$. Pošto je dati četvorougao konveksan, to je $\sphericalangle BCD > \sphericalangle BCA$, pa iz prethodne nejednakosti izlazi da $\sphericalangle BCD > \sphericalangle ABC$. Međutim, $\sphericalangle ABC > \sphericalangle DBC$, pa sledi da $\sphericalangle BCD > \sphericalangle DBC$. Odavde zaključujemo da je u trouglu BCD ispunjen uslov: $BD > CD$ (2). Sabirajući nejednakosti (1) i (2) dobijamo $AB + BD > AC + CD$, što je suprotno datom uslovu. Dakle, ne može biti $AB \geq AC$, pa je $AB < AC$, sl. 219.



Sl. 219



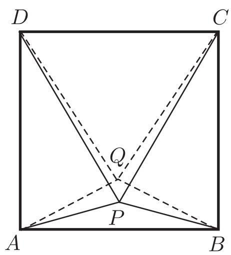
Sl. 220

891. Koristiti osobine srednjih linija trougla i osobine paralelograma.

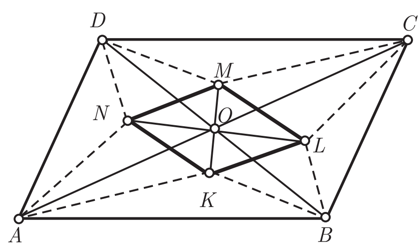
892. Iz $KL = MN = MQ$, $LM = MP$ i $\sphericalangle PMQ = 30° + 60° = 90° \Rightarrow \sphericalangle PMQ = \sphericalangle KLM$, sledi da je $\triangle KLM \cong \triangle QMP$. Odatle je $KM = PQ$.

893. Trouglovi ABD i BCD su jednakostranični, pa je $\sphericalangle DBC = \sphericalangle DAB$ i $BD = AD$, sl. 220. Iz $MB + BN = AB$ i $MB + AM = AB$ sledi da je $BN = AM$, pa su podudarni trouglovi BND i AMD. Prema tome, $DM = DN$ i $\sphericalangle ADM = \sphericalangle BDN$. Dalje je $\sphericalangle MDN = \sphericalangle MDB + \sphericalangle DBN = \sphericalangle MDB + \sphericalangle DAM = \sphericalangle DAB = 60°$, pa je trougao MND jednakostranični.

894. Neka je Q teme jednakostraničnog trougla CDQ, sl. 221. Tada je trougao AQD jednakokraki ($AD = DQ$), sa uglom $\sphericalangle ADQ = 30°$. Izračunavanjem dobijamo da je $\sphericalangle DAQ = 75°$, pa je $\sphericalangle BAQ = 15° = \sphericalangle BAP$. Otuda izlazi da $Q \in AP$. Slično dokazujemo i da $Q \in BP$, tj. da $Q = P$.



Sl. 221



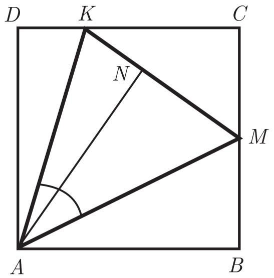
Sl. 222

895. Neka su K, L, M i N redom centri upisanih krugova koji se dobijaju u presecima simetrala unutrašnjih uglova pomenutih trouglova, sl. 222. Trouglovi ABK i CDM podudarni su ($AB = CD$, $\sphericalangle BAK = \sphericalangle MCD$, kao polovine naizmeničnih uglova, i na isti način $\sphericalangle ABK = \sphericalangle CDM$). Sledi da je $BK = DM$. Na isti način dokažemo da je $BL = DN$, pa kako je $\sphericalangle KBL = \sphericalangle MDN$ (zbirovi jednakih uglova), to su podudarni i trouglovi BKL i DMN, pa je $KL = MN$. Slično je $KN = ML$, pa je četvorougao $KLMN$ paralelogram. Kako su OK i OL simetrale uglova AOB i BOC (naporedni uglovi), to je $\sphericalangle KOL$ prav, tj. dijagonale paralelograma $KLMN$ su normalne, pa je $KLMN$ romb.

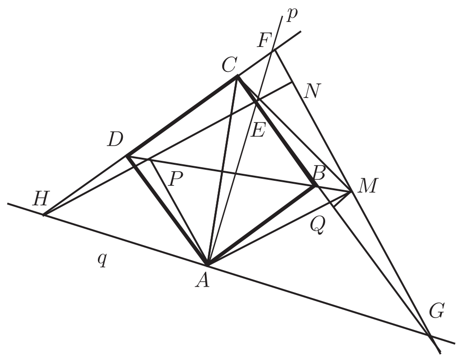
896. Slično prethodnom zadatku.

897. Iz podudarnosti trouglova AKN, BKL, CLM i DMN zaključujemo da je $KL = LM = MN = KN$. Dalje je $\sphericalangle KLM = 15° + 60° + 15° = 90°$.

898. Neka je N tačka duži KM takva da je $AN \perp KM$, sl. 223. Pravougli trouglovi AMB i AMN su podudarni, pa je $AN = AB$ i $\sphericalangle BAM = \sphericalangle MAN$. Otuda je i $AD = AN$, pa kako je $AK = AK$ i $\sphericalangle ADK = \sphericalangle ANK = 90°$, sledi da su trouglovi ADK i ANK podudarni. Iz ove podudarnosti sledi da je $\sphericalangle DAK = \sphericalangle KAN$. Sada imamo $\sphericalangle MAK = \sphericalangle MAN + \sphericalangle NAK = \frac{1}{2}\sphericalangle BAN + \frac{1}{2}\sphericalangle NAD = \frac{1}{2}90° = 45°$.



Sl. 223



Sl. 224

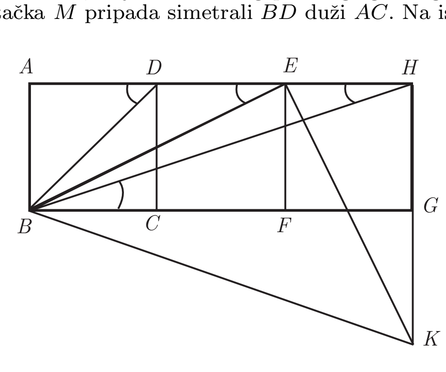
899. a) Neka su O_1, O_2, O_3 i O_4 centri ovih kvadrata nad stranicama redom AB, BC, CD i DA. Trouglovi O_1O_2B i O_3O_2C su podudarni, jer je $O_1B = CO_3$ i $O_2B = O_2C$ (polovine dijagonala podudarnih kvadrata) i $\sphericalangle O_1BO_2 = \sphericalangle O_2CO_3$ (oba $90° + \gamma$). Sličnim postupkom dokažemo da je $O_1O_2 = O_2O_3 = O_3O_4 = O_4O_1$. Zatim, $\sphericalangle O_1O_2O_3 = \sphericalangle O_1O_2B + \sphericalangle BO_2O_3 = \sphericalangle BO_2O_3 + \sphericalangle O_3O_2C = 90°$.

b) Slično prethodnom slučaju.

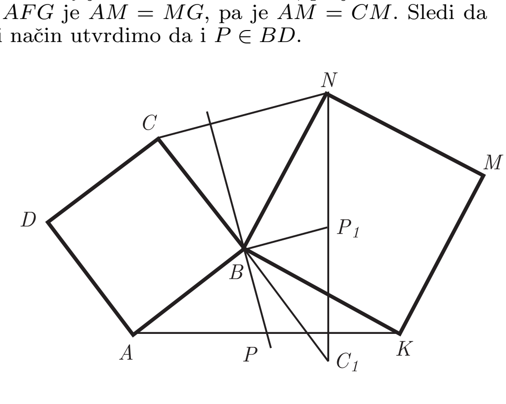
900. a) Pravougli trouglovi ABG i ADF su podudarni, jer je $AB = AD$, $\sphericalangle ABG = \sphericalangle ADF = 90°$, a $\sphericalangle BAG = 90° - \sphericalangle BAE$ i $\sphericalangle DAF = 90° - \sphericalangle BAE$, odnosno $\sphericalangle BAG = \sphericalangle DAF$. Otuda sledi da je $AG = AF$, pa je trougao AFG jednakokraki. Na isti način iz podudarnosti trouglova ABE i ADH zaključujemo da je $AE = AH$, sl. 224.

b) Pošto su AFG i AEH jednakokraki pravougli trouglovi, to je $\sphericalangle MAE = \sphericalangle EAP = 45°$, pa je $\sphericalangle MAP = 90°$. Takođe je $AP \perp EH$ i $AM \perp FG$, pa je četvorougao $AMNP$ pravougaonik.

c) Prava BD je simetrala dijagonale AC kvadrata. Dokazaćemo da ovoj simetrali pripadaju tačke P i M. Neka je tačka Q središte duži CG. Duž MQ je srednja linija trougla CFG, pa je $MQ \parallel CF$, odnosno $MQ \perp CG$. Prema tome, prava MQ je simetrala duži CG, pa je $CM = MG$. Međutim, iz jednakokrakog pravouglog trougla AFG je $AM = MG$, pa je $AM = CM$. Sledi da tačka M pripada simetrali BD duži AC. Na isti način utvrdimo da i $P \in BD$.



Sl. 225



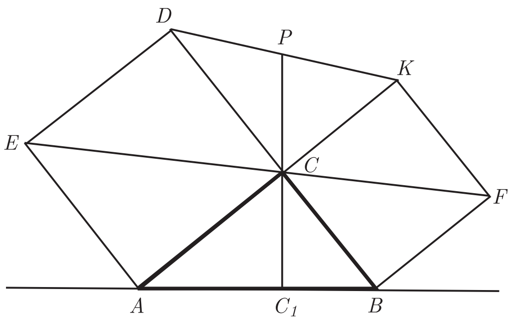
Sl. 226

901. Neka je na produžetku duži HG tačka K takva da je G središte duži HK, sl. 225. Iz podudarnosti trouglova ABE i HEK zaključujemo da je $BE = EK$ i $\sphericalangle AEB = \sphericalangle EKH$. Kako je $\sphericalangle HEK + \sphericalangle EKH = 90°$, to je i $\sphericalangle HEK + \sphericalangle AEB = 90°$, pa je $\sphericalangle BEK = 90°$. Dakle, trougao BEK je pravougli jednakokraki, pa je $\sphericalangle EBK = 45°$. Iz podudarnosti trouglova HAB i BGK dobijamo $\sphericalangle GBK = \sphericalangle AHB$. Dalje je $\sphericalangle EBG = \sphericalangle AEB$ (naizmenični), pa iz $\sphericalangle EBG + \sphericalangle GBK = \sphericalangle EBK = 45°$ sledi da je $\sphericalangle AEB + \sphericalangle AHB = 45°$. Pošto je već $\sphericalangle ADB = 45°$, sledi da je $\sphericalangle ADB + \sphericalangle AEB + \sphericalangle AHB = 90°$.

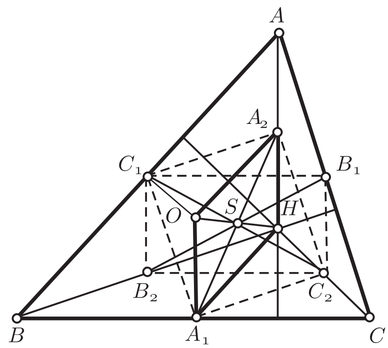
902. Neka je C_1 tačka takva da je tačka B središte duži CC_1, sl. 226. Lako je dokazati da su podudarni trouglovi ABK i C_1BN. Neka je P_1 središte duži NC_1. Tada je $\triangle BNP_1 \cong \triangle BKP$, pa je $\sphericalangle NBP_1 = \sphericalangle KBP$. Otuda je $\sphericalangle P_1BP = \sphericalangle P_1BK + \sphericalangle KBP = \sphericalangle P_1BK + \sphericalangle NBP_1 = 90°$, tj. $BP_1 \perp BP$. U trouglu CC_1N duž BP_1 je srednja linija, pa je $BP_1 \parallel CN$. Otuda sledi da je $BP \perp CN$.

903. a) Prava EF je simetrala spoljašnjeg ugla u temenu pravog ugla, sl. 227.

b) Sledi na osnovu prethodnog zadatka.



Sl. 227



Sl. 228

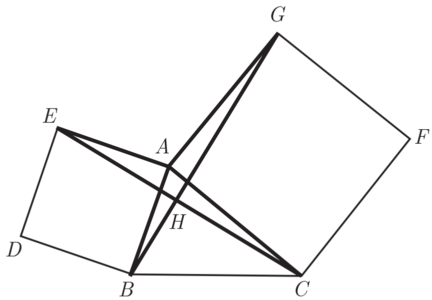
904. Dokazuje se na osnovu podudarnosti pravouglih trouglova $\triangle DD_1A \cong \triangle AC_1C$ i $\triangle BHH_1 \cong \triangle CBC_1$, gde us D_1 i H_1 podnožja normala iz D i H na pravu AB.

905. Neka je BM težišna linija trougla ABC. Odredimo tačku N tako da je M središte duži BN. Tada se dijagonale AC i BN četvorougla $ABCN$ polove, pa je to paralelogram. Lako se dokazuje da je $\triangle BCN \cong \triangle LBD$. Sledi da je $DL = BN = 2BM$, što se i tvrdilo.

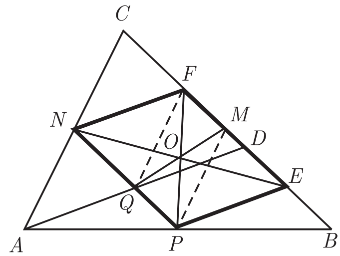
906. Četvorougao $A_1C_1A_2C_2$ je pravougaonik (videti rešenje **zadatka 877**), pa su mu dijagonale jednake i polove se, $A_1A_2 = C_2C_2$. Slično se dokazuje da je $A_1A_2 = B_1B_2$ i da je tačka S zajedničko središte ovih duži, sl. 228. Da bismo dokazali da je S središte duži OH, dokazaćemo da je četvorougao OA_1HA_2 paralelogram. Duži OA_1 i A_2H su paralelne, ali takođe i jednake (sledi iz podudarnosti trouglova A_1C_1O i A_2C_2H).

907. Trouglovi ABG i AEC su podudarni ($AB = AE$, $AG = AC$ i $\sphericalangle BAG = 90° + \sphericalangle BAC = \sphericalangle CAE$), pa je $BG = CE$ i $\sphericalangle ABG = \sphericalangle AEC$, sl. 229. U trouglu BHE je $\sphericalangle BEH = 45° - \sphericalangle AEC$ i $\sphericalangle HBE = 45° + \sphericalangle AHB = 45° + \sphericalangle AEC$. Prema tome je $\sphericalangle BEH + \sphericalangle HBE = 45° - \sphericalangle AEC + 45° + \sphericalangle AEC = 90°$. Zaključujemo da je $BG \perp CE$.

908. Imamo $DE = \dfrac{1}{2}BD$ i $DF = \dfrac{1}{2}CD$, pa je $DE + DF = \dfrac{1}{2}(BD + CD)$, odnosno $EF = \dfrac{1}{2}BC$. Kako je duž NP srednja linija trougla, to je $NP \# EF$, pa je četvorougao $EFNP$ paralelogram kome je O presečna tačka dijagonala EN i PF. Dokažimo da je $O \in MQ$. Prema slici 230 je $MF = CM - CF = \dfrac{1}{2}(BC - CD) = \dfrac{1}{2}BD$. Kako je duž PQ srednja linija trougla ABD, to je $PQ \# \dfrac{1}{2}BD$, odnosno $PQ \# MF$, pa je četvorougao $PMFQ$ paralelogram i MQ polovi PF, tj. $O \in MQ$.

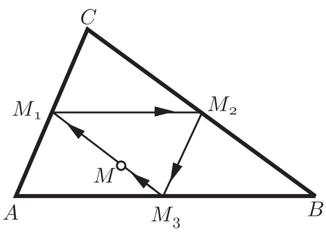


Sl. 229

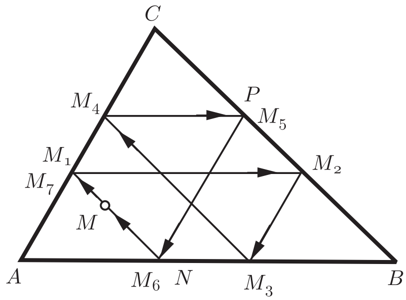


Sl. 230

909. Ako tačka M pripada bilo kojoj srednjoj liniji trougla, tada će se vratiti u polazni položaj u četvrtom koraku što se vidi na slici 231.

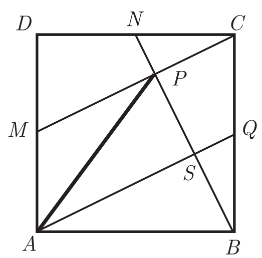


Sl. 231

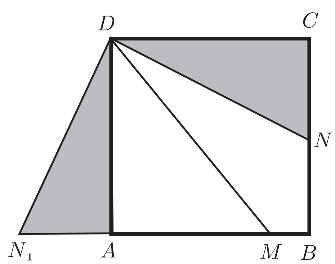


Sl. 232

Pretpostavimo da M ne pripada srednjoj liniji. Neka su M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6, M_7 tačke na stranicama trougla dobijene opisanim kretanjem tačke M, kao što je prikazano na slici 232. Dokazaćemo da je $M_7 = M_1$. Neka je N presečna tačka prave MM_1 sa AB, a P tačka preseka stranice BC sa pravom kroz N koja je paralelna sa AC. Dokazaćemo da je $N = M_6$, odakle sledi da je $M_7 = M_1$. Nije teško dokazati tvrđenja: $\triangle BNP \cong \triangle M_2M_1C$ i $\triangle M_2M_1C \cong \triangle M_3AM_4$ i $\triangle M_3AM_4 \cong \triangle BM_6M_5$. Na osnovu tranzitivnosti podudarnosti je $\triangle BNP \cong \triangle BM_6M_5$, a odavde je $NP = M_5M_6$ i $N = M_6$, $P = M_5$, odakle zaključujemo da je $M_7 = M_1$. To pokazuje da se tačka M vraća u početni položaj u sedmom koraku.



Sl. 233



Sl. 234

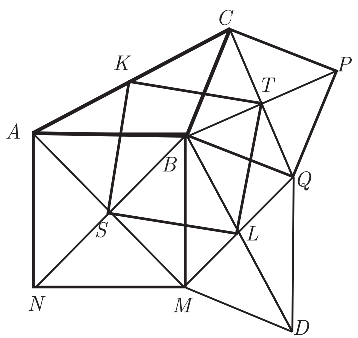
910. Pravougli trouglovi BCN i CDM su podudarni jer imaju jednake katete. Zbog toga je $\sphericalangle BNC = \sphericalangle CMD$. Kako je $\sphericalangle CMD + \sphericalangle MCD = 90^\circ$, to je i $\sphericalangle PCN + \sphericalangle PNC = 90^\circ$. Sledi da je $CM \perp BN$. Neka je Q središte stranice BC, sl. 233. Četvorougao $AQCM$ je paralelogram, pa je prava AQ srednja linija trougla BCP, a tačka S, u kojoj se seku BP i AQ, je središte duži BP. Sem toga je $AQ \perp BP$, pa je prava AQ simetrala duži BP. Otuda izlazi $AP = AB$.

911. Slično prethodnom zadatku dokažemo da je trougao ADK jednakokraki itd.

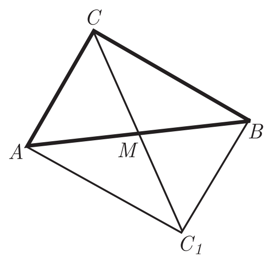
912. Neka je tačka N_1 iza A u odnosu na M takva da je $AN_1 = CN$. Tada je trougao CDN podudaran trouglu ADN_1, pa je $\sphericalangle DNC = \sphericalangle DN_1A$ i $\sphericalangle CDN = \sphericalangle ADN_1$, sl. 234. Izračunajmo $\sphericalangle MDN_1$. Imamo: $\sphericalangle MDN_1 = \sphericalangle MDA + \sphericalangle ADN_1 = 90^\circ - 2\sphericalangle CDN + 90^\circ - \sphericalangle DN_1A = 2(90^\circ - \sphericalangle ADN_1) - \sphericalangle DN_1A = 2\sphericalangle DN_1A - \sphericalangle DN_1A = \sphericalangle DN_1A$. Pošto je $\sphericalangle MDN_1 = \sphericalangle DN_1A$, to je trougao DMN_1 jednakokraki i $DM = MN_1 = AM + AN_1 = AM + CN$, što i tvrdimo.

913. Neka su centri datih kvadrata tačke S i T i neka su K i L središta duži AC i MQ, sl. 235. Tačke K, T, L i S predstavljaju središta stranica četvorougla $ACQM$, pa je $KSLT$ paralelogram (slično **zadatku 859**). Dokazaćemo najpre da su stranice ovog četvorougla podudarne među sobom.

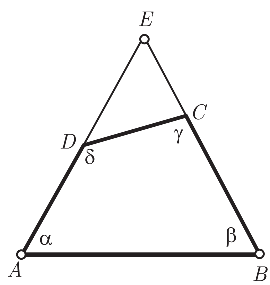
Neka je D tačka takva da je tačka L središte duži BD. Tada je četvorougao $BMDQ$ paralelogram, pa je $DQ \# BM$, a kako je $BM = AB$, to je $DQ = AB$ i $DQ \perp AB$. Sem toga je i $BQ = BC$ i $BQ \perp BC$, pa je $\sphericalangle BQD = \sphericalangle ABC$ (sa normalnim kracima) i trougao DQB podudaran je trouglu ABC. Sledi da je $\sphericalangle DBQ = \sphericalangle ACB$ i $BL = CK$. Uočimo sada trouglove CKT i BLT. Imamo: $CK = BL$, $CT = BT$ (polovine dijagonala istog kvadrata) i $\sphericalangle KCT = \sphericalangle ACB + 45^\circ = \sphericalangle DBQ + 45^\circ = \sphericalangle LBT$, odnosno $\sphericalangle KCT = \sphericalangle LBT$. Otuda sledi da su trouglovi CKT i BLT podudarni, pa je $KT = TL$ i $\sphericalangle CTK = \sphericalangle BTL$. Prema tome, četvorougao $KSLT$ je romb ili kvadrat. Izračunajmo $\sphericalangle KTL$. Na osnovu podudarnosti uglova CTK i BTL imamo $\sphericalangle KTL = \sphericalangle KTB + \sphericalangle BTL = \sphericalangle KTB + \sphericalangle CTK = \sphericalangle CTB = 90^\circ$. Dakle, četvorougao $KSLT$ je kvadrat.



Sl. 235



Sl. 236



Sl. 237

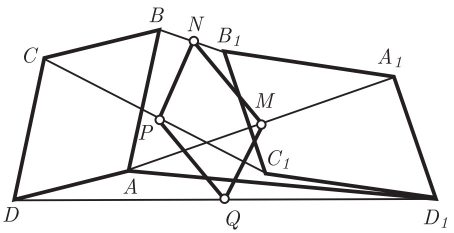
914. Videti rešenje **zadatka 735**. Rezultati: a) $DS : SM = 1 : 1$, b) $AS : SN = 3 : 1$, c) $BO : ON = 3 : 4$, d) $AO : OM = 6 : 1$.

915. Neka je CM težišna linija trougla ABC u kojem je $BC > AC$, sl. 236, i neka je C_1 tačka takva da je M središte duži CC_1. Duži AB i CC_1 se polove, pa je $ACBC_1$ paralelogram, te je $BC_1 = AC$ i $\sphericalangle BC_1C = \sphericalangle ACM$. Sada u trouglu BCC_1 važi $BC > BC_1 = AC$, pa je $\sphericalangle ACM = \sphericalangle CC_1B > \sphericalangle BCM$.

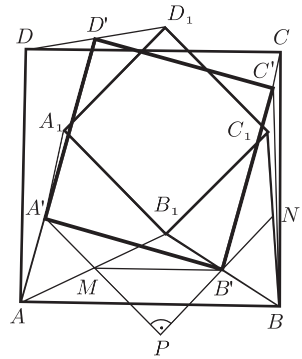
916. Produžimo AD i BC do preseka E, sl. 237. U trouglu CDE je $\sphericalangle CDE < \sphericalangle DCE$, pa je $CE < DE$. Kako je trougao ABE jednakokraki, to je $BE = AE$, pa je $BC > AD$.

917. Prema **zadatku 715** imamo $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A_1B_1}$ i $2\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{C_1D_1}$, pa kako je $\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{C_1D_1} = -\overrightarrow{A_1B_1}$, sledi da je $\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{MN}$ što daje $PQ \# MN$, sl. 238.

918. a) Postupajući slično kao u prethodnom zadatku dobićemo $2\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A_1B_1}$ i $2\overrightarrow{D'C'} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{D_1C_1}$. Međutim, kako je $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{D_1C_1} = \overrightarrow{A_1B_1}$, kao naspramne jednakousmerene stranice kvadrata, to je i $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{D'C'}$. Sledi da je i $\overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{A'D'}$, pa je četvrougao $A'B'C'D'$ paralelogram, sl. 239. Dokazaćemo da su susedne stranice ovog paralelograma jednake među sobom. Neka su M i N središta duži AB_1 i BC_1. Tada je $A'M = \frac{1}{2}A_1B_1$ i $A'M \parallel A_1B_1$,



Sl. 238



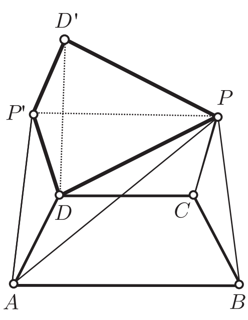
Sl. 239

jer je $A'M$ srednja linija trougla AA_1B_1. Slično, iz trougla BB_1C_1 dobijamo $B'N = \dfrac{1}{2}B_1C_1$ i $B'N \parallel B_1C_1$. Kako je $A_1B_1 = B_1C_1$ to je i $A'M = B'N$. Postupajući slično, iz trouglova ABB_1 i BCC_1 dobijamo $MB' = NC'$ i $MB' \parallel AB$, a $NC' \parallel BC$. Uočimo trouglove $A'B'M$ i $B'C'N$. Oni imaju jednake po dve stranice, a njima zahvaćeni uglovi jednaki su kao uglovi sa normalnim kracima. Zbog toga je $\triangle A'B'M \cong \triangle B'C'N$, a na osnovu toga je $A'B' = B'C'$. Dakle, četvorougao $A'B'C'D'$ je ili romb ili kvadrat. Izračunajmo ugao $A'B'C'$.

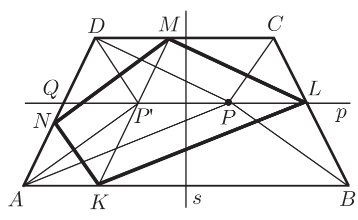
Neka je P zajednička tačka uzajamno normalnih pravih $A'M$ i $B'N$. Tada je trougao $A'B'P$ pravougli, pa je $\sphericalangle MA'B' + \sphericalangle PB'A' = 90^\circ$. Međutim, zbog podudarnosti trouglova $A'B'M$ i $B'C'N$ je $\sphericalangle MA'B' = \sphericalangle NB'C'$, pa je $\sphericalangle PB'A' + \sphericalangle NB'C' = 90^\circ$. Kako je $\sphericalangle PB'A' + \sphericalangle A'B'C' + \sphericalangle NB'C' = 180^\circ$, sledi da je $\sphericalangle A'B'C' = 90^\circ$. Dakle, četvorougao $A'B'C'D'$ je kvadrat.

b) Iz podudarnosti trouglova, kao u prethodnom slučaju, dokažemo da su naspramne stranice četvorougla $A'B'C'D'$ jednake među sobom.

919. S one strane prave AB s koje je P, odredimo tačku P' takvu da je $AP' = BP$ i $DP' = CP$. Ako je četvorougao $APDP'$ konveksan, onda je zadatak rešen. Pretpostavimo da nije taj slučaj i da je $\sphericalangle PDP'$ konkavan. Tada odredimo tačku D' simetričnu sa D u odnosu na PP'. Sada je četvorougao $APD'P'$ konveksan i $PD' = PD$, $P'D' = PC$ i $AP' = BP$, sl. 240.



Sl. 240

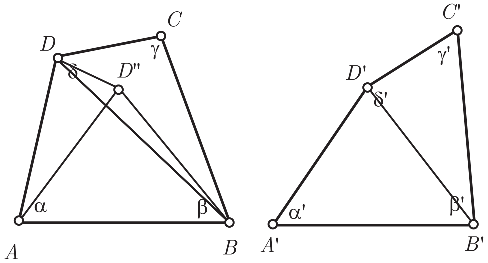


Sl. 241

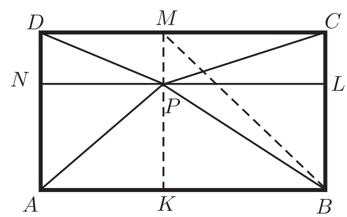
920. Neka je s simetrala jednakokrakog trapeza $ABCD$ i P' tačka simetrična nekoj tački P u trapezu, sl. 241. Prava PP' je paralelna osnovicama. Označimo sa L i Q presečne tačke prave PP' sa kracima, a sa K i M preseke prave kroz P', paralelne kraku AD, i osnovica trapeza. Neka je N tačka kraka AD takva da je $MN \parallel AP'$. Dokazaćemo da je $KLMN$ traženi četvorougao.

Zbog simetrije je $QP' = PL$ i još u paralelogramu $AKMD$ važi $DM = AK = QP'$. Sledi da su četvorouglovi $AKLP$ i $DMLP$ paralelogrami, pa je $KL = AP$ i $LM = PD$. Zbog simetrije je $AP' = BP$ i $DP' = CP$ itd.

921. Neka je u uglu α tačka D'' takva da je $\sphericalangle BAD'' = \alpha'$ i $AD = A'D' = AD$, sl. 242. Trougao $AD''D$ je jednakokraki, pa je $\sphericalangle ADD'' = \sphericalangle AD''D$. Očigledno je $\sphericalangle BDD'' < \sphericalangle ADD''$ i $\sphericalangle BD''D > \sphericalangle AD''D$, pa je u trouglu BDD'' ugao $BD''D$ veći od ugla BDD'' i $BD > BD''$. Iz podudarnosti trouglova ABD'' i $A'B'D'$ sledi da je $B'D' = BD''$, pa je $B'D' < BD$. Sada mora biti $\gamma > \gamma'$, jer bi u protivnom, na osnovu izloženog, bilo $B'D' > BD$. Kako je $\alpha + \beta + \gamma + \delta = \alpha' + \beta' + \gamma' + \delta'$ i $\alpha + \gamma > \alpha' + \gamma'$ sledi da je $\beta + \delta < \beta' + \delta'$, pa je, recimo, $\beta' > \beta$. Kao što je napred pokazano, odavde sledi da mora biti i $\delta' > \delta$.



Sl. 242

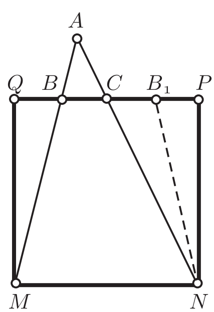


Sl. 243

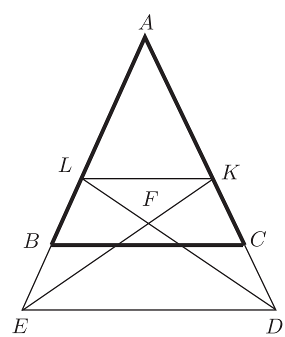
922. Neka su KM i LN paralelne sa BC i AB, sl. 243. Tada je, na primer, $PA < AK+PK = NP+PK$. Slično se dokaže i da je $PB < PK+PL$, $PC < PL+PM$, $PD < PM+PN$. Sabiranjem ovih nejednakosti dolazimo do traženog zaključka. Za trapez tvrđenje ne važi. Na primer, neka je $ABMD$ na slici 243 pravougli trapez tako da su K, L, M, N središta duži AB, BC, CD, DA. Tada je očigledno $PA + PB + PC + PD > 3PA$, a $\frac{1}{2}(AB + MD + BM + AD) < 3PA$ itd.

923. Ako je M bilo koja tačka u ravni četvorougla $ABCD$ i O presečna tačka dijagonala, tada je $AM + CM \geq AC = AO + OC$ i $BM + DM \geq BD = BO + OD$, tj. $AM + BM + CM + DM \geq AO + BO + CO + DO$, pa je O tražena tačka.

924. Ako tačka A ne pripada pravim MP i NQ, onda je tražena prava jedna od pravih – AM, AN, AP, AQ. Nije teško dokazati da je rešenje prava koja seče dve pralelne stranice i to pod manjim oštrim uglom. U slučaju prikazanom na slici 244 to je prava AN. ($QB < PC$, pa postoji tačka B_1 takva da je $C - B_1 - P$ i $B_1P = QB$. Dalje, $\triangle B_1PN \cong \triangle BQM$ i $B_1N = BM$. Kako je $CN > NB_1$ sledi da je $CN > BM_1$ itd.)



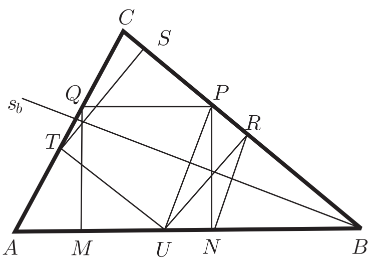
Sl. 244



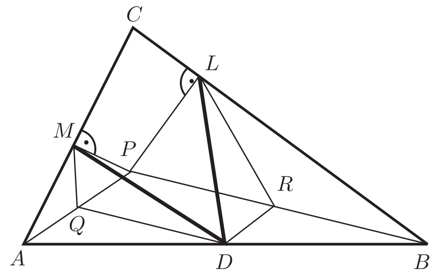
Sl. 245

925. Određenosti radi, neka je $A - B - E$ i $A - K - C$. Neka $L \in AB$ tako da je $BL = SE$, sl. 245, i $L - B - E$, a $D \in AC$ tako da je $CD = KC$ i $K - C - D$. Sledi da je $EDKL$ jednakokraki trapez, pa je $EK = LD$. Neka EK seče DL u F. Iz $\triangle LFK$ i $\triangle EFD$ sledi $LF + FK > LK$ i $FE + FD > ED$, pa je $LF + FD + FK + FE > LK + ED$ ili $LD + EK > LK + ED$. Kako je $LD = EK$, sledi da je $EK > \dfrac{LK + ED}{2} = BC$ (srednja linija trapeza).

926. Neka su $RSTU$ i $MNPQ$ podudarni kvadrati nad stranicama BC i AB. Dokažimo da je $AB = CB$, sl. 246. Trouglovi URB i PNB su podudarni, pa je $PB = UB$ i $RB = NB$. Odavde su tačke N i R, odnosno U i P simetrične u odnosu na simetralu s_B ugla ABC. Stoga su duži NP i RU simetrične u odnosu na pravu s_B, pa su i kvadrati $NPQM$ i $RUTS$ simetrični u odnosu na istu pravu. Dakle, Q i T su simetrične tačke u odnosu na s_B. Prema tome, $s_B \perp QT$, pa je $\triangle ABC$ jednakokraki sa osnovicom AC ($s_B = h_b$). Zbog toga je $AB = AC$, što je i trebalo dokazati.



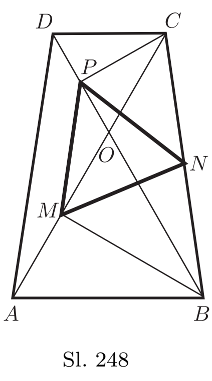
Sl. 246



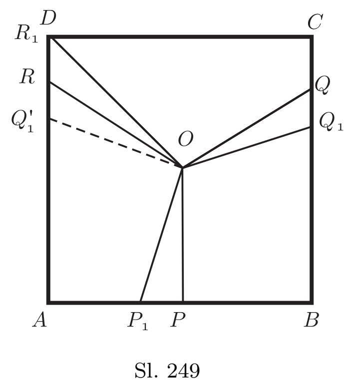
Sl. 247

927. Neka su Q i R središta duži AP i BP, sl. 247. Iz pravouglih trouglova AMP i BLP dobijamo $\sphericalangle MQP = 2\sphericalangle MAP = 2\sphericalangle LBP = \sphericalangle PRL$. Četvorougao $DQPR$ je paralelogram (duži DQ i DR su srednje linije trougla ABP), pa je $\sphericalangle PQD = \sphericalangle PRD$. Odatle je $\sphericalangle MQD = \sphericalangle LRD$. Kako je $MQ = QP = DR$ i $LR = RP = DQ$, to je $\triangle MQD \cong \triangle DRL$, odakle sledi $MD = LD$.

928. Trouglovi ABO i CDO su jednakokraki sa uglom od 60° pri vrhu. Dakle, oni su jednakostranični, sl. 248. U jednakostraničnom trouglu CDO težišna linija je CP, što znači da se poklapa sa visinom iz temena C, tj. $\sphericalangle CPO = 90^\circ$. Iz istog razloga u jednakostraničnom trouglu ABO je $\sphericalangle MBA = 90^\circ$. Posmatrajmo trougao DAO. Srednja linija tog trougla je PM, pa je $PM = \dfrac{1}{2}AD$. Trouglovi CBM i CBP su pravougli sa zajedničkom hipotenuzom BC. Otuda je $NP = NM = \dfrac{1}{2}BC$. Kako je $BC = AD$ (dati trapez je jednakokraki) to sledi da je $MN = NP = PM$, tj. trougao MNP je jednakostranični.



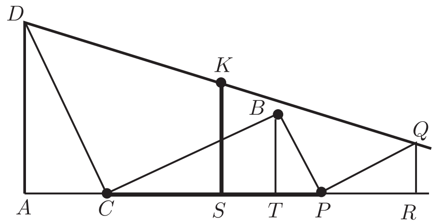
Sl. 248



Sl. 249

929. Neka je P središte stranice AB, a P_1, Q_1, R_1 druge tri tačke koje dele obim na tri jednaka dela, sl. 249. Tada je $PP_1 = QQ_1 = RR_1$. Sa Q_1' označimo tačku na AD simetričnu tački Q_1 u odnosu na OP, tada je $OQ_1 = OQ_1'$, i $RQ_1' = QQ_1 = RR_1$. U $\triangle OR_1Q_1'$ težišna linija je OR, pa je $2OR < OR_1 + OQ_1' = OR_1 + OQ_1$, a iz $\triangle OPP_1$ sledi $OP < OP_1$. Dakle, $OP + OQ + OR = OP + 2OR < OP_1 + OQ_1 + OR_1$.

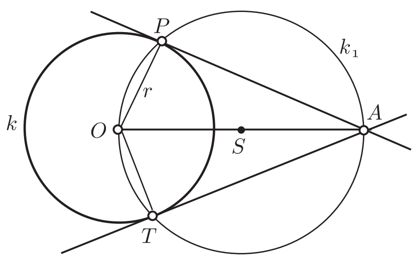
930. Sa B, C, P, K označimo redom: bor, čempres, palmu, kovčeg sa blagom, sl. 250. Prema uputstvu sa karte: $BC = CD$ i $CD \perp BC$, kao i $PQ = BP$ i $PQ \perp BP$. Neka su A, S, T, R redom podnožja normala iz D, K, B, Q na pravu CP. Sada se lako dokazuje da je $\triangle ACD \cong \triangle TBC$ i $\triangle PQR \cong \triangle BPT$. Dakle, četvorougao $DARQ$ je pravougli trapez kome je KS srednja linija, pa je $AD = CT$, $RQ = TP$, $AC = BT = PR$ i $KS = \frac{1}{2}(AD+QR) = \frac{1}{2}(CT+TP) = \frac{1}{2}CP$, gde je S središte duži CP.



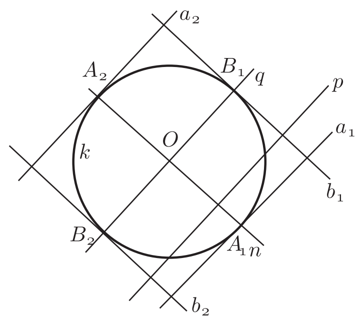
Sl. 250

931. a) Ugao između tangente i poluprečnika je prav. Stoga konstruišemo krug k_1 kome je duž OA prečnik. Presečne tačke krugova k i k_1, tj. tačke P i T na slici 251, određuju tangente AP i AT, što se lako dokazuje. (Uglovi APO i ATO su pravi, jer su nad prečnikom.)

b) Neka su dati krugovi $k_1(O, r_1)$ i $k_2(A, r_2)$. Konstruišemo krugove k i k' oko tačke O sa poluprečnicima $r_1 + r_2$ i $r_1 - r_2$ $(r_1 > r_2)$. Kao pod a) konstruišemo iz A tangente na k i k'. One su paralelne sa traženim tangentama.



Sl. 251

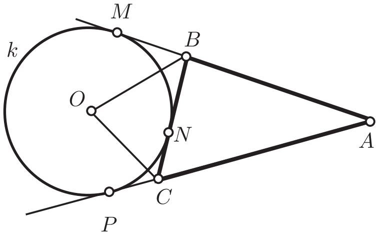


Sl. 252

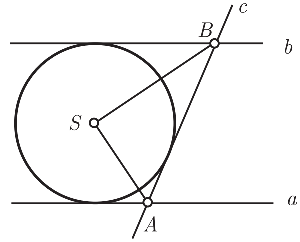
932. a) Prava n kroz centar O datog kruga normalna na p, seče krug k u tačkama A_1 i A_2. To su dodirne tačke tangenti a_1, a_2 paralelnih sa p, sl. 252.

b) Dodirne tačke (na slici B_1, B_2) dobijamo u preseku prave q kroz O, paralelne sa p, i kruga k.

933. Neka su M, N, P redom tačke u kojima prave AB, BC, AC dodiruju krug k, sl. 253. Prema osobini tangentnih duži je $AM = AP$, $CN = CP$ i $BM = BN$, pa je $AB + AC + BC = (AB + BN) + (AC + CN) = (AB + BM) + (AC + CP) = 2AM$.



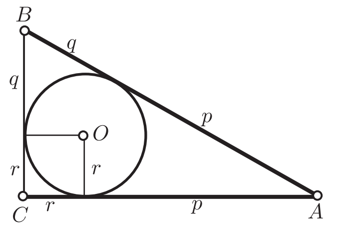
Sl. 253



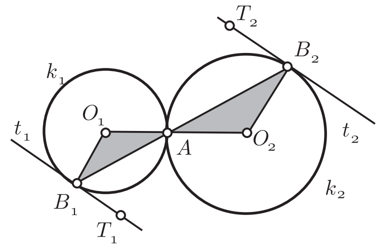
Sl. 254

934. Nije teško dokazati da su AS i BS simetrale uglova između tangenti. Kako je $\sphericalangle A + \sphericalangle B = 180^\circ$, to je $\sphericalangle SAB + \sphericalangle BAS = 90^\circ$, pa krug prečnika AB sadrži tačku S, sl. 254.

935. Prema slici 255 je $c = p + q$. Obim trougla je $2s = 2p + 2q + 2r$, odnosono $s = p + q + r$, pa zamenom $p + q = c$, dobijamo $s = c + r$, odnosno $r = s - c$.



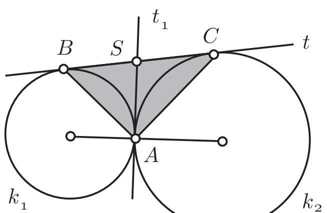
Sl. 255



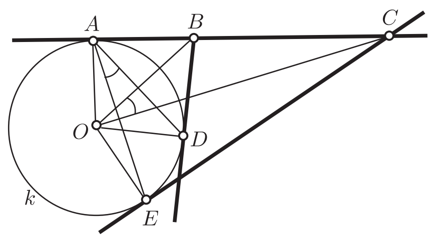
Sl. 256

936. Jednakokraki trouglovi O_1AB i O_2AB_2 imaju jednake uglove na osnovicama ($\sphericalangle O_1AB_1 = \sphericalangle O_2AB_2$, jer su unakrsni), pa su uglovi, AB_1O_1 i AB_2O_2 jednaki, sl. 256. Otuda izlazi da su jednaki i njihovi komplementni uglovi $\sphericalangle AB_1T_1 = \sphericalangle AB_2T_2$ (tangente su normalne na dodirne poluprečnike). Kako su ovi uglovi naizmenični, sledi da su prave t_1 i t_2 paralelne.

937. Neka je t_1 zajednička tangenta datih krugova u zajedničkoj tački A i neka t_1 seče t_2 u S. Tada je $SA = SB$, a takođe $SA = SC$, kao tangentne duži iz tačke S, sl. 257. Sledi, $SA = SB = SC$, pa krug nad prečnikom BC sadrži tačku A i $\sphericalangle BAC$ je prav.



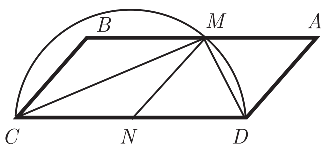
Sl. 257



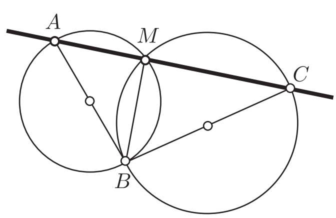
Sl. 258

938. Lako se dokazuje da je BO simetrala tetive AD, sl. 258, pa je $AD \perp BO$. Slično zaključujemo i da je $AE \perp OC$ itd.

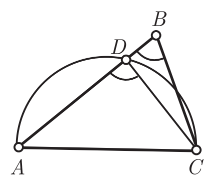
939. Neka je N središte stranice CD, sl. 259. Tada je četvorougao $AMND$ takođe paralelogram i $MN = AD$. Otuda $MN = DN = CN$, pa krug nad prečnikom CD sadrži tačku M i $\sphericalangle CMD$ je prav kao ugao nad prečnikom.



Sl. 259



Sl. 260



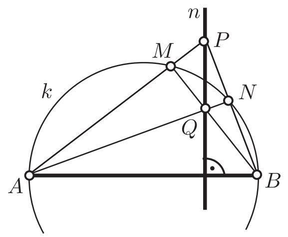
Sl. 261

940. Uglovi AMB i BMC su pravi kao uglovi nad prečnicima, pa su naporedni, $\sphericalangle AMB = \sphericalangle BMC = 180°$, što znači i da tačke A, M i C pripadaju jednoj pravoj, sl. 260.

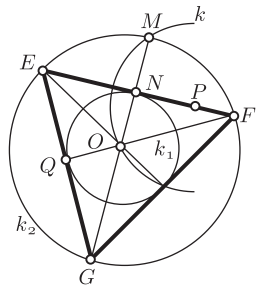
941. Slučaj pravog ugla, sl. 25, str. 112 poznat nam je (periferijski ugao čiji je centralni ugao $180°$). U slučaju kad je tačka B van kruga, uočimo tačku D u kojoj jedna stranica, recimo

AB, seče polukrug, sl. 261. Ugao ADC je spoljašnji ugao trougla BCD, pa $\sphericalangle CBD < \sphericalangle ADC$. Kako je $\sphericalangle ADC$ nad prečnikom, dakle prav ugao, sledi da je $\sphericalangle ABC$ oštar. Slično postupamo u slučaju kad je tačka B u krugu. Znači, Abu Hasanove konstrukcije su ispravne.

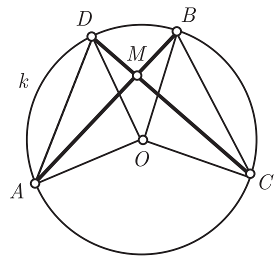
942. Ako je tačka P van kruga, tada prave AP i BP seku krug u tačkama M i N. Tada je $AN \perp BP$ i $BM \perp AP$. Neka AN seče BM u Q. Prava PQ je tražena, sl. 262 (treća visina trougla). Ako je tačka P u krugu, tada tačke P i Q iz prethodnog slučaja menjaju ulogu.



Sl. 262



Sl. 263



Sl. 264

943. a) Podnožje N normale iz P na OM polovi poluprečnik OM kruga k_2, pa je ON poluprečnik kruga k_1, a prava EF je tangenta kruga, sl. 263.

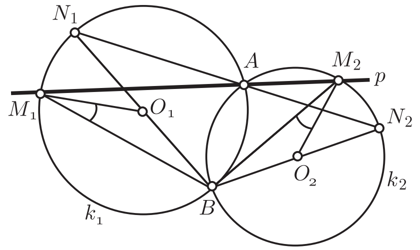
b) Neka je FG druga tangenta kruga k_1 iz tačke F. Kako je $ON = a = \frac{1}{2}OF$, sledi da je $\sphericalangle NFO = 30^\circ$, pa je $\sphericalangle EFG = 60^\circ$, a trougao EFG je jednakostranični. Tačka O je ortocentar trougla EFG, odakle se lako zaključi da podnožje Q visine FO pripada krugu k_1, što znači da je EG tangenta kruga k_1. Otuda sledi traženi zaključak.

944. Neka je k proizvoljan krug kome je centar teme O datog ugla. Kako je $19 \cdot 19^\circ = 361^\circ$, to ćemo dati ugao preneti 19 puta i dobićemo centralni ugao od 1°. Prenošenjem ugla od 1° na dati ugao, dobićemo tražene delove.

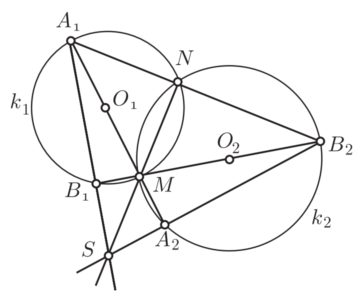
945. Neka je $AB = CD$, sl. 264. Iz jednakosti centralnih uglova AOB i COD sledi $\sphericalangle AOD = \sphericalangle BOC$ (kao razlika jednakih uglova, recimo $\sphericalangle AOD = \sphericalangle AOB - \sphericalangle BOD$), pa je $AD = BC$. Sada se može dokazati podudarnost trouglova AMD i CMB, odakle dobijamo traženi zaključak.

946. Kako je $AB \parallel CD$, sledi da su naizmenični uglovi BAC i ACD jednaki, pa su jednake i odgovarajuće tetive $BC = AD$.

947. Uglovi PAX i QAY su unakrsni i jednaki itd.



Sl. 265



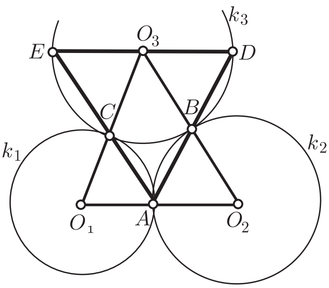
Sl. 266

948. Konstruišemo prečnike BO_1 i BO_2, sl. 265. Na osnovu zaključaka iz **zadatka 940** biće tačke N_1, A i N_2 kolinearne. Stoga su uglovi M_1AN_1 i M_2AN_2 unakrsni, a samim tim i jednaki. $\sphericalangle M_1BN_1 = \sphericalangle M_1AN_1$ (nad istim lukom), a takođe i $\sphericalangle M_2BN_2 = \sphericalangle M_2AN_2$. Sledi da

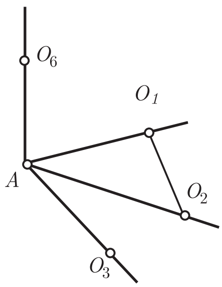
$\sphericalangle M_1BN_1 = \sphericalangle M_2BN_2$. Kako su trouglovi O_1M_1B i O_2M_2B jednakokraki, biće $\sphericalangle O_1M_1B = \sphericalangle M_1BN_1$ i $\sphericalangle O_2M_2B = \sphericalangle M_2BN_2$, odakle sledi $\sphericalangle O_1M_1B = \sphericalangle O_2M_2B$.

949. Tačke A_1, B_2 i N su kolinearne (videti **zadatak 240**). Uglovi $A_1A_2B_2$ i $A_1B_1B_2$ su pravi. Ako A_1B_1 seče A_2B_2 u S, onda je tačka M ortocentar trougla A_1B_2S. Kako je $MN \perp A_1B_2$, sledi da je MN treća visina ovog trougla i $MN \ni S$, sl. 266.

950. Neka su A, B, C dodirne tačke datih krugova, a D i E tačke u kojima poluprave AB i AC seku krug k_3. Ako je O_3 centar tog kruga, treba dokazati da su tačke D, E i O_3 kolinearne. Trouglovi BDO_3 i ABO_2 su jednakokraki, a $\sphericalangle ABO_2 = \sphericalangle DBO_3$, pa je i $\sphericalangle O_2AB = \sphericalangle O_3DB$, iz čega sledi da su prave O_2A i O_3D paralelne. Slično se dobija i da je $O_1A \parallel O_3E$. Kako su tačke O_1, A, O_2 kolinearne, biće i D, O_3, E kolinearne, sl. 267



Sl. 267



Sl. 268

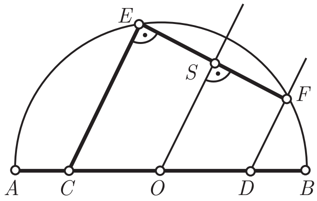
951. Označimo date krugove sa $k_i(O_i, r_i)$, $i = 1, 2, \dots, 6$ i pretpostavimo da poluprava AO_1 rotacijom oko tačke A, u smeru kazaljke na satu, prolazi redom kroz tačke O_2, O_3, O_4, O_5, O_6, sl. 268. Pretpostavićemo da tvrđenje zadatka nije tačno, tj. da se centar nijednog od datih krugova ne nalazi u nekom od preostalih. Posmatrajmo $\triangle AO_1O_2$. Kako je tačka A unutar krugova k_1 i k_2, to je $AO_1 < r_1$ i $AO_2 < r_2$, dok je $O_1O_2 \geq \max\{r_1, r_2\}$, jer se centar nijednog od krugova k_1, k_2 ne nalazi unutar drugog. Dakle, kod $\triangle AO_1O_2$ stranica O_1O_2 je veća od stranica AO_1 i AO_2, pa je $\sphericalangle O_1AO_2 > 60°$. Analogno zaključujemo da je $\sphericalangle O_2AO_3 > 60°, \dots, \sphericalangle O_6AO_1 > 60°$, pa bismo imali da je $360° = \sphericalangle O_1AO_2 + \sphericalangle O_2AO_3 + \cdots + \sphericalangle O_6AO_1 > 6 \cdot 60° = 360°$, što je kontradikcija.

952. Pretpostavimo suprotno tvrđenju, da ovi krugovi imaju zajedničku tačku P. Spojimo tu tačku sa centrima $S_1, S_2, \dots, S_6$ datih krugova. Bar jedan od uglova S_iPS_j biće tada manji ili jednak $60°$. U trouglu S_iPS_j je onda jedan od preostala dva ugla, npr. $\sphericalangle S_jS_iP$, veći ili jednak $60°$, pa i od $\sphericalangle S_iPS_j$, pa je $PS_j \geq S_iS_j$. Kako tačka P pripada krugu s centrom S_j, to sledi da i S_i pripada tom krugu, što je suprotno pretpostavci zadatka. (Videti i rešenje prethodnog zadatka.)

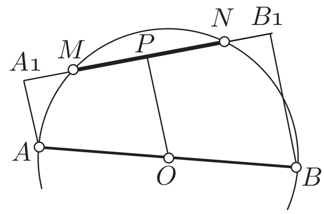
953. Prema uslovima zadatka je $s_1 + s_2 = a_3$, $s_1 + s_3 = a_1$ i $s_3 + s_1 = a_2$, odakle se dobija $s_1 = \dfrac{1}{2}(a_2 + a_3 - a_1)$; $s_2 = \dfrac{1}{2}(a_3 + a_1 - a_2)$; $s_3 = \dfrac{1}{2}(a_1 + a_2 - a_3)$. Zato je $\dfrac{s_1}{a_1} + \dfrac{s_2}{a_2} + \dfrac{s_3}{a_3} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a_2 + a_3 - a_1}{a_1} + \dfrac{a_3 + a_1 - a_2}{a_2} + \dfrac{a_1 + a_2 - a_3}{a_3}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\left(\dfrac{a_1}{a_2} + \dfrac{a_2}{a_1}\right) + \left(\dfrac{a_2}{a_3} + \dfrac{a_3}{a_2}\right) + \left(\dfrac{a_1}{a_3} + \dfrac{a_3}{a_1}\right) - 3\right)$, pa tvrđenje sledi iz činjenice da svaki od izraza u malim zagradama nije manji od 2. (Za pozitivan broj x važi $x + \dfrac{1}{x} \geq 2$, pri čemu jednakost važi ako i samo ako je $x = 1$.) Znak jednakosti će važiti ako i samo ako su svi ti izrazi jednaki 2, tj. ako je $a_1 = a_2 = a_3$.

954. Neka je S središte tetive EF. Prava OS je simetrala tetive pa je $\sphericalangle OSF = 90°$. Duž OS je srednja linija trapeza $CDFE$, pa je paralelna osnovicama CE i DF, sl. 269. Zbog toga je $\sphericalangle CEF = 90°$.

955. Neka su A_1 i B_1 podnožja normala iz krajeva prečnika AB na pravu MN i P podnožje normale iz centra O datog kruga, sl. 270. Četvorougao ABB_1A_1 je trapez kome je stalna duž OP srednja linija, pa je $AA_1 + BB_1 = 2OP$. Ako AB seče MN, onda je $|AA_1 - BB_1| = 2OP$.

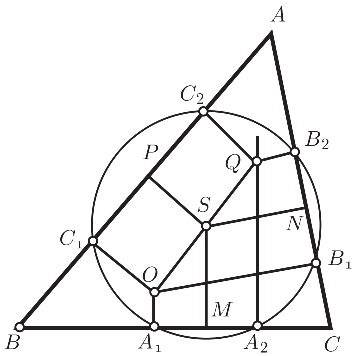


Sl. 269

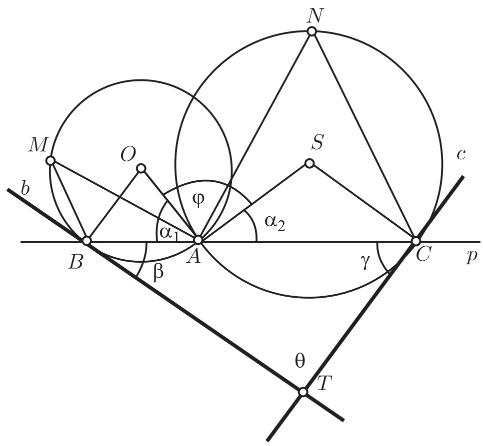


Sl. 270

956. Neka je S centar kruga opisanog oko trougla $A_1B_1C_1$, sl. 271, i neka su M, N, P podnožja normala iz S na stranice trougla. Tačke M, N, P su središta tetiva A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2. Normala na BC u tački A_2 seče pravu OS u tački Q. Četvorougao A_1A_2QO je pravougli trapez, pa na osnovu $A_1M = MA_2$, zaključujemo da je $OS = SQ$. Sličnim rezonovanjem dolazimo do zaključka da i normale u tačkama B_2 i C_2 prolaze kroz tačku Q. (Posmatramo pravougle trapeze B_1B_2QO i C_1C_2QO.)



Sl. 271



Sl. 272

957. Uglovi AMB i ANB određeni su tetivom AB i ne menjaju veličinu. Zbog toga je $\sphericalangle MBN$ konstantan, kao treći ugao trougla BMN.

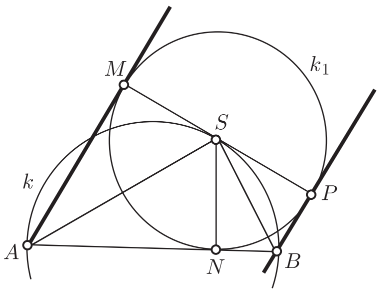
958. Neka je p sečica kroz A, koja date krugove preseca još u B i C, sl. 272. Neka se tangente b i c seku u T. Kako je $\sphericalangle OAS = \varphi$ utvrđen ugao, to je $a_1 + a_2 = 180^\circ - \varphi$ stalna veličina. Zbog toga je i $\sphericalangle AOB + \sphericalangle ASC$ stalna veličina (trouglovi AOB i ACS su jednakokraki). Odavde zaključujemo da je zbir periferijskih uglova AMB i ANC takođe stalan. Uglovi koji su na slici 272 označeni sa β i γ, su tangentni nad tetivama AB i AC, pa je $\beta = \sphericalangle AMB$ i $\gamma = \sphericalangle ANC$. Zbog toga je $\theta = 180^\circ - \beta - \gamma = \text{const}$.

959. Neka je S centar kruga k_1, SN normala na AB i SM, SP normale na opisane tangente. Tada su AS i BS simetrale uglova MAN i NBP, pa je $\sphericalangle MAN = 2\sphericalangle SAN$ i $\sphericalangle NBP = 2\sphericalangle NBS$, sl. 273. Međutim trougao ABS je pravougli, pa je $\sphericalangle SAN + \sphericalangle NBS = 90^\circ$, odakle je $\sphericalangle MAN + \sphericalangle NBP = 180^\circ$, pa je $AM \parallel BP$.

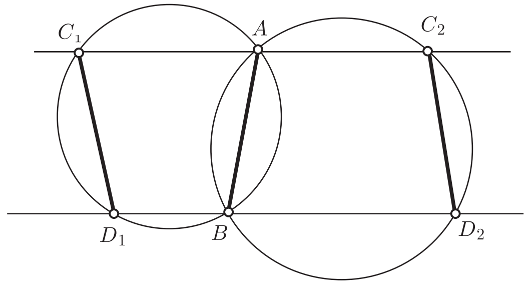
960. Nije teško dokazati da su četvorouglovi ABD_1C_1 i ABD_2C_2 na slici 274 jednakokraki trapezi itd. (Videti **zadatak 946**.)

961. Neka je O centar datog kruga. Tada je prava OS simetrala tetive AB, pa je $AS = BS$ itd.

962. Neka je k krug opisan oko trougla CDE i t njegova tangenta u E. Tetivni ugao EDC jednak je tangentnom uglu φ. Neka je k_1 opisani krug trougla ABE. Kako je $\sphericalangle BAE = \sphericalangle EDC = \varphi$, sledi da je t tangenta i kruga k_1.

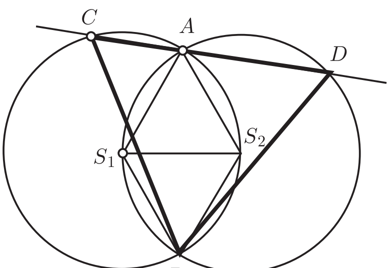


Sl. 273

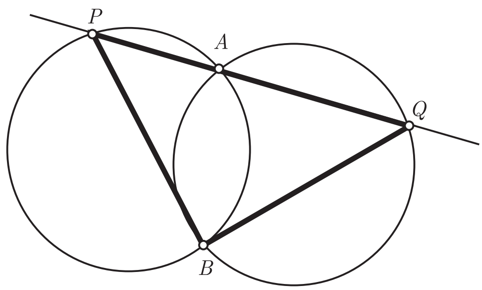


Sl. 274

963. Po uslovu trouglovi AS_1S_2 i BS_1S_2 su jednakostranični. Zbog toga su uglovi AS_1B i AS_2B od 120°, sl. 275. Ugao ACB je periferijski ugao koji je polovina odgovarajućeg centralnog ugla AS_1B. Dakle, $\sphericalangle ACB = 60°$. Slično dokažemo i da je $\sphericalangle ADB = 60°$, pa je trougao BCD jednakostranični.



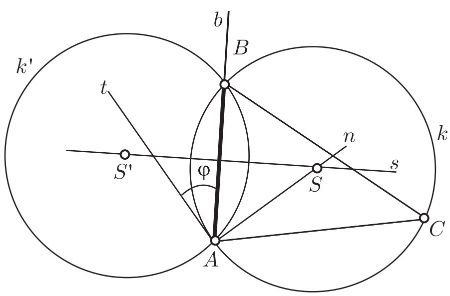
Sl. 275



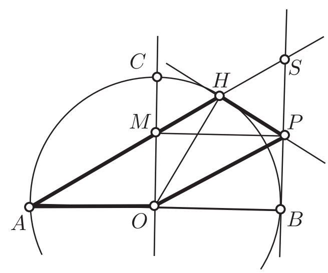
Sl. 276

964. Lukovi AB na datim krugovima su jednaki, pa kako su i poluprečnici datih krugova jednaki, sledi da je $\sphericalangle BPQ = \sphericalangle BQP$, sl. 276.

965. Konstruišemo polupravu At koja sa polupravom Ab određuje ugao jednak datom uglu φ, sl. 277. Zatim, konstruišemo normalu n na polupravu At i simetralu s duži AB. Presečna tačka S pravih n i s je centar luka $k = \widehat{AB}$, koji odgovara luku $\widehat{ACB}$ na slici 277. S druge strane prave AB, na simetrali s, odredimo tačku S' takvu da je $AS = AS'$. Tačka S' je centar luka k' poluprečnika $S'A$. Iz svake tačke luka k ili luka k', osim iz tačaka A i B, data duž se vidi pod datim uglom φ.



Sl. 277



Sl. 278

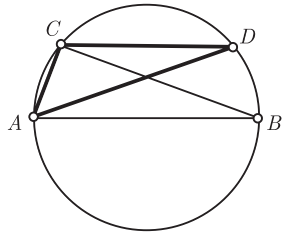
966. a) Kao što znamo, prava OP je simetrala ugla BOH (sledi iz podudarnosti trouglova OBP i OHP). Ugao BOH je spoljašnji za jednakokraki trougao AOH, $AO = OH$, pa je $\sphericalangle HAO = \sphericalangle POB$, te je $OP \parallel AH$. Otuda zaključujemo da je $OPHM$ trapez, sl. 278.

b) Prema uslovima i uz korišćenje zaključaka iz a) sledi da su OM i OP srednje linije trougla ABS, pa je $OP \parallel AM$ i $OP = AM$.

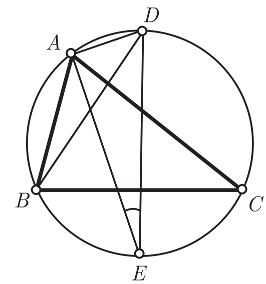
967. $\sphericalangle ACD = \alpha - 90^\circ = \beta$ (tangentni ugao jednak tetivnom).

968. Uglovi AB_1B i AC_1C su pravi kao uglovi nad prečnicima. Zbog toga je $AB_1 \perp BB_1$, pa kako je $BB_1 \parallel CC_1$ to je i $AB_1 \perp CC_1$. Sada iz $AC_1 \perp CC_1$ sledi traženi zaključak.

969. Naizmenični uglovi ADC i BAD su jednaki, pa su jednaki i odgovarajući lukovi $\widehat{AC}$ i $\widehat{BD}$ (važi za lukove između paralelnih tetiva). Kako je $\sphericalangle BCD = \sphericalangle BAD$ (nad istim lukom) a $\sphericalangle ACD = 90^\circ$ (nad prečnikom), izlazi da je $\sphericalangle ACD - \sphericalangle BCD = 90^\circ$, odnosno, zbog $\sphericalangle BCD = \sphericalangle ADC$ imamo $\sphericalangle ACD - \sphericalangle ADC = 90^\circ$, sl. 279.



Sl. 279

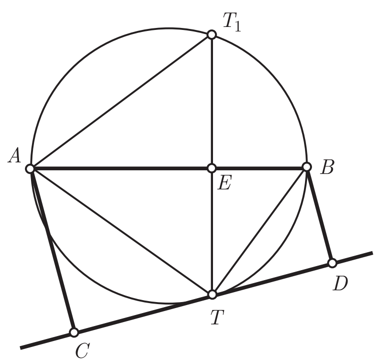


Sl. 280

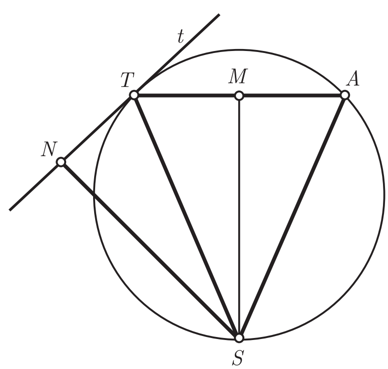
970. Ugao DAE je prav kao ugao nad prečnikom, a $\sphericalangle ADE = \sphericalangle ADB + \sphericalangle BDE = \gamma + \dfrac{\alpha}{2}$. ($\sphericalangle ADB = \sphericalangle ACB$ – nad istim lukom, sl. 280.) Otuda dobijamo

$$\sphericalangle DEA = 90^\circ - \sphericalangle ADE = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} - \Big(\gamma + \frac{\alpha}{2}\Big) = \frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2}.$$

971. Neka su AC i BD normale na tangenti i neka normala iz dodirne tačke T seče dati prečnik i dati krug u E i T_1. Trougao ATT_1 je jednakokraki, sl. 281, pa je $\sphericalangle ATE = \sphericalangle AT_1T$. Međutim, tangentni ugao ATC jednak je periferijskom uglu AT_1T, pa je i $\sphericalangle ATC = \sphericalangle ATE$. Zbog toga su pravougli trouglovi ACT i AET sa zajedničkom hipotenuzom AT podudarni, pa je $AC = AE$. Slično se dokazuje da je $BD = BE$.



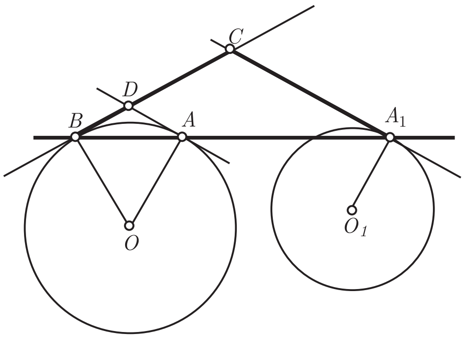
Sl. 281



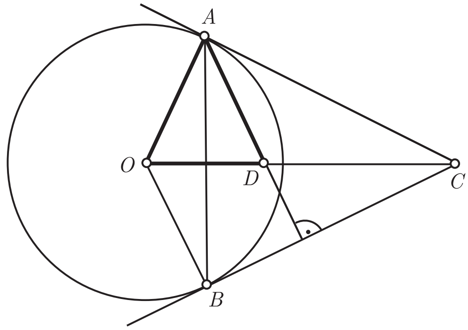
Sl. 282

972. Tetive AS i TS su jednake, pa kako je $\sphericalangle NTS = \sphericalangle SAT$, trouglovi ASM i STN biće podudarni pa je $SM = SN$, sl. 282.

973. Neka je AD, $D \in BC$, tangenta prvog kruga, sl. 283. Tada je $AD = BD$, pa je $\sphericalangle DBA = \sphericalangle DAB$, a zbog $OA \parallel O_1A_1$ je $\sphericalangle BA_1C = \sphericalangle BAD$, odnosno $\sphericalangle BA_1C = \sphericalangle CBA_1$, pa je $BC = A_1C$.



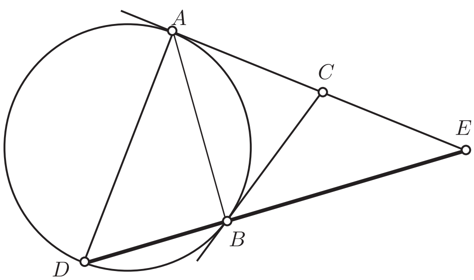
Sl. 283



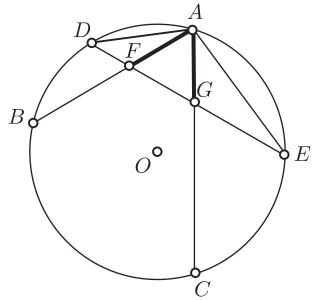
Sl. 284

974. Navodimo dokaz za slučaj kada je $\sphericalangle ACB$ oštar, sl. 284. Zbog $AD \perp BC$ i $OD \perp AB$ imamo $\sphericalangle ADO = \sphericalangle ABC$, pa kako je $\sphericalangle ABC = \frac{1}{2}\sphericalangle AOB = \sphericalangle AOD$, sledi da je trougao ADO jednakokraki.

975. Kako je $AC = CE = BC$, to postoji krug prečnika AE koji sadrži tačku B, pa $\sphericalangle ABE = 90^\circ$. Kako je i $\sphericalangle ABD = 90^\circ$, to je $\sphericalangle EBA + \sphericalangle ABD = 180^\circ$, tačke B, D, E su kolinearne, sl. 285.



Sl. 285

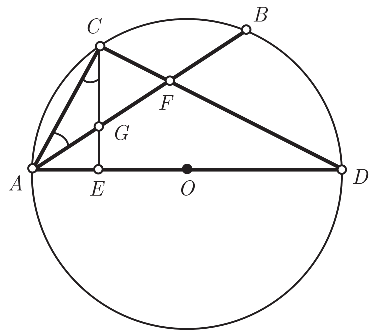


Sl. 286

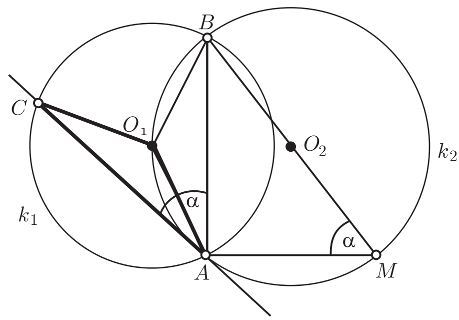
976. Dokazaćemo da je $\sphericalangle AFG = \sphericalangle AGF$, sl. 286. U trouglu ADF je $\sphericalangle AFG$ spoljašnji ugao, pa je $\sphericalangle AFG = \sphericalangle BAD + \sphericalangle ADE = \sphericalangle AED + \sphericalangle CAE = \sphericalangle AGF$, jer je i $\sphericalangle AGF$ spoljašnji u trouglu AGE. Znači da je $\triangle AFG$ jednakokraki i $AF = AG$.

977. Uglovi CAB i CDA jednaki su, kao periferijski nad jednakim lukovima, a $\sphericalangle ACE = \sphericalangle CDA$, kao uglovi sa normalnim kracima. Otuda sledi $\sphericalangle ACE = \sphericalangle CAB$. Sada se lako dokaže i da je $\sphericalangle GCF = \sphericalangle CFG$ (komplementi jednakih uglova), pa su trouglovi ACG i CGF jednakokraki, sl. 287

978. Tangentni ugao $\alpha = \sphericalangle BAC$ jednak je odgovarajućem tetivnom uglu AMB, sl. 288. Tačka O_1 je središte luka AO_1B, pa je $\sphericalangle BAO_1 = \frac{\alpha}{2}$. Dakle, $\sphericalangle BAO_1 = \sphericalangle CAO_1$, pa kako je $O_1B = O_1C$ (poluprečnici kruga), trouglovi ABO_1 i ACO_1 su podudarni. Otuda je A$B = AC$.

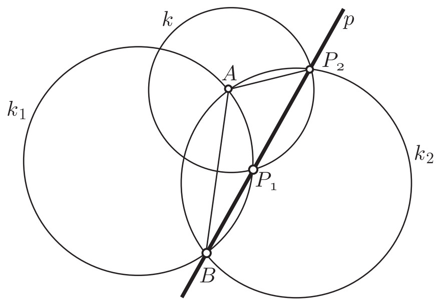


Sl. 287



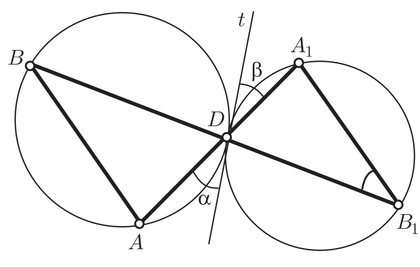
Sl. 288

979. Dokazaćemo tvrđenje za tačke B, P_1, P_2, sl. 289. Ugao ABP_1 je periferijski nad tetivom AP_1 kruga k_1, a ugao ABP_2 je periferijski nad tetivom AP_2 kruga k_2. Kako je $AP_1 = AP_2$ i $k_1 \cong k_2$, sledi da je $\sphericalangle ABP_1 = \sphericalangle ABP_2$, pa su tačke B, P_1, P_2 kolinearne.

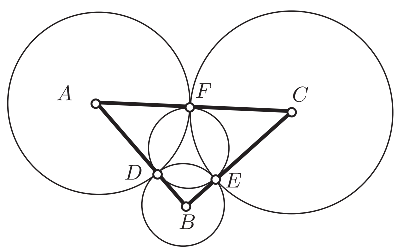


Sl. 289

980. Neka je t zajednička tangenta u tački D, sl. 290. Tangentni uglovi α i β jednaki su kao unakrsni, pa su jednaki i $\sphericalangle ABD$ i $\sphericalangle A_1B_1D$ kao odgovarajući tetivni. Zbog toga je $AB \parallel A_1B_1$.



Sl. 290



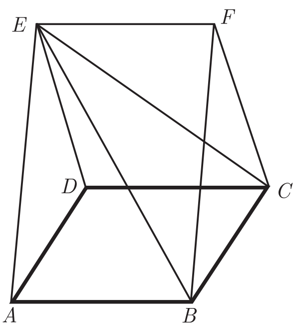
Sl. 291

981. Simetrale uglova trougla ABC moraju biti simetrale odgovarajućih tetiva, a to su stranice trougla DEF, sl. 291.

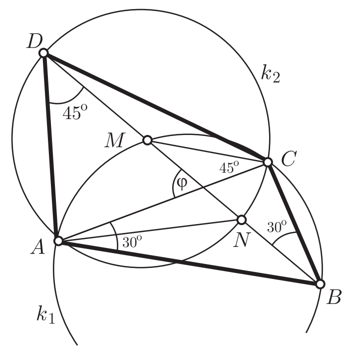
982. Neka je E van paralelograma, kao na slici 292 i F tačka takva da je $ABFE$ pravougaonik. Lako se dokazuje da je $\triangle ADE \cong \triangle BCF$, pa je $\sphericalangle AED = \sphericalangle BFC$. Međutim, $\sphericalangle BCE = \sphericalangle BFE = 90°$, što znači da je $BCFE$ tetivni četvorougao (krug prečnika BE sadrži tačke C i F). Zbog toga je $\sphericalangle BFC = \sphericalangle BEC$ (nad istom tetivom). Kako je $\sphericalangle AED = \sphericalangle BFC$, sledi da je

$\sphericalangle AED = \sphericalangle BEC$. U slučaju da je tačka E u paralelogramu $ABCD$, uglovi BEC i BFC nisu nad istim lukom već nad komplementarnim lukovima, pa će važiti alternativni uslov.

983. Trouglovi AB_1C_1, C_1A_1B i B_1CA_1 su podudarni, pa su podudarni i njihovi opisani krugovi. Tačka O, centar opisanog kruga trougla ABC, je zajednička tačka manjih krugova, jer su uglovi, na primer $\sphericalangle AB_1O$ i $\sphericalangle AC_1O$, pravi pa je AO prečnik kruga opisanog oko trougla AB_1C_1 itd.



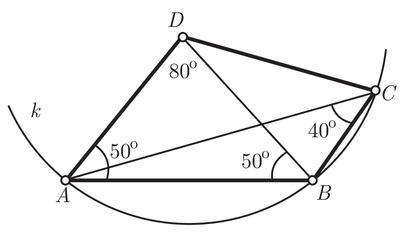
Sl. 292



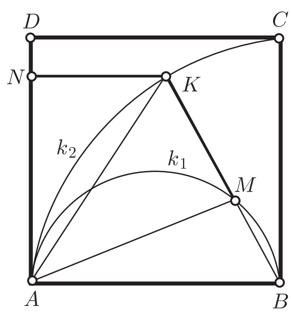
Sl. 293

984. Neka su E, F, G redom središta stranica BC, CA, AB. Četvorougao $AGEF$ je pravougaonik, pa postoji krug opisan oko ovog pravougaonika sa prečnikom AE. Tačka D pripada ovom krugu, jer je $\sphericalangle ADE = 90°$ kao ugao nad prečnikom.

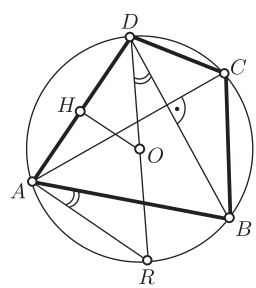
985. Označimo sa φ oštar ugao između dijagonala, sl. 293. To je spoljašnji ugao za trouglove ABS i CDS, odakle se lako dokaže da je $\varphi = \sphericalangle ADC$ i $\varphi = \sphericalangle ABC$. Stoga su podudarni krugovi opisani oko trouglova ABC i ACD. Neka su M i N presečne tačke dijagonale BD redom sa k_1 i k_2, različite od B i D. Ugao AND jednak je uglu ACD (nad istim lukom), tj. $\sphericalangle AND = 45°$, pa je trougao AND jednakokraki pravougli. Dakle, $\sphericalangle DAN = 90°$ i duž DN je prečnik. Trougao CDM je jednakokraki (CM i DM su poluprečnici), pa je $\sphericalangle BMC = 2\sphericalangle CDM$, kao spoljašnji ugao trougla CDM. Međutim, $\sphericalangle BMC = \sphericalangle BAC = 30°$ (nad istim lukom), pa je $\sphericalangle CDM = 15°$. Zbog toga je $\sphericalangle ADC = 60° = \varphi$.



Sl. 294



Sl. 295



Sl. 296

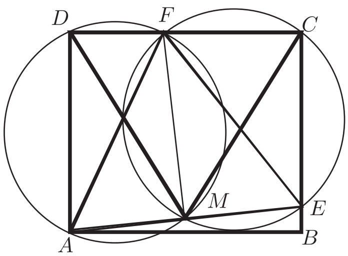
986. Izračunamo $\sphericalangle BAD = 50°$, odakle sledi da je $AD = BD$, pa krug sa centrom D i poluprečnikom DA sadrži tačku B, sl. 294. Kako je $\sphericalangle ACB = 40° = \dfrac{1}{2}\sphericalangle ADB$, sledi da tačka C pripada krugu k, a $CD = BD$. Sada iz jednakokrakog trougla BCD dobijamo $\sphericalangle BDC + 2\sphericalangle DBC = 180°$, odnosno $\sphericalangle DBC - 30° + 2\sphericalangle DBC = 180°$, odakle je $\sphericalangle DBC = 70°$.

987. Uočimo da je $\sphericalangle BAK = \sphericalangle AKN$ (naizmenični) i $\sphericalangle BAK = \sphericalangle BKA$ (jer je $AB = AK$, pa je $\sphericalangle AKN = \sphericalangle AKB$). Kako je $\sphericalangle ANK = 90° = \sphericalangle AMK$ (nad prečnikom, sl. 295), zatim

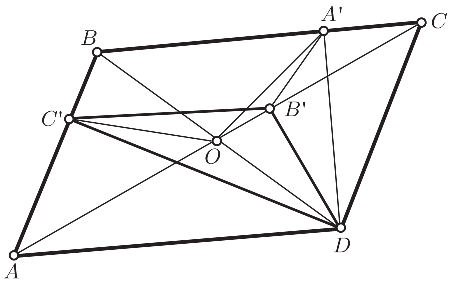
$\sphericalangle AKM = \sphericalangle AKN$ i $AK = AK$, pa je $\sphericalangle AKN = \sphericalangle AKB$, sledi da je $\triangle AMK \cong \triangle ANK$. Otuda sledi $KM = KN$.

988. Neka je DR prečnik datog kruga, sl. 296. Tada je $\sphericalangle DAR = 90°$, pa je OH srednja linija trougla i $OH = \dfrac{1}{2}AR$. Dalje je $\sphericalangle ADB = \sphericalangle CAR$ (sa normalnim kracima) i $\sphericalangle BDR = \sphericalangle BAR$ (nad istim lukom), pa je $\sphericalangle ADR = \sphericalangle ADB - \sphericalangle BDR = \sphericalangle CAR - \sphericalangle BAR = \sphericalangle CAB$. Iz jednakosti uglova ADR i CAB sledi da su i odgovarajuće tetive jednake, tj. $AR = BC$. Otuda sledi da je $OH = \dfrac{1}{2}BC$.

989. Središte M stranice AE jednakostraničnog trougla AEF je ujedno i podnožje visine, pa je $\sphericalangle AMF = 90° = \sphericalangle ADF$. Dakle, krug prečnika AF sadrži tačke M i D. Zbog toga je $\sphericalangle FDM = \sphericalangle FAM = 60°$, sl. 297. Slično se dokaže da je i $\sphericalangle FCM = 60°$, odakle sledi traženi zaključak.



Sl. 297



Sl. 298

990. Uglovi kod C' i A' su pravi, pa krug prečnika BD sadrži tačke A' i C', sl. 298, zbog čega je $\sphericalangle C'OB = 2\sphericalangle C'DB$ i $\sphericalangle BOA' = 2\sphericalangle BDA'$ Odavde sledi $\sphericalangle C'OA' = \sphericalangle C'OB + \sphericalangle BOA' = 2(\sphericalangle C'DB + \sphericalangle BDA') = 2(90° - \sphericalangle ABD + 90° - \sphericalangle DBC) = 2(180° - (\sphericalangle ABD + \sphericalangle DBC)) = 2\sphericalangle BAD$. Oko četvorouglova $AC'B'D$ i $DB'A'C$ mogu se opisati krugovi, pa je $\sphericalangle C'B'A = \sphericalangle C'DA = 90° - \sphericalangle BAD$, zatim $\sphericalangle A'B'C = \sphericalangle A'DC = 90° - \sphericalangle A'CD = 90° - \sphericalangle BAD$. Otuda sledi $\sphericalangle C'B'A' = 180° - \sphericalangle C'B'A - \sphericalangle A'B'C = 180° - (90° - \sphericalangle BAD) - (90° - \sphericalangle BAD) = 2\sphericalangle BAD$. Dakle, $\sphericalangle C'OA' = \sphericalangle C'B'A'$, odakle zaključujemo da tačke A', B', C' i O pripadaju jednom krugu.

991. Iz $\sphericalangle O_4O_1O_2 = 180° - \dfrac{\alpha_1 + \beta_1}{2}$ i $\sphericalangle O_4O_3O_2 = 180° - \dfrac{\gamma_1 + \delta_1}{2}$ sledi da je $\sphericalangle O_4O_1O_2 + \sphericalangle O_4O_3O_2 = 180°$.

992. Uočimo prečnik AF opisanog kruga. Budući da je $OM \perp BC$, pa samim tim $OM \parallel AH$, sledi da je OK srednja linija trougla AHF itd.

993. Uz konstrukciju opisanu u zadatku treba konstruisati i zajedničku tangentu AD datih krugova, $D \in BC$. Sada, kao u **zadatku 937**, dokažemo da je $\sphericalangle BAC = 90°$. Koristeći uglove sa normalnim kracima utvrdimo da je $\sphericalangle NAS = \sphericalangle BAD$ i $\sphericalangle ANS = \sphericalangle ABD$, pa kako je ABD jednakokraki trougao, izlazi da je $\sphericalangle NAS = \sphericalangle ANS$, pa je $AS = SN$. Slično dokažemo da je $AS = SM$, odakle je $SM = SN$.

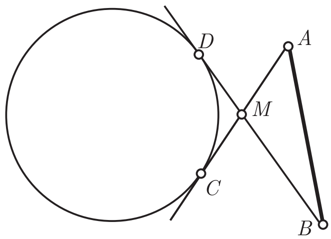
994. Videti rešenje **zadatka 958**.

995. Koristiti osobine tangentnih duži.

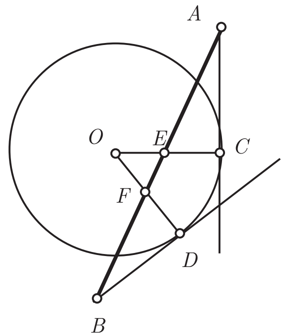
996. Ako prava AB ne seče krug, tada se tangentne duži mogu izabrati tako da se seku među sobom, sl. 299. Tada je očigledno $|AM - BM| < AB < AM + BM$ (nejednakosti trougla). Sem toga je zbog $MC = MD$ takođe i $|AC - BD| = |AM - BM|$. Dalje je $AC > AM$ i $BD > BM$, pa je konačno $|AC - BD| < AB < AC + BD$.

Ako prava AB seče krug, razlikovaćemo dva slučaja.

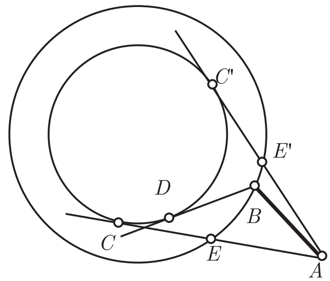
a) Presečna tetiva pripada duži AB, sl. 300. Tada je $AB > AE + BF > AC + BD$. (Na primer $AE > AC$, jer je hipotenuza veća od katete).



Sl. 299



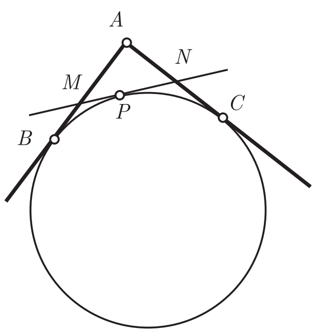
Sl. 300



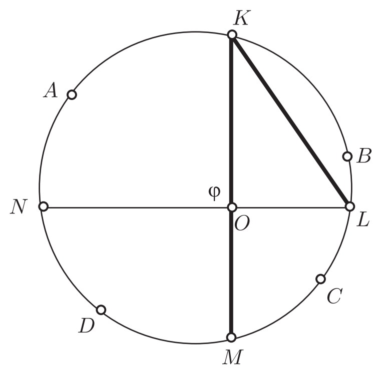
Sl. 301

b) Ako je presečna tetiva van duži AB, sl. 301, konstruisaćemo krug koncentričan sa datim kroz tačku B. Ovaj krug seče AC i AC' u E i E'. Nije teško dokazati da je $EC = BD$ i da je $AE > AB$. Prema tome, $AB < AE = AC - EC = AC - BD$.

997. Neka je P dodirna tačka tangente MN i kruga. Tada je $MP = MB$ i $NP = NC$, pa je $MN = BM + CN$, sl. 302. U trouglu AMN je $MN < AM + AN$. Saberemo dve poslednje relacije: $2MN < BM + CN + AM + AN = AB + AC$ odakle je $MN < \dfrac{1}{2}(AB + AC)$. S druge strane, MN je hipotenuza trougla AMN, pa je $MN > AM$ i $MN > AN$, odnosno $2MN > AM + AN$. Saberemo sa $MN = BM + CN$ i dobijemo $3MN > AB + AC$, odakle je $MN > \dfrac{1}{3}(AB + AC)$.



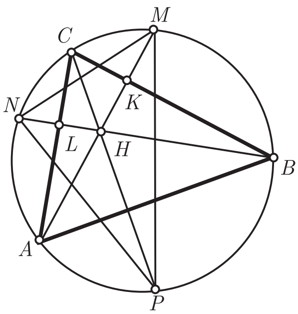
Sl. 302



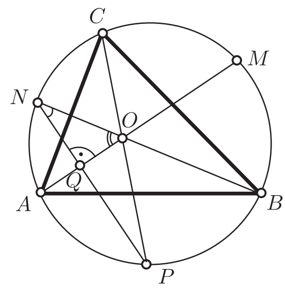
Sl. 303

998. Neka su K, L, M, N središta lukova $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$, $\widehat{CD}$, $\widehat{DA}$. Označimo sa α, β, γ, δ centralne uglove nad lucima $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$, $\widehat{CD}$, $\widehat{DA}$. U trouglu OKL, sl. 303, ugao φ između tetiva KM i LN je spoljašnji, pa je $\varphi = \sphericalangle OLK + \sphericalangle OKL$. Kako je $\sphericalangle OLK = \sphericalangle NLA + \sphericalangle ALK = \dfrac{\delta}{4} + \dfrac{\alpha}{4}$ i slično $\sphericalangle OKL = \dfrac{\beta}{4} + \dfrac{\gamma}{4}$, sledi da je $\varphi = \dfrac{1}{4}(\alpha + \beta + \gamma + \delta) = \dfrac{1}{4} \cdot 360^\circ = 90^\circ$.

999. Treba dokazati da su prave AM, BN i CP simetrale unutrašnjih uglova trougla MNP. Visine AK i BL određuju sa stranicama AC i BC dva pravougla trougla ACK i BCL, koji imaju zajednički oštar ugao kod temena C, sl. 304. Sledi da su jednaki uglovi CAK i CBL, odnosno $\sphericalangle CAM = \sphericalangle CBN$. Međutim, $\sphericalangle CPN = \sphericalangle CBN$, jer su nad istim lukom $\widehat{CN}$. Kako je $\sphericalangle CPM = \sphericalangle CAM$ (iz istih razloga), sledi da $\sphericalangle CPN = \sphericalangle CPM$. Dakle, prava CP polovi ugao



Sl. 304

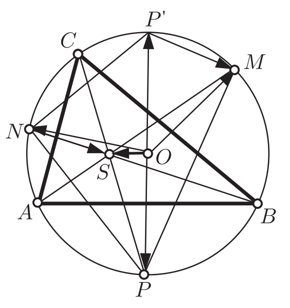


Sl. 305

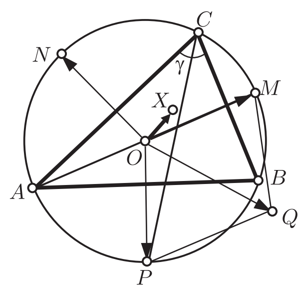
MNP. Na isti način se dokazuje da prava BN polovi ugao MNP i da prava AM polovi NMP. Dakle, ortocentar H trougla ABC je centar upisanog kruga trougla MNP.

1000. Uočimo trougao ONQ, sl. 305. Nad istim lukom jednaki su $\sphericalangle ONP = \sphericalangle BCP = \dfrac{\gamma}{2}$. Dalje je $\sphericalangle NOQ = \dfrac{\alpha}{2}+\dfrac{\beta}{2}$ (spoljašnji ugao trougla OAB), pa je $\sphericalangle ONQ+\sphericalangle QON = \dfrac{\gamma}{2}+\dfrac{\alpha}{2}+\dfrac{\beta}{2} = 90^\circ$. Zbog toga je $\sphericalangle NQA = 90^\circ$, tj. $AM\perp NP$.

1001. Neka je PP' prečnik opisanog kruga, sl. 306. Tada je $\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{P'M}$. Prema prethodnom zadatku je $BN\perp MP$, pa zbog $\sphericalangle P'MP = 90^\circ$ (ugao nad prečnikom) sledi da je $BN \parallel MP'$. Slično je $\sphericalangle PNP' = 90^\circ$ i $PN\perp AM$, pa je $NP' \parallel AM$. Sledi da je četvorougao $SMP'N$ paralelogram, pa je $\overrightarrow{NS} = \overrightarrow{P'M}$. Dakle, $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NS} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OP}$.



Sl. 306



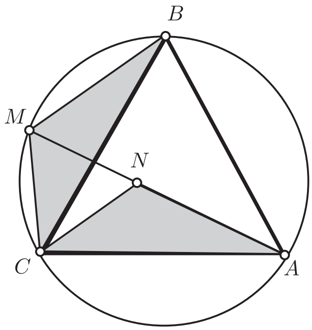
Sl. 307

1002. Možemo koristiti rešenje prethodnog zadatka. Međutim, pokazaćemo kako se može dokazati direktno.

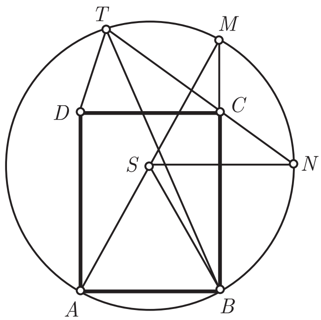
Neka je Q tačka, takva da je $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OP}$, sl. 307, i X tačka za koju je $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}$. Zbog $OM\perp BC$ i $PQ \parallel OM$ je $\sphericalangle CPQ = 90^\circ - \dfrac{\gamma}{2}$, a zbog $OM\perp BC$ i $ON\perp AC$ je $\sphericalangle NOM = 180^\circ - \gamma$. Dalje je $PQ = OM = ON$ (poluprečnici) i $QX = ON$ (jer je $OQXN$ paralelogram). Dakle, $PQ = QX$, pa je u jednakokrakom trouglu PQX lako izračunati $\sphericalangle XPQ = 90^\circ - \dfrac{\gamma}{2} = \sphericalangle CPQ$. Otuda sledi da tačka X pripada simetrali CP ugla γ. Slično se dokaže da X pripada još jednoj simetrali ugla, pa je X centar upisanog kruga trougla.

1003. Na duži AM odredimo tačku N tako da je $CN = CM$, sl. 308. Sada zbog $AC = BC$ i $\sphericalangle CAM = \sphericalangle CBM$ (nad istim lukom) trouglovi ACN i BCM su podudarni (još je i CMN jednakostranični trougao). Sledi da je $AN = BM$, pa kako je i $CM = MN$, izlazi da je $AM = AN + MN = BM + CM$.

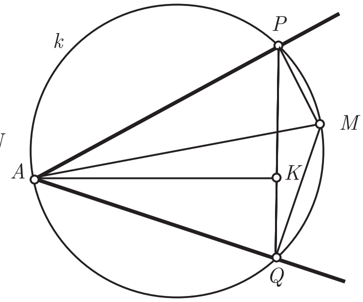
1004. Na pravoj BC odredimo tačku M tako da je $B - C - M$ i $\sphericalangle BAM = 60°$, sl. 309. Zatim konstruišemo krug k prečnika AM. Kroz središte N luka $\widehat{BM}$ i tačku C povučemo pravu do preseka sa k. To je tražena tačka T, što se lako dokazuje.



Sl. 308



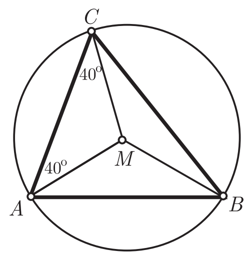
Sl. 309



Sl. 310

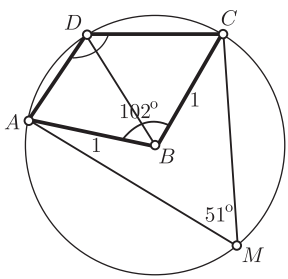
1005. Neka je k krug opisan oko pravouglog trougla AMP, sl. 310. Ovaj krug sadrži i tačku Q zato što je $\sphericalangle AQM = 90°$. Zbog toga su uglovi MPQ i MAQ jednaki (periferijski nad istim lukom). Osim toga je $\sphericalangle PAK = \sphericalangle MPQ$, kao uglovi sa normalnim kracima, pa je $\sphericalangle PAK = \sphericalangle MAQ$. Ugao MAK je ili zajednički deo uglova PAK i MAQ, pa je $\sphericalangle MAP = \sphericalangle QAK = \sphericalangle PAK - \sphericalangle MAK$, ili je $\sphericalangle MAP = \sphericalangle MAK + \sphericalangle KAP = \sphericalangle QAK$.

1006. Na osnovu datih uglova trougao AMC je jednakokraki ($AM = CM$), pa krug k poluprečnika AM sadrži tačku C, sl. 311. Izračunavanjem uglova u trouglu ACM, nalazimo da je $\sphericalangle AMC = 100°$, pa kako je $\sphericalangle ABC = 50°$, sledi da je i tačka B na krugu k. Dakle, uglovi BMC i AMB su centralni sa poznatim odgovarajućim periferijskim uglovima i $\sphericalangle BMC = 140°$, $\sphericalangle AMB = 120°$.

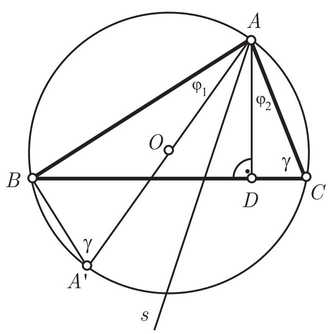


Sl. 311

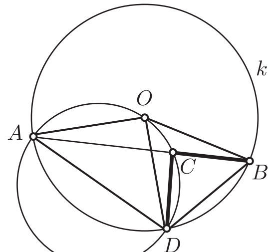
1007. Opišimo krug k sa centrom B i poluprečnikom $r = AB = BC = 1$, sl. 312. Neka je M tačka kruga k s one strane dijagonale AC s koje je i tačka B. Tada je $\sphericalangle AMC = 51°$, jer je to periferijski ugao kojem odgovara centralni ugao $ABC = 102°$. Kako je $\sphericalangle ADC + \sphericalangle AMC = 129° + 51° = 180°$, sledi da tačka D pripada krugu k, pa je $BD = 1$.



Sl. 312



Sl. 313

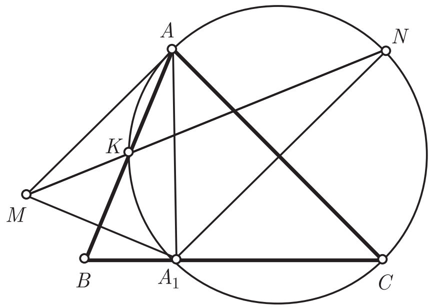


Sl. 314

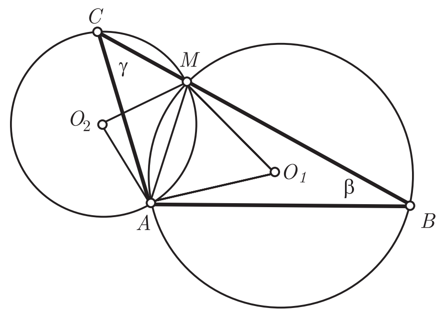
1008. Neka je AA' prečnik opisanog kruga, s simetrala ugla BAC i AD visina, sl. 313. Kako je $\sphericalangle ABA' = 90°$ (ugao nad prečnikom) i $\sphericalangle AA'B = \sphericalangle ACB$ (nad istim lukom), to je $\sphericalangle BAA' = \sphericalangle CAD = 90° - \gamma$. Otuda sledi traženi zaključak.

1009. Trouglovi OBD i OAB su jednakokraki, pa je $\sphericalangle OBD = \sphericalangle ODB$ i $\sphericalangle OAB = \sphericalangle OBA$, sl. 314. Sem toga su tetivni uglovi OAB i ODC jednaki, pa je $\sphericalangle CBD = \sphericalangle CDB$ (kao razlike jednakih uglova), odakle sledi da je $BC = CD$.

1010. Posmatraćemo slučaj kada je trougao ABC oštrougli. (Dokaz je sličan i za drugačiji trougao.) Zbog simetrije tačaka A_1 i N u odnosu na AC uglovi AA_1C i ANC su jednaki $90°$, pa tačke A, A_1, C i N pripadaju istom krugu (nad prečnikom AC_1, sl. 315). Zbog simetrije je i $\sphericalangle AA_1K = \sphericalangle AMK = \sphericalangle AMN = \sphericalangle ANM$ i $AM = AA_1 = AN$, pa su i tačke A, K, A_1 i N na istom krugu. Dakle, tačke A, A_1 i N određuju krug kome pripadaju i tačke K i C.



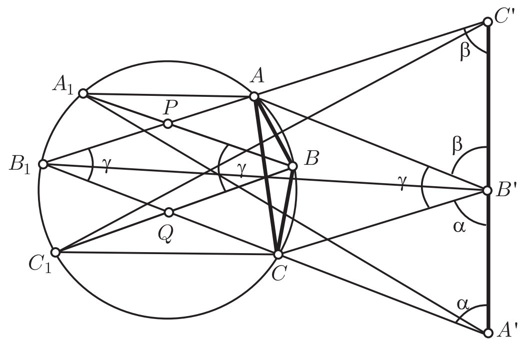
Sl. 315



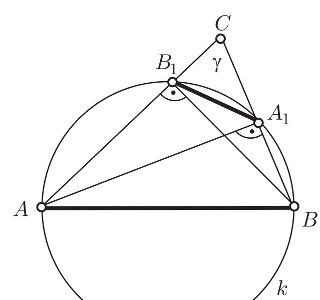
Sl. 316

1011. Trougao AO_1M je jednakokraki pri čemu je $\sphericalangle AO_1M = 2\beta$ (centralni i periferijski ugao nad istom tetivom). Tada je $\sphericalangle O_1AM = 90° - \beta$. Slično se dokazuje da je $\sphericalangle MAO_2 = 90° - \gamma$, sl. 316. Dakle, $\sphericalangle O_1AO_2 = \sphericalangle O_1AM + \sphericalangle MAO_2 = 180° - (\beta + \gamma) = \alpha$. Ako je jedan od uglova β ili γ tup ili prav, prethodni dokaz se mora izmeniti zbog različitog položaja tačaka O_1 i O_2.

1012. Prema slici 317 treba dokazati da je $\alpha + \beta + \gamma = 180°$. Nije teško dokazati da par paralelnih tetiva određuje jednakokraki trapez sa jednakim dijagonalama. Tako imamo $AB_1 = BA_1$ i $BC_1 = CB_1$. Zato što im se dijagonale polove, sledeći četvorouglovi su paralelogrami, $A_1BA'C$, $B_1AB'C$, $C_1AC'B$. Sada zaključujemo: $CA' = A_1B = AB_1 = CB'$, pa je trougao $A'B'C$ jednakokraki i $\sphericalangle CA'B' = \sphericalangle CB'A' = \alpha$. Slično dokažemo da je $\sphericalangle AB'C' = \sphericalangle AC'B' = \beta$. Zbog paralelnih krakova jednaki su i sledeći uglovi: $\sphericalangle APB = \sphericalangle A'CB' = 180° - 2\alpha$ i $\sphericalangle BQC = \sphericalangle B'AC' = 180° - 2\beta$. Zbog toga su u četvorouglu BPB_1Q unutrašnji uglovi kod P i Q redom jednaki 2α i 2β. Dalje je $\sphericalangle PB_1Q = \sphericalangle AB'C = \gamma$, a $\sphericalangle PBQ = \sphericalangle PB_1Q$ (zbog jednakih tetiva $AC = A_1C_1$). Zbir unutrašnjih uglova u četvorouglu BPB_1Q je, dakle, $2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 360°$, odakle je $\alpha + \beta + \gamma = 180°$. Prema tome, tačke A', B', C' su kolinearne.



Sl. 317



Sl. 318

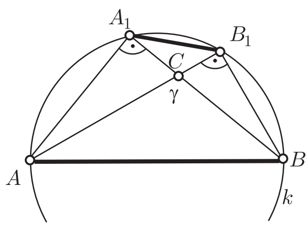
1013. Dovoljno je dokazati da je zbir periferijskih uglova koji odgovaraju tim lukovima jednak pravom uglu, odnosno da je $\sphericalangle ACK + \sphericalangle CBK + \sphericalangle BAK = 90°$ (prema slici uz tekst zadatka).

Pošto su poluprečnici ovih krugova jednaki, biće $\sphericalangle ACK + \sphericalangle CBK + \sphericalangle BAK = \sphericalangle KBA + \sphericalangle KAC + \sphericalangle KCB$ (periferijski uglovi nad jednakim lukovima u jednakim krugovima). Međutim, zbir svih šest uglova je jednak 180° kao zbir uglova u $\triangle ABC$, pa je $\sphericalangle ACK + \sphericalangle CBK + \sphericalangle BAK = 90^\circ$.

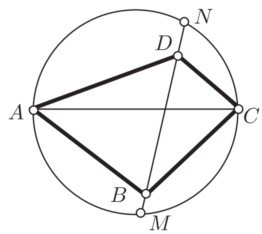
1014. Kako je $\sphericalangle AA_1B = \sphericalangle BB_1A = 90^\circ$, to se tačke A_1 i B_1 nalaze na krugu k čiji je prečnik duž AB. Ako je $\sphericalangle ACB < 90^\circ$, sl. 318, onda iz pravouglog trougla AA_1C sledi da je $\sphericalangle A_1AB_1 = \sphericalangle A_1AC = 90^\circ - \gamma = \text{const}$. Znači, periferijski ugao nad tetivom A_1B_1 kruga k je konstantan, pa se dužina tetive A_1B_1 ne menja.

Ako je $\sphericalangle ACB = 90^\circ$, onda je $A_1 \equiv B_1 \equiv C$, pa je dužina duži A_1B_1 nula.

Ako je $\sphericalangle ACB > 90^\circ$ (sl. 319), onda iz pravouglog trougla AA_1C dobijamo $\sphericalangle A_1AB_1 = \sphericalangle A_1AC = \gamma - 90^\circ = \text{const. itd.}$



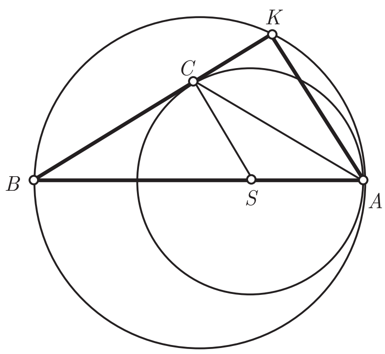
Sl. 319



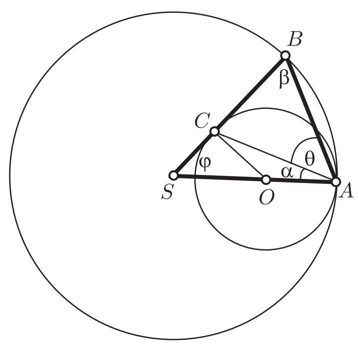
Sl. 320

1015. Ako konstruišemo krug prečnika AC ($\sphericalangle BAD$ je oštar), onda, prema Abu Hasanovoj konstrukciji (**zadatak 941**), tačke B i D leže u krugu sl. 320. Stoga je $BD < MN \leq AC$. (Prečnik je najveća tetiva.)

1016. Neka je S centar manjeg kruga. Kako je $\sphericalangle AKB = 90^\circ$ kao ugao nad prečnikom, to je $AK \parallel CS$. Trougao ASC je jednakokraki, pa je $\sphericalangle CAS = \sphericalangle ACS$. Međutim, zbog $AK \parallel CS$ je $\sphericalangle KAC = \sphericalangle ACS$, pa je i $\sphericalangle KAC = \sphericalangle CAS$, sl. 321.



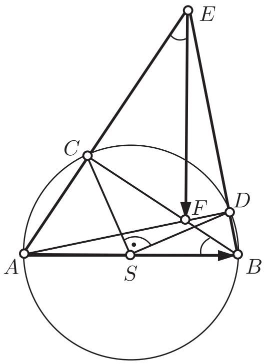
Sl. 321



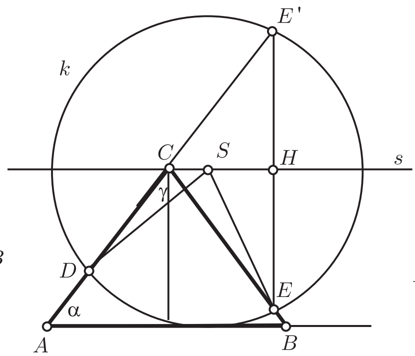
Sl. 322

1017. Neka je $\theta = \sphericalangle BAC$ traženi ugao, sl. 322, i neka je $\sphericalangle SAC = \alpha$ i $\sphericalangle SBA = \beta$. Po pretpostavci su trouglovi SAB i ACO jednakokraki (jer je $SA = SB$ i $OA = OC$), a trougao SOC je pravougli. Neka je $\sphericalangle ASB = \varphi$. Tada je iz trougla ABS: $2\beta + \varphi = 180^\circ$, tj. $\beta = 90^\circ - \dfrac{\varphi}{2}$. Dalje, ugao SOC je spoljašnji za trougao ACO, pa je $\sphericalangle SOC = \sphericalangle OAC + \sphericalangle OCA = 2\alpha$. Zatim, iz trougla SOC: $\varphi + 2\alpha = 90^\circ$, odakle je $\alpha = 45^\circ - \dfrac{\varphi}{2}$. Vidimo da je traženi ugao $\theta = \sphericalangle SAB - \alpha = \beta - \alpha$, pa zamenjujući izračunate vrednosti za α i β, dobićemo $\theta = 90^\circ - \dfrac{\varphi}{2} - \left(45^\circ - \dfrac{\varphi}{2}\right) = 45^\circ$. Traženi ugao je $\theta = 45^\circ$.

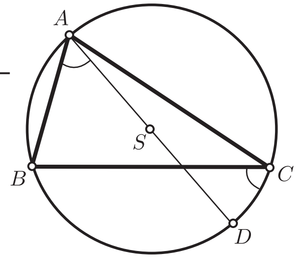
1018. Uglovi ACB i ADB su pravi (nad prečnikom), pa je F ortocentar trougla ABE i vektor $\overrightarrow{EF}$ je normalan na AB, sl. 323. Centralni ugao CSD je prav, pa je odgovarajući periferijski $\sphericalangle CAD = 45^\circ$. Zbog toga je trougao ACF jednakokraki pravougli i $AC = CF$. Kako je $\sphericalangle ABC = \sphericalangle FEC$ (sa normalnim kracima), to su pravougli trouglovi ABC i FEC podudarni, pa je $EF = AB$. Dakle, $\overrightarrow{EF}$ ima konstantnu dužinu, utvrđen pravac i smer, bez obzira na izbor tačaka C i D.



Sl. 323



Sl. 324

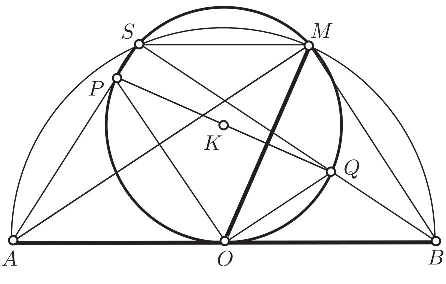


Sl. 325

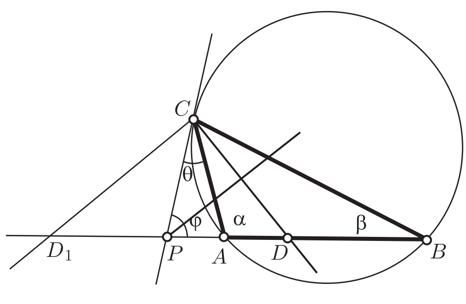
1019. Centar S navedenog kruga pripada pravoj s koja prolazi kroz C i paralelna je sa AB, sl. 324. Neka je E' tačka simetrična sa E u odnosu na s. Uglovi HCE i HCE' su jednaki i jednaki uglu α, pa je $\sphericalangle ACE + \sphericalangle ECE' = \gamma + 2\alpha = 180^\circ$, što znači da su tačke A, C, E' kolinearne. Zbog toga je $\sphericalangle CE'E = \dfrac{1}{2}\gamma$, a otuda $\sphericalangle DSE = 2\sphericalangle CE'E = \gamma = \text{const}$.

1020. Neka je AD prečnik opisanog kruga, sl. 325. Tada je $\sphericalangle ACD = 90^\circ$, a $\sphericalangle BAS = \sphericalangle BCD$ (nad istim lukom).

1021. a) Prema prethodnom zadatku je $\sphericalangle SAO = 90^\circ - \sphericalangle AMO$ i $\sphericalangle SBO = 90^\circ - \sphericalangle BMO$. Sabiranjem ovih jednakosti dobijamo $\sphericalangle SAO + \sphericalangle SBO = 180^\circ - (\sphericalangle AMO + \sphericalangle BMO) = 90^\circ$. Dakle, $\sphericalangle ASB = 90^\circ$, pa je S na datom krugu, sl. 326.



Sl. 326



Sl. 327

b) Na osnovu prethodnih jednakosti je $\sphericalangle SAO = \sphericalangle MBO$ i $\sphericalangle SBO = \sphericalangle MAO$, pa je $\triangle ABM \cong \triangle BAS$. Sledi da je četvorougao $ABMS$ trapez, pa je $AB \parallel SM$.

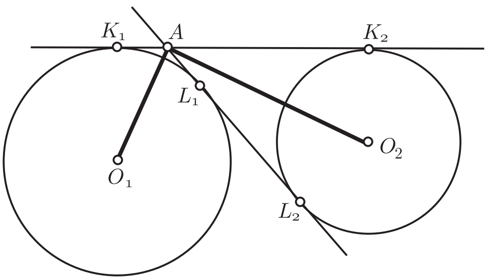
c) Prave OP i OQ su simetrale naporednih uglova AOM i MOB, pa je $\sphericalangle POQ = 90^\circ$.[19] Znači da opisani krug trougla PSQ sadrži i tačku O. Po pretpostavci je prava PQ simetrala duži OM, pa tačka M pripada opisanom krugu trougla PSQ. Centar ovog kruga je središte duži PQ.

[19] Na primer, $\triangle AMO$ je jednakokraki, pa je OP simetrala osnovice AM i ugla AOM.

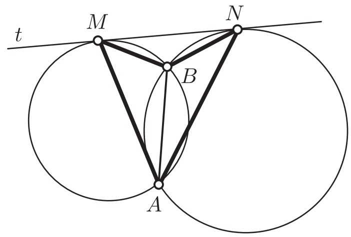
1022. a) Ugao PCA je tangentni i $\theta = \sphericalangle PCA = \beta$. Ugao α je spoljašnji ugao trougla APC, pa je $\varphi = \sphericalangle CPA = \alpha - \sphericalangle PCA = \alpha - \beta$, sl. 327.

b) Simetrala ugla CPA sa pravom AB gradi ugao $\dfrac{\varphi}{2} = \dfrac{\alpha}{2} - \dfrac{\beta}{2}$. Kako je $\sphericalangle CD_1A = \alpha - \dfrac{\gamma_1}{2} = \alpha - \left(\dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{\beta}{2}\right) = \dfrac{\alpha}{2} - \dfrac{\beta}{2}$, izlazi da je $\dfrac{\varphi}{2} = \sphericalangle CD_1A$, pa su prava CD_1 i simetrala ugla φ paralelne.

c) U trouglu CD_1P je $\sphericalangle PCD_1 = \alpha - \sphericalangle CD_1P = \alpha - \beta - \left(\dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{\beta}{2}\right) = \dfrac{\alpha}{2} - \dfrac{\beta}{2} = \sphericalangle CD_1P$, pa je trougao jednakokraki i $CP = D_1P$. Trougao CDD_1 je pravougli ($CD \perp CD_1$ kao simetrale naporednih uglova), pa su uglovi CDD_1 i DCP komplementni sa dva jednaka ugla i samim tim su jednaki među sobom. Sledi da je $CP = PD$, a to znači i $DP = D_1P$.



Sl. 328

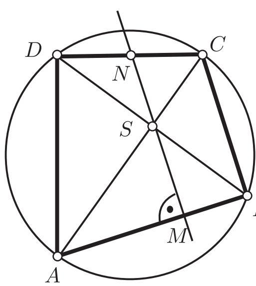


Sl. 329

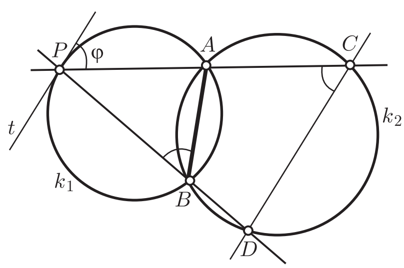
1023. Tačka A pripada krugu prečnika O_1O_2. Zaista, $\sphericalangle O_1AO_2$ je prav jer je $\sphericalangle O_1AO_2 = \sphericalangle O_1AL_2 + \sphericalangle L_2AO_2 = \dfrac{1}{2}(\sphericalangle K_1AL_1 + \sphericalangle L_2AK_2) = 90°$, sl. 328. Slično se dokazuje i za ostale tačke B, C, D.

1024. $\sphericalangle NMB + \sphericalangle MBN + \sphericalangle BNM = 180°$, sl. 329. Sada dva puta iskoristimo činjenicu da je ugao između tetive i tangente jednak periferijskom uglu nad tom tetivom: $\sphericalangle NMB = \sphericalangle MAB$, $\sphericalangle MNB = \sphericalangle BAN$, te je $\sphericalangle MAN + \sphericalangle MBN = \sphericalangle MAB + \sphericalangle BAN + \sphericalangle MBN = \sphericalangle NMB + \sphericalangle MNB + \sphericalangle MBN = 180°$.

1025. Označimo sa M i N tačke u kojima pomenuta prava seče stranice AB i CD. Uglovi CDB i CAB su jednaki kao periferijski uglovi nad istim lukom, sl. 330, a uglovi CAB i BSM su jednaki kao uglovi sa normalnim kracima. $\sphericalangle BSM = \sphericalangle DSN$ (unakrsni uglovi), pa je $\sphericalangle CDB = \sphericalangle DSN$, a odavde sledi da je $DN = SN$. Na sličan način zaključujemo da je $\sphericalangle ACD = \sphericalangle ABD = \sphericalangle ASM = \sphericalangle CSN$, pa je $CN = SN$. Dakle, $CN = DN$.



Sl. 330



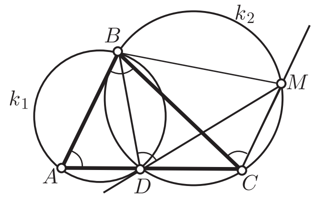
Sl. 331

1026. Ako dijagonala tangentnog četvorougla sadrži centar, onda se lako dokazuje da je ona simetrala uglova čija temena sadrži. Otuda sledi da su dijagonale datog četvorougla normalne jedna na drugoj, a zatim se dokazuje da su stranice ovog četvorougla jednake.

1027. Ugao φ koji tangenta gradi sa tetivom PA, kao što znamo, jednak je odgovarajućem tetivnom uglu ABP, sl. 331. Ugao ABP je suplementan uglu ABD, a istom uglu je suplementan ugao ACD (osobina tetivnog četvorougla). Prema tome, $\sphericalangle ACD = \sphericalangle ABP$, pa je i $\sphericalangle ACD = \varphi$. Kako su φ i $\sphericalangle ACD$ naizmenični, sledi da je $CD \parallel t$.

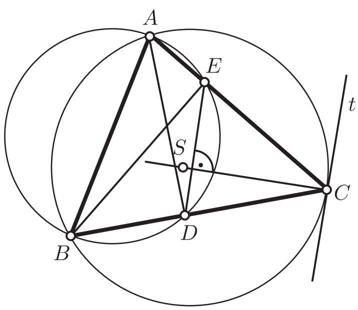
1028. Slično prethodnom zadatku.

1029. Uglovi BDM i BCM su jednaki jer su u krugu k_2 nad istom tetivom BM, sl. 332. Dalje je $\sphericalangle BDM = \sphericalangle BAD$ (tangentni i periferijski u krugu k_1). Zbog $AC = BC$ je $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BAC$, pa je $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BCM$, a ovi uglovi su naizmenični za prave AB i CM. Sledi $AB \parallel CM$.

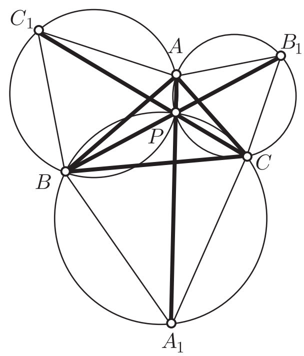


Sl. 332

1030. Neka su AD i BE visine trougla ABC, S centar opisanog kruga i t tangenta opisanog kruga u temenu C, sl. 333. Kako su uglovi ADB i AEB pravi, to krug prečnika AB sadrži tačke D i E. Prema **zadatku 1028** je $DE \parallel t$, pa kako je poluprečnik SC normalan na tangentu t, to je i $SC \perp DE$. Slično dokazujemo za SA i SB.

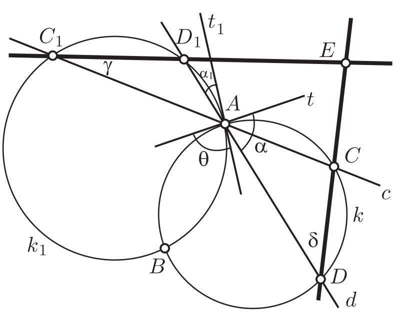


Sl. 333

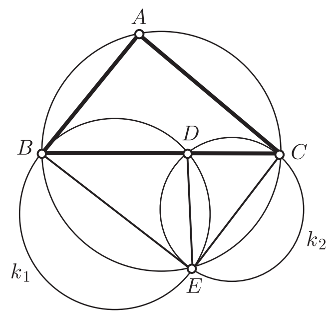


Sl. 334

1031. Trouglovi ABB_1 i ACC_1 su podudarni ($AB = AC_1$, $AB_1 = AC$ i $\sphericalangle BAB_1 = \alpha + 60^\circ = \sphericalangle CAC_1$), pa je $BB_1 = CC_1$. Slično dokažemo da je $AA_1 = BB_1$. Neka je P presečna tačka opisanih krugova jednakostraničnih trouglova ABC_1 i ACB_1. Četvorouglovi $BPAC_1$ i $APCB_1$ su tetivni, pa zbog $\sphericalangle AC_1B = 60^\circ = \sphericalangle AB_1C$, izlazi da je $\sphericalangle APB = \sphericalangle APC = 120^\circ$, sl. 334. Zbog toga je $\sphericalangle BPC = 120^\circ$, pa tačka P pripada i opisanom krugu trougla BCA_1. Dokažimo da tačka P pripada dužima AA_1, BB_1, CC_1. Periferijski uglovi $\sphericalangle APB_1$, $\sphericalangle B_1PC$ i $\sphericalangle CPA_1$ su svi od 60° i $\sphericalangle APA_1 = \sphericalangle APB_1 + \sphericalangle B_1PC + \sphericalangle CPA_1 = 180^\circ$, pa su tačke A, P, A_1 kolinearne itd.



Sl. 335

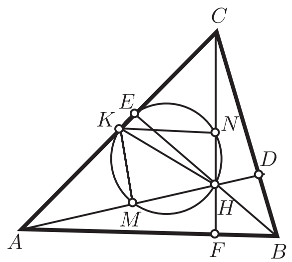


Sl. 336

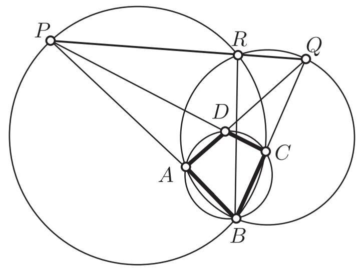
1032. Neka su t i t_1 tangente u tački A, sl. 335. Ugao θ pod kojim se seku t i t_1 je određen. Zbog toga je zbir uglova, označenih na slici sa α_1 i α, takođe stalna veličina (dopuna do 180°). Ugao ECC_1 je spoljašnji u trouglu ACD, pa je $\sphericalangle ECC_1 = \delta + \sphericalangle CAD = \alpha$ (jer je ugao između t i tetive AC jednak uglu δ). Sada je $\sphericalangle ECC_1 + \gamma = \alpha_1 + \alpha = \text{const}$. Zbog toga je $\sphericalangle CEC_1 = 180° - \sphericalangle ECC_1 - \gamma = 180° - \alpha_1 - \alpha = \theta = \text{const}$.

1033. Neka je E druga zajednička tačka krugova k_1 i k_2, sl. 336. Tada je $\sphericalangle BED = \sphericalangle ABC$ i $\sphericalangle CED = \sphericalangle ACB$ (kao tangentni i odgovarajući tetivni), pa je $\sphericalangle BEC = \sphericalangle BED + \sphericalangle CED = \sphericalangle ABC + \sphericalangle ACB$. Zbog toga su uglovi BAC i BEC suplementni, pa je četvorougao $ABEC$ tetivni.

1034. Neka je K središte stranice AC. Duž KN je paralelna sa AB (srednja linija trougla ACF), pa je $\sphericalangle KNH = 90°$. Slično je i $\sphericalangle KMH = 90°$, sl. 337, pa krug prečnika KH sadrži tačke M, N i E. (Ako je $E \neq K$, tada je $\sphericalangle KEH = 90°$, pa je E na krugu.)



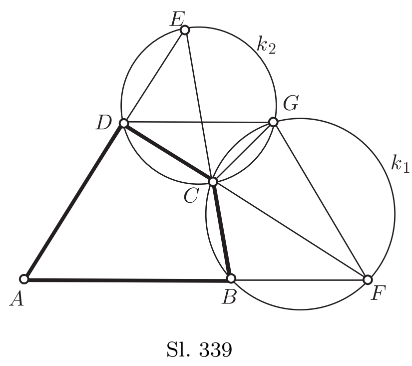
Sl. 337



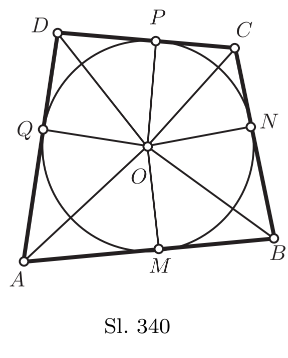
Sl. 338

1035. Uglovi PRB i PCB su nad istim lukom, pa su jednaki. Isto tako su jednaki i uglovi BRQ i BAQ, sl. 338. Kako su uglovi BCP i BAQ suplementni, to je $\sphericalangle BRP + \sphericalangle BRQ = 180°$.

1036. Neka su k_1 i k_2 krugovi opisani oko trouglova BCF i CDE koji imaju zajedničku tetivu CG, sl. 339. Treba dokazati da opisani krugovi trouglova ADF i ABE prolaze kroz tačku G. Za $\triangle ADF$ dovoljno je dokazati da je $\sphericalangle BAD + \sphericalangle DGF = 180°$. Vidimo da je $\sphericalangle CGD = \sphericalangle CED = \sphericalangle BEA$. Četvorougao $BCGF$ je tetivni, pa je $\sphericalangle CGF$ suplementan sa $\sphericalangle FBC$. Međutim, i $\sphericalangle ABE$ je suplement sa $\sphericalangle CBF$, pa je $\sphericalangle CGF = \sphericalangle ABE$. Kako je $\sphericalangle DGF = \sphericalangle DGC + \sphericalangle CGF$, to je $\sphericalangle BAE + \sphericalangle DGF = \sphericalangle BAE + \sphericalangle AEB + \sphericalangle ABE = 180°$ (zbir uglova u trouglu ABE). Slično se dokazuje za $\triangle ABE$.



Sl. 339

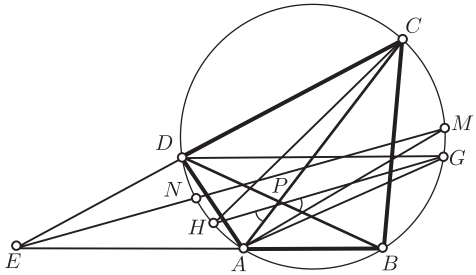


Sl. 340

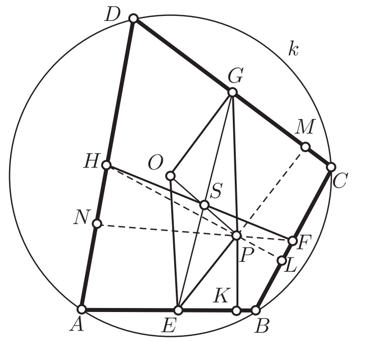
1037. Neka su M, N, P, Q dodirne tačke stranica i upisanog kruga, sl. 340. Prave AO, BO, CO, DO su simetrale uglova QOM, MON, NOP, POQ, itd.

1038. Neka je EM simetrala ugla BEC i neka je GH prava paralelna sa EM, kroz presek P dijagonala, sl. 341. Dokazaćemo da je GH simetrala ugla BPC. Lukovi $\widehat{MG}$ i $\widehat{NH}$ su jednaki, jer ih odsecaju paralelne tetive (videti i **zadatak 969**). Sada iz trougla AEM dobijamo: $\sphericalangle BEM =$

$\sphericalangle BAM - \sphericalangle AMN$ (osobina spoljašnjeg ugla trougla), pa je zbog $\widehat{MG} = \widehat{NH}$[20] takođe, $\sphericalangle BEM = \sphericalangle BAG - \sphericalangle AGH$. Slično utvrdimo da je $\sphericalangle CEM = \sphericalangle CHG - \sphericalangle DCH$. Kako je $\sphericalangle BEM = \sphericalangle CEM$, biće $\sphericalangle BAG - \sphericalangle AGH = \sphericalangle CHG - \sphericalangle DCH$, odakle je $\sphericalangle BAG + \sphericalangle DCH = \sphericalangle CHG + \sphericalangle AGH$. Kako je $\sphericalangle BAG = \sphericalangle BDG$, $\sphericalangle DCH = \sphericalangle DGH$ i $\sphericalangle AGH = \sphericalangle ACH$, biće $\sphericalangle BDG + \sphericalangle DGH = \sphericalangle CHG + \sphericalangle CAH$, pa je $\sphericalangle BPG = \sphericalangle HPA$. Zbog toga je GH simetrala ugla APD. Slično dokazujemo i za druge uglove.

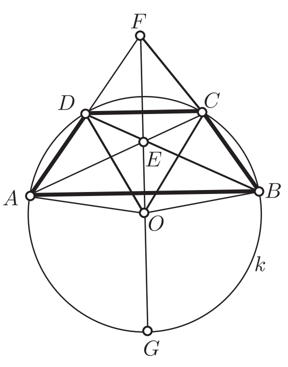


Sl. 341

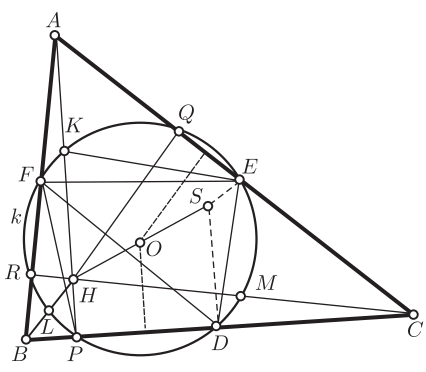


Sl. 342

1039. Neka je $ABCD$ dati četvorougao, k opisani krug sa centrom O i E, F, G, H središta stranica, sl. 342. Označimo sa S presečnu tačku srednjih linija EG i FH, a zatiin odredimo tačku P, tako da je S središte duži OP. Kao što smo ranije videli (**zadatak 859**) tačka S je središte duži EG, pa je četvorougao $OEPG$ paralelogram. Dakle, $GP \parallel OE$. Kako je $OE \perp AB$ (simetrala tetive), to je i $GP \perp AB$. Slično se dokazuje da je $FP \perp AD$, $EP \perp CD$ i $HP \perp BC$.



Sl. 343



Sl. 344

1040. Da bismo dokazali da je četvorougao $AOED$ tetivni, dovoljno je dokazati da je $\sphericalangle AOD = \sphericalangle AED$, sl. 343. Trapez upisan u krug mora biti jednakokraki i $AD = BC$, pa je $\sphericalangle ACD = \sphericalangle BDC$ (videti **zadatak 969**). U trouglu CDE važi: $\sphericalangle AED = \sphericalangle ACD + \sphericalangle BDC = 2\sphericalangle ACD = \sphericalangle AOD$. (Ugao AOD je centralni, a $\sphericalangle ACD$ periferijski nad istim lukom.) Za dokaz da je četvorougo $AOCF$ tetivni, koristićemo osobinu da su naspramni uglovi suplementni. Iz trougla AFC je $\sphericalangle AFC = \sphericalangle ACB - \sphericalangle FAC = \frac{1}{2}\sphericalangle AOB - \frac{1}{2}\sphericalangle DOC$. (Reč je o nekonveksnom uglu nad lukom

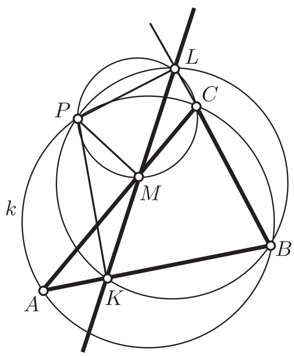
[20] Za dva kružna luka jednog kruga kažemo da su jednaki ako su im jednaki odgovarajući centralni (ili periferijski) uglovi.

AGB na sl. 343.) Sada imamo: $\sphericalangle AOC+\sphericalangle AFC=(\sphericalangle AOD+\sphericalangle DOC)+\left(\frac{1}{2}\sphericalangle AOB-\frac{1}{2}\sphericalangle DOC\right)=\sphericalangle AOD+\frac{1}{2}\sphericalangle AOB+\frac{1}{2}\sphericalangle DOC=\sphericalangle AOD+\sphericalangle AOG+\sphericalangle DOE=180^\circ$.

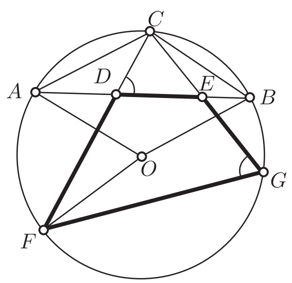
1041. Neka je ABC dati trougao, tačke D, E, F središta stranica i k krug opisan oko trougla DEF, sl. 344. Treba dokazati da ovaj krug sadrži podnožja P, Q, R visina i središta K, L, M duži AH, BH, CH (H je ortocentar). Dokazaćemo ovo tvrđenje za tačke P i K. Relativno lako se dokazuje da je četvorougao $DEFP$ jednakokraki trapez (videti **zadatak 866**). Zbog toga je $\sphericalangle DPF+\sphericalangle DEF=180^\circ$ i $P\in k$. Duž FK je srednja linija trougla ABH, pa je $FK\parallel BQ$, a kako je i $DF\parallel AC$, sledi da je $\sphericalangle DFK=90^\circ$. Slično dokažemo i da je $\sphericalangle DEK=90^\circ$, pa je $\sphericalangle DFK+\sphericalangle DEK=180^\circ$ i četvorougao je tetivni. Dokaz za tačke Q, R, L i M je sličan.

1042. Neka je S centar kruga opisanog oko trougla ABC i O centar kruga k, sl. 344. Tačka O dobija se u preseku simetrala tetiva PD i QE. Ove simetrale sadrže srednje linije pravouglih trapeza $DSHP$ i $EQHS$, pa je tačka O središte njihovog zajedničkog kraka HS.

1043. Neka je P proizvoljna tačka kruga opisanog oko trougla ABC i K, L, M podnožja normala iz P na prave AB, BC, CA sl. 345. Zato što imaju po dva naspramna ugla prava, oko četvorouglova $PKBL$ i $PMCL$ možemo opisati krugove. Tada je $\sphericalangle PLM=\sphericalangle PCM=\sphericalangle PCA=\sphericalangle PBA=\sphericalangle PBK=\sphericalangle PLK$, pa je $K\in LM$.



Sl. 345



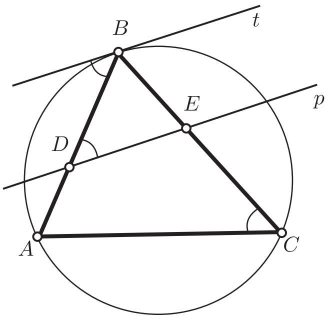
Sl. 346

1044. Neka su K, L, M presečne tačke opisanih krugova. Tada je $\sphericalangle PLC=\sphericalangle PLB=90^\circ$ kao uglovi nad prečnicima, pa je $PL\perp BC$. Slično dokažemo da je $PM\perp AC$ i $PK\perp AB$, pa se zadatak svodi na prethodni.

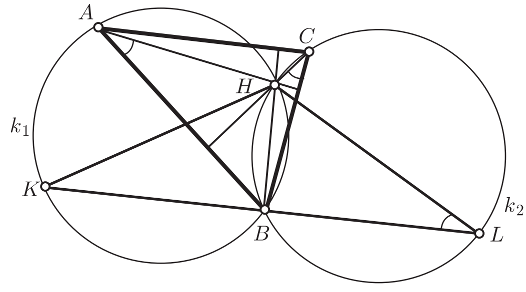
1045. Uočimo da je $\sphericalangle CGF=\frac{1}{2}COF=\frac{1}{2}(\sphericalangle AOF+\sphericalangle AOC)$. Zatim $\sphericalangle CDB=\sphericalangle CAD+\sphericalangle ACD$ (spoljašnji ugao trougla), odnosno $\sphericalangle CDB=\sphericalangle CAB+\sphericalangle ACF=\frac{1}{2}(\sphericalangle COB-\sphericalangle AOF)$, sl. 346. Četvorougao $DEGF$ biće tetivni ako je $\sphericalangle CGF=\sphericalangle CDB$, a to će biti ako je $\frac{1}{2}\sphericalangle(AOF+\sphericalangle AOC)=\frac{1}{2}(\sphericalangle COB+\sphericalangle AOF)$, a odavde je $\sphericalangle AOC=\sphericalangle COB$. Dakle, tačka C je središte luka $\widehat{AB}$.

1046. Ako su α, β, γ i δ unutrašnji uglovi nekog četvorougla, tada je zbir dva naspramna ugla četvorougla dobijenog u preseku simetrala uglova α, β, γ, δ jednak: $\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}\beta+\frac{1}{2}\gamma+\frac{1}{2}\delta=\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma+\delta)=180^\circ$.

1047. Tangentni ugao između t i AB jednak je uglu ACB (tetivni ugao nad istom tetivom). Isti tangentni ugao jednak je uglu BDE kao naizmenični, sl. 347. Prema tome, $\sphericalangle BDE=\sphericalangle ACE$, pa kako je $\sphericalangle BDE+\sphericalangle ADE=180^\circ$, to je i $\sphericalangle ACE+\sphericalangle ADE=180^\circ$.



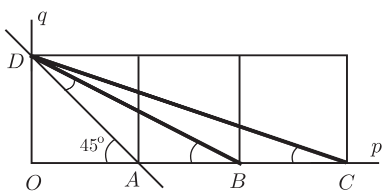
Sl. 347



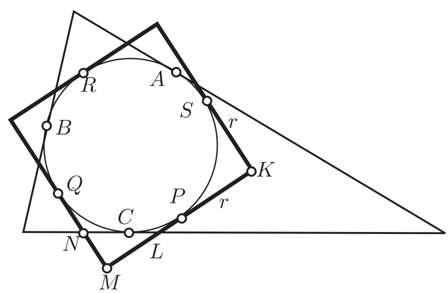
Sl. 348

1048. Neka su k_1 i k_2 krugovi opisani oko trouglova ABH i BCH i neka su HK i HL redom prečnici ovih krugova. Tada su tačke K, B, L kolinearne (videti **zadatak 940**), pa je $\sphericalangle BKH = \sphericalangle BAH = \sphericalangle BCH = \sphericalangle BLH$, sl. 348, te je trougao HKL jednakokraki. ($\sphericalangle BAH = \sphericalangle BCH$ kao ugao sa normalnim kracima.) Dakle, krugovi imaju jednake prečnike itd.

1049. Kao u **zadatku 901** dokažemo da je $\sphericalangle OAD + \sphericalangle OBD + \sphericalangle OCD = 90°$, sl. 349. Sada je $\sphericalangle ADB = 45° - \sphericalangle OBD$, pa kako je i $\sphericalangle OCD = 45° - \sphericalangle OBD$, to je $\sphericalangle ADB = \sphericalangle OCD$. Ako oko trougla DBC opišemo krug tada je tangentni ugao, koji odgovara tetivi DB, jednak tetivnom uglu BCD. Kako je $\sphericalangle ADB$ u našem slučaju tangentni, sledi da je prava AD tangenta opisanog kruga.



Sl. 349

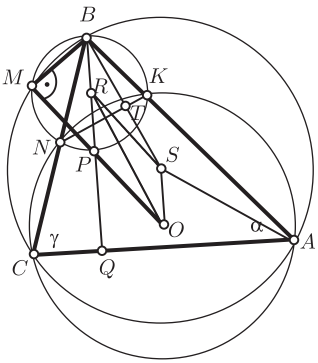


Sl. 350

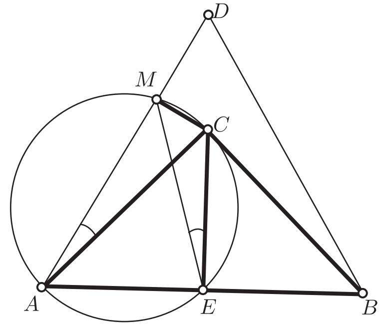
1050. Ako sa r označimo dužine tangentnih duži iz temena kvadrata, tada je obim kvadrata $8r$, sl. 350. Ako su dva temena kvadrata u trouglu, tada je sam zbir tangentnih duži iz ta dva temena jednak $4r$, a to je pola obima, i ima još delova stranica kvadrata u trouglu. Ako je samo jedno teme kvadrata u trouglu (na sl. 350 teme K), tada za teme M van trougla imamo: $LN = \dfrac{1}{3}2r$ (videti **zadatak 997**). Zbir delova stranica unutar trougla je: $2r + l_1 + l_2 + l_2 > 2r + 3 \cdot \dfrac{1}{3}2r = 4r$.

1051. Pretpostavimo da je trougao ABC oštrougli. (Dokaz je sličan i ako ova pretpostavka ne važi.) Označimo sa R i S centre krugova opisane redom oko trouglova KBN i ABC, sl. 351. Tada je $\sphericalangle ASB = 2\gamma$. Četvorougao $AKNC$ je tetivni, zbog čega je $\sphericalangle BNK = 180° - \sphericalangle KNC = \alpha$, pa je $\sphericalangle BKN = \gamma$. Otuda je $\sphericalangle NRB = 2\gamma$, pa iz jednakokrakih trouglova ABS i BNR dobijamo $\sphericalangle ABS = \sphericalangle NRB = 90° - \gamma$. Sledi da su trouglovi BTK i BQC pravougli, sl. 351 i $BR \perp AC$ a $BS \perp KN$. Kako je i $OS \perp AC$ odnosno $RO \perp KN$, sledi da je $BR \parallel OS$ i $BS \parallel RO$. Prema tome, $OSBR$ je paralelogram. Ako je BP prečnik kruga opisanog oko BNK, tada je i $OSRP$ paralelogram. Kako S i R leže na simetrali tetive BM, to je $SR \perp BM$, odakle je i $OP \perp BM$. Sem toga, ugao nad prečnikom je prav, pa je takođe $PM \perp BM$, što kazuje da su tačke O, P, M kolinearne i $\sphericalangle OMB = 90°$.

1052. Trougao ACE je pravougli pa je centar njegovog opisanog kruga središte hipotenuze AC, sl. 352. Slično je i sa trouglom ACM. Dalje, oko četvorougla $AECM$ može se opisati krug



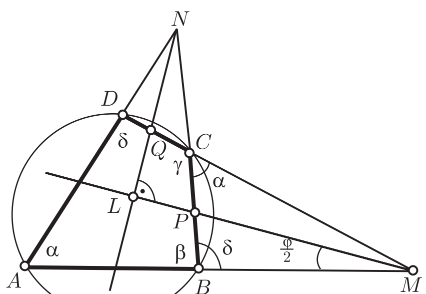
Sl. 351



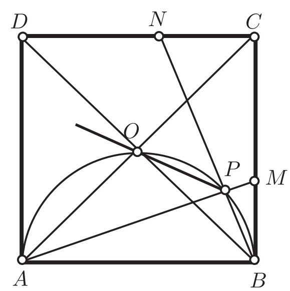
Sl. 352

prečnika AC. U njemu je $\sphericalangle CEM = \sphericalangle CAM$ (periferijski uglovi nad tetivom CM). Kako je $\sphericalangle CAM = 60^\circ - 45^\circ = 15^\circ$, to je i $\sphericalangle CEM = 15^\circ$.

1053. Neka su α, β, γ i δ uglovi četvorougla $ABCD$ redom u temenima A, B, C i D. Neka je $\sphericalangle AMD = \varphi$. Označimo sa P presek simetrale ugla AMD i stranice BC, a sa Q presek simetrale ugla ANB i stranice CD, sl. 353. Kako je dati četvorougao tetivni to je $\sphericalangle PBM = \delta$ i $\sphericalangle PCM = \alpha$. Ugao β je spoljašnji za trougao BMC, pa je $\varphi = \beta - \alpha$. Slično, β je spoljašnji ugao trougla PBM, pa je $\sphericalangle LPC = \sphericalangle BPM = \beta - \dfrac{\varphi}{2} = \beta - \dfrac{\beta - \alpha}{2} = \dfrac{\alpha + \beta}{2}$. Slično je $\sphericalangle CQL = \dfrac{\alpha + \delta}{2}$, pa iz četvorougla $LPCQ$ dobijamo: $\sphericalangle PLQ = 360^\circ - \dfrac{\alpha + \beta}{2} - \dfrac{\alpha + \delta}{2} - \gamma = 360^\circ - (\alpha + \gamma) - \dfrac{\beta + \delta}{2} = 90^\circ$. (Pri tome $\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180^\circ$, jer je četvorougao $ABCD$ tetivni.)



Sl. 353

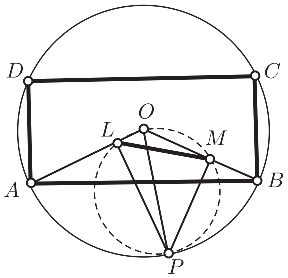


Sl. 354

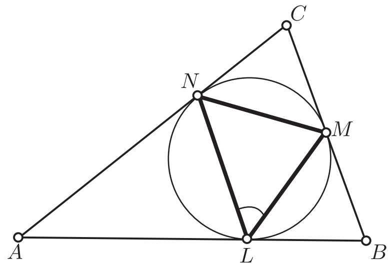
1054. Dovoljno je dokazati da je $\sphericalangle BNM + \sphericalangle CNM = 180^\circ$. Zaista, $\sphericalangle BNM + \sphericalangle CNM = 180^\circ - \sphericalangle MAB + 180^\circ - \sphericalangle CDM = 360^\circ - (\alpha + \delta) = 360^\circ - 180^\circ = 180^\circ$.

1055. Očigledno su pravougli trouglovi ABM i BCN podudarni, sl. 354. Zbog toga je $\sphericalangle AMB = \sphericalangle BNC$. Međutim, $\sphericalangle BNC + \sphericalangle CBN = 90^\circ$. Dakle, $\sphericalangle BPA = 90^\circ$, pa krug nad prečnikom AB sadrži tačke O i P. Kako je $\sphericalangle ABO = 45^\circ$, to je i $\sphericalangle APO = 45^\circ$ kao periferijski nad istom tetivom AO. Zbog toga je PQ simetrala pravog ugla APN.

1056. Četvorougao $PLOM$, gde je O presek dijagonala AC i BD, je tetivni jer su uglovi PLO i PMO pravi, sl. 355. Centar kruga k_1 opisanog oko ovog četvorougla je tačka S, središte duži $PO = AO$. Krug k_1 je stalnog poluprečnika i $\sphericalangle LPM = 180^\circ - \sphericalangle LOM$ je periferijski ugao ovog kruga stalne veličine, pa dužina tetive LM ne zavisi od izbora tačke P na krugu.



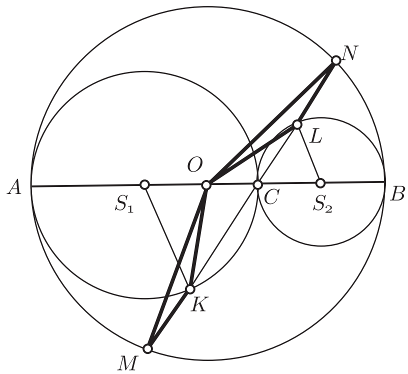
Sl. 355



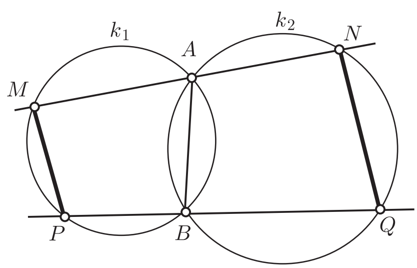
Sl. 356

1057. Dokažimo, na primer, da je $\sphericalangle NLM$ oštar, sl. 356. Znamo da je $\sphericalangle CNM = \sphericalangle NLM$ i $\sphericalangle CMN = \sphericalangle NLM$ (tangentni i tetivni nad tetivom MN). Prema tome, $\sphericalangle NLM$ jednak je uglu na osnovici jednakokrakog trougla CMN, pa mora biti oštar.

1058. Neka su O, S_1, S_2 centri krugova, sl. 357. Trouglovi OS_1K i LS_2O su podudarni ($OS_2 = r - r_2 = r_1 = S_1K$; slično, $OS_1 = S_2L = r_2$ i $S_1K \parallel S_2L$, pa je $\sphericalangle OS_1K = \sphericalangle OS_2L$). Zbog toga je $OK = OL$, pa je trougao OKL jednakokraki. Kako je i $\triangle OMN$ jednakokraki, nije teško dokazaati da je $MK = LN$.



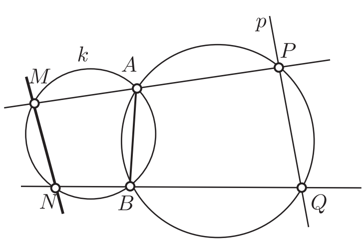
Sl. 357



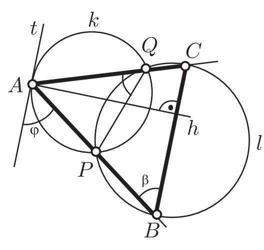
Sl. 358

1059. Kako su četvorouglovi $ABPM$ i $ABQN$ upisani u krugove k_1 i k_2, sl. 358, to je $\sphericalangle MPB = \sphericalangle BAN = 180^\circ - \sphericalangle BQN$. Odatle sledi da je $MP \parallel NQ$.

1060. Označimo sa M i N presečne tačke pravih AP i BQ sa krugom k, sl. 359. Prema prethodnom zadatku biće $MN \parallel p$, a kako je M stalna tačka i prava p stalna, to je i tačka N stalna. Prema tome, sve prave BQ prolaze kroz istu tačku N.



Sl. 359

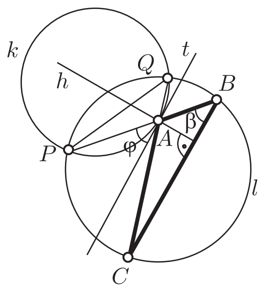


Sl. 360

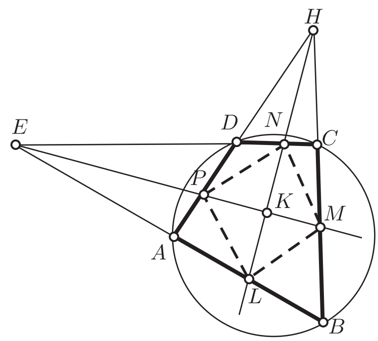
1061. Radi konkretnosti pretpostavimo da svaki od datih krugova sadrži manji luk PQ drugog kruga. Razlikovaćemo četiri slučaja. 1° Tačke B i C pripadaju većem luku kruga l, a tačka A većem luku kruga k. 2° Tačka A pripada manjem luku kruga k. 3° Jedna od tačaka B i C pripada manjem, a druga većem luku kruga l. 4° Jedna od pravih AP i AQ je tangenta kruga l. Ovde ćemo dokazati slučajeve 1° i 2°.

1° (sl. 360) Četvorougao $BCQP$ je tetivni, pa je $\beta + \sphericalangle CQP = 180°$ i kako je $\sphericalangle AQP + \sphericalangle CQP = 180°$, sledi da je $\sphericalangle AQP = \beta$. Međutim, tangentni ugao φ je jednak tetivnom uglu AQP, pa je $\varphi = \beta$. Kako su φ i β naizmenični u odnosu na prave t i BC, to je $t \parallel BC$. Sledi da je $h \perp t$, pa prava prolazi kroz centar datog kruga k.

2° (sl. 361) Imamo jednakosti $\sphericalangle CQP = \beta$ (nad istim lukom) i $\varphi = \sphericalangle CQP$ (tangentni i tetivni), pa je $\varphi = \beta$ (saglasni uglovi), zbog čega je $t \parallel BC$. Dakle, $h \perp t$ itd.



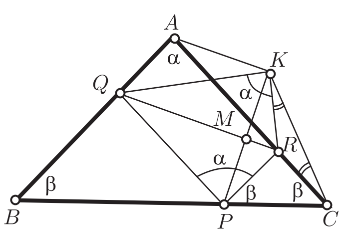
Sl. 361



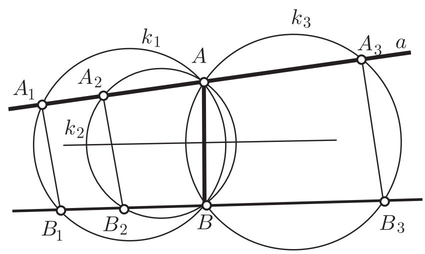
Sl. 362

1062. Neka EP seče HN u K. Dokažemo najpre da je ugao HKE prav. (Videti **zadatak 1053**.) Dakle, $\sphericalangle EKH$ je prav, pa je u trouglu MPH prava HN istovremeno i simetrala ugla i visina, pa je i težišna linija, tj. $KM = KP$. Na sličan način se dokazuje da je $KN = KL$, sl. 362. Pošto su dijagonale četvorougla $ABCD$ među sobom normalne i polove se, taj četvorougao je romb.

1063. Neka je $\sphericalangle BAC = \alpha$, $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BCA = \beta$, K tačka simetrična tački P u odnosu na QR i M središte PK, $M \in QR$. Tada je $\sphericalangle QPR = \alpha$ i $\sphericalangle QKR = \sphericalangle QPR = \alpha$, sl. 363. Takođe je $\sphericalangle PQR = \sphericalangle ARQ$ (kao uglovi sa paralelnim kracima) $= \sphericalangle RQK$. Iz prethodnog sledi da je $\triangle AQR \cong \triangle KRQ$, odnosno da je $AQRK$ jednakokraki trapez, kao i $\sphericalangle RAK = \sphericalangle QKA$. Trougao CRK je jednakokraki, jer je $CR = PR = RK$, pa je $\sphericalangle KCR = \sphericalangle RKC$. Iz dokazanih relacija sledi $\sphericalangle BAK + \sphericalangle BCK = \alpha + \sphericalangle RAK + \beta + \sphericalangle KCR = \alpha + \beta + \sphericalangle RAK + \sphericalangle KCR = \beta + (\sphericalangle QKA + \sphericalangle RKC + \alpha) = \sphericalangle ABC + \sphericalangle AKC$, tj. u četvorouglu $ABCK$ zbirovi naspramnih uglova su jednaki, pa je ovaj četvorougao tetivni, odnosno tačka K pripada krugu k opisanom oko trougla ABC.



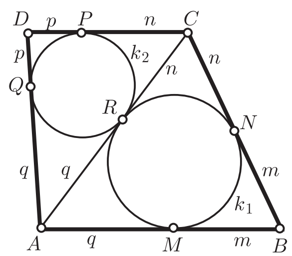
Sl. 363



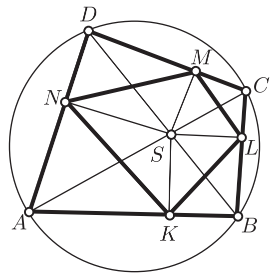
Sl. 364

1064. Pretpostavimo da je, na primer, $A_1 - A_2 - A - A_3$, da su tačke B_1 i B_2 s iste strane prave AB s koje su tačke A_1 i A_2, a B_3 s iste strane prave AB s koje je A_3, sl. 364. Dokažimo da tačka B_2 pripada pravoj B_1B. Dovoljno je dokazati da $\sphericalangle B_1BA = \sphericalangle B_2BA$. Kako su četvorouglovi AA_1B_1B i AA_2B_2B tetivni, to je $\sphericalangle B_1BA = 180° - \sphericalangle AA_1B_1$ i $\sphericalangle B_2BA = 180° - \sphericalangle AA_2B_2$. Ali po uslovu zadatka je $\sphericalangle AA_1B_1 = \sphericalangle AA_2B_2$ (jer je $A_1B_1 \parallel A_2B_2$), pa je $\sphericalangle B_1BA = \sphericalangle B_2BA$. Slično, koristeći tetivne četvorouglove AA_1B_1B i AA_3B_3B, dobijamo $\sphericalangle B_1BA + \sphericalangle B_3BA = 180°$, odakle sledi da B_3 pripada pravoj B_1B. (B_1 i B_3 su s raznih strana prave AB.) Iz svega sledi da su tačke B_1, B_2, B_3 na istoj pravoj (koja sadrži tačku B).

1065. Neka je R dodirna tačka krugova k_1 i k_2, a M, N, P, Q dodirne tačke ovih krugova redom sa stranicama AB, BC, CD, DA. Na slici 365 označene su istim slovima (m, n, p, q) jednake tangentne duži. Sada računamo: $AB + CD = q + m + n + p = BC + AD$, pa je $ABCD$ tangentni četvorougao, tj. postoji krug upisan u četvorougao $ABCD$.



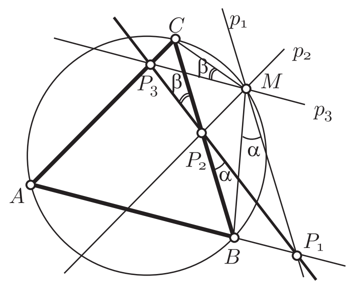
Sl. 365



Sl. 366

1066. Četvorouglovi $AKSN$ i $BKSL$ su tetivni. Odatle sledi: $\sphericalangle SKL = \sphericalangle SAN = \sphericalangle CAD = \sphericalangle CBD = \sphericalangle LBS = \sphericalangle LKS$, sl. 366. Dakle, tačka S pripada simetrali ugla kod temena K četvorougla $KLMN$. Na sličan način se dokazuje da tačka S pripada simetralama uglova kod temena L, M, N četvorougla $KLMN$. Kako se simetrale uglova četvorougla $KLMN$ seku u jednoj tački, u njega se može upisati krug.

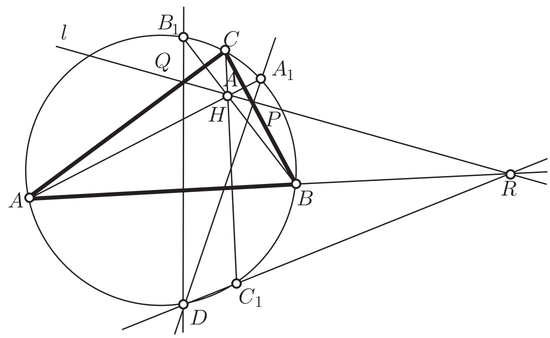
1067. Da bismo dokazali da tačke P_1, P_2 i P_3 leže na istoj pravoj, dovoljno je dokazati da su uglovi CP_2P_3 i BP_2P_1 jednaki kao unakrsni, sl. 367. Imamo: $\sphericalangle BP_1M = 60°$, $\sphericalangle BP_2M = 120°$, pa je četvorougao BP_1MP_2 tetivni i $\sphericalangle BP_2P_1 = \sphericalangle BMP_1 = \alpha$. Zatim, $\sphericalangle CP_3M = \sphericalangle CP_2M = 60°$ kao uglovi nad istom tetivom i četvorougao CP_3MP_2 je tetivni, pa je $\sphericalangle CP_2P_3 = \sphericalangle CMP_3 = \beta$. Uočimo da je: $\sphericalangle ABM = 180° - \sphericalangle ACM$ (1), $\sphericalangle ABM = \alpha + \sphericalangle BP_1M = \alpha + 60°$ (2), $\sphericalangle ACM = 180° - (\beta + \sphericalangle CP_3M) = 180° - (\beta + 60°)$ (3). Iz (1), (2) i (3) sledi $\alpha = \beta$, odnosno $\sphericalangle BP_2P_1 = \sphericalangle CP_2P_3$ kao unakrsni, iz čega sledi da P_1, P_2 i P_3 pripadaju jednoj pravoj.



Sl. 367

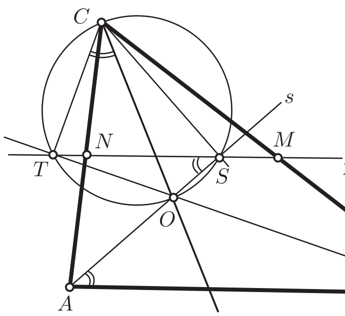
1068. Označimo sa H ortocentar trougla ABC, sa A_1 i B_1 presečne tačke visina AH i BH sa krugom k opisanim oko trougla ABC i sa P i Q tačke u kojima data prava l seče stranice BC i CA, sl. 368. Primetimo da su tačke A_1 i H simetrične u odnosu na pravu BC. Zaista, imamo $\sphericalangle C_1CB = \sphericalangle BAA_1$ (uglovi sa normalnim kracima) i $\sphericalangle BCA_1 = \sphericalangle BAA_1$ (periferijski uglovi nad istim lukom), pa je $\sphericalangle C_1CB = \sphericalangle BCA_1$, odakle sledi podudarnost trouglova CHA' i CA_1A', a odavde $HA' = A_1A'$. Slično, tačke B_1 i H su simetrične u odnosu na pravu CA. Zato prave, simetrične pravoj l u odnosu na BC, odnosno CA, sadrže tačku A_1, odnosno B_1. Označimo presek tih pravih sa D. U četvorouglu A_1CB_1D je $\sphericalangle DA_1C + \sphericalangle CB_1D = \sphericalangle PHC + \sphericalangle CHQ = 180°$, pa je on tetivni, tj. tačka D pripada krugu k koji je opisan oko četvorougla A_1CB_1D. Slično se dokazuje da i treća od pomenutih pravih sadrži tačku D, tj. sve tri prave se seku na krugu k.

1069. Videti **zadatak 996**.

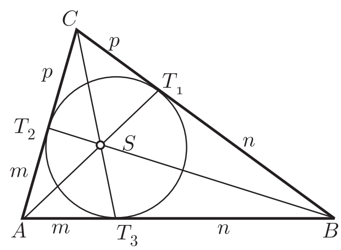


Sl. 368

1070. Prava p sadrži srednju liniju MN datog trougla. Slično **zadatku 812** dokažemo da je trougao BCT pravougli sa pravim uglom kod temena T. Uočimo tačku S u kojoj simetrala s ugla BAC seče pravu p, sl. 369. Slično se dokaže da je $\sphericalangle ASC = 90°$. Dakle, krug prečnika OC sadrži tačke S i T (uglovi nad prečnikom). Vidimo da je $\sphericalangle OCT = \sphericalangle OST$ (nad istim lukom). Međutim, $\sphericalangle OST = \sphericalangle AST = \frac{1}{2}\sphericalangle BAC$ (naizmenični uglovi), odakle izvlačimo traženi zaključak.



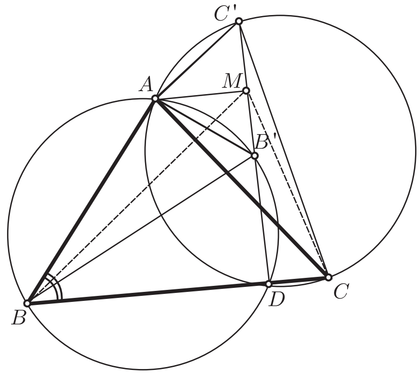
Sl. 369



Sl. 370

1071. Koristićemo sliku i rešenje prethodnog zadatka. Kako je CO prečnik, a ST tetiva, to je $OC \geq ST$. Dalje, iz trougla ABO, na osnovu nejednakosti trougla je $AO + BO > AB$. Sabiranjem ovih dveju nejednakosti dobijamo traženu nejednakost: $AO + BO + CO > AB + ST$.

1072. Neka BT_2 seče AT_1 u tački S. Označimo sa m, n, p tangentne duži, kao što je prikazano na slici 370. Koristićemo teoremu o vektorima i kolinearnim tačkama iz **zadatka 732**: $\overrightarrow{BT_2} = \frac{m}{m+p}\overrightarrow{BC} + \frac{p}{m+p}\overrightarrow{BA}$. Dalje je $\overrightarrow{BS} = \frac{km}{m+p}\overrightarrow{BC} + \frac{kp}{m+p}\overrightarrow{BA}$ i $\overrightarrow{BT_1} = \frac{n}{n+p}\overrightarrow{BC}$, odnosno $\overrightarrow{BC} = \frac{n+p}{n}\overrightarrow{BT_1}$ itd. Postupajući kao pri rešavanju **zadatka 732**, dobijamo $k = \frac{n(m+p)}{mn+mp+np}$ i $\overrightarrow{BS} = \frac{m(n+p)}{mn+mp+np}\overrightarrow{BT_1} + \frac{np}{mn+mp+np}\overrightarrow{BA}$. Dakle, $AS : ST_1 = (mn+mp) : np$. Pretpostavimo da CT_3 ne sadrži tačku S, već seče AT_1 u tački S_1. Postupajući kao u prethodnom slučaju, iz $\overrightarrow{CT_3} = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{CA} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{CB}$ dobijamo da je $AS_1 : S_1T_1 = (mn+np) : np$. Otuda sledi da je $S_1 = S$, pa CT_3 prolazi kroz S.



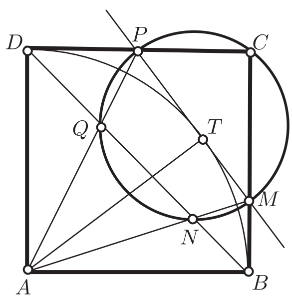
Sl. 371

1073. Neka je $\sphericalangle BAC$ oštar, sl. 371. Površina trougla MBC jednaka je površini trougla ABC, a M se poklapa sa C ako je tačka D središte osnovice BC. Osnovica je zajednička za ova dva trougla, što znači da treba dokazati da je visina iz M jednaka visini datog trougla, tj. da je $AM \parallel BC$.

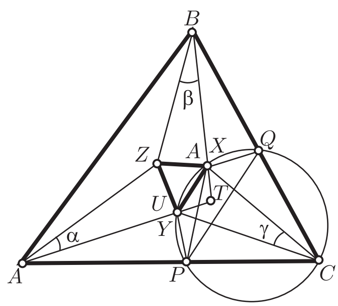
Uglovi BDB' i CDC' su pravi (nad prečnicima), pa su tačke B', M i C' na pravoj koja je normalna na BC. Uglovi $AC'D$ i ACD su jednaki (nad istim lukom). Četvorougao $ABDB'$ je tetivni, pa je $\sphericalangle ABD$ suplementan uglu $AB'D$. Međutim, i $\sphericalangle AB'C'$ je suplementan sa $\sphericalangle AB'D$, što znači da je $\sphericalangle AB'C' = \sphericalangle ABD$. Uglovi ACB i ABC su jednaki kao uglovi na osnovici BC, odakle sledi i da je $\sphericalangle AB'C' = \sphericalangle AC'B'$. Dakle, trougao $AB'C'$ je jednakokraki, pa kako je $B'M = MC'$, zaključujemo da je $AM \perp B'C'$. Otuda sledi da je $AM \parallel BC$.

Slično postupamo i ako je $\sphericalangle BAC$ tup ili prav.

1074. Krug prečnika MP sadrži tačku C, jer je $\sphericalangle MCP = 90°$, sl. 372. Kako su MB, MT, PT i PD tangentne duži, sledi da je AM simetrala ugla BAT i AP simetrala ugla DAT, pa je $\sphericalangle MAP = 45°$. Međutim, $\sphericalangle PDN = 45°$, pa je četvorougao $ANPD$ tetivni. U ovom četvorouglu je $\sphericalangle ADP = 90°$, pa iz $\sphericalangle ADP + \sphericalangle ANP = 180°$, sledi da je $\sphericalangle ANP = 90°$. Zbog toga je tačka N na krugu prečnika MP. Slično zaključujemo za tačku Q iz četvorougla $ABMQ$.



Sl. 372

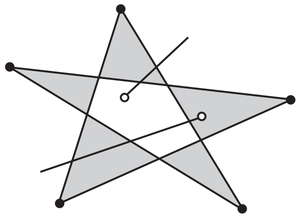


Sl. 373

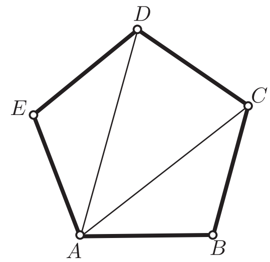
1075. Označimo sa α, β, γ trećine unutrašnjih uglova datog trougla, sl. 373. Tada je $\alpha + \beta + \gamma = 60°$. Neka se AY i BX seku u T. U trouglu ABT prave AZ i BZ su simetrale uglova, pa je i TZ simetrala ugla ATB. Otuda je $\sphericalangle ATZ = \sphericalangle BTZ = \frac{1}{2}\sphericalangle ATB = \frac{1}{2}(180° - 2\alpha - 2\beta) = \frac{1}{2}(60° + 2\alpha + 2\beta + 2\gamma - 2\alpha - 2\beta) = 30° + \gamma$. Na dužima AT i BT odredimo tačke U i V tako da je $\sphericalangle TZU = \sphericalangle TZV = 30°$. Tada je ZUV jednakostranični trougao. Dokazaćemo da se tačke U, V poklapaju sa Y, X.

Neka je P tačka duži AC i Q tačka duži BC, tako da je $AP = AZ$ i $BQ = BZ$. Iz podudarnosti trouglova APU i AZU sledi $PU = ZU$, a slično zaključujemo i da je $ZV = QV$, pa zbog $UZ = VU = VZ$, sledi $PU = UV = QV$. Ugao BVZ je spoljašnji u trouglu TVZ, pa je $\sphericalangle BVZ = 30° + (30° + \gamma) = 60° + \gamma = \sphericalangle BVQ$. Sada imamo: $\sphericalangle UVQ = 360° - 60° - 2(60° + \gamma) = 180° - 2\gamma$. Otuda zaključujemo da je četvorougao $CQVU$ tetivni, pa postoji krug koji sadrži tačke C, Q, V i U. Slično se dokaže da je i $\sphericalangle PUV = 180° - 2\gamma$, pa tačka P pripada krugu opisanom oko trougla CUV, a to je upravo krug opisan oko četvorougla $CQVU$. Sada iz $PU = UV = VQ$ sledi da je $\sphericalangle PCU = \sphericalangle UCV = \sphericalangle VCQ$, odakle zaključujemo da je $U = Y$ i $V = X$, pa je trougao XYZ jednakostranični.

1076. Koristimo uputstvo prema slici 27 strana 125. Na primer, za petokraku zvezdu rešenje je prikazano na slici 374.



Sl. 374



Sl. 375

1077. Svake dve stranice mogu imati najviše jednu zajedničku tačku. Od tog broja oduzimamo broj temena $\frac{7 \cdot 6}{2} - 7 = 14$.

1078. Na primer, za $n = 5$ je $S_n = 3 \cdot 180^\circ = 540^\circ$, $D_n = \frac{5 \cdot 2}{2} = 5$, $\alpha_n = \frac{540}{5} = 108^\circ$.

1079. Neka je, na primer: $S_n = 900^\circ$. Iz $(n-2) \cdot 180^\circ = 900^\circ$ sledi $n - 2 = 5$, pa je $n = 7$.

1080. Na primer, iz $\alpha_n = 150^\circ$ dobijamo $\frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n} = 150^\circ$, a odavde je $6(n-2) = 5n$. Dakle: $n = 12$.

1081. Iz $\frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n} = \frac{3 \cdot 360^\circ}{n}$ je $n - 2 = 6$, pa je $n = 8$. (Ili, $\alpha_n = 3 \cdot (180^\circ - \alpha_n)$. Odavde dobijamo: $\alpha_n = 135^\circ$, pa je $\beta_n = 45^\circ = \frac{360^\circ}{n}$. Odavde nalazimo: $n = 8$.)

1082. Iz $D_n = 6n$, odnosno $\frac{n(n-3)}{2} = 6n$, dobijamo $n = 15$, pa je $\alpha_n = 156^\circ$.

1083. Iz $\frac{n(n-3)}{2} - 8 = \frac{(n-1)(n-4)}{2}$, dobijamo $n = 10$, pa je $\alpha_n = 144^\circ$.

1084. Tri. **1085.** Treba dokazati da su uglovi mnogougla jednaki među sobom.

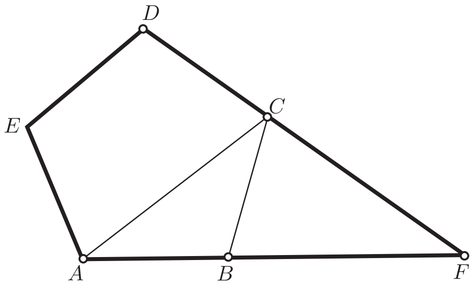
1086. Iz svakog temena mogu se povući samo dve dijagonale, pa je dovoljno dokazati da je, na primer, $AC = AD$, sl. 375. Trouglovi ABC i AED su podudarni, pa je $AC = AD$.

1087. Po Dirihleovom principu postoje tri temena iste boje. Ako su to tri uzastopna temena, recimo A, B, C, tada je $AB = BC$. Ako nisu tri uzastopna temena, na primer A, C, D, onda su jednake dijagonale, $AC = AD$. (Dijagonale pravilnog petougla sve su jednake među sobom. Videti prethodni zadatak.)

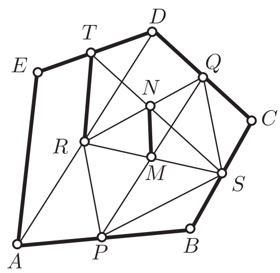
1088. Neka je O centar opisanog kruga i F presečna tačka dijagonala AD i BE. Uglovi ADB i DBE su jednaki, pa je trougao BDF jednakokraki. Ugao AFB je spoljašnji za ovaj trougao, pa je $\sphericalangle AFB = 2\sphericalangle ADB$. Centralni ugao $\sphericalangle AOB$, opisanog kruga petougla je dva puta veći od odgovarajućeg periferijskog ugla ADB, pa je $\sphericalangle AFB = \sphericalangle AOB$. Otuda sledi da krug opisan oko trougla ABO sadrži tačku F.

1089. Neka se prave AB i CD seku u F, sl. 376. Trougao BCF je jednakokraki sa uglom od 72° na osnovici (spoljašnji ugao pravilnog petougla) i 36° kod vrha F. Kako je $\sphericalangle BAC = 36^\circ$, to je $AC = CF = BF$.

1090. Neka je R središte duži AD. Lako se dokazuje da je četvorougao $PSQR$ paralelogram (videti **zadatak 859**). Njegove dijagonale se polove, pa je tačka M zajedničko središte duži PQ i RS, sl. 377. Duž TR je srednja linija trougla ADE, pa je $TR = \frac{1}{2}AE = 2$ cm. Tražena duž MN je srednja linija trougla STR, pa je $MN = \frac{1}{2}TR = 1$ cm.

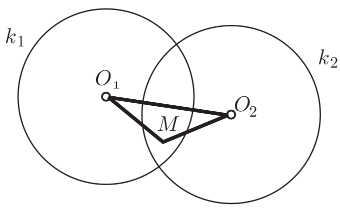


Sl. 376

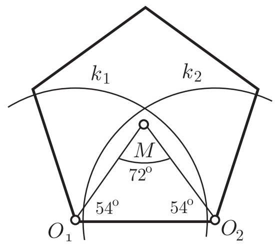


Sl. 377

1091. Dokazaćemo prvo da je $n < 6$. Neka su k_1 i k_2 sa centrima O_1 i O_2 dva od datih krugova koji sadrže tačku M, sl. 378. Važe nejednakosti $O_1M < r_1$, $O_2M < r$ i $O_1O_2 > r$, pa je u trouglu O_1O_2M najveći ugao O_1MO_2, što znači da je sigurno $\sphericalangle O_1MO_2 > 60°$. Zbog toga ne može biti šest ili više ovakvih krugova, jer je već $6 \cdot 60° = 360°$. Dakle, $n \leq 5$.



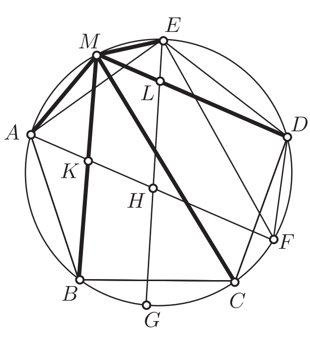
Sl. 378



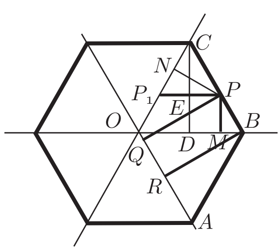
Sl. 379

Dokažimo još da može biti $n = 5$. Neka je $O_1O_2O_3O_4O_5$ pravilan petougao i M centar opisanog kruga tog petougla, sl. 379. U jednakokrakom trouglu O_1O_2M najveći je $\sphericalangle O_1MO_2 = 72°$, pa je $O_1O_2 > O_1M = O_2M$. Dakle, krugovi sa centrima O_1, O_2, O_3, O_4, O_5 i poluprečnika r, koji zadovoljava uslov, $O_1M < r < O_1O_2$, ispunjavaju postavljene uslove.

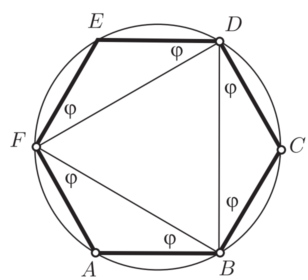
1092. Konstruišemo tetive AF i EG tako da je $AF \parallel TD$ i $EG \parallel MB$. Sada nije teško dokazati da su trouglovi AKM, ELM i EFH jednakokraki, sl. 380 itd. Na kraju imamo: $MB + MD = MK + KB + ML + LD$. Međutim, $MK = MA$, $ML = ME$, a $KB + LD = HG + HF = HG + HE = EG$, pa koristeći se centralnim uglovima dokažemo da je $EG = M$C, posle čega dolazimo do zaključka: $MB + MD = MA + ME + MC$.



Sl. 380



Sl. 381

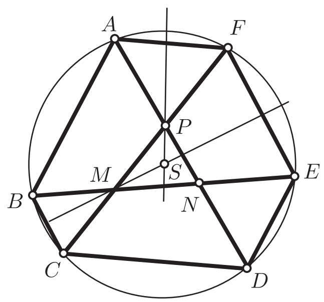


Sl. 382

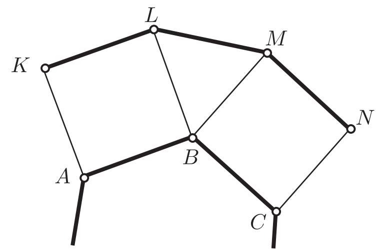
1093. Uočimo rastojanja PM, PN i PQ, gde je PQ najveće. Na slici 381 je $PP_1 \parallel OB$, pa je CPP_1 jednakostranični trougao i $PN = CE$. Takođe je $PM = ED$, pa je $PM+PN = CD$ (visina jednakostraničnog trougla BCO). Sem toga je i $PQ = BR$, gde je BR visina jednakostraničnog trougla ABO. Odatle sledi traženi zaključak.

1094. Jednakokraki trouglovi ABF, BCD, DEF su podudarni, pa su jednake dijagonale $BD = DF = BF$ i uglovi koji su na slici 382 označeni sa φ. Dakle, unutrašnji uglovi šestougla su jednaki među sobom $(60^\circ + 2\varphi)$.

1095. Neka se jednake dijagonale AD, BE i CF seku u M, N i P. Po pretpostavci četvorouglovi $ACDF$, $ABDE$ i $BCEF$ su jednakokraki trapezi, sl. 383. (Paralelne suprotne stranice i jednake dijagonale.) Zbog toga, oko svakog od ovih trapeza može se opisati krug. Simetrale uglova trougla MNP su simetrale tetiva, odnosno stranica šestougla, pa je centar kruga upisanog u trougao MNP ujedno i centar opisanog kruga šestougla.



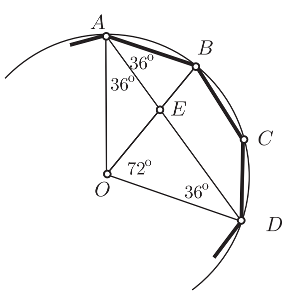
Sl. 383



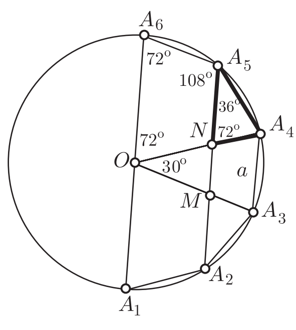
Sl. 384

1096. Neka su A, B, C tri uzastopna temena pravilnog šestougla i $ABLK$, $BCNM$ kvadrati, sl. 384. U trouglu BLM je $BL = BM = AB$ i $\sphericalangle LBM = 360^\circ - 2\cdot 90^\circ - 120^\circ = 60^\circ$. Zbog toga je trougao BLM jednakostranični, pa je $ML = AB$ i $\sphericalangle LMN = 150^\circ = \sphericalangle KLM$ itd.

1097. Označimo sa E presek duži OB i AD, sl. 385. Izračunavanjem uglova utvrdimo da su trouglovi ABE i ODE sa uglovima 72°, 72°, 36°, tj. oba su jednakokraka. Otuda dobijamo $AD - AB = AD - AE = DE = OD = r$.



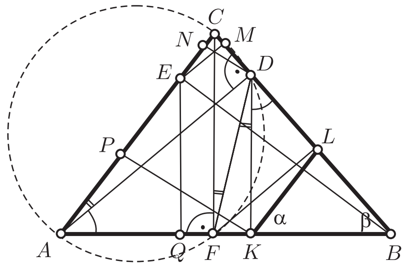
Sl. 385



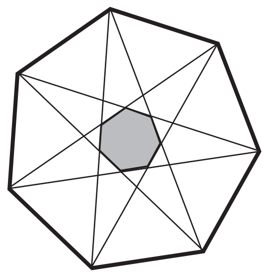
Sl. 386

1098. Znamo da je unutrašnji ugao pravilnog desetougla 144°, pa su uglovi kod A_6 i A_4 po 72° i, kao što se vidi (sl. 386) uglovi jednakokrakog trapeza ONA_5A_6 su 72° i 108°. Zbog toga je $\sphericalangle NA_5A_4 = 144^\circ - 108^\circ = 36^\circ$. Sledi da je i ugao kod N od 72°, pa je trougao NA_4A_5 jednakokraki i $NA_5 = a$, gde je a stranica desetougla, tj. $NA_5 = A_3A_4$. Zbog jednakosti uglova kod A_5 i O, četvorougao A_6OMA_5 je paralelogram i $A_5M = A_6O = r$. Prema tome, $MN + A_3A_4 = MN + NA_5 = MA_5 = r$, što se i tvrdilo.

1099. Dokažimo da je $KL \parallel NP$. Dokazaćemo da je $\sphericalangle BDF = \sphericalangle BAC$. Najpre imamo $\sphericalangle BDK = 90^\circ - \beta = \sphericalangle BAD$, sl. 387. Pravougli trouglovi ACD i ACF imaju zajednički opisani krug, pa je $\sphericalangle CFD = \sphericalangle CAD$ (nad istim lukom). Kako je $\sphericalangle KDF = \sphericalangle CFD$ (naizmenični), proizlazi da je $\sphericalangle KDF = \sphericalangle CAD$. Dakle, $\sphericalangle BDF = \sphericalangle BDK + \sphericalangle KDF = \sphericalangle BAD + \sphericalangle CAD = \sphericalangle BAC = \alpha$. Slično dokažemo da u trouglu BDF važi: $\sphericalangle BKL = \sphericalangle BDF = \alpha$ (jer su K i L podnožja visina trougla BDF, kao što su D i F podnožja visina trougla ABC. Sada iz $\sphericalangle BKL = \sphericalangle BAC$ sledi $KL \parallel AC$, odnosno $KL \parallel NP$. Slično se dokazuje paralelnost i ostalih stranica.



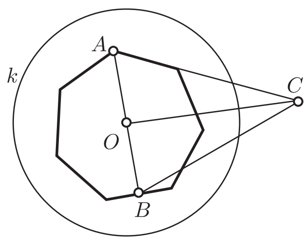
Sl. 387



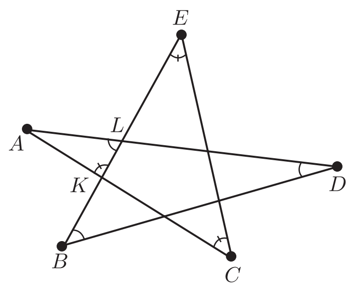
Sl. 388

1100. Svaki od manjih mnogouglova obuhvaćen je sa dve dijagonale povučene iz svakog od 7 temena, kao na slici 388. Ovakvih dijagonala ima $7 \cdot 2$, tj. 14, ali, budući da svaku brojimo sa oba njena kraja, manji mnogougao će imati $14 : 2$, tj. 7 stranica najviše.

1101. Odredimo na mnogouglu tačke A i B koje polove obim datog mnogougla. Konstruišimo krug k kome je centar središte O duži AB, a prečnik jednak s, gde je $2s$ obim mnogougla. Dokažimo da je krug k pokrio ceo mnogougao. Pretpostavimo da to nije tačno i da postoji neko teme C koje je van kruga, tj. da je $OC > \dfrac{s}{2}$, sl. 389. U trouglu ABC je $OC < \dfrac{1}{2}(AC+BC)$ (videti **zadatak 798** b), pa kako je $AC + BC \le s$, sledi da je $OC < \dfrac{s}{2}$. Kontradikcija! Dakle, otpada pretpostavka da postoji teme C mnogougla van kruga k.



Sl. 389

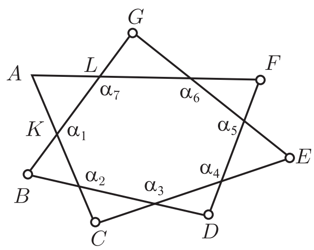


Sl. 390

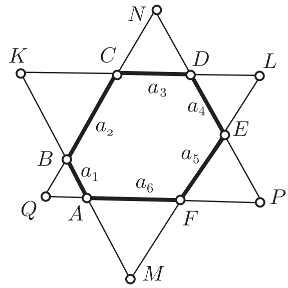
1102. a) Unutrašnji ugao K trougla AKL je istovremeno spoljašnji ugao trougla KCE, pa je $\sphericalangle K = \sphericalangle C + \sphericalangle E$, sl. 390. Slično dobijamo $\sphericalangle L = \sphericalangle B + \sphericalangle D$. Kako je $\sphericalangle A + \sphericalangle K + \sphericalangle L = 180^\circ$, dobijamo $\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C + \sphericalangle D + \sphericalangle E = 180^\circ$ – to je traženi zbir.

b) Ako bismo zvezdi odsekli krakove ostao bi sedmougao sa uglovima α_1, α_2, α_3 α_4, α_5, α_6, α_7, sl. 391. Tako su, na primer, uglovi α_1 i α_7 spoljašnji uglovi trougla ALK, pa imamo $\alpha_1 + \alpha_7 = \sphericalangle A + \sphericalangle K + \sphericalangle L + \sphericalangle A = 180^\circ + \sphericalangle A$. Slično dobijamo $\alpha_1 + \alpha_2 = 180^\circ + \sphericalangle B$, $\alpha_2 + \alpha_3 = 180^\circ + \sphericalangle C$ itd. Sabiranjem sedam ovakvih jednakosti dobijamo $2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7) = 180^\circ + \sphericalangle A + 180^\circ + \sphericalangle B + 180^\circ + \sphericalangle C + 180^\circ + \sphericalangle D + 180^\circ + \sphericalangle E + 180^\circ + \sphericalangle F + 180^\circ + \sphericalangle G$. Kako je $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_7 = 5 \cdot 180^\circ = 900^\circ$, dobijamo $1800^\circ = 7 \cdot 180^\circ + (\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C + \sphericalangle D + \sphericalangle E + \sphericalangle F + \sphericalangle G)$, tj. $1800^\circ = 1260^\circ + S$, odakle je $S = 540^\circ$.

c) Postupajući kao u prethodnom slučaju dobijamo $2(n-2)\cdot 180^\circ = n\cdot 180^\circ + S$, pa je $S=(n-4)\cdot 180^\circ$.



Sl. 391

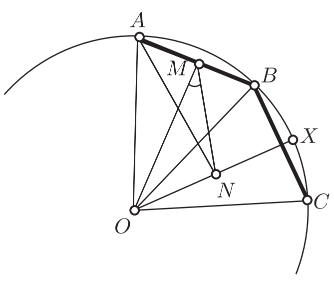


Sl. 392

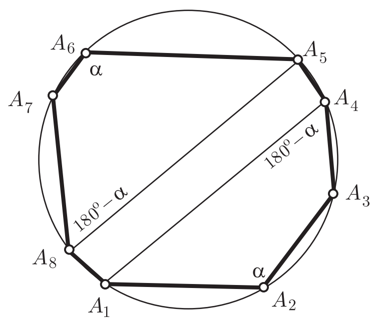
1103. Ako produžimo stranice AB, CD i EF šestougla, dobićemo jednakostranični trougao KLM sa stranicama: $KL=a_2+a_3+a_4$, $LM=a_4+a_5+a_6$, $KM=a_6+a_1+a_2$, sl. 392. Slično dobijamo jednakostranični trougao NPQ sa stranicama: $NP=a_3+a_4+a_5$, $PQ=a_5+a_6+a_1$, $NQ=a_1+a_2+a_3$. Sada iz $a_2+a_3+a_4=a_4+a_5+a_6=a_6+a_1+a_2$ i iz $a_3+a_4+a_5=a_5+a_6+a_1=a_1+a_2+a_3$, dobijamo: $a_5-a_2=a_1-a_4=a_3-a_6$. Obrnuto, ako važe poslednje jednakosti, nije teško uveriti se da važe i prethodne. Takođe, nije teško konstruisati najpre trougao KLM, pa odrediti tačke A, B, C, D, E, F.

1104. Kako su AB i BC stranice pravilnog devetougla i OX simetrala ugla BOC, to je $\sphericalangle AOX = 40^\circ + 20^\circ = 60^\circ$, pa je trougao AOX jednakostranični. U njemu je AN visina pa je $\sphericalangle ANO = 90^\circ = \sphericalangle AMO$, sl. 393. Zbog toga je četvorougao $AONM$ tetivni, odakle je $\sphericalangle OMN = \sphericalangle OAN = 30^\circ$.

1105. Pretpostavimo da je sedamnaestougao moguće razrezati na opisani način. Neka se unutar sedamnaestougla nalazi k temena četvorouglova. Zbir onih unutrašnjih uglova četvorouglova čija su temena unutar sedamnaestougla jednak je $k\cdot 360^\circ$, a zbir onih unutrašnjih uglova četvorouglova čija su temena istovremeno i temena sedamnaestougla je $15\cdot 180^\circ$. Zbir svih unutrašnjih uglova 12 četvorouglova je $12\cdot 360^\circ$, pa dobijamo $k\cdot 360^\circ + 15\cdot 180^\circ = 12\cdot 360^\circ$, odnosno $2k=9$, a to nije moguće jer je k ceo broj. Dakle, uvedena pretpostavka ne važi, pa je dokaz završen.



Sl. 393



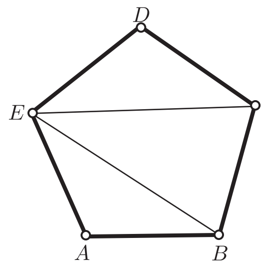
Sl. 394

1106. Uglovi $A_1A_2A_3$ i $A_5A_6A_7$ imaju paralelne krake pa je zbog orijentacije $\sphericalangle A_1A_2A_3 = \sphericalangle A_5A_6A_7 = \alpha$, sl. 394. Četvorougao $A_1A_2A_3A_4$ je tetivni, pa je $\sphericalangle A_3A_4A_1 = 180^\circ - \sphericalangle A_1A_2A_3 = 180^\circ - \alpha$. Slično $\sphericalangle A_7A_8A_5 = 180^\circ - \alpha$. Kako je $\sphericalangle A_7A_8A_5 = \sphericalangle A_3A_4A_1$ i $A_3A_4 \parallel A_7A_8$, zbog orijentacije je i $A_1A_4 \parallel A_5A_8$, što je ekvivalentno sa $A_8A_1 = A_4A_5$.

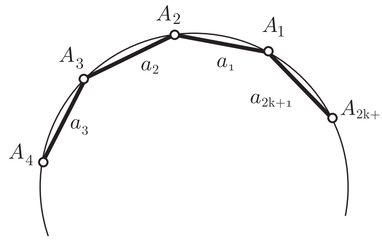
1107. Dovoljno je dokazati da je $\sphericalangle A \le \sphericalangle E$. Pretpostavimo suprotno. Tada je $\sphericalangle A > \sphericalangle D$ ili $\sphericalangle B > \sphericalangle E$, sl. 395. Dokazaćemo da je $\sphericalangle A > \sphericalangle D$ nemoguće. Slično se dokazuje i u drugom slučaju.

Neka je, dakle, $\sphericalangle A > \sphericalangle D$. Trouglovi EAB i CDE su jednakokraki, pa je $EB > EC$ i

$\sphericalangle ABE < \sphericalangle ECD$. Zbog $EB > EC$, važi $\sphericalangle ECB > \sphericalangle EBC$. Dalje dobijamo: $\sphericalangle ABE + \sphericalangle EBC < \sphericalangle ECD + \sphericalangle ECB$, tj. $\sphericalangle B < \sphericalangle C$, što je nemoguće.



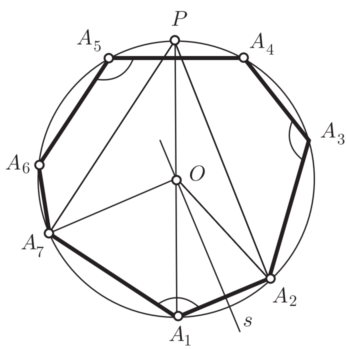
Sl. 395



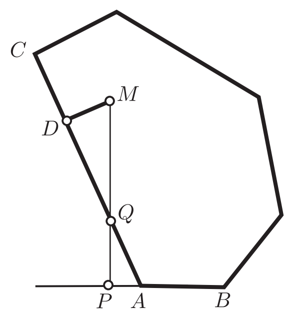
Sl. 396

1108. Neka je $n = 2k+1$, $a_j = A_jA_{j+1}$ za $j = 1, 2, \ldots, 2k$ i $a_{2k+1} = A_{2k+1}A_1$, sl. 396. Kako je $\sphericalangle A_1A_3A_2 = 180^\circ - \sphericalangle A_2A_1A_3 - \sphericalangle A_1A_2A_3 = 180^\circ - \sphericalangle A_2A_4A_3 - \sphericalangle A_2A_3A_4 = \sphericalangle A_3A_2A_4$, to je $a_1 = a_3$. Na sličan način se dokazuje da je $a_3 = a_5, \ldots, a_{2k-1} = a_{2k+1}, a_{2k+1} = a_2$, $a_2 = a_4, \ldots, a_{2k-2} = a_{2k}$. Sledi da je $a_1 = a_2 = \cdots = a_{2k+1}$, tj. sve stranice datog n-tougla jednake su među sobom, pa je on pravilan.

1109. Pretpostavimo da na slici 397 nikoja dva susedna temena tetivnog sedmougla $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$, nisu istovremeno temena uglova od 120°, i neka su recimo A_1, A_3 i A_5 temena tih uglova. Neka je O centar kruga opisanog oko sedmougla, a P tačka koja je dijametralno suprotna tački A_1. Tada je $\sphericalangle A_2PA_7 = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 120^\circ = 60^\circ$, pa je $\sphericalangle A_2OA_7 = 120^\circ$. Slično je $\sphericalangle A_2OA_4 = 120^\circ$ i $\sphericalangle A_4OA_6 = 120^\circ$, pa je $\sphericalangle A_6OA_7 = 0^\circ$, što je nemoguće. Dakle, postoje dva susedna temena, recimo A_1 i A_2, koja su temena uglova od 120°. Neka je s simetrala duži A_1A_2. Duži A_2A_3 i A_1A_7 su simetrične u odnosu na s, pa su jednake.



Sl. 397



Sl. 398

1110. Neka je M unutrašnja tačka mnogougla, a AB stranica koja je najbliža tački M, sl. 398. Dokazaćemo da podnožje P normale iz M na AB leži na AB, a ne na produžetku AB. Pretpostavimo da je P na produžetku stranice AB. Tada MP seče neku stranicu, recimo AC, u tački Q, pa kako je mnogougao konveksan, to je onda $MP > MQ$. Međutim, normalno rastojanje MD tačke M od stranice AC je manje od MQ, pa iz $MD < MQ$ i $MQ < MP$, dobijamo $MD < MP$, što je nemoguće, jer je po pretpostavci tačka M najbliža stranici AB. Ova protivrečnost pokazuje da tačka P ne može biti na produžetku stranice AB.

Dajemo samo kratka uputstva za rešavanje konstruktivnih zadataka. Čitaocu preporučujemo da ova rešenja kompletira sa dokazom i diskusijom.

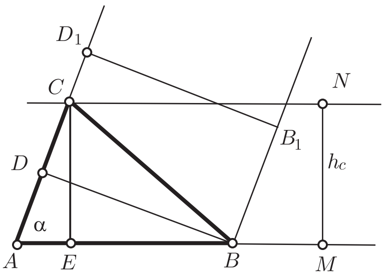
1111. a) Neka je C_1 središte stranice $AB = c$. Trougao AC_1C možemo konstruisati (date su mu sve stranice – AC_1 je polovina stranice c).

b) Možemo konstruisati trougao ABB_1, gde je BB_1 data težišna linija.

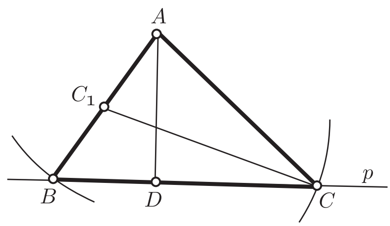
c) Neka je $CD = h_c$. Pravougli trougao ACD možemo odmah konstruisati (dato α, $\sphericalangle D = 90°$, h_c). Zatim konstruišemo ugao γ.

d) Konstruišemo najpre pravougli trougao ACE, gde je $CE = h_c$ data visina trougla ABC, sl. 399, ($MN = h_c$ i $MN \perp AM$, $CN \parallel AM$). Zatim, s one strane prave AC, s koje je tačka E, konstruišemo normalnu duž $D_1B_1 = h_b$ ($D_1 \in AC$). Prava koja sadrži tačku B_1 i paralelna je pravoj AC seče pravu AE u tački B.

e) Neka je $CE = h_c$ data visina. Konstruišemo najpre trougao ACE, kao u prethodnom zadatku. Presek kruga sa centrom C i poluprečnikom t_c seče pravu AE u središtu duži AB.



Sl. 399



Sl. 400

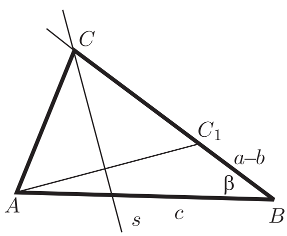
f) Neka je $AD = h_a$ data visina. Konstruišemo najpre pravougli trougao ABD (prava p seče krug $k(A, c)$ u B, sl. 400). Neka je C_1 središte duži AB. Tada krug $k_1(C_1, t_c)$ seče BD u C.

g) Konstruišemo najpre trougao $AC_1A_1 \cdot (AC_1 = \dfrac{c}{2}$, $AA_1 = t_a$, a kako je $A_1C_1 \parallel AC$, sledi da je $\sphericalangle AC_1A_1 = 180° - \alpha$.) Dalje konstruišemo B, pa C.

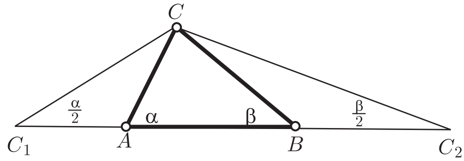
h) Možemo konstruisati trougao ABT, gde je T težište $\left(AT = \dfrac{2}{3}t_a \text{ itd.}\right)$.

i) Kao u prethodnom zadatku, možemo konstruisati trougao AC_1T.

j) Neka je C_1 tačka stranice BC, takva da je $CC_1 = b$. Tada je $BC_1 = a - b$, pa se može konstruisati trougao ABC_1. Tačku C dobijamo u preseku prave BC_1 i simetrale duži AC_1, sl. 401.



Sl. 401



Sl. 402

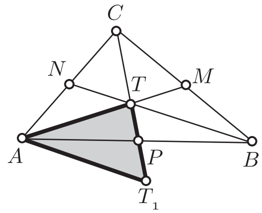
k) Ako bismo iza A u odnosu na B odredili tačku C_1 takvu da je $AC_1 = b$, dobili bismo jednakokraki trougao ACC_1, kome je $\sphericalangle AC_1C = \dfrac{\alpha}{2}$ (koristimo osobine spoljašnjih uglova trougla). Kako je $BC_1 = b + c$, moguće je konstruisati trougao BCC_1. Ako je $CD = h_c$ data visina, onda se najpre konstruiše trougao CC_1D.

l) Ako je B_1 tačka iza A u odnosu na C takva da je $AB_1 = c$, onda se može konstruisati trougao BCB_1, slično prethodnom zadatku.

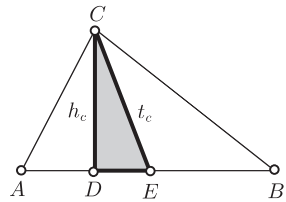
m) Ako je C_1 tačka iza A u odnosu na B takva da je $AC_1 = b$ i C_2 tačka iza B u odnosu na A takva da je $BC_2 = a$, onda je $C_1C_2 = 2s$, sl. 402. Možemo konstruisati trougao C_1C_2C, jer su uglovi sa temenima C_1 i C_2 podudarni polovinama datih uglova. Tačka A pripada duži C_1C_2 i simetrali duži CC_1 itd.

n) Iskoristiti analizu prethodnog zadatka. Ako je $CD = h_c$ data visina, treba konstruisati najpre pravougli trougao CC_1D.

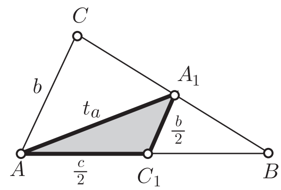
o) Koristimo osobine težišta. Neka je T težište, P središte stranice AB i neka je T_1 tačka, takva da je P središte duži TT_1. Tada je četvorougao $ATBT_1$ paralelogram, pa je $AT_1 = BT$, sl. 403. Treba najpre konstruisati trougao ATT_1 kome su stranice jednake po $\dfrac{2}{3}$ odgovarajućih težišnih linija.



Sl. 403



Sl. 404

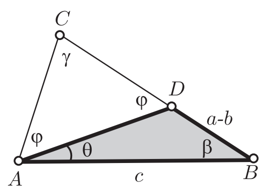


Sl. 405

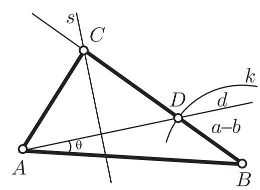
p) Prema slici 404, najpre konstruišemo pravougli trougao CDE (poznata kateta CD i hipotenuza CE).

q) Neka je $AA_1 = t_a$ i D tačka takva da je A_1 središte duži AD. Četvorougao $ABDC$ je paralelogram i možemo konstruisati trougao ABD. Možemo doći do rešenja i tako što prvo konstruišemo trougao AC_1A_1 prema slici 405.

r) Neka je D tačka stranice BC takva da je $CD = AC$. Tada je $BD = a - b$, sl. 406. Ugao BAD možemo izraziti preko α i β. Trougao ACD je jednakokraki, pa je $2\varphi = 180^\circ - \gamma = \beta + \alpha$ i $\varphi \cong \dfrac{\alpha}{2}+\dfrac{\beta}{2}$. Pošto je φ spoljašnji ugao trougla ABD, biće $\sphericalangle BAD = \varphi-\beta$, odnosno $\sphericalangle BAD = \dfrac{\alpha}{2}-\dfrac{\beta}{2}$. Prema tome, trougao ABD ima dovoljno elemenata za konstrukciju. Na slici 407 vidimo kako je to učinjeno $\left(AB = c,\ BD = a - b,\ \theta = \dfrac{\alpha}{2} - \dfrac{\beta}{2}\right)$.



Sl. 406



Sl. 407

s) Date duži h_c i t_c iskoristimo za konstrukciju pravouglog trougla CDE, kao u zadatku p). Neka je s simetrala stranice AB (prava koja sadrži tačku E i normalna je na pravoj DE). Centar S opisanog kruga trougla ABC dobijamo u preseku kruga $k(C, R)$ i simetrale s.

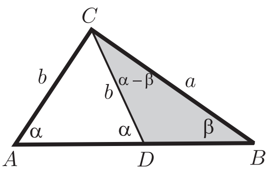
t) Neka je D tačka stranice AB, takva da je $CD = AC = b$. Tada je $\sphericalangle ADC = \sphericalangle DAC = \alpha$, pa je $\sphericalangle BCD = \sphericalangle ADC - \sphericalangle ABC = \alpha - \beta$ (u trouglu BCD je $\sphericalangle ADC$ spoljašnji) – slika 408. Sada možemo konstruisati trougao BCD, po stavu SUS itd.

u) Ako je A_1 središte stanice BC i D podnožje normale iz A_1 na AC, tada se može konstruisati trougao AA_1D (slično zadatku e), jer je $A_1D = \dfrac{1}{2}h_b$ itd.

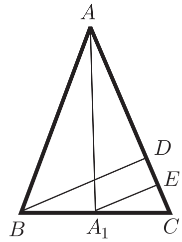
1112. a) Koristiti činjenicu da je $\gamma = 90^\circ - \dfrac{\alpha}{2}$.

b) Neka je A_1 središte duži $BC = a$. Na simetrali duži BC konstruišemo tačku B_1 takvu da je $A_1B_1 = b + h_a$. Teme A pripada simetrali duži BB_1.

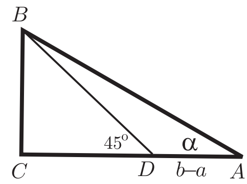
c) Na produžetku visine $h_a = AA_1$ uzeti tačku D takvu da je $AD = b$. Tada je $A_1B = b-h_a$, a trougao A_1BD se može konstruisati.



Sl. 408



Sl. 409



Sl. 410

d) Slično prethodnom zadatku.

e) Možemo konstruisati trougao ABB_1, gde je $BB_1 = a + b$, $\sphericalangle AB_1B = \dfrac{\beta}{2}$ i $\sphericalangle ABB_1 = \beta$.

f) Neka je A_1 tačka takva da je $B - C - A_1$ i $BA_1 = b$. Trougao AA_1C možemo konstruisati.

g) Neka su AA_1 i BD date visine, sl. 409. Srednja linija A_1E trougla BCD je normalna na AC i $A_1E = \dfrac{1}{2}h_b$ itd. Možemo konstruisati trougao AA_1E.

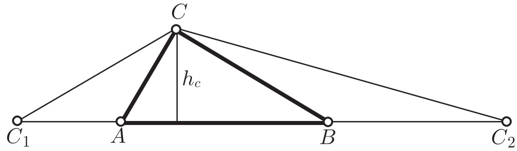
h) Slično **zadatku 1111** m).

1113. a) Neka je D tačka duži AC takva da je $CD = a$, sl. 410. Tada je $AD = b - a$ i trougao BCD je jednakokraki pravougli, pa je $\sphericalangle BDC = 45°$ itd.

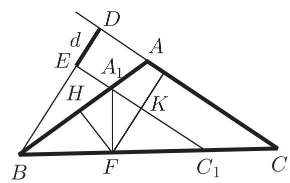
b) Neka je C_1 tačka prave AB takva da je $A - B - C_1$ i $BC_1 = a$. Tada možemo konstruisati trougao ACC_1.

c) Slično zadatku a).

d) Neka su C_1 i C_2 tačke prave AB takve da je $AC_1 = AC$ i $BC_2 = BC$, sl. 411. Tada je $C_1C_2 = 2s$, a $\sphericalangle C_1CC_2 = 135°$. Za konstrukciju koristićemo skup tačaka iz kojih se duž C_1C_2 vidi pod uglom od $135°$.



Sl. 411



Sl. 412

1114. Slično zadatku 1112 b) i d).

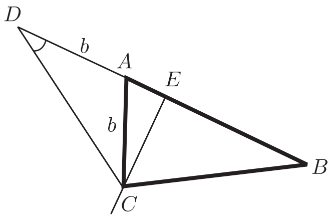
1115. Neka je ABC trougao u kom je $AB = AC$. Na visini BD odredimo tačku E, tako da je $ED = d$, gde je d data duž. Kroz E konstruišemo pravu paralelnu sa AC i dobijemo jednakokraki trougao A_1BC_1, sl. 412. Podnožje F normale iz A_1 na BC je tražena tačka, što se lako dokazuje.

1116. Produžimo BA preko tačke A za duž $AD = b$, sl. 413. U jednakokrakom trouglu CAD uglovi ADC i ACD su jednaki i svaki od njih jednak je polovini spoljašnjeg ugla BAC, tj. jednak je $\sphericalangle B$. Dakle, i trougao BCD je jednakokraki.

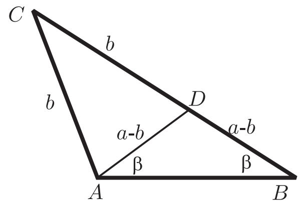
Konstrukcija: Na pravoj odredimo duž $AB = c$ i $AD = b$, kao na slici 413. Iz središta E duži BD konstruišemo normalu i na njoj odredimo tačku C tako da je $AC = b$.

Da bi zadatak imao rešenja neophodno je i dovoljno da bude $AC > AE$, tj. $b > \left| c - \dfrac{c+b}{2} \right| = \dfrac{|c-b|}{2}$. Može se dokazati da je taj uslov ekvivalentan sa $3b > c$.

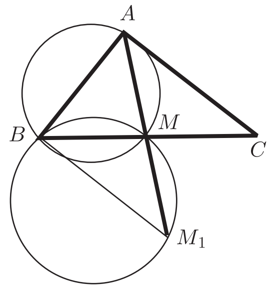
1117. *Analiza*: Neka je ABC trougao kakav se traži, sl. 414. Odredimo tačku D na stranici BC takvu da je $\sphericalangle DAB = \beta$. Trougao BAD je jednakokraki, pa je njegov spoljašnji ugao $\sphericalangle ADC =$



Sl. 413



Sl. 414



Sl. 415

2β. Kako je $\sphericalangle CAD = 2\beta$, sledi da je $CD = AC = b$. Dakle, možemo odmah konstruisati trougao ACD, jer su mu poznate stranice b, b, $a-b$ itd.

1118. Primetimo da, ako na polupravoj AM odredimo tačku M_1 takvu da je $AM = MM_1$, dobijamo podudarne trouglove ACM i M_1BM. Iz ove podudarnosti sledi da su podudarni i poluprečnici krugova opisanih oko ovih trouglova, što se može iskoristiti pri konstrukciji traženog trougla. Na polupravoj sa početkom u tački A odredimo tačke M i M_1, sl. 415, takve da je $AM = t_a$ i $AM_1 = 2t_a$. Zatim nad dužima AM i MM_1 konstruišemo krugove poluprečnika r_1 i r_2. Oni se, osim u tački M, seku i u tački B. Na pravoj BM odredimo tačku C, takvu da je M središte duži BC. Trougao ABC je traženi.

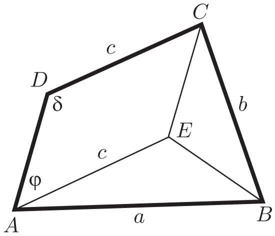
Dokaz: M je središte duži BC, pa je $AM = t_a$ zaista težišna linija. Poluprečnik kruga opisanog oko trougla ABM je r_1 po konstrukciji. S druge strane trouglovi ACM i M_1BM su podudarni ($AM = M_1M$, $MC = MB$, $\sphericalangle AMC = \sphericalangle M_1MB$), pa su i poluprečnici krugova opisanih oko tih trouglova jednaki, a poluprečnik kruga opisanog oko trougla M_1BM jednak je r_2 po konstrukciji.

Diskusija: Neophodno je, da bi se konstruisani krugovi sekli u dve tačke, da bude $r_1 + r_2 > 2t_a$. Inače, zadatak nema rešenja.

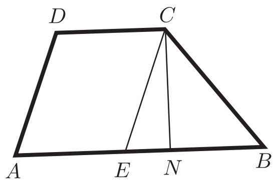
1119. a) Neka je E takva tačka da je četvorougao $AECD$ paralelogram. Neka je $\sphericalangle DAE = \varphi = 180^\circ - \delta$. Trougao ABE možemo konstruisati jer je $\sphericalangle BAE$ jednak razlici uglova α i φ, sl. 416.

b) Slično prethodnom zadatku, $\sphericalangle(a, c) = \sphericalangle BAE$.

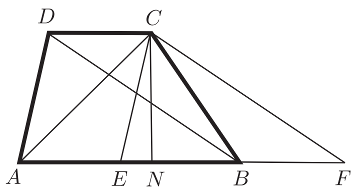
c) Najpre konstruišemo trougao ABC. Zadatak ima jedinstveno rešenje ako je $d_1 > a$ i $d_2 > b$.



Sl. 416



Sl. 417



Sl. 418

1120. a) Ugao β je suplementan sa α, pa se može konstruisati trougao ABC.

b) Neka je E podnožje normale konstruisane iz presečne tačke O dijagonala na stranicu AB. Možemo konstruisati pravougli trougao AEO.

1121. a) Najpre konstruišemo trougao ABC.

b) Prečnik upisanog kruga je visina romba. Može se konstruisati pravougli trougao AED, gde je DE visina romba.

c) Konstruisati najpre pravougli trougao ABO.

1122. a) Videti **zadatak 1113** b). b) Slično **zadatku 1113** a).

c) Konstruišemo pravougli trougao ABE, gde je $AB = a$, $BE = b + d$, $\sphericalangle ABE = 90°$ itd.

1123. Videti **zadatak 1113** a) i b).

1124. a) Neka je E tačka duži AB, takva da je $AE = CD = b$. Tada je $BE = a - b$, a četvorougao $AECD$ je paralelogram, sl. 417. Ako je CN visina, možemo najpre konstruisati trougao BCN.

b) Najpre konstruišemo trougao BCE, sl. 417.

c) Neka je F tačka takva da je $A - B - F$ i $BF = CD = b$. Tada je $AF = a + b$ i $CF = d_2$, sl. 418. Možemo konstruisati trougao AFC.

d) Koristeći h, d_1 i d_2 konstruišemo trougao ACF, sl. 418. Kako je $AF = a + b$, to je $b = \frac{1}{2}(AF - (a - b))$ itd.

e) Ugao CEB jednak je uglu α itd. Konstruišemo trougao BCE, pa je $BE = a - b$.

f) Konstruišemo trougao BCE itd.

g) Kostruišemo trougao BCE, gde je $BC = c$, $CE = d$, $\sphericalangle BDE = 90°$ itd.

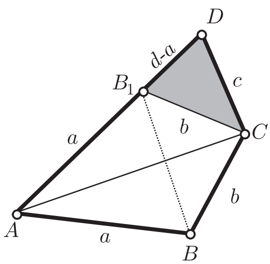
h) Prema slici 418 možemo konstruisati trougao BFC.

1125. Slično prethodnom zadatku.

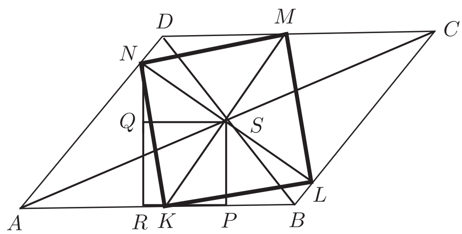
1126. a) Vidi zadatak **1111** l).

b) Neka je na stranici $AB = a$ tačka D_1 takva da je $AD_1 = AD = b$. Tada je $\sphericalangle BD_1D = 90° + \frac{1}{2}\sphericalangle(a, b)$, pa se može konstruisati trougao BDD_1.

1127. Normala iz B na AC seče AD u B_1 tako da je $AB_1 = a$ i $B_1D = d - a$. Lako se dokazuje da je $B_1C = BC$, pa se može konstruisati trougao B_1CD, sl. 419.



Sl. 419



Sl. 420

1128. Neka je $KLMN$ upisani kvadrat. Dijagonale kvadrata i paralelograma seku se u jednoj tački, tački S, sl. 420. Neka su SP i NR normale na AB i SQ normala na NR. Pravougli trouglovi SKP i SNQ su podudarni, pa je $SP = SQ$ i $KP = NQ$ (četvorougao $SPRQ$ je kvadrat). Sada je jasno da se prvo konstruiše kvadrat $SPRQ$ itd.

1129. Neka je AB hipotenuza. S one strane tačke C s koje je A na pravoj AC odredimo tačku M, tako da je $CM = s$, i slično, na CB odredimo tačku N tako da je $CN = s$. Tražena tačka hipotenuze je presek hipotenuze i prave MN.

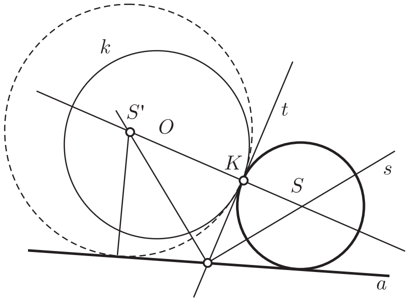
1130. Neka je M središte stranice AB i N središte stranice CD. Konstruišimo tačke E i F tako da četvorouglovi $AEND$ i $BCNF$ budu paralelogrami. Tada je $NE = d$ i $NF = b$. Sem toga je AE, a takođe i BF, paralelno i jednako polovini stranice CD, pa je i $AFBE$ paralelogram. Dakle, tačka M je središte duži EF. Sada možemo konstruisati trougao EFN (kao u **zadatku 1111** q). Dalje konstruišemo trougao AEM $\left(AE = \frac{c}{2} \text{ i } AM = \frac{a}{2}\right)$ itd.

1131. Centar traženog kruga je presek simetrale duži AP i prave n koja sadrži tačku P i normalna je na pravoj p.

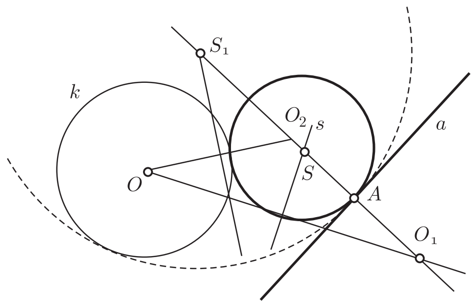
1132. Centar traženog kruga je presečna tačka simetrale ugla, kojeg obrazuju date prave i prave n, normalne na pravoj a, $n \ni A$.

1133. Neka je S centar datog kruga b. Centar traženog kruga je presek simetrale duži AB i prave SB.

1134. Neka je t tangenta datog kruga u datoj tački K, sl. 421. Presek prave OK i simetrale ugla, određenog pravim t i a, daje centar traženog kruga. (S' je centar kruga koji dodiruje spolja dati krug.)



Sl. 421

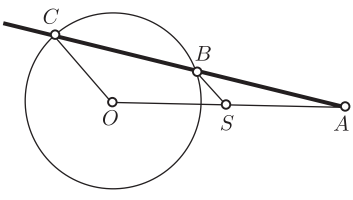


Sl. 422

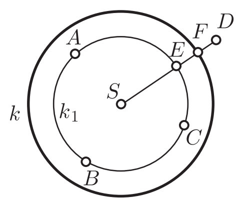
1135. Neka je n normala na a u datoj tački A i neka su O_1 i O_2 tačke prave n s raznih strana tačke A, takve da su duži AO_1 i AO_2 jednake poluprečniku datog kruga. Centar traženog kruga dobija se u preseku simetrale duži OO_1 (ili OO_2) sa pravom n, sl. 422. (Moguća su dva rešenja – centri S i S'.)

1136. Neka je O centar datog kruga. Rešenje je slično prethodnom zadatku, samo ovde ulogu prave n ima prava OA.

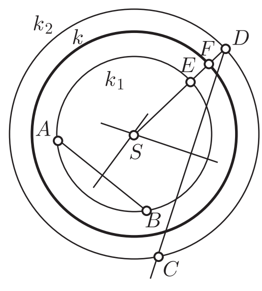
1137. Ako je S središte duži OA, gde je O centar datog kruga, tada je SB srednja linija trougla ACO, sl. 423. Dakle, treba konstruisati središte S duži OA i tačku B na datom krugu, tako da je duž SB jednaka polovini poluprečnika datog kruga.



Sl. 423



Sl. 424



Sl. 425

1138. Centar traženog kruga je presek kruga $k(M, r)$ i prave paralelne sa a na rastojanju r od prave a.

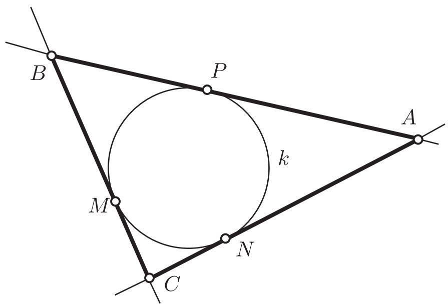
1139. Neka su A, B i C tri nekolinearne tačke i neka je k_1 krug opisan oko trougla ABC. Ako $D \notin k_1$, onda SD seče k_1 u tački E. Neka je F središte duži DE (sl. 424). Krug sa centrom S i poluprečnikom SF je traženi. Centar traženog kruga može se dobiti i u preseku simetrala dveju duži određenih datim tačkama (sl. 425). Zadatak može imati najviše 10 rešenja $\left(\dfrac{4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3} = 4 \text{ prema slici 424 i } \dfrac{4\cdot 3}{1\cdot 2} = 6 \text{ prema slici 425}\right)$.

1140. Tangentne duži iz C i D na traženi krug biće jednake ako su C i D jednako udaljene od centra kruga. Centar S je presek simetrala duži AB i CD. Nema rešenja ako se simetrale ne seku, ili ako su C i D u krugu poluprečnika SA.

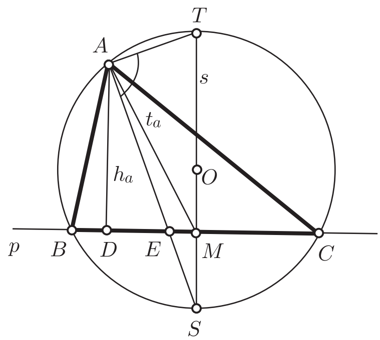
1141. Središta tetiva koje određuje prava p i centri datih krugova su temena pravougaonika. Otuda zaključujemo da su tri tražene duži jednake poluprečniku itd.

1142. Najveća tetiva je prečnik, a najmanja je normalna na taj prečnik.

1143. a) Neka je k krug poluprečnika r i M proizvoljna tačka kruga k. Na tangenti u tački M odredimo tačku C, tako da je $CM = \frac{1}{2}(a+b-c)$. Zatim odredimo tačku B, tako da je $C-M-B$ i $BC = a$. Tangente iz B i C na krug k seku se u tački A, sl. 426. Dokazaćemo da je ABC traženi trougao. Po konstrukciji je $BC = a$ i poluprečnik upisanog kruga je r. Dokažimo da je $AC-AB = b-c$. Neka su M, N, P dodirne tačke stranica i kruga k. Računamo: $AC-AB = AN+CN-AP-BP = CN-BP+CM-CM = 2CN-BM-CM = 2CN-BC = (a+b-c)-a = b-c$.



Sl. 426



Sl. 427

b) Neka je $AD = h_a$ i $AE = s_\alpha$. Tada se može konstruisati pravougli trougao ADE. Zatim, na duži AE odredimo tačku O, centar kruga poluprečnika r koji dodiruje pravu DE. Tangente iz A na ovaj krug seku pravu DE u B i C.

c) Nad duži $BC = a$ konstruišemo skup tačaka iz kojih se ova duž vidi pod uglom α itd.

d) Mora biti $h < s_\alpha < t_a$. Simetrala stranice BC i simetrala ugla BAC seku se u tački S na opisanom krugu, sl. 427. Ako je ST prečnik ovog kruga, onda je $\sphericalangle SAT = 90^\circ$. Dakle, na proizvoljnu pravu p konstruišemo normalu $AD = h_c$, zatim odredimo tačke E i M itd.

e) U krugu poluprečnika R periferijskom uglu α odgovara tetiva BC itd.

f) Slično zadatku c).

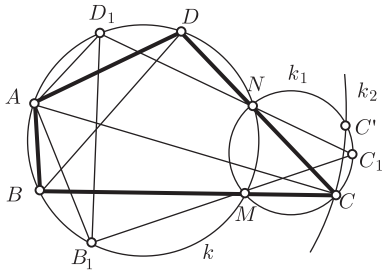
g) Ako je S centar upisanog kruga, tada je $\sphericalangle BSC = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}$, pa se može konstruisati trougao ABO kao u zadatku c) itd.

h) U krugu poluprečnika R tetivi $BC = a$ odgovara periferijski ugao α. Sada znamo $\beta-\gamma$ i $\beta+\gamma = 180^\circ - \alpha$, pa možemo konstruisati β i γ.

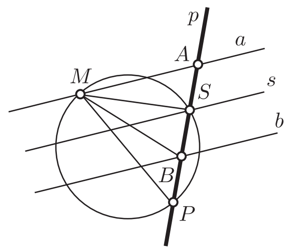
i) Ako je C_1 tačka na stranici AB takva da je $AC_1 = b$, tada je $BC_1 = c-b$ i, što se lako izračuna, $\sphericalangle BCC_1 = \frac{\gamma-\beta}{2}$, pa se može konstruisati trougao BCC_1.

1144. Treba konstruisati skup tačaka iz kojih se stranica AB vidi pod uglom $180^\circ - \alpha$ i nad stranicom AC skup tačaka iz kojih se ova stranica vidi pod uglom $180^\circ - \gamma$. Presek dobijenih lukova je tražena tačka.

1145. Neka je $B_1D_1 = d_2$ i k krug kome pripada skup tačaka iz kojih se duž B_1D_1 vidi pod uglom α. Neka je A tačka kruga k, takva da je $\sphericalangle B_1AD_1 = \alpha$. Konstruišimo u temenima B_1 i D_1 date uglove β i δ, tako da im se kraci seku u C_1 ($\sphericalangle AB_1C_1 = \beta$ i $\sphericalangle AD_1C_1 = \delta$), sl. 428. Neka su M i N presečne tačke duži B_1C_1 i D_1C_1 sa k. Opišimo krug k_1 oko trougla MNC_1, a zatim konstruišimo krug $k_2(A, d_1)$. Označimo sa C presečnu tačku krugova k_1 i k_2 (može biti još jedna presečna tačka, na slici 428 to je C'). Prave CM i CN seku krug k u B i D. Lako se dokazuje da su uglovi četvorougla $ABCD$ jednaki datim uglovima (koriste se jednaki uglovi nad istom tetivom). Dijagonala d_1 je konstruisana ($AC = d_1$), a $BD = B_1D_1 = d_2$, kao tetive koje odgovaraju jednakim periferijskim uglovima.



Sl. 428



Sl. 429

1146. Ako iz centra upisanog kruga konstruišemo normale na stranice, dobićemo tačke kroz koje prolaze traženi krugovi koji se dodiruju spolja.

1147. U datom krugu konstruišemo tetive AC i B_1D_1 jednake datim dužima. Zatim konstruišemo krug kroz središte S tetive B_1D_1, koncentričan datom krugu. Dijagonala BD je tangenta ovog kruga, koja seče AC pod datim uglom.

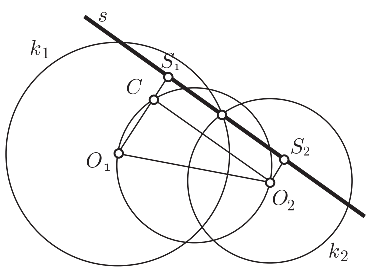
1148. Centar kruga je presečna tačka simetrale oštrog ugla sa naspramnom stranicom.

1149. Tačka A treba da bude središte duži CD. Neka je E tačka takva da je A središte duži BE. Tada je četvorougao $BCED$ paralelogram i $\sphericalangle BCD = 180^\circ - \beta$. Treba, dakle, konstruisati tačku E i skup tačaka iz kojih se duž BE vidi pod uglom $180^\circ - \beta$ itd.

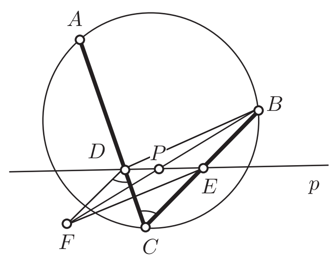
1150. Trougao ABM treba da bude jednakokraki. Središte S osnovice AB pripada pravoj s, koja je jednako udaljena od A i B. Ugao MSP je prav, pa je tačka S presečna tačka prave s i kruga čiji je prečnik duž MP, sl. 429.

1151. Na krugu k_1 odredimo tačke A i B, tako da je $AB = m$ i konstruišemo krug c_1 koncentričan sa k_1, koji dodiruje tetivu AB. Slično konstruišemo krug c_2, koncentričan sa k_2. Tražena prava p je zajednička tangenta krugova c_1 i c_2.

1152. Neka su S_1 i S_2 podnožja normala iz centara datih krugova na traženu sečicu. Tačke S_1 i S_2 su središta odsečenih tetiva, pa je $S_1S_2 = \dfrac{m}{2}$. Tada je kateta O_2C pravouglog trougla O_1O_2C jednaka $\dfrac{m}{2}$, sl. 430. Koristeći činjenicu da je ugao nad prečnikom prav, odredimo tačku C, a tražena sečica je paralelna sa O_2C.



Sl. 430

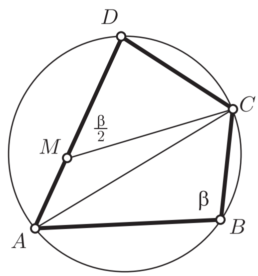


Sl. 431

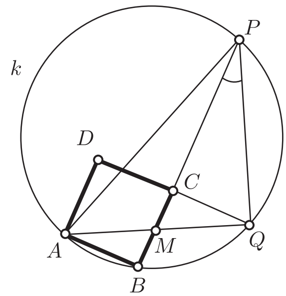
1153. Neka je C centar datog kruga. Konstruišemo krug poluprečnika CP koncentričan sa k, i na njemu odredimo tačku M, tako da je $MP = m$. Prava MP sadrži traženu tetivu.

1154. Neka je F tačka takva da je P središte duži BF. Tada je četvorougao $BEFD$ paralelogram, pa je $DF \parallel BC$. Kako je $\sphericalangle ACB$ određen tetivom AB, to je poznat i $\sphericalangle CDF$, $\sphericalangle CDF = \sphericalangle ACB$, a $\sphericalangle ADF = 180^\circ - \sphericalangle CDF$ itd., sl. 431.

1155. Kako je $ABCD$ tetivni četvorougao, to je $AB + CD = BC + AD$, odnosno, ako je $AB > BC$, imamo $AB - BC = AD - CD$. Neka je na duži AD tačka M takva da je $DM = DC$, odnosno $AM = AD - CD$, sl. 432. Nije teško izračunati da je $\sphericalangle CMD = \dfrac{\beta}{2}$, odnosno da je $\sphericalangle AMC = 180^\circ - \dfrac{\beta}{2}$. Sada možemo konstruisati trougao ACD itd.



Sl. 432



Sl. 433

1156. Može biti $C = P$ i $D = Q$, pa je trougao APQ polovina kvadrata. Pretpostavimo da je $C \neq P$ i $D \neq Q$. Neka je k opisani krug trougla APQ, sl. 433. Kako je $\sphericalangle ABP = 90^\circ$, sledi da je $B \in k$. Neka AQ seče BP u tački M. Kako je $CP \perp QD$ i $AQ \perp PQ$, sledi da je $\sphericalangle CPQ = \sphericalangle AQD$. Sem toga je $PQ = AQ$, pa su pravougli trouglovi QCP i ADQ podudarni. Otuda sledi da je $QC = AD$, pa kako je $AD = CD$, to je i $CQ = CD$, tj. tačka C je središte duži DQ. Duž MC je paralelna sa AD, pa je MC srednja linija trougla ADQ i tačka M je središte duži AQ. Konstruisanjem najpre tačke M, neposredno dobijamo temena kvadrata.

1157. Neka je S centar datog kruga. Centar traženog kruga dobijamo u preseku simetrale duži AB i prave s, $s \ni S$, normalne na datoj pravoj p.

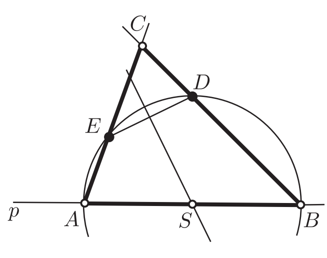
1158. Neka je S središte duži BC. Konstruišimo pravougli trougao ASM kome je duž AS hipotenuza, a kateta je $SM = m$. Tražena prava je $a = AM$. Neka su B_1 i C_1 upravne projekcije tačaka B i C na pravu a. Ako je četvorougao BB_1C_1C konveksan trapez, onda je $BB_1 + CC_1 = 2m$, a ako je četvorougao BB_1CC_1 konveksan trapez, onda je $|BB_1 - CC_1| = 2m$ (osobine srednje linije trapeza).

1159. Neka je tačka M središte duži AB. Tada je $c = MC$, a $a \parallel c$ i $b \parallel c$. Zadatak ima tri rešenja.

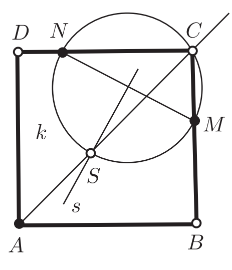
1160. Ako su tačke A, B i C kolinearne, onda je zadatak neodređen, svaka prava paralelna sa pravom p, $p \supset \{A, B, C\}$, zadovoljava postavljene uslove. Ako su A, B i C nekolinearne tačke, onda postoje tri rešenja – to su prave koje sadrže srednje linije trougla ABC.

1161. Videti **zadatak 683**.

1162. Uglovi AEB i ADB su pravi, pa krug prečnika AB sadrži tačke D i E. Centar tog kruga je presečna tačka simetrale duži DE i prave p, sl. 434.



Sl. 434



Sl. 435

1163. Konstruišemo normale u D i E na prave DH i EH.

1164. Nad MN, kao prečnikom, konstruišemo krug i odredimo središte S polukruga bližeg tački A, sl. 435. Prava AS seče drugi polukrug u temenu C. (Uglovi MCS i NCS su od $45°$.)

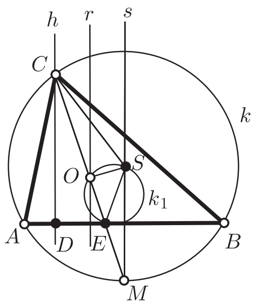
1165. Neka su P i Q tačke koje pripadaju dvema susednim stranicama AB i BC ili njihovim produžecima. U svakom slučaju ugao PBQ je prav, pa krug k, prečnika PQ, sadrži tačku B. Pošto dijagonala kvadrata polovi ugao, to će dijagonala BD raspoloviti onaj luk $\widehat{PQ}$ kruga k kome ne pripada teme B, ako su P i Q obe na produžecima ili obe na stranici kvadrata. (Videti prethodni zadatak.) Ako je jedna tačka na stranici, a druga na produžetku, onda dijagonala BD sadrži središte onog luka kome pripada i teme B. Ova dijagonala iz istog razloga polovi onaj luk $\widehat{RS}$ kruga k_1 prečnika RS, kome ne pripada teme D. Ako su središta pomenutih lukova tačke S i S_1, onda prava SS_1 sadrži dijagonalu BD, a temena B i D predstavljaju presečne tačke krugova k i k_1 sa pravom SS_1 ($B \neq S$ i $D \neq S_1$). U diskusiji posmatrati kakve mogućnosti nastaju konstruisanjem i drugih krugova.

1166. Neka je a seče d u tački N i b seče c u tački L. Dijagonala LN je zajednička simetrala pravih uglova AND i BLC. Treba konstruisati krugove: k prečnika AD i k_1 prečnika BC, pa slično prethodnom zadatku konstruisati dijagonalu LN, kroz centre polukrugova.

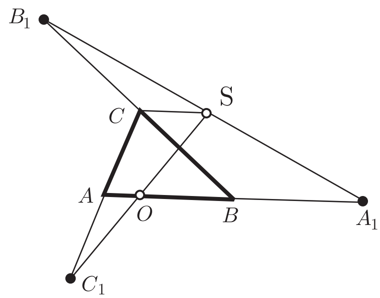
1167. *Analiza*: Prava s, $s \ni S$, koja je paralelna visini CD, predstavlja simetralu stranice AB. Ona seče opisani krug k u istoj tački M (središtu luka $\widehat{AB}$) u kojoj simetrala CE ugla ACB seče ovaj krug. Kako je $SC = SM$, to je trougao CMS jednakokraki i njegova visina SO polovi stranicu CM. Kako je tačka O središte duži CM, prava r, $r \ni O$, paralelna pravoj h, biće jednako udaljena od pravih h i s. Sem toga, ugao SOE je prav, pa krug k_1 prečnika SE sadrži tačku O. Konstruisanjem tačke O u preseku $r \cap k_1$, otvaramo put ka rešenju zadatka, sl. 436.

Konstrukcija: 1) Konstruišemo pravu DE koja sadrži stranicu AB i prave $h \ni D$, $s \ni S$, normalne na DE. 2) Konstruišemo pravu r jednako udaljenu od pravih h i s. 3) Konstruišemo krug k_1 prečnika SE. Dobijamo $r \cap k_1 \ni O$. 4) Konstruišemo pravu OE. Dobijamo $OE \cap h = \{C\}$. 5) Konstruišemo krug $k(S, SC)$. Dobijemo $DE \cap k = \{A, B\}$.

Rešivost zadatka ne zavisi od toga da li su tačke D, E i S kolinearne, već od međusobnog rasporeda i međusobnih rastojanja, tj. od egzistencije preseka figura r i k_1, OE i h itd.



Sl. 436

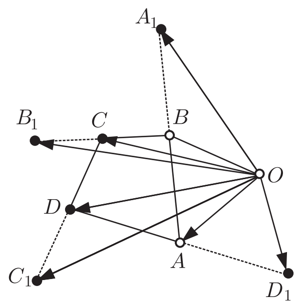


Sl. 437

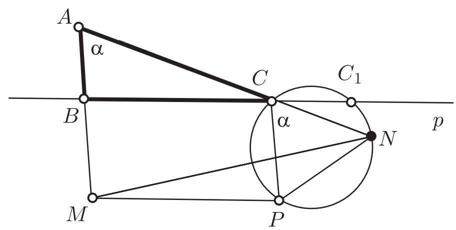
1168. Neka je S središte duži A_1B_1, sl. 437. Duž CS je srednja linija trougla A_1B_1B, pa je $CS \parallel AB$ i $CS = \dfrac{1}{2}A_1B = \dfrac{1}{2}AB$. Ako je O središte duži C_1S, tada je $AO \parallel CS$, a samim tim i $AO \parallel AB$. Dakle, prava A_1O sadrži stranicu AB i još je $AO = \dfrac{1}{7}OA_1$. Tačku A možemo dobiti i kao presek prave OA_1 sa pravom C_1N, gde se N dobija slično tački O. (Konstruiše se središte M duži A_1C_1, a N je središte duži B_1M.)

1169. Može se rešiti slično prethodnom zadatku, ali isto tako do rešenja možemo doći korišćenjem vektora. U tom cilju izaberemo proizvoljnu tačku O u ravni datog četvorougla. Označimo sledeće vektore: $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{OD} = \vec{d}$, $\overrightarrow{OA_1} = \vec{a}_1$, $\overrightarrow{OB_1} = \vec{b}_1$, $\overrightarrow{OC_1} = \vec{c}_1$, $\overrightarrow{OD_1} = \vec{d}_1$, sl. 438. Imamo jednačine (videti **zadatak 708**): $\vec{a} + \vec{a}_1 = 2\vec{b}$, $\vec{b} + \vec{b}_1 = 2\vec{c}$,

$\overrightarrow{c} + \overrightarrow{c_1} = 2\overrightarrow{d}$, $\overrightarrow{d} + \overrightarrow{d_1} = 2\overrightarrow{a}$. Iz prve dve jednačine dobijemo $\overrightarrow{a} = 4\overrightarrow{c} - 2\overrightarrow{b_1} - \overrightarrow{a_1}$. Koristeći ostale jednačine eliminišemo $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{d}$ i dobijemo $\overrightarrow{a} = \frac{1}{15}(8\overrightarrow{d_1} + 4\overrightarrow{c_1} + 2\overrightarrow{b_1} + \overrightarrow{a_1})$. Konstruisanjem vektora $\overrightarrow{a}$ dobićemo teme A.



Sl. 438



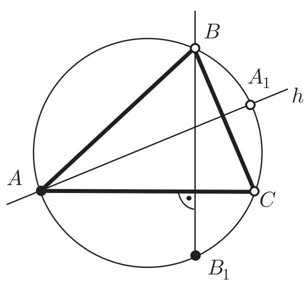
Sl. 439

1170. Ugao PCR je prav, pa se tačka C dobija u preseku datog kruga i kruga prečnika PR.

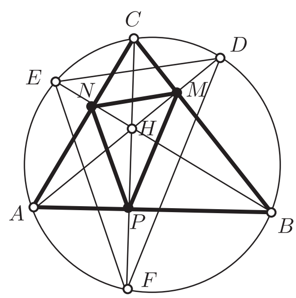
1171. Ako je P tačka takva da je $MP \parallel p$ i $MP = a$, onda je četvorougao $BCPM$ paralelogram, pa je $\sphericalangle PCN = \alpha$, sl. 439. Zahvaljujući tome konstruisaćemo tačku C kao presek prave p sa skupom tačaka iz kojih se duž PN vidi pod uglom α.

1172. Duž MN se iz tačke A vidi pod uglom od $60°$, ako je P između M i N, ili pod uglom od $120°$, ako P nije između M i N. Konstruišimo skup tačaka iz **zadatka 965**. Neka je S središte luka s druge strane tetive MN. Teme A pripada pravoj PS itd.

1173. Ako su A_1 i B_1 tačke u kojima visine h_a i h_b seku opisani krug, tada teme C polovi luk $\widehat{A_1B_1}$ (na slici 440, $\sphericalangle A_1AC = \sphericalangle B_1BC$, kao uglovi sa normalnim kracima). Sada kroz B_1 konstruišemo pravu h_b.



Sl. 440



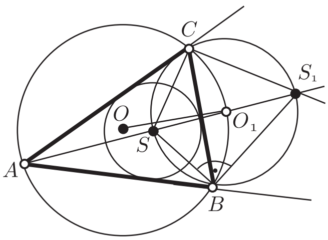
Sl. 441

1174. Ako je D tačka u kojoj visina AM seče opisani krug, onda je M središte duži DH, gde je H ortocentar, sl. 441. Na isti način je N središte duži EH i P središte duži FH (videti **zadatak 1068**.) Prave PM i DF su paralelne, jer je PM srednja linija trougla DFH. Takođe su prave MN i DE paralelne i $NP \parallel EF$. Kako su prave AD, BE, CF simetrale unutrašnjih uglova trougla DEF (videti **zadatak 999**), to su one ujedno i simetrale uglova u trouglu MNP. Sada znamo kako da konstruišemo ortocentar H itd.

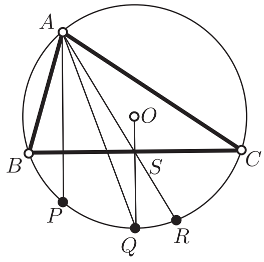
1175. Opišemo krug (S je centar, AS poluprečnik). Zatim konstruišemo visinu AH do preseka H' sa krugom. Prava BC je simetrala duži HH'. (Videti **zadatak 1068**.)

1176. Tačke S_1, S_2, S_3 su na simetralama spoljašnjih uglova trougla ABC, pa su simetrale unutrašnjih uglova trougla ABC normalne na stranice trougla $S_1S_2S_3$ (kao simetrale naporednih uglova). Dakle, temena A, B, C su podnožja visina trougla $S_1S_2S_3$.

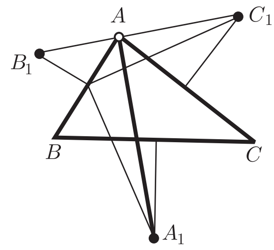
1177. Neka je O centar opisanog kruga trougla ABC, a S i S_1 centri upisanog kruga i kruga spolja pripisanog stranici BC, sl. 442. Kako je $\sphericalangle SBS_1 = \sphericalangle SCS_1 = 90°$, to krug prečnika SS_1 sadrži tačke B i C. Da bismo ove tačke odredili, primetimo da je prava OO_1 simetrala duži BC (tačka O_1 je središte luka BC i duži SS_1). Dakle, $OO_1 \perp BC$ i OO_1 je poluprečnik opisanog kruga.



Sl. 442



Sl. 443



Sl. 444

1178. a i b) Videti **zadatak 1174**.

c) Oko trougla PQR opišemo krug. To je ujedno opisani krug trougla ABC. Prava OQ, gde je O centar opisanog kruga, predstavlja simetralu stranice BC, pa je visina h paralelna sa OQ. Konstruišemo visinu i dobijemo teme A. Duž AR seče OQ u središtu S stranice BC. Normala iz S na AP određuje temena B i C, sl. 443.

1179. a) Lako se dokazuje da je trougao $O_1O_2O_3$ podudaran trouglu ABC ($O_1O_2O_3$ su date tačke). Centar O opisnog kruga trougla ABC je ortocentar trougla $O_1O_2O_3$, a središta duži OO_1, OO_2, OO_3 su istovremeno središta stranica trougla ABC.

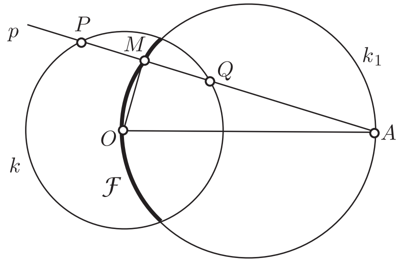
b) Date tačke D, E, F pripadaju opisanom krugu trougla ABC. (Videti **zadatak 1068**.)

1180. Neka su A_1, B_1, C_1 date tačke i neka je D središte stranice AC, sl. 444. Kao u **zadatku 790** dokažemo da je $B_1C_1 = AA_1$ i $B_1C_1 \perp AA_1$. Na osnovu toga se konstruiše teme A. Slično konstruišemo B i C.

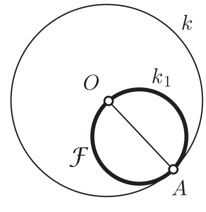
1181. Ako je A_1 podnožje normale iz A na neku pravu b, $b \ni B$, onda je ugao AA_1B prav. Traženi skup tačaka je krug k prečnika AB, jer se iz svake tačke A_1 duž AB vidi pod pravim uglom.

1182. Trougao OPQ je uvek pravougli sa hipotenuzom $PQ = 2m$. Ako je tačka S središte duži PQ, onda je OS težišna linija koja odgovara hlpotenuzi i jednaka je polovini hipotenuze. Dakle, uvek je $OS = m$, bez obzira na izbor duži PQ, $PQ = 2m$, pa je traženi skup tačaka presek kruga $k(O, m)$ i datog ugla Opq (četvrtina kruga k).

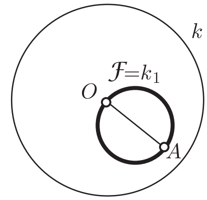
1183. Ako su $AB = t$ i $A_1B_1 = t$ dve bilo koje tetive datog kruga, a S i S_1 središta ovih tetiva, onda su trouglovi ASO i A_1S_1O podudarni među sobom (O je centar datog kruga). Odavde sledi da je $OS = OS_1$ za svake dve tetive kruga k, koje su jednake datoj duži t. Sve tačke S su jednako udaljene od tačke O, pa je krug $k_1(O, OS)$ traženi skup tačaka.



Sl. 445



Sl. 446

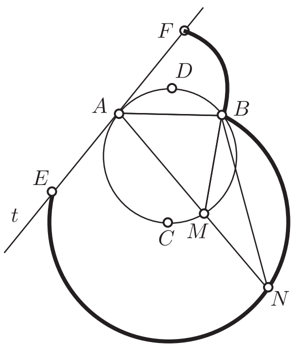


Sl. 447

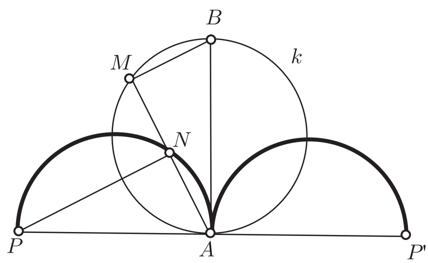
1184. Ako je M središte bilo koje od dobijenih tetiva, tada je $\sphericalangle AMO = 90°$, pa je traženi skup tačaka podskup kruga k_1, prečnika OA, sl. 445, 446, 447.

1185. Odredimo na pravoj p tačke M i N tako da je $MN = m$ i s raznih strana prave p tačke S i S_1 takve da su trouglovi MNS i MNS_1 pravougli sa hipotenuzama $MS = MS_1 = r$. Prave kroz S i S_1, paralelne sa p, daju rešenje.

1186. Trougao MBN je jednakokraki i $\sphericalangle AMB = 2\sphericalangle ANB$. Traženi skup tačaka predstavljaju dva luka: $\widehat{BNE}$ sa centrom C (središte luka $\widehat{AMB}$) i luka $\widehat{BF}$ sa centrom D (središte luka $\widehat{ADB}$. Prava t je tangenta datog kruga u tački A, sl. 448.



Sl. 448



Sl. 449

1187. Traženi skup je krug simetričan datom krugu u odnosu na pravu AB. (Videti **zadatak 1068**.)

1188. *Analiza*: Konstruišemo trougao ANP podudaran trouglu ABM, tako što ćemo katetu $NP = AM$ konstruisati s one strane prave AM, s koje nije B, sl. 449. Hipotenuza AP je jednaka prečniku AB. Izračunajmo ugao PAB. Iz podudarnosti trouglova ABM i APN je $\sphericalangle APN = \sphericalangle BAM$. U pravouglom trouglu APN je $\sphericalangle APN + \sphericalangle PAN = 90°$, pa zamenom $\sphericalangle APN = \sphericalangle BAN$, dobijamo $\sphericalangle BAN + \sphericalangle PAN = 90°$, odnosno $\sphericalangle PAB = 90°$. Dakle, duž AP, $AP = AB$, uvek je u tački A normalna na prečnik AB, pa se tačke P i P' ($AP' = AB$) mogu konstruisati nezavisno od izbora tačke M. Sem toga, uočavamo da se iz tražene tačke N (koja može biti i van kruga k, ako je $BM > AM$) duž AP (ili duž AP') vidi pod pravim uglom. Traženi skup tačaka je unija dva polukruga sa prečnicima AP i AP' s one strane prave PP' s koje je tačka B.

1189. Neka je $AB = m$ bilo koja tetiva datog kruga i neka su R i R_1 tačke u ravni kruga takve da je $AR = BR = AR_1 = BR_1 = r$. Traženi skup tačaka su dva kruga koji sadrže tačke R i R_1 i koncentrični su datom krugu.

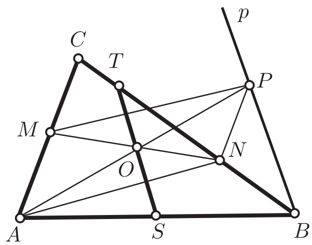
1190. Neka je OA poluprečnik datog kruga i AR duž normalna na OA i $AR = r$. Traženi skup je krug sa centrom O i poluprečnikom OR.

1191. Slično prethodnom zadatku, samo je $AR = t$.

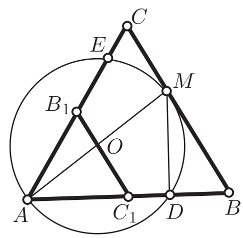
1192. Ako su A, B tačke na kracima datog ugla takve da je $OA + OB = s$ i C četvrto teme paralelograma $OACB$, tačka C pripada duži DE, gde je $D \in Oa$, $E \in Ob$ i $OD = OE = s$. (Trouglovi ACD i BCE su jednakokraki i $AC = AD$, odnosno $BC = BE$).

1193. Traženi skup tačaka je prava q, koja je paralelna datoj pravoj i polovi rastojanje tačke A od prave p. (Osobina srednje linije trougla.)

1194. Neka je tačka P takva da je duž NP paralelna i jednaka duži AM kao na slici 450. Trougao BNP je jednakokraki, pa je $\sphericalangle NPB = \sphericalangle NBP$. Kako je spoljašnji ugao CNP ovog trougla jednak uglu ACB (nezavisno od izbora tačaka M i N), to je $\sphericalangle NBP = \frac{1}{2}\sphericalangle ACB$, pa se polupravа Bp može konstruisati nezavisno od izbora tačke M. Sem toga, očigledno je da, nezavisno od tačke M, teme P paralelograma $ANPM$ pripada polupravoj Bp. Središte O duži MN je presečna tačka dijagonala MN i AP paralelograma $ANPM$, dakle, tačka O je središte duži AP. Ako je $M = A$, onda je $N = B$ i tačka $O = S$ je središte stranice AB. Ma kako izabrali tačku M, duž OS biće srednja linija trougla ABP, pa je traženi skup tačaka duž ST i to $ST \parallel Bp$ $(T \in BC)$ itd.



Sl. 450

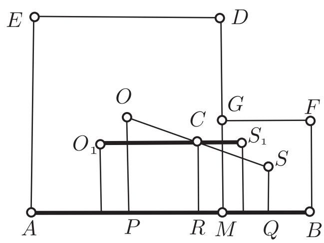


Sl. 451

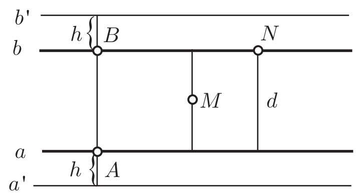
1195. Videti sliku 257 uz rešenje **zadatka 937**. Traženi skup tačaka je krug prečnika BC.

1196. Duž AM vidi se iz tačaka D i E pod pravim uglom, pa krug k prečnika AM sadrži tačke D i E, tj. predstavlja opisani krug trougla ADE, sl. 451. Centar ovog kruga je središte duži AM, pa prema **zadatku 1193** traženi skup svih centara krugova opisanih oko trouglova ADE predstavlja srednja linija B_1C_1 trougla ABC.

1197. Neka je $AM = a$. Tada je $BM = AB - a$. Neka je tačka C središte duži OS i neka su OP, SQ i CR normale na duž AB. Duž CR je srednja linija trapeza $OPQS$, sl. 452. Pošto je $OP = \frac{1}{2}a$ i $SQ = \frac{1}{2}(AB - a)$, biće $2CR = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}(AB - a) = \frac{1}{2}AB$, odnosno $CR = \frac{1}{4}AB$. Dakle, tačka C pripada pravoj koja je paralelna datoj duži i od nje je udaljena za $\frac{1}{4}AB$. Traženi skup tačaka je duž $O_1S_1 = \frac{1}{2}AB$, gde su O_1 i S_1 centri dvaju podudarnih kvadrata.



Sl. 452



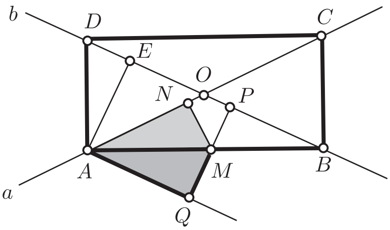
Sl. 453

1198. Razlikovaćemo dva slučaja: $a \parallel b$ i a seče b u tački O. Neka je najpre $a \parallel b$ i neka je rastojanje između ovih pravih jednako duži d, sl. 453. Očigledno je da svaka tačka pravih a i b i svaka tačka između ovih pravih, ima osobinu da joj je zbir rastojanja od pravih a i b jednak duži d. Ako je P tačka van pravih a i b, i nije između ovih pravih, onda je $PA + PB = d + 2h > d$.

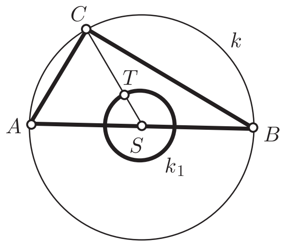
Prema tome, ako je $m < d$, onda je traženi skup tačaka prazan; ako je $m = d$, onda je to skup tačaka pravih a i b i svih tačaka između ovih pravih; ako je $m > d$, onda je traženi skup tačaka $a' \cup b'$, gde su a' i b' prave paralelne sa datim pravim a i b, udaljene od a i b za h, gde je $h = \dfrac{m-d}{2}$.

Nađimo rešenje za slučaj kad a seče b u O, sl. 454. Neka su A i C tačke prave a, koje su od prave b udaljene za m ($AE = m$ i $AE \perp b$), a B i D tačke prave b, udaljene od prave a za m. Lako je dokazati da je $AO = BO = CO = DO$, odakle sledi da je četvorougao $ABCD$ pravougaonik. Dokazaćemo da sve tačke pravougaonika $ABCD$ imaju traženu osobinu. Tačke A, B, C i D imaju ovu osobinu po konstrukciji. Neka je M tačka pravougaonika, recimo da je $M \in AB$

i neka je $MN \perp a$ i $MP \perp b$. Neka je tačka Q takva da je četvorougao $AQPE$ pravougaonik. Kako je $PQ = AE = m$, treba dokazati da je $MN = MQ$. Imamo $AM = AM$, $\sphericalangle ANM = \sphericalangle AQM$ (pravi uglovi) i $\sphericalangle MAQ = \sphericalangle PBM$ (naizmenični uglovi), a $\sphericalangle PBM = \sphericalangle NAM$ (jer je trougao OAB jednakokraki), pa je $\sphericalangle MAQ = \sphericalangle NAM$. Sledi da je trougao ANM podudaran trouglu MAQ, pa je $MN = MQ$. Stoga je $MP + MN = PM + MQ = PQ = m$.



Sl. 454



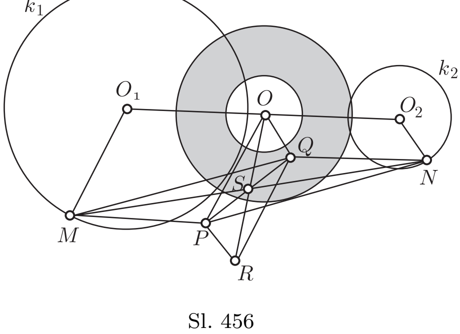
Sl. 455

1199. Slično prethodnom zadatku. Traženi skup tačaka je unija 8 polupravih, koje predstavljaju produžetke stranica pravougaonika $ABCD$ sa slike 454.

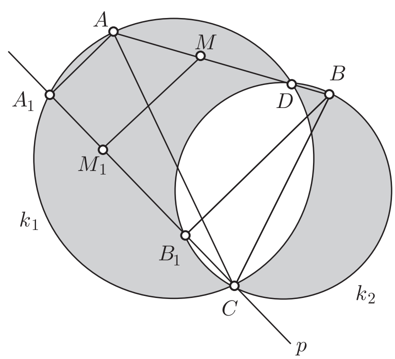
1200. Svaki pravougli trougao upisan u krug ima za hipotenuzu jedan prečnik, na sl. 455 duž AB. Hipotenuzina težišna linija je poluprečnik kruga, na slici duž CS. Iz osobina težišta znamo da je $ST = \dfrac{1}{3}SC$, pa je tražena figura skup tačaka T, koje imaju osobinu $ST = \dfrac{r}{3}$, gde je r poluprečnik datog kruga. Dakle, ovaj skup je krug, na slici krug k_1.

1201. Neka je tačka O središte duži O_1O_2. Neka su P i Q takve tačke da su četvorouglovi OO_1MP i OO_2NQ paralelogrami. Tada je duž MP paralelna i jednaka polovini duži O_1O_2 i duž NQ takođe je paralelna i jednaka polovini duži O_1O_2, pa je četvorougao $MNPQ$ paralelogram, sl. 456. Dakle, duži MN i PQ prepolovljene su tačkom S. Neka je R tačka takva da je S središte duži OR. Tada je četvorougao $OPRQ$ paralelogram. Sada imamo $OP = r_1$ i $PR = OQ = r_2$, pa iz trougla OPR dobijamo nejednakosti $OR \geq OP - PR$ i $OR \leq OP + PR$, odnosno $2OS \geq r_1 - r_2$ i $2OS \leq r_1 + r_2$. Odavde je $\dfrac{1}{2}(r_1 - r_2) \leq OS \leq \dfrac{1}{2}(r_1 + r_2)$.

Dakle, tražena figura je površ kružnog prstena, određena krugovima sa centrom O i poluprečnicima $\dfrac{1}{2}(r_1 - r_2)$ i $\dfrac{1}{2}(r_1 + r_2)$, na slici 456 osenčena površ.



Sl. 456



Sl. 457

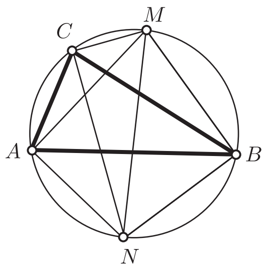
1202. Koristimo analizu prethodnog zadatka. Ako tačke M i N pripadaju kružnim površima krugova k_1 i k_2, onda one pripadaju bilo kojim krugovima $k_1'(O_1, r_1')$ i $k_2'(O_2, r_2')$, gde je $r_1' \leq r_1$ i

$r_2' \leq r_2$. Otuda zaključujemo da središte S duži MN pripada krugu $k(O,r)$, gde je tačka O središte duži O_1O_2, a $r = \dfrac{1}{2}(r_1 + r_2)$.

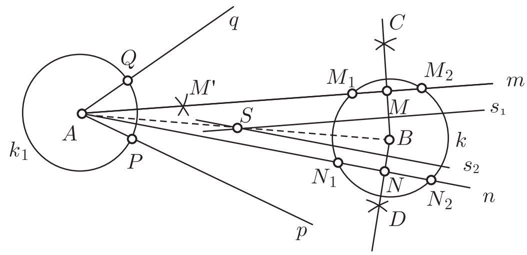
1203. Prema **zadatku 1181** projekcije tačaka A i B pripadaju krugovima k_1 prečnika AC, i k_2 prečnika BC. Neka je p, $p \ni C$, proizvoljna prava koja, pored tačke C, sa krugovima k_1 i k_2 ima zajedničke tačke A_1 i B_1. Tačka A_1 je projekcija tačke A, a tačka B_1 je projekcija tačke B, na pravu p, sl. 457. Očigledno je da se unutrašnje tačke duži AB projektuju na deo prave p između krugova k_1 i k_2, odnosno na duž A_1B_1. Traženi skup tačaka je deo ravni između krugova k_1 i k_2, kao i sve tačke ovih krugova, osim njihovih zajedničkih tačaka C i D, osenčeno na slici 457.

1204. Traženi skup je simetrala duži AC, bez središta S te duži.

1205. Zbog pravih uglova MAN, MBN, MCN izlazi da je duž MN prečnik kruga kome pripadaju i tačke A, B, C. Dakle, to je opisani krug trougla ABC i on predstavlja traženi skup tačaka, sl. 458. Obrnuto, ako je M tačka opisanog kruga, različita od A, B, C, uveravamo se da je zajedničko podnožje normala tačka N, dijametralno suprotna tački M.



Sl. 458



Sl. 459

1206. Neka je tačka (N) određena kao na slici 35. Označimo sa A i B presečne tačke prave m sa a i b. Koristeći visine h_a i h_b konstruišemo ortocentar trougla AB (N), a zatim normalu iz ortocentra na m.

1207. Neka je tačka (B) određena pravim $A(B)$ i b. Izaberimo tačku C na pravoj b i odredimo središte M duži AC. Prava m kroz M, paralelna sa b, seče pravu a u traženom središtu duži A (B).

1208. Slično prethodnom zadatku. **1209.** Koristiti prethodni zadatak.

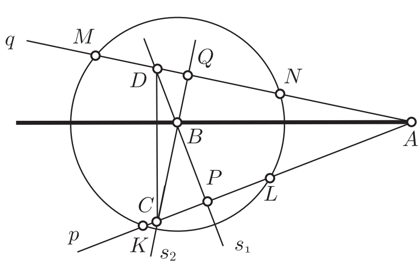
1210. Koristiti **zadatak 1206**.

1211. U dati trougao upišemo trougao $A_1B_1C_1$, tako da su mu stranice paralelne stranicama datog trougla, na jednakim rastojanjima od tih stranica. Trouglovi $A_1B_1C_1$ i $(A)(B)(C)$ imaju zajednički centar upisanog kruga.

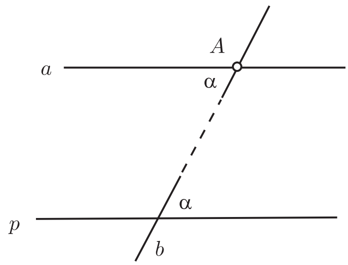
1212. Slično **zadatku 1208**.

1213. Konstruišimo krugove $k_1(A,r)$ i $k(B,r)$ i na krugu k_1 odredimo dve tačke P i Q. Koristeći dati lenjir možemo konstruisati duži AP i AQ i *produžavati ih* tako da dobijemo poluprave Ap i Aq. Ako ove poluprave ne seku krug k, onda ćemo konstruisati tačku M' takvu da je četvorougao $APM'Q$ romb. Prava AM' je simetrala ugla Apq. Konstruišemo polupravu Am' produžavanjem duži AM' iza M'. Ako ona ne seče krug k, onda ćemo na isti način konstruisati simetrale uglova određenih pravim m', p i q. Taj postupak nastavićemo sve dok ne dobijemo dve prave koje seku krug k. Neka su to prave m i n i neka one seku krug k u tačkama M_1, M_2, N_1 i N_2, sl. 459. Konstruišimo tačke C i D takve da su četvorouglovi BM_1CM_2 i BN_1DN_2 rombovi. Prave BC i BD su simetrale tetiva M_1M_2 i N_1N_2. One određuju središta M i N tetiva M_1M_2 i N_1N_2. Uglovi AMB i ANB su pravi, pa tačke M i N pripadaju krugu prečnika AB. Središte S duži AB, a to je centar ovog kruga, dobićemo u preseku simetrala s_1 i s_2 duži BM i BN. (Simetrale s_1 i s_2 konstruišemo kao i simetralu BC duži M_1M_2.)

1214. Oko tačke B opišemo krug $k(B,r)$. Zatim povlačimo poluprave iz A dok ne dobijemo poluprave Ap i Aq koje seku krug k, kao u prethodnom zadatku. Tako dobijamo tetive KL i MN, sl. 460. Konstruišemo simetrale s_1 i s_2 ovih tetiva. Simetrala s_1 seče Ap u P i Aq u D, a s_2 seče Ap u C i Aq u Q. Sada su CQ i DP visine trougla ACD, a tačka B je ortocentar. Tražena prava AB je treća visina ovog trougla i konstruiše se kroz B normalno na CD.



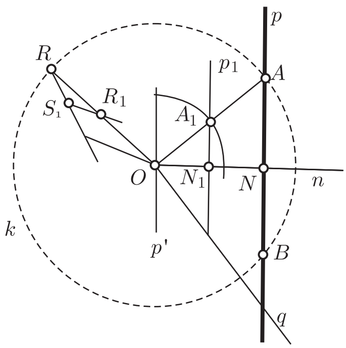
Sl. 460



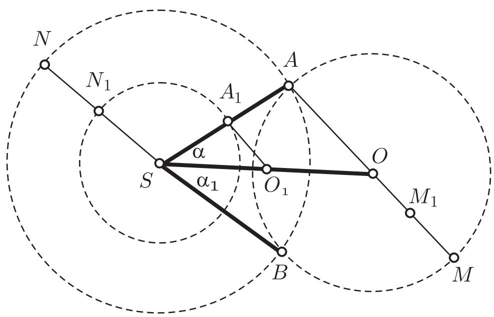
Sl. 461

1215. Konstruišemo proizvoljnu pravu b kroz A, tako da ona seče pravu p, sl. 461. Ugao α, pod kojim se seku b i p, konstruišemo u temenu A.

1216. Kao u prethodnom zadatku, iz O konstruišemo pravu p' paralelnu sa p, pa zajedničku normalu ON za p i p', sl. 462. Kao u **zadatku 1208**, konstruišemo središte R_1 duži OR. Zatim konstruišemo sredšte N_1 duži ON i kroz N_1 pravu p_1 paralelnu sa p. Ako je $OR_1 \leq m$, tada konstruišemo krug $k_1(O, OR_1)$ i na pravoj p_1 dobijamo tačku A_1, tako da je $OA_1 = OR_1$, a prava OA_1 seče p u traženoj tački A. Ako je $OR_1 > m$, onda ponovo prepolovimo duži OR_1 i ON_1 itd.



Sl. 462



Sl. 463

1217. Kao u **zadatku 1213**, konstruišemo središta duži OS, OM i SN. Dobijamo tačke O_1, M_1 i N_1, sl. 463. Ako su duži OM_1, SO_1 i SN_1 manje od r, konstruisaćemo trougao A_1O_1S itd. U protivnom konstruišemo središta duži SO_1, OM_1 i SN_1 itd.

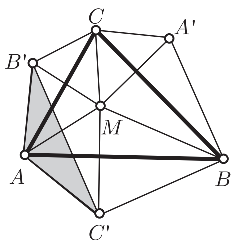
1218. Neka je tačka C simetrična sa S u odnosu na M. Četvorougao $OAMB$ je romb stranice jednake poluprečniku r. *Konstrukcija*: Konstruišimo krug $k_1(SM)$ i koristeći poznatu konstrukciju ugla od $60°$, odredimo tačku $C \in k_1$ iza M u odnosu na S. Krug $k_2(C, r)$ seče dati krug u traženim tačkama A i B.

1219. Ako je $MN \subset b$, onda iz bilo koje tačke $A \in a$ konstruišemo prave AM i AN, koje u preseku sa pravom c određuju tačke P i Q. Ako je $MN \subset a$ (ili $MN \subset c$), onda iz neke tačke $C \in c$ konstruišemo prave CM i CN, koje seku pravu b, određujući tačke B i D. Zatim, $BN \cap c = \{E\}$ i $DE \cap a = \{P\}$. Uzmimo da je $M = Q$. U oba slučaja koristimo osobine srednjih linija trougla.

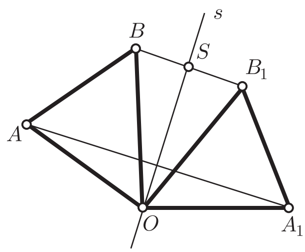
1220. Svejedno je kojoj od pravih pripada duž MN. Određenosti radi uzmimo da je $MN \subset b$. Kao u prethodnom zadatku odredimo tačke A, P i Q. Četvorougao $MNQP$ je trapez. Neka PN seče MQ u tački T, AT seče MN u tački S i AT seče PQ u tački R. Tačka S je središte duži

MN. *Dokaz*: Duži MQ i NP su težišne linije trougla APQ, pa je tačka T težište. Znači, duž AR je takođe težišna linija, pa je tačka R središte duži PQ. Zbog toga je $MS = \frac{1}{2}PQ = PR$ (srednja linija), pa kako je $PR = MN$, sledi da je $MS = \frac{1}{2}MN$.

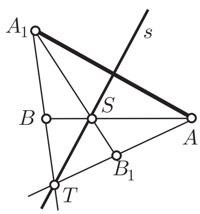
1222. Dokažimo da je trougao $C'AB'$ jednakokraki, sl. 464. Duži AM i AC' su simetrične u odnosu na pravu AB, pa je $AC' = AM$. Na isti način je $AB' = AM$ zbog simetrije u odnosu na pravu AC. Prema tome, $AC' = AB'$, pa je trougao $C'AB$' jednakokraki. Slično se dokazuje da su trouglovi B$'CA'$ i $A'BC'$ jednakokraki.



Sl. 464



Sl. 465



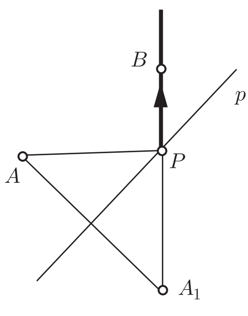
Sl. 466

1223. Trougao OAA_1 je jednakokraki, a takođe i trougao OBB_1, sl. 465. Neka su B i B_1 u uglu AOA_1 i neka je s simetrala duži AA_1. Na osnovu jednakosti duži $OA = OA_1$ i $OB = OB_1$ i jednakosti uglova: $\sphericalangle AOS = \sphericalangle A_1OS$ i $\sphericalangle AOB = \sphericalangle A_1OB_1$, lako se dokazuje da je s zajednička simetrala duži AA_1 i BB_1, pa je $AA_1 \parallel BB_1$.

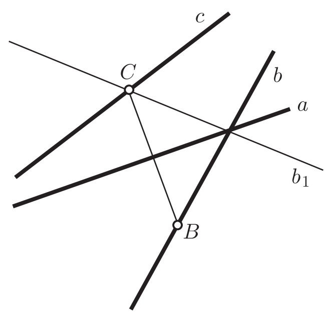
1224. Zbog osobina osne simetrije je $AA_1 \parallel BB_1$ i $AB = BB_1$, odnosno $AB_1 = A_1B$, pa je jedan od četvorouglova, AA_1B_1B ili AA_1BB_1, jednakokraki trapez, a oko njega se može opisati krug. (Videti **zadatak 946**.)

1225. Prema poznatoj osobini, prava AB i njoj simetrična prava A_1B_1 seku se na osi simetrije, ili su paralelne. Ako AB seče s u tački S, onda je prava $A_1B_1 \equiv A_1S$, sl. 466. Na isti način, kako je prava AB_1 simetrična pravoj A_1B i kako A_1B seče s u T, to je prava $AB_1 = AT$. Presečna tačka pravih AS i A_1T je tačka B, pa je presečna tačka simetričnih pravih A_1S i AT tražena tačka B_1, simetrična tački B u odnosu na pravu s. (Ako je $AB_1 \parallel s$ ili $AB \parallel s$, tada izaberemo neku tačku C takvu da se na opisani način može dobiti tačka C_1, pa pomoću C i C_1 konstruišemo B_1.)

1226. Treba preslikati tačku A ili tačku B (na slici je preslikana tačka A) simetrično u odnosu na p. Tačka P je presečna tačka pravih A_1B i p, sl. 467.



Sl. 467



Sl. 468

1227. Ove duži su simetrične u odnosu na pravu koja sadrži centar prstena i normalna je na p.

1228. Zadatak ima rešenje samo ako su tačke A i B s raznih strana prave p. Neka je $\mathcal{J}_p(B) = B_1$. Tada je $a = AB_1$. Neka AB_1 seče p u tački C. Dobijamo drugu pravu $b = BC$.

1229. Neka je $b_1 = \mathcal{J}_a(b)$. Tada b_1 seče c u tački C itd., sl. 468.

1230. Slično prethodnom zadatku $k_1' = \mathcal{J}_p(k_1)$ itd.

1231. 1232., **1233.**. Slično **zadatku 1229**.

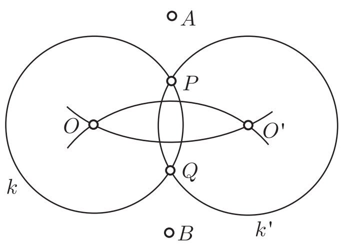
1234. Visina h_a je simetrala osnovice BC. Središte osnovice dobijamo u preseku prave s, koja je jednako udaljena od pravih b i c, i prave h, $h \ni A$, normalne na pravoj a.

1235. Slično prethodnim zadacima $a_1 = \mathcal{J}_b(a)$ i a_1 seče c u tački C itd.

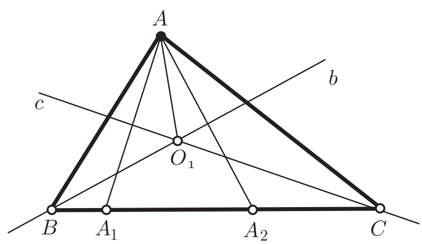
1236. Videti **zadatak 1230**. **1237.** Slično prethodnim zadacima.

1238. Neka je A_1 tačka simetrična tački A u odnosu na pravu MN. Neka je, dalje, k krug sa centrom A_1, koji dodiruje pravu MN. Tangenta iz tačke B na krug k seče pravu MN u traženoj tački P.

1239. Konstruisaćemo krug k' simetričan datom krugu k u odnosu na pravu AB. Odredimo najpre centar O' kruga k'. (Presečna tačka kruga sa centrom A i poluprečnikom AO i kruga sa centrom B i poluprečnikom BO.) Zatim konstruišemo krug k' sa centrom O' i poluprečnikom jednakim poluprečniku datog kruga. Presečne tačke P i Q krugova k i k' su ujedno i presečne tačke prave AB sa krugom k, sl. 469.



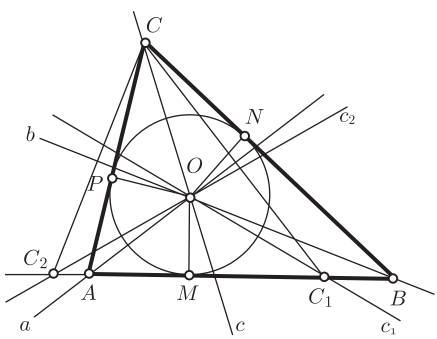
Sl. 469



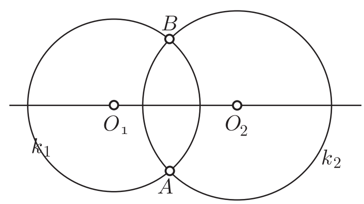
Sl. 470

1240. Ako je b simetrala ugla ABC, onda tačka A_1, simetrična sa A u odnosu na b, pripada pravoj BC. Slično zaključujemo da i tačka A_2, $A_2 = \mathcal{J}_c(A)$, pripada pravoj BC, sl. 470. Tačke A_1 i A_2 možemo odmah konstruisati, pa u preseku prave A_1A_2 sa b i c dobijamo temena B i C.

Drugo rešenje: Iz trougla BOC lako izračunamo da je $\sphericalangle BOC = 90^\circ + \dfrac{\alpha}{2}$, odakle je $\alpha = 2\sphericalangle BOC - 180^\circ$. Kako je ugao BOC dat, može se konstruisati ugao α itd.



Sl. 471



Sl. 472

1241. Pretpostavimo da je trougao ABC konstruisan, sl. 471. Neka su M, N, P dodirne tačke stranica sa datim krugom. Označimo sa C_1 i C_2 tačke simetrične sa C u odnosu na date prave a i b. Tada je $\mathfrak{J}_a(CP) = C_1M$ i $\mathfrak{J}_b(CN) = C_2M$. Otuda je $C_1M = C_2M$, pa je trougao OC_1C_2 jednakokraki, a poluprečnik OM pripada simetrali ugla C_1OC_2.

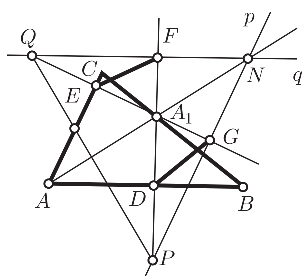
Sada je lako izvršiti konstrukciju. (Prava OC_1 je $\mathfrak{J}_a(c)$, a prava OC_2 je $\mathfrak{J}_b(c)$. Tačka M je presek simetrale ugla Oc_1c_2 sa krugom k itd.)

1242. Figura $k_1 \cup k_2$ je simetrična u odnosu na pravu O_1O_2. Dakle, prava p je normalna na O_1O_2.

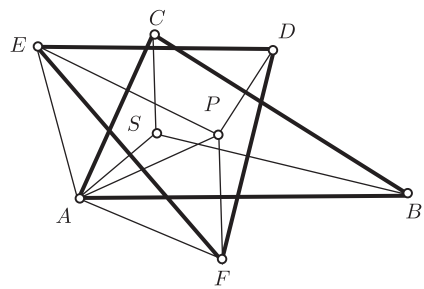
1243. a) Pravougli trouglovi ADA_1 i AEA_1 podudarni su, pa je $DA_1 = EA_1$ i $\sphericalangle AA_1D = \sphericalangle AA_1E$. Sledi da je $A_1P = A_1Q$, pa je prava AA_1 simetrala osnovice PQ jednakokrakog trougla A_1PQ, sl. 473.

b) Iz $A_1P = A_1Q$, $A_1N = A_1N$ i $\sphericalangle A_1PN = \sphericalangle A_1ON$ (uglovi sa normalnim kracima), sledi da je $\triangle A_1PN \cong \triangle A_1QN$, pa je $PN = QN$ i prava NA_1 je simetrala ugla PNQ jednakokrakog trougla NPQ. Sledi da je prava NA_1 normalna na PQ, pa kako je i $AA_1 \perp PQ$, to se prava NA_1 poklapa sa pravom AA_1, tj. tačke A, A_1 i N su kolinearne.

c) Prema prethodnom, prave AB, A_1P i NP redom su simetrične pravim AC, A_1Q i QN, u odnosu na pravu AA_1. Otuda sledi da su i duži DE i EF simetrične u odnosu na pravu AA_1, pa je $DG = EF$.



Sl. 473

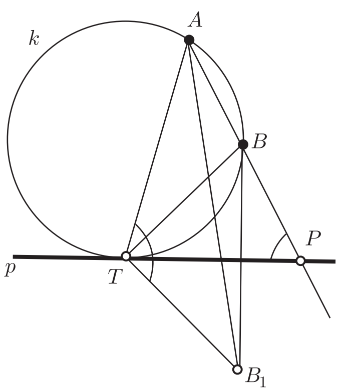


Sl. 474

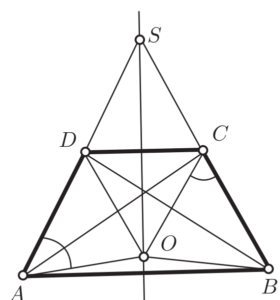
1244. a) Iz simetričnosti P i F dobijamo da je $AP = AF$. Na isti način je $AP = AE$, pa je $AE = AF$. Kako je i $SE = SF$, sledi da je prava AS simetrala duži EF i $AS \perp EF$, sl. 474.

b) Kako je $P = \mathfrak{J}_{AC}(E)$ i $F = \mathfrak{J}_{AB}(P)$, to je $\sphericalangle EAC = \sphericalangle CAP$ i $\sphericalangle FAB = \sphericalangle BAP$. Otuda imamo $\sphericalangle EAF = 2\alpha$.

c) $\sphericalangle SAC = \sphericalangle SAE - \sphericalangle EAC = \alpha - \sphericalangle PAC = \sphericalangle PAB$.



Sl. 475



Sl. 476

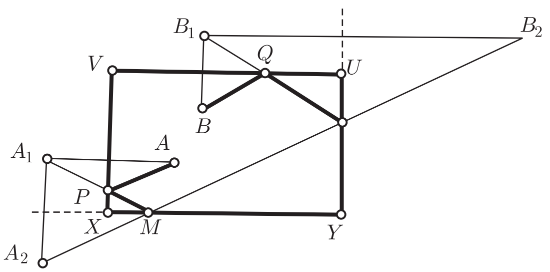
1245. Videti analizu **zadatka 1241**. Ako je O centar upisanog kruga, koristeći osobine simetrije lako se dokaže da je OMN jednakokraki trougao.

1246. Pretpostavimo da smo zadatak rešili i neka je k traženi krug, sl. 475. Neka je T dodirna tačka kruga s pravom p, tačka P presek prave p i prave AB i tačka B_1 simetrična sa B u odnosu na p. Izračunajmo ugao ATB_1: $\sphericalangle ATB_1 = \sphericalangle ATP + \sphericalangle PTB_1 = \sphericalangle ATP + \sphericalangle PTB = \sphericalangle ATP + \sphericalangle BAT$ (jer su uglovi PTB i BAT jednaki kao tetivni i tangentni, nad tetivom BT). Sada iz trougla ATP dobijamo $\sphericalangle ATP + \sphericalangle BAT = 180^\circ - \sphericalangle APT$. Dalje je jasna konstrukcija: konstruišemo skup tačaka iz kojih se duž AB_1 vidi pod uglom $180^\circ - \sphericalangle APT$ itd.

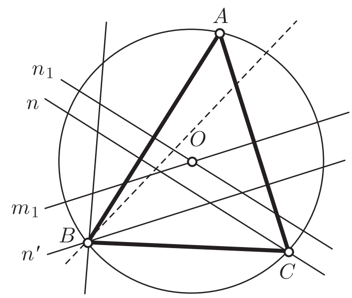
1247. Prava SO je simetrala osnovica AB i CD, sl. 476, gde je O centar kruga opisanog oko trapeza $ABCD$. Zbog simetričnosti trapeza u odnosu na pravu s, dovoljno je dokazati da je četvorougao $AOCS$ tetivni. Zbog $OA = OD = OB = OC$, sledi da su trouglovi AOD i BOC jednakokraki, a zbog simetrije i podudarni. Otuda zaključujemo da je $\sphericalangle OAD = \sphericalangle BCO$, pa zbog $\sphericalangle SCO + \sphericalangle OCB = 180^\circ$, sledi da $\sphericalangle SCO + \sphericalangle OAD = 180^\circ$ i četvorougao $AOCS$ je tetivni.

1248. Neka je $KLMN$ pravougaoni bilijarski sto i neka je $\mathcal{J}_{KL}(A) = A_1$ i $\mathcal{J}_{LM}(B) = B_1$. Prava A_1B_1 preseca ivice KL i LM stola u tačkama P i Q u koje će udariti loptica A pre nego što udari lopticu B.

1249. Označimo sa $XYUV$ pravougaonik (bilijarski sto) i: $A_1 = \mathcal{J}_{XV}(A)$, $A_2 = \mathcal{J}_{XY}(A_1)$, $B_1 = \mathcal{J}_{UV}(B)$, $B_2 = \mathcal{J}_{UY}(B_1)$, sl. 477. Neka je M presek pravih A_2B_2 i XY, N presek pravih A_2B_2 i UY, P presek pravih A_1M i XV i Q presek pravih B_1N i UV. Neposredno se vidi da su sledeći uglovi jednaki: $\sphericalangle APV = \sphericalangle A_1PV = \sphericalangle XPM$, $\sphericalangle PMX = \sphericalangle XMA_2 = \sphericalangle NMY$, $\sphericalangle MNY = \sphericalangle B_2NU = \sphericalangle UNQ$, $\sphericalangle NQU = \sphericalangle B_1QV = \sphericalangle VQB$. Dakle, loptu iz tačke A treba tako upraviti da pogodi tačku P, odakle će se odbiti preko M, N i Q, do tačke B.



Sl. 477



Sl. 478

1250. Neka je ABC traženi trougao i neka su m_1 i n_1 simetrale duži CA i AB. Tada je m_1, $n_1 \ni O$, $m_1 \parallel m$ i $n_1 \parallel n$. Dalje je $\mathcal{J}_{m_1}(C) = A$ i $\mathcal{J}_{n1}(A) = B$, pa kako je $C \in n$ i $B \in m$, to prava n', koju dobijamo uzastopnim preslikavanjem prave n, simetrijama $\mathcal{J}_{m1}$, $\mathcal{J}_{n1}$, seče m u tački B.

Konstrukcija: Konstruišimo pravu n' i sa B označimo tačku preseka pravih m i m', sl. 478. One se seku, sem u slučaju $\sphericalangle(m,n) = 120^\circ$. Tada je $n' \parallel m$ i zadatak ima rešenja (i to beskonačno mnogo) samo ako je $m = n'$. Ovaj specijalni slučaj nastaje samo ako tačka O pripada simetrali oštrog ugla između pravih m i n i to uz uslov $\sphericalangle(m,n) = 120^\circ$. Dalje, sa A i C označimo redom tačke $A = \mathcal{J}_{n_1}(B)$ i $C = \mathcal{J}_{m_1}(A)$.

Dokaz: Dokažimo da je ABC traženi trougao. Po konstrukciji su m_1 i n_1 simetrale duži CA i AB i O je centar opisanog kruga. Dalje, zbog $m \ni B$ i $n \parallel m_1$, m je prava koja sadrži visinu iz temena B. Zbog $n \parallel n_1$, treba još dokazati $n \ni C$. Zaista, po konstrukciji n se dobija preslikavanjem prave n' uzastopnim simetrijama $\mathcal{J}_{n1}$ i $\mathcal{J}_{m1}$ i $n' \ni B$, pa $n \ni C$.

1253. Duž AB je srednja linija trougla CC_1C_2.

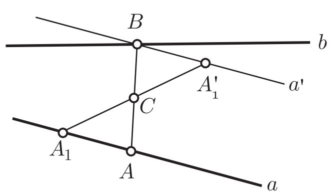
1254. Po definiciji, ako $\mathcal{J}_S(A) = A_1$, onda je i $\mathcal{J}_S(A_1) = A$. Kako je po uslovu $\mathcal{J}_S(B) = B_1$, to je $\mathcal{J}_S(A_1B) = AB_1$.

1255. Svaka stranica centralno simetričnog mnogougla simetrična je sa nekom stranicom, pa broj stranica mora biti paran.

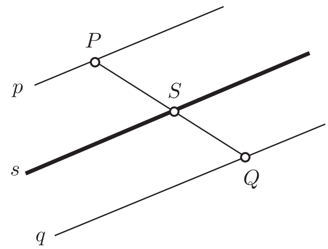
1256. Neka je $AB = DE$ i $AB \parallel DE$. Tada postoji tačka S, takva da je $\mathfrak{J}_S(AB) = CD$. Lako se dokazuje da su ostale suprotne stranice simetrične u odnosu na istu tačku.

1257. Neka se AC i BD seku u O. Tačke E i G su simetrične međusobno u odnosu na O, a takođe tačke F i H.

1258. Tačka B je simetrična sa A u odnosu na tačku C. Zaključujemo da prava a', simetrična pravoj a u odnosu na C, mora sadržati tačku B. Zbog toga konstruišemo pravu a'. (Proizvoljnoj tački A_1 prave a konstruišemo simetričnu tačku A_1' i kroz A_1' konstruišemo pravu a', $a' \parallel a$. Prava a' seče b u B i prava BC seče a u tački A, sl. 479.)



Sl. 479

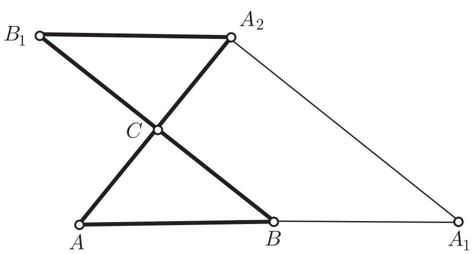


Sl. 480

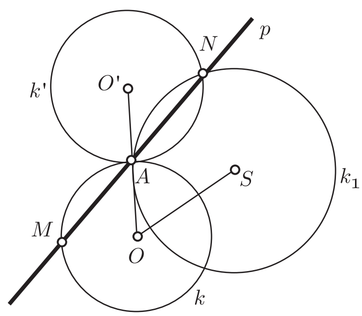
1259. Slično prethodnom zadatku.

1260. Neka su p i q dve proizvoljne paralelne prave i neka su P, Q proizvoljno izabrane tačke ovih pravih, sl. 480. Središte S duži PQ je centar simetrije kojom se p preslikava u q. Prava s, $s \parallel p$, predstavlja traženi skup tačaka.

1261. Četvorougao $A_1A_2B_1B$ je paralelogram, pa se na osnovu datih tačaka jednostavno konstruiše najpre teme B, sl. 481.



Sl. 481



Sl. 482

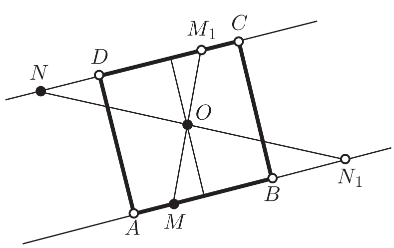
1262. i **1263.** Slično **zadatku 1258**. (Videti i **zadatak 1265**.)

1264. Neka je A_2 bilo koja tačka kruga k_2. Dalje, slično prethodnom i sledećem zadatku.

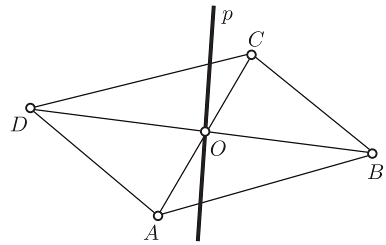
1265. Traži se prava p kroz tačku A takva da su tetive AM i AN jednake, sl. 482. Tačke M i N su simetrične u odnosu na A, pa se tačka N dobija u preseku kruga k', $k' = \mathfrak{J}_A(k)$, sa krugom k_1. (Rešenje se može dobiti i korišćenjem osobina trapeza – duž AA_1, gde je A_1 središte duži OS, normalna je na p.)

1266. Tačka O je centar simetrije kvadrata. Konstruišemo tačke M_1 i N_1: $M_1 = \mathfrak{J}_O(M)$, $N_1 = \mathfrak{J}_O(N)$, sl. 483. Prava MN_1 sadrži tačke A, B, a prava M_1N tačke C, D itd. Normalno rastojanje između ovih pravih jednako je stranici kvadrata.

1267. Slično prethodnom zadatku. Normalno rastojanje između pravih MP_1 i M_1P je prečnik kruga upisanog u traženi romb.



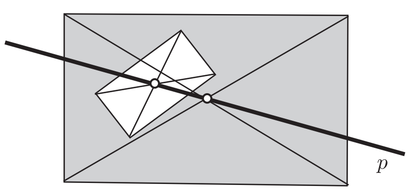
Sl. 483



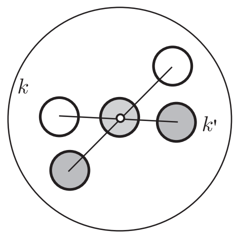
Sl. 484

1268. Konstruišemo presečnu tačku O dijagonala AC i BD, a zatim bilo koju pravu p kroz O koja ne sadrži neko teme datog paralelograma, sl. 484.

1269. Prava p je određena centrima simetrija datih pravougaonika, sl. 485.



Sl. 485

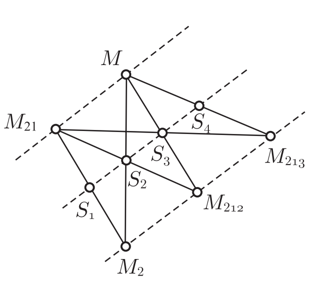


Sl. 486

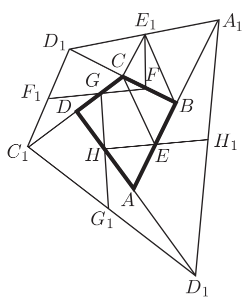
1270. Zoran će prvo nacrtati krug koji je koncentričan sa datim krugom. Zatim, kada Dušan nacrta svoj krug k, Zoran će nacrtati krug k' simetričan sa k u odnosu na centar velikog kruga. (Na slici 486 Zoranovi krugovi su osenčeni.)

1271. Slično prethodnom zadatku.

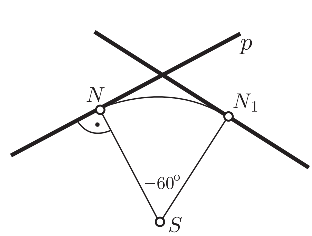
1272. Pretpostavimo da ograničena figura ima bar dva centra simetrije, S_1 i S_2. Preslikajmo proizvoljnu tačku M figure $\mathcal{F}$ tri puta: u odnosu na S_2 i dobijemo tačku M_2, zatim preslikamo M_2 u odnosu na S_1 i dobijemo M_{21} i M_{21} preslikamo u odnosu na S_2 i dobijemo tačku M_{212}, sl. 487. Na taj način dobijamo duž MM_{212} simetričnu sa M_2M_{21} u odnosu na S_2. Odavde sledi da je i



Sl. 487



Sl. 488



Sl. 489

središte S_3 duži MM_{212} simetrično sa S_1 u odnosu na S_2. Kako je tačka M_{212} simetrična sa M u odnosu na S_3, sledi da je i S_3 centar simetrije figure $\mathcal{F}$. Produžavajući ovaj postupak, možemo dobiti koliko hoćemo centara simetrije i ujedno dobijamo niz tačaka $M_2, M_{212}, M_{213}, \ldots$ koji se proteže u beskonačnost, pri čemu su duži $M_2M_{212}, M_{212}M_{213}, \ldots$ jednake među sobom. Sve ove tačke pripadaju figuri $\mathcal{F}$, što znači da je ova figura neograničena. Dakle, ograničena figura ne može imati više od jednog centra simetrije.

1273. Koristiti centralnu simetričnost pralelograma. Videti i rešenje **zadatka 1039**.

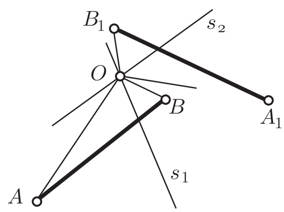
1274. Ako preslikamo lukove $l_1, l_2, l_3, \ldots, l_k$ simetrično centru datog kruga, tada će pojedini delovi kruga ostati plavo obojeni. Plavo obojene tačke su takođe simetrične prema centru kruga, pa spajanjem bilo koje dve simetrične *plave* tačke, dobićemo traženi *plavi* prečnik.

1275. Tvrđenje je ekvivalentno sledećem: Ako su, prema slici 488, tačke E_1, F_1, G_1, H_1 središta stranica A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1, D_1A_1, tada su E, F, G, H središta duži HH_1, EE_1, FF_1 i GG_1. Dokažimo, na primer, da je tačka F središte duži EE_1. Po uslovu je duž CE_1 srednja linija trougla A_1BB_1, pa je CE_1 paralelno sa BA_1 i $CE_1 = \dfrac{1}{2}BA_1$. Odavde sledi da je i $CE_1 = BE$. Dakle, četvorougao $BECE_1$ je paralelogram, pa mu se dijagonale polove. Presečna tačka dijagonala, tačka F, je središte duži EE_1. Slično se dokaže i za tačke F_1, G_1, H_1.

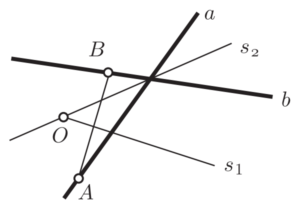
1276. Neka je SN normala na datu pravu, sl. 489. Rotiramo tačku N: $\mathcal{R}_{S-60^\circ}(N) = N_1$. Lik prave p je prava p_1 koja sadrži tačku N_1 i normalna je na SN_1.

1277. Rotacija za opružen ugao je centralna simetrija.

1278. Treba da bude $OA = OA_1$ i $OB = OB_1$, pa je O presečna tačka simetrala duži AA_1 i BB_1 (sl. 490) ili simetrala duži AB_1 i BA_1. Zadatak nema rešenja ako su date duži paralelne.



Sl. 490



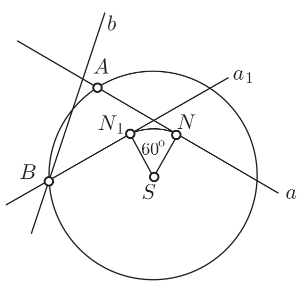
Sl. 491

1279. Centar rotacije dobija se u preseku simetrale duži AB i simetrala unakrsnih uglova datih pravih. Jedno rešenje vidimo na sl. 491.

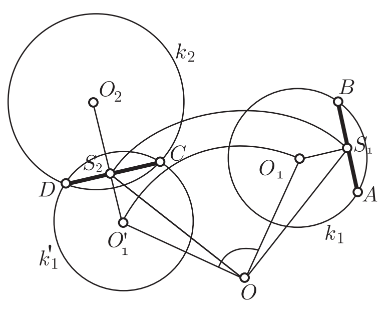
1280. Slično **zadatku 1278**.

1281. Rotacijom oko centra datog kvadrata za 90°, dobijeni četvorougao se preslikava u samog sebe itd.

1282. Kako je $SA = SB$, zaključujemo da se tačka A preslikava u tačku B rotacijom oko S za 60°. Dakle, i prava a_1, $a_1 = \mathcal{R}_{S,60^\circ}(a)$, prolazi kroz tačku B. Prema tome, konstruišemo pravu a_1 (rotiramo pravu a oko S za 60°). U preseku pravih a_1 i b dobijamo tačku B_1 itd., sl. 492.



Sl. 492



Sl. 493

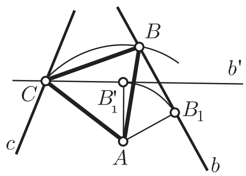
1283. Slično prethodnom zadatku. Treba rotirati krug k oko O za $120°$. (Konstruišemo krug sa centrom O i poluprečnikom OS, gde je S centar kruga k, i na njemu odredimo tačku S_1 tako da je $\sphericalangle SOS_1 = 120°$. Tačka S_1 je centar kruga k_1 u koji se preslikava krug k rotacijom $\mathcal{R}_{O,120°}$. Presek krugova k_1 i l određuje tačku L itd. (Drugo rešenje: L' i K'.)

1284. Rotiramo krug k_1 oko O za $90°$. Zajednička tetiva krugova k_1' i k_2, sl. 493, je tražena tetiva t_2. (Pri dokazivanju koristiti se podudarnim trouglovima OO_1S_1 i $OO_1'S_2$).

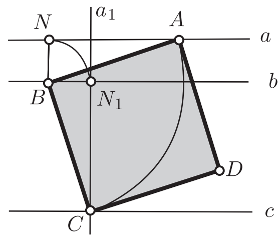
1285. Slično **zadatku 1282**. (Tačke B i C pripadaju krugu sa centrom A i poluprečnikom AB). Najpre rotiramo pravu b oko A za dati ugao α. Lik prave b, prava b_1, seče pravu c u traženoj tački C, itd.

1286. Slično prethodnom zadatku. (Rotiramo pravu a oko C za $30°$ itd.)

1287. Videti **zadatak 1285**. Ovde je $\alpha = 60°$, sl. 494.



Sl. 494



Sl. 495

1288. Neka je, na primer, A proizvoljno izabrana tačka prave a. Temena B i C dobijamo kao u prethodnom zadatku.

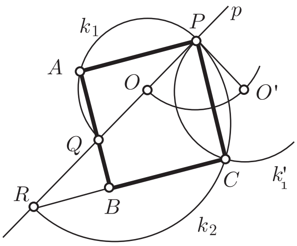
1289. Slično prethodnom zadatku.

1290. Slično **zadatku 1285**. Ovde imamo rotaciju $\mathcal{R}_{A,90°}$.

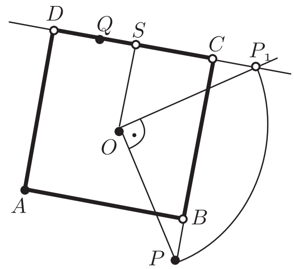
1291. Konstruišemo krug b, sa centrom P i poluprečnikom r i dve prave, c i c_1, na rastojanju r od prave q. Tražena tačka B pripada krugu b, a tačka C pripada pravoj c ili pravoj c_1. Dalje, slično **zadatku 1286**.

1292. 1293., 1294.. Trougao ABC je jednakokraki pravougli. Videti dva prethodna zadatka. Rešenje **zadatka 1293** prikazano je na slici 495. Na pravoj b izaberemo proizvoljnu tačku B. Oko B rotiramo a za $-90°$ ($\sphericalangle NBN_1 = 90°$). Time se A preslika u C, što znači da prava a_1, nastala rotacijom prave a, seče pravu c u tački C itd.

1295. Pošto četiri stranice imaju sa jednom pravom tri zajedničke tačke, zaključujemo da je jedna od tih tačaka teme kvadrata. Neka je to tačka P, kao na slici 496. Neka je $Q \in AB$. Uglovi PAQ i PCR su pravi, pa krug k_1 prečnika PQ sadrži tačku A, a krug prečnika PR sadrži tačku C. Kako je $PA = PC$ i $\sphericalangle APC = 90°$, zaključujemo da se rotacijom oko P za $90°$ tačka A preslikava u C. Dakle, krug k_1', dobijen rotacijom kruga k_1 oko P za prav ugao, seče krug k_2 u C itd.



Sl. 496

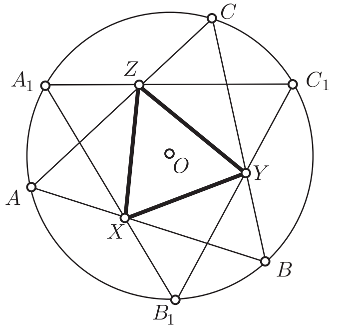


Sl. 497

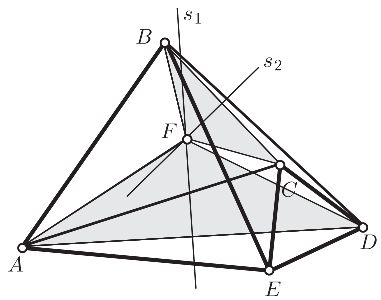
1296. Rotiramo tačku P za 90° i dobijemo tačku P_1, koja pripada pravoj CD. Sada konstruišemo ovu pravu (pravu $CD \equiv P_1Q\ P_1Q$) i normalu OS na pravu P_1Q, sl. 497. Tačka S je središte stranice CD itd.

1297. Slično **zadatku 1285**. Centar rotacije je tačka C, a ugao rotacije je dati ugao γ. Prvo se konstruiše jednakokraki trougao BCD.

1298. Trouglove označimo sa ABC i $A_1B_1C_1$, tako da budu isto orijentisani i da se stranice AB i A_1B_1, seku u tački X. Sa $\mathcal{R}$ označimo rotaciju oko centra kruga, koja tačku A preslikava u B. U toj rotaciji A se preslikava u B, B u C, zatim A_1 u B_1, B_1 u C_1. Zbog toga postoje tačke Y i Z, $\{Y\} = BC \cap B_1C_1$ i $\{Z\} = CA \cap C_1A_1$, sl. 498, takve da sa tačkom X predstavljaju temena jednakostraničnog trougla sa centrom u centru kruga.



Sl. 498

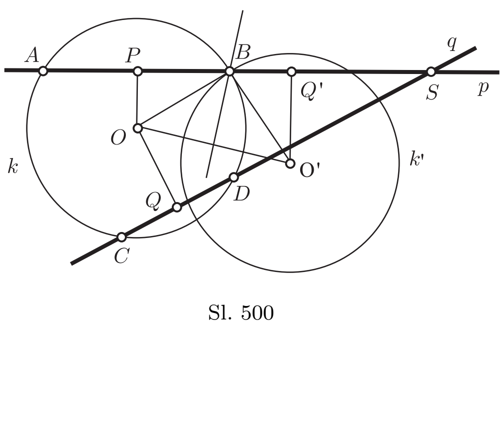


Sl. 499

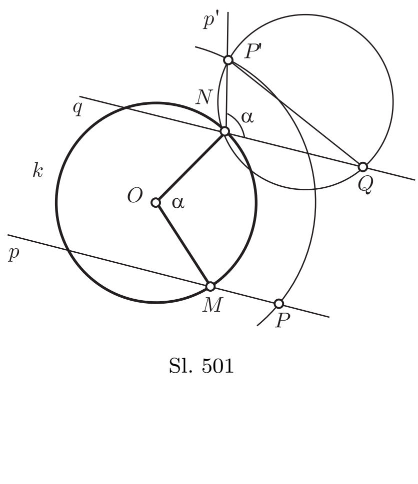
1299. Tačka E je centar rotacije za ugao od 60°, kojom se A preslikava u B i C u D. Na osnovu osobina rotacije je $AC = BD$ i AC seče BD pod uglom od 60°. Dakle, postoji rotacija sa istim uglom kojom se A preslikava u D i C u B. Centar te rotacije je tražena tačka F, koja predstavlja presek simetrala duži AD i BC, sl. 499.

1300. Tačka P je centar rotacije za ugao od 90° kojom se tačka A preslikava u B i C u D. Slično prethodnom zadatku zaključimo da postoji rotacija za 90° čiji centar je tražena tačka Q, koja je presek simetrala duži AD i BC.

1301. Neka su P i Q podnožja normala iz O na date prave. Pretpostavimo da je zadatak rešen. Tada su P i Q središta tetiva AB i CD, sl. 500. Neka je Q' tačka prave p takva da je $PQ' = m$. Tada je $BQ' = DQ$. Odredimo rotaciju kojom se prava q preslikava u pravu p i pri tome Q se preslikava u Q'. (Centar te rotacije je presečna tačka simetrale $\sphericalangle(p, q)$ i simetrale duži QQ'.) Krug k se preslikava u k', a lik O' tačke O je krajnja tačka duži $Q'O'$, normale na p i $Q'O' = QO$. Tačka D se preslika u B. Zbog toga je $OB = O'B$. Prema tome, konstrukcija se izvodi sledećim



Sl. 500



Sl. 501

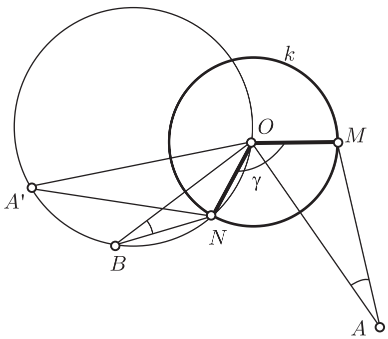
redosledom. Na pravoj p odredimo tačku Q', takvu da je $PQ' = m$. Zatim, na normali prave p u tački Q', s one strane prave p s koje je O, odredimo tačku O', tako da je $Q'O' = QO$. Simetrala duži OO' seče pravu p u tački B. Poluprečnik traženog kruga je duž OB.

1302. Pretpostavimo da je zadatak rešen. Rotirajmo pravu MP oko O za dati ugao α. Dobijamo pravu NP' (M se preslikava u N), koja sa NQ gradi ugao α, tj. $\sphericalangle QNP' = \alpha$. Pošto je rotacija data centrom O i uglom α, to možemo konstruisati tačku P'. Zatim, nad duži $P'Q$ konstruišemo skup tačaka iz kojih se ta duž vidi pod uglom α. U preseku sa datim krugom dobijamo tačku N itd., sl. 501.

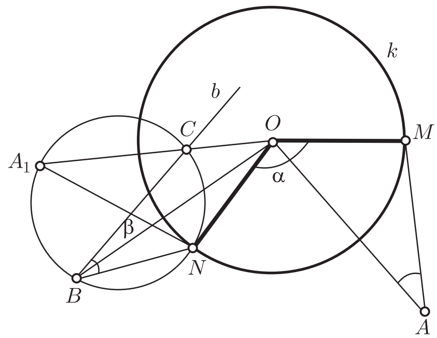
1303. Tetivi CD u datom krugu odgovara tačno određen centralni ugao, recimo α, pa se zadatak svodi na prethodni.

1304. Rotacijom $\mathcal{R}_{O,\gamma}$ trougao OAM preslikava se u trougao $OA'N$, pa je prema uslovu $\sphericalangle OA'N = \sphericalangle OBN$. Prema tome, četvorougao $OA'BN$ je tetivni, sl. 502.

Konstrukcija: Rotiramo tačku A, pa konstruišemo opisani krug trougla $OA'B$, koji seče dati krug u tački N itd.



Sl. 502

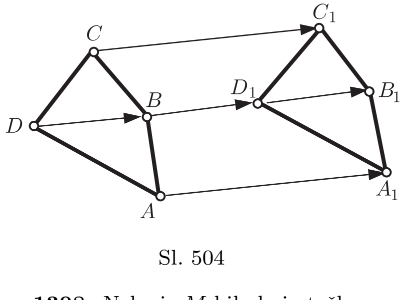


Sl. 503

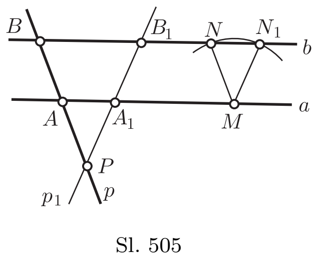
1305. Neka je $A_1 = \mathcal{R}_{O,\alpha}(A)$. Tada je $\sphericalangle OA_1N = \sphericalangle OAM$. Uočimo tačku C na duži OA_1 takvu da je $\sphericalangle OBC = \beta$. Tada je $\sphericalangle NBC = \sphericalangle NBO + \beta = \sphericalangle NA_1O$, pa je četvorougao A_1BNC tetivni, sl. 503.

Konstrukcija: Jasno je kako konstruišemo tačke A_1 i C. Opisani krug trougla A_1BC seče dati krug u N.

1306. Rešenje vidimo na slici 504. **1307.** $\overrightarrow{t} = \overrightarrow{O_1O_2}$.



Sl. 504

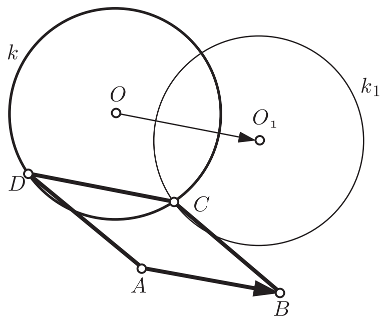


Sl. 505

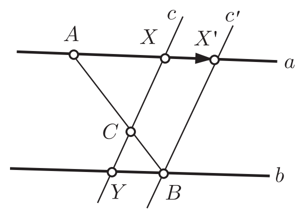
1308. Neka je M bilo koja tačka prave a. Konstruišemo krug $k(M, m)$. Ako k seče pravu b, recimo u tačkama N_1 i N, sl. 505, tada je tražena prava p paralelna sa MN ili sa MN_1.

1309. Neka su AM i BN težišne linije trougla ABC i $AM = BN$. Izvršimo translaciju duži BN za vektor $\overrightarrow{NM}$. Teme B se preslika u tačku B_1 prave AB i dobijemo jednakokraki trougao AB_1M itd.

1310. Translacijom kruga k za vektor $\overrightarrow{AB}$ tačka D se preslikava u C, pa se teme C dobija u preseku datog kruga k i njegovog lika k_1, $k_1 = \mathcal{J}_{\overrightarrow{AB}}(k)$, sl. 506.



Sl. 506



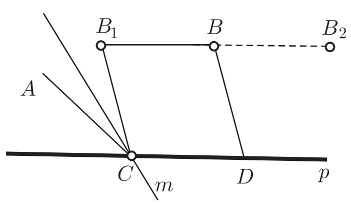
Sl. 507

1311. Slično prethodnom zadatku. Treba preslikati pravu p translacijom za vektor $\overrightarrow{BA}$.

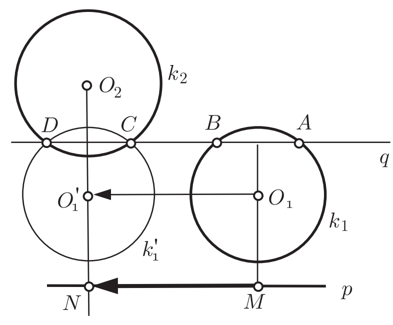
1312. Slično **zadatku 1315**. **1313.** Slično **zadatku 1316**.

1314. Translacijom duži XY za vektor $\overrightarrow{YB}$ tačka X se preslika u tačku X' tako da je $AX' = m$. Prema tome, treba prvo konstruisati tačku X', a tražena prava c je paralelna sa pravom $c' = BX'$, sl. 507.

1315. Pretpostavimo da je zadatak rešen (sl. 508). Ako bismo konstruisali tačku B_1 takvu da je četvorougao BB_1CD paralelogram, onda bi duž B_1C bila jednaka duži AC, a $BB_1 = m$. Odavde dobijamo ideju za konstrukciju. Najpre konstruišemo tačku B_1 takvu da je $BB_1 \parallel p$ i $BB_1 = m$. Imamo dve mogućnosti, a to znači dva rešenja – videti tačku B_2 na slici 508. Simetrala duži AB_1 (ili AB_2) određuje tačku C na pravoj p. Tačku D određujemo tako da je $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{B_1B}$.



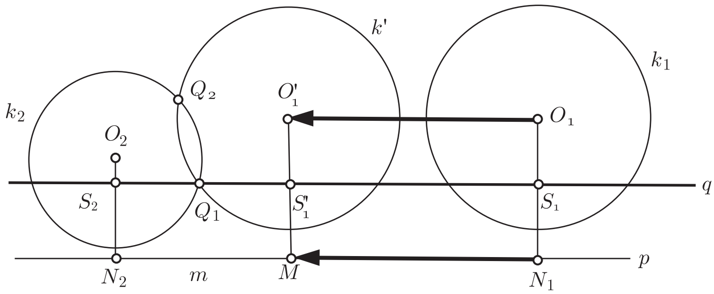
Sl. 508



Sl. 509

1316. Pošto su duži AB i CD paralelne i jednake među sobom i paralelne pravoj p, to se može duž AB preslikati u duž CD translacijom u pravcu p. Simetrale tetiva AB i CD normalne su na pravoj p i sadrže tačke O_1 i O_2. Neka su podnožja ovih normala na pravoj p tačke M i N. Translacijom kruga k_1 za vektor $\overrightarrow{MN}$ preslikaće se O_1 u O_1', k u k_1', središte tetive AB u središte tetive CD, tačka A u C i tačka B u D, sl. 509. Ako se krugovi k_1' i k_2 seku, onda su njihove presečne tačke tražene tačke C i D. Ove tačke određuju traženu pravu $q = CD$.

1317. Neka su N_1 i N_2 podnožja normala iz centara O_1 i O_2 datih krugova na datu pravu p, sl. 510. Na duži N_1N_2 odredimo tačku M, tako da je $MN_2 = m$. Sada preslikamo krug k_1 translacijom za vektor $\overrightarrow{N_1M}$. Presečna tačka krugova k_1' i k_2 određuje traženu pravu q. (Moguća su dva rešenja kao na slici, jedno ili nema rešenja.) U dokazu koristimo činjenicu da su prave O_1N_1 i O_2N_2 simetrale tetiva.

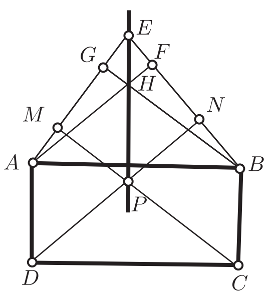


Sl. 510

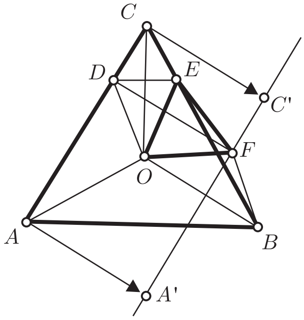
1318. Translacijom $\mathcal{J}_{\overrightarrow{AC}}$ krug k_1 se preslikava u k_2, pa je $AC = O_1O_2$. Pri tome se tačka P preslikava u P_2, $P_2 \in k_2$ i $PP_2 = O_1O_2$. Četvorougao ACP_2P je paralelogram, pa kako je tetiva PP_2 stalne veličine, to je i ugao PCP_2 stalan, a $\sphericalangle ACP = \sphericalangle PCP_2$.

1319. Neka su C_1 i F_1 podnožja visina na osnovice datih trouglova. Preslikamo trougao ABC translacijom $\mathcal{J}_{\overrightarrow{C_1F_1}}$ u trougao $A'B'C'$. Presečne tačke krakova $A'C'$ i DF i krakova $B'C'$ i EF određuju pravu p.

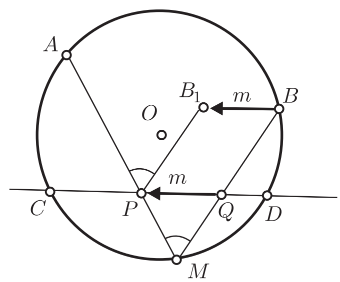
1320. Neka su AF i BG visine trougla ABE, sl. 511. Njihova presečna tačka H je ortocentar, pa je EH treća visina i $EH \perp AB$. Na osnovu podudarnosti trouglova ABH i DCP sledi da je $CP = BH$, pa je $BCPH$ paralelogram i PH je paralelno sa BC, pa je zbog toga $PH \perp AB$. Dakle, $EH \parallel PH$, pa su tačke E, H, P kolinearne i $EP \perp AB$.



Sl. 511



Sl. 512



Sl. 513

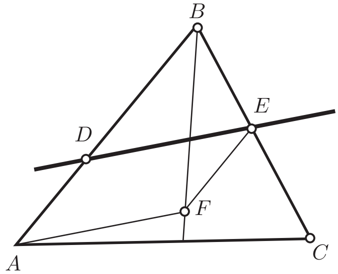
1321. Neka je, na primer, u pravilnom petouglu $ABCDE$ izvršena translacija dijagonale BE za vektor $\overrightarrow{BA}$. Treba dokazati da je ugao CAE_1 jednak uglu pravilnog petougla itd. (Prema **zadatku 1086** dijagonale pravilnog petougla su jednake među sobom.)

1322. Translacijom $\mathcal{J}_{\overrightarrow{OB}}$ duž AC se preslikava u duž $A'C'$ koja, zbog $DF = OB$ i $DF \parallel OB$, sadrži tačku F. Kako je $CO = OB = CC'$ i $\sphericalangle OCC' = 60^\circ$, to je trougao OCC' jednakostranični, pa rotacija $\mathcal{R}_{O,60^\circ}$ prevodi tačku C u C', sl. 512. Ova rotacija, dakle, prevodi pravu BC u pravu $A'C'$. Kako je $CE = CD = C'F$, sledi da je $\mathcal{R}_{O,60^\circ}(E) = F$, što znači da je trougao OEF jednakostranični.

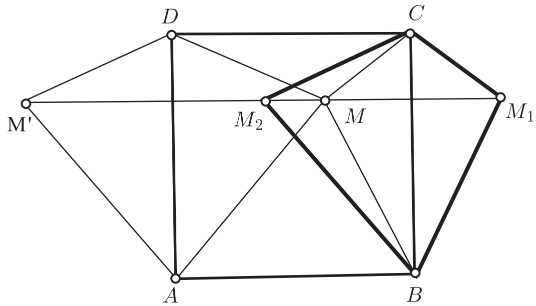
1323. Izvršimo translaciju tačke B tako da je $BB_1 = m$, sl. 513. Četvorougao BB_1PQ je paralelogram, pa je $\sphericalangle APB_1 = \sphericalangle AMB$, a poslednji ugao je određen tetivom AB. Dakle, tačku dobijamo u preseku prave CD sa kružnim lukom iz čijih se tačaka duž AB_1 vidi pod uglom koji je jednak uglu AMB.

1324. Translacijom za vektor $\overrightarrow{DA}$ duž DE se preslikava u duž AF, sl. 514. Kako je $EF = AD = BE$, sledi da je trougao BEF jednakokraki i $\sphericalangle EBF = \sphericalangle EFB$. Zbog $EF \parallel AB$ je $\sphericalangle ABF =$

$\sphericalangle EFB$, pa zaključujemo da je tačka F na simetrali ugla ABC. Kako je $AF = DE = m$ možemo konstruisati tačku F, a zatim E i D.



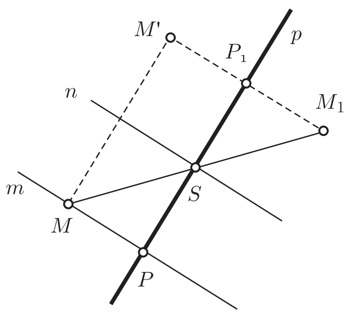
Sl. 514



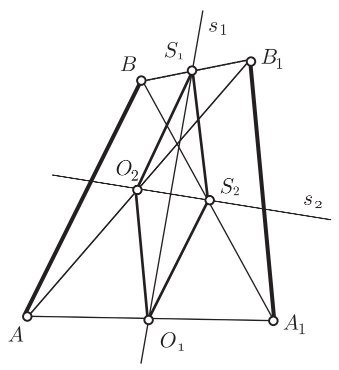
Sl. 515

1325. Neka su M_1 i M' tačke koje su simetrične sa M u odnosu na prave redom BC i AD, sl. 515. Preslikajmo tačku M' translacijom: $\mathcal{J}_{\overrightarrow{AB}}(M') = M_2$. Dokazaćemo da je BM_1CM_2 traženi četvorougao čije su dijagonale po konstrukciji normalne među sobom. Zbog simetrije je $BM_1 = BM$ i $CM_1 = CM$. Takođe, zbog simetrije je $AM' = AM$, pa kako je $BM_2 = AM'$ (translacija), to je $BM_2 = AM$. Slično se dokazuje da je $CM_2 = DM$.

1326. $\mathfrak{I}$ nije osna simetrija. Neka je M proizvoljna tačka i $M' = \mathfrak{I}(M)$. Pošto nema nepokretnih tačaka, to je $M' \neq M$, pa postoji središte S duži MM'. Tada je $\mathfrak{I}_S \circ \mathfrak{I}(M) = M$, tj. M je nepokretna tačka indirektne izometrije $\mathfrak{I}_S \circ \mathfrak{I}$, pa je onda to simetrija u odnosu na pravu m koja sadrži tačku M, sl. 516. Dakle, $\mathfrak{I}_S \circ \mathfrak{I} = \mathfrak{I}_m$, a odavde je $\mathfrak{I}_S \circ \mathfrak{I}_S \circ \mathfrak{I} = \mathfrak{I}_S \circ \mathfrak{I}_m$, odnosno $\mathfrak{I} = \mathfrak{I}_S \circ \mathfrak{I}_m$. Neka je P podnožje normale iz S na m i $\mathfrak{I}_S(P) = P_1$, a n prava kroz S paralelna sa m. Tada je $\mathfrak{I}_S = \mathfrak{I}_p \circ \mathfrak{I}_n$, pa je $\mathfrak{I} = \mathfrak{I}_p \circ \mathfrak{I}_n \circ \mathfrak{I}_m = \mathfrak{I}_p \circ \mathfrak{I}_{\overrightarrow{PP_1}} = G_{\overrightarrow{PP_1}}$. ($\mathfrak{I}_n \circ \mathfrak{I}_m = \mathfrak{I}_{\overrightarrow{PP_1}}$ je translacija – videti rešenje **zadatka 1332**.)



Sl. 516



Sl. 517

1327. Osa je prava PQ, gde je P središte duži AA_1 i Q središte duži BB_1.

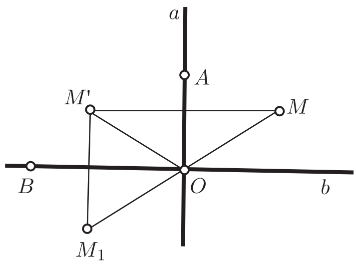
1328. Na pravoj a izaberimo tačku B_1, a na pravoj b tačku A_1, tako da je $AB_1 = A_1B$, pa se zadatak svodi na prethodni.

1329. Neka su O_1 i S_1 središta duži AA_1 i BB_1, O_2 i S_2 središta duži AB_1 i A_1B, sl. 517. Prave $s_1 = O_1S_1$ i $s_2 = O_2S_2$ su ose klizajućih simetrija G_1 i G_2. Duž O_1O_2 je srednja linija trougla AA_1B_1, pa je $O_1O_2 = \dfrac{1}{2}A_1B_1 = \dfrac{1}{2}AB$. Slično se dokazuje da su i ostale stranice četvorougla

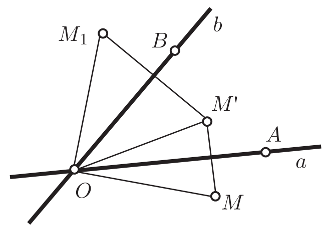
$O_1O_2S_1S_2$ jednake $\frac{1}{2}AB$. Sledi da je ovaj četvorougao romb, pa su mu dijagonale O_1S_1 i O_2S_2 normalne među sobom.

1330. Prema prethodnom zadatku ose ovih klizajućih simetrija su normalne među sobom.

1331. a) Neka je $A \in a$, $B \in b$, $\sphericalangle AOB = 90^\circ$ i M proizvoljna tačka koju preslikavamo: $\mathfrak{I}_a(M) = M'$ i $\mathfrak{I}_b(M') = M_1$, odnosno $\mathfrak{I}_b \circ \mathfrak{I}_a(M) = M_1$, sl. 518. Na osnovu osobina simetrije važi: $OM = OM_1$. Sem toga je $\sphericalangle MOM_1 = \sphericalangle MOM' + \sphericalangle M'OM_1 = 2(\sphericalangle AOM' + \sphericalangle M'OB) = 2(\sphericalangle AOM' + \sphericalangle M'OB) = 2 \cdot \sphericalangle AOB = 2 \cdot 90^\circ = 180^\circ$, pa su tačke M, O i M_1 kolinearne i $M - O - M_1$. Dakle, $\mathfrak{I}_O(M) = M_1$, tj. $\mathfrak{I}_b \circ \mathfrak{I}_a = \mathfrak{I}_O$.



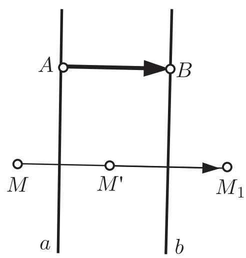
Sl. 518



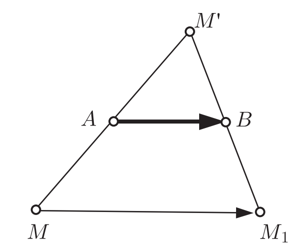
Sl. 519

b) Prema slici 519 je $\mathfrak{I}_a(M) = M'$, $\mathfrak{I}_b(M') = M_1$, odnosno $\mathfrak{I}_b \circ \mathfrak{I}_a(M) = M_1$. Pri tome je $OM = OM_1$ i $\sphericalangle MOM_1 = 2\sphericalangle AOB = 2\alpha$, tj. $\mathfrak{I}_b \circ \mathfrak{I}_a = \mathfrak{R}_{O,2\alpha}$.

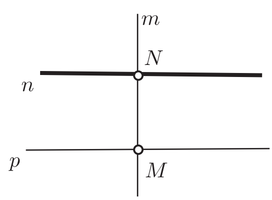
1332. Neka je $A \in a$ i $B \in b$, tako da je $AB \perp a$ i neka je M proizvoljna tačka ravni. Tada je $\mathfrak{I}_a(M) = M'$ i $\mathfrak{I}_b(M') = M_1$, odnosno $\mathfrak{I}_b \circ \mathfrak{I}_a(M) = M_1$. Lako se dokazuje da je $MM_1 = 2AB$ sl. 520, pa kako je $MM_1 \perp a$, to je $MM_1 \parallel AB$ itd. Za svaku tačku M i njen lik M_1 važi: $\mathfrak{I}_b \circ \mathfrak{I}_a(M) = M_1$ i pri tom je $\overrightarrow{MM_1} = 2\overrightarrow{AB}$, odakle zaključujemo da je $\mathfrak{I}_b \circ \mathfrak{I}_a = \mathcal{I}_{2\overrightarrow{AB}}$.



Sl. 520



Sl. 521



Sl. 522

1333. Prema rezultatima dva prethodna zadatka kompozicija simetrija $\mathfrak{I}_a$ i $\mathfrak{I}_b$ može biti rotacija, translacija ili centralna simetrija, u svakom slučaju direktna izometrija, pa ne postoji prava c takva da je $\mathfrak{I}_b \circ \mathfrak{I}_a = \mathfrak{I}_c$.

1334. Ako je $\mathfrak{I}_A(M) = M'$ i $\mathfrak{I}_B(M') = M_1$, odnosno $\mathfrak{I}_B \circ \mathfrak{I}_A(M) = M_1$, tada je AB srednja linija trougla $MM'M_1$, sl. 521, pa je $\overrightarrow{MM_1} = 2\overrightarrow{AB}$, odnosno $\mathfrak{I}_B \circ \mathfrak{I}_A = \mathcal{I}_{2\overrightarrow{AB}}$.

1335. Zbog $\mathfrak{I}_B \circ \mathfrak{I}_A(C) = C_1$, pri čemu je $\overrightarrow{CC_1} = 2\overrightarrow{AB}$, sledi da $\mathfrak{I}_B \circ \mathfrak{I}_A$ nema nepokretne tačke, pa to ne može biti simetrija. Tražena tačka C ne postoji.

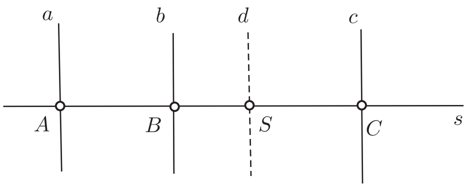
1336. Prema **zadatku 1331**a), ako je n prava kroz A, normalna na a, važi jednakost $\mathfrak{I}_a \circ \mathfrak{I}_n = \mathfrak{I}_A$. Tada je $\mathfrak{I}_a \circ \mathfrak{I}_A = \mathfrak{I}_a \circ (\mathfrak{I}_a \circ \mathfrak{I}_n) = (\mathfrak{I}_a \circ \mathfrak{I}_a) \circ \mathfrak{I}_n = \mathfrak{I}_n$, jer je $\mathfrak{I}_a \circ \mathfrak{I}_a$ koincidencija.

1337. Neka je n prava kroz N paralelna sa p i $MN = m$, sl. 522. Imamo: $\mathfrak{I}_N \circ \mathfrak{I}_M \circ \mathfrak{I}_p = (\mathfrak{I}_n \circ \mathfrak{I}_m) \circ (\mathfrak{I}_m \circ \mathfrak{I}_p) \circ \mathfrak{I}_p = \mathfrak{I}_n$.

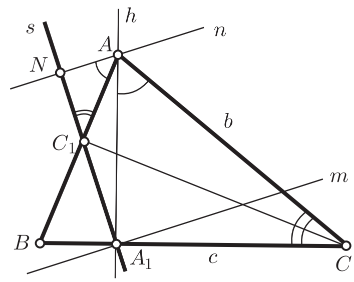
1338. 1° Ako se a, b, c seku u tački O, tada je $\mathfrak{J}_c \circ \mathfrak{J}_b \circ \mathfrak{J}_a(O) = O$, pa ova kompozicija simetrija predstavlja indirektnu izometriju sa nepokretnom tačkom, a to je osna simetrija. Ako su a, b, c paralelne prave, sl. 523, tada kompozicija simetrija $\mathfrak{J}_c \circ \mathfrak{J}_b \circ \mathfrak{J}_a$ preslikava pravu s, normalnu na a, ponovo u s, ali joj menja smer. Zbog toga, na pravoj s postoji nepokretna tačka S, pa je $\mathfrak{J}_c \circ \mathfrak{J}_b \circ \mathfrak{J}_a = \mathfrak{J}_d$.

2° Obrnuto, neka je $\mathfrak{J}_c \circ \mathfrak{J}_b \circ \mathfrak{J}_a = \mathfrak{J}_d$. Odavde je $\mathfrak{J}_c \circ \mathfrak{J}_c \circ \mathfrak{J}_b \circ \mathfrak{J}_a = \mathfrak{J}_c \circ \mathfrak{J}_d$, odnosno $\mathfrak{J}_b \circ \mathfrak{J}_a = \mathfrak{J}_c \circ \mathfrak{J}_d$. Ako se a i b seku, onda je njihova presečna tačka O jedina nepokretna tačka rotacije $\mathfrak{J}_b \circ \mathfrak{J}_a$, a samim tim i nepokretna tačka jednake rotacije $\mathfrak{J}_c \circ \mathfrak{J}_d$. Dakle, prave a, b, c, d sadrže tačku O. Ako su a, b, c paralelne prave, tada je $\mathfrak{J}_b \circ \mathfrak{J}_a(s) = s$, sl. 523, pa je zbog $\mathfrak{J}_b \circ \mathfrak{J}_a = \mathfrak{J}_c \circ \mathfrak{J}_d$, takođe $\mathfrak{J}_c \circ \mathfrak{J}_d(s) = s$, odakle sledi da je $s \perp d$ itd.

Ako se prave a, b, c, d seku, iz $\mathfrak{J}_b \circ \mathfrak{J}_a = \mathfrak{J}_c \circ \mathfrak{J}_d$ izlazi da je d prava koja zadovoljava uslov $\sphericalangle(\overrightarrow{a, b}) = \sphericalangle(\overrightarrow{d, c})$. Ako su a, b, c paralelne, iz $\mathfrak{J}_b \circ \mathfrak{J}_a = \mathfrak{J}_c \circ \mathfrak{J}_d$ izlazi da je $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{SC}$ (sl. 523).



Sl. 523



Sl. 524

1339. Izometrija $\mathfrak{J}_c \circ \mathfrak{J}_b \circ \mathfrak{J}_a$ je indirektna (jer tri puta menja orijentaciju) i nema nepokretnih tačaka (jer bi tada bila osna simetrija i prave a, b, c bi pripadale jednom pramenu, što je suprotno pretpostavci), a onda je, prema **zadatku 1326**, ova izometrija klizajuća simetrija.

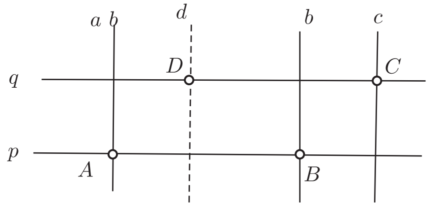
1340. Neka je ABC dati trougao, sl. 524. Označimo prave: $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$. Prave a, b, c ne pripadaju jednom pramenu, pa prema prethodnom zadatku, izometrija $\mathfrak{J}_c \circ \mathfrak{J}_b \circ \mathfrak{J}_a$ predstavlja klizajuću simetriju. Neka je h prava koja sadrži visinu AA_1 datog trougla i n prava kroz A, koja sa pravom h određuje ugao jednak uglu $\alpha = \sphericalangle(b, c)$. Tada je $\mathfrak{J}_n \circ \mathfrak{J}_h = \mathfrak{J}_c \circ \mathfrak{J}_b$. Konstruišimo pravu m kroz A_1 paralelnu sa n, i pravu s kroz A_1 normalnu na n. Neka su C_1 i N presečne tačke prave s sa c i n. Dokazaćemo da je s osa klizajuće simetrije $\mathfrak{J}_c \circ \mathfrak{J}_b \circ \mathfrak{J}_a$ i da je C_1 podnožje visine datog trougla. Iz uslova $\sphericalangle(h, n) = \sphericalangle(b, c)$, sledi da je $\sphericalangle C_1AN = \sphericalangle CAA_1$. Sada imamo: $\mathfrak{J}_c \circ \mathfrak{J}_b \circ \mathfrak{J}_a = \mathfrak{J}_n \circ \mathfrak{J}_h \circ \mathfrak{J}_a = \mathfrak{J}_n \circ \mathfrak{J}_{A_1}$, jer je $\mathfrak{J}_h \circ \mathfrak{J}_a = \mathfrak{J}_{A_1}$ zbog $h \perp a$. Međutim, kako je $\mathfrak{J}_{A_1} = \mathfrak{J}_m \circ \mathfrak{J}_s$, to je $\mathfrak{J}_c \circ \mathfrak{J}_b \circ \mathfrak{J}_a = \mathfrak{J}_n \circ \mathfrak{J}_m \circ \mathfrak{J}_s = \mathcal{J}_{2\overrightarrow{A_1N}} \circ \mathfrak{J}_s = G_{\vec{s}}$, gde je $\vec{s} = 2\overrightarrow{A_1N}$. Pravougli trouglovi ANC_1 i AA_1C imaju jednak po jedan oštar ugao, pa je $\sphericalangle AC_1N = \sphericalangle ACA_1$. Sledi da je $\sphericalangle AC_1A_1$ suplementan sa $\sphericalangle ACA_1$, pa je četvorougao ACA_1C_1 tetivni. Zbog toga je $\sphericalangle A_1AC_1 = \sphericalangle A_1CC_1$. Dakle, trouglovi AA_1B i CC_1B imaju jednaka po dva ugla, pa je i $\sphericalangle CC_1B = \sphericalangle AA_1B = 90°$. Sledi da je C_1 podnožje visine. Prema tome, tražena osa klizajuće simetrije je prava A_1C_1.

1341. Uočimo simetrije $\mathfrak{J}_A$, $\mathfrak{J}_B$, $\mathfrak{J}_C$. Ako su neke dve od tačaka A, B, C jednake, neposredno se uveravamo da je kompozicija ove tri simetrije centralna simetrija. (Npr. ako je $A = B$, onda je $\mathfrak{J}_B \circ \mathfrak{J}_A = \mathfrak{J}_1$ – koincidencija.) Ako su A, B, C tri različite tačke, uočimo prave: $p = AB$, zatim a, b, c kroz date tačke normalne na p i pravu q kroz C paralelnu sa p, sl. 525. Tada je $\mathfrak{J}_C \circ \mathfrak{J}_B \circ \mathfrak{J}_A = (\mathfrak{J}_q \circ \mathfrak{J}_c) \circ (\mathfrak{J}_b \circ \mathfrak{J}_p) \circ (\mathfrak{J}_p \circ \mathfrak{J}_a) = \mathfrak{J}_q \circ (\mathfrak{J}_c \circ \mathfrak{J}_b \circ \mathfrak{J}_a)$. Prema prethodnom zadatku i slici 525 postoji prava d paralelna sa a (a normalna na q) takva da je $\mathfrak{J}_c \circ \mathfrak{J}_b \circ \mathfrak{J}_a = \mathfrak{J}_d$. Dakle, $\mathfrak{J}_C \circ \mathfrak{J}_B \circ \mathfrak{J}_A = \mathfrak{J}_q \circ \mathfrak{J}_d = \mathfrak{J}_D$, sl. 525, (prema **zadatku 1331**). Četvorougao $ABCD$ je paralelogram.

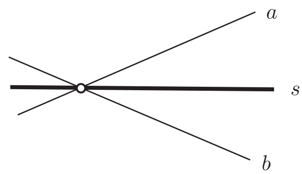
1342. Svodimo na dva prethodna zadatka.

1343. Iz $\mathfrak{J}_b \circ \mathfrak{J}_s \circ \mathfrak{J}_a = \mathfrak{J}_s$ dobijamo $\mathfrak{J}_s \circ \mathfrak{J}_a = \mathfrak{J}_b \circ \mathfrak{J}_s$ itd., sl. 526.

1344. Prema **zadatku 1341** $\mathfrak{J}(MNP) = MNP$.

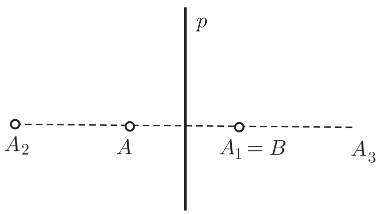


Sl. 525

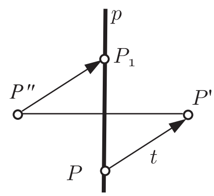


Sl. 526

1345. Iz date jednakosti dobijamo: $\mathfrak{I}_p \circ \mathfrak{I}_A \circ \mathfrak{I}_p = \mathfrak{I}_B$, pa je $\mathfrak{I}_p \circ \mathfrak{I}_A \circ \mathfrak{I}_p(A) = \mathfrak{I}_B(A)$. Prema slici 527, tačka A_1, $A_1 = \mathfrak{I}_p(A)$, je središte duži AA_3, $(A_2 = \mathfrak{I}_A \circ \mathfrak{I}_p(A) = \mathfrak{I}_A(A_1)$ i $A_3 = \mathfrak{I}_p(A_2) = \mathfrak{I}_p \circ \mathfrak{I}_A \circ \mathfrak{I}_p(A))$. Iz $\mathfrak{I}_B(A) = A_3$ sledi da je tačka B središte duži AA_3, tj. da je $B = A_1$, a to znači i $B = \mathfrak{I}_p(A)$.



Sl. 527

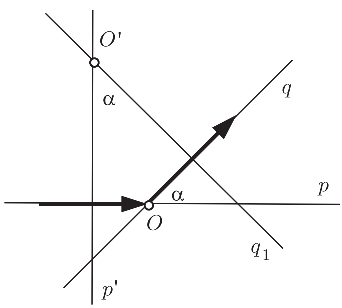


Sl. 528

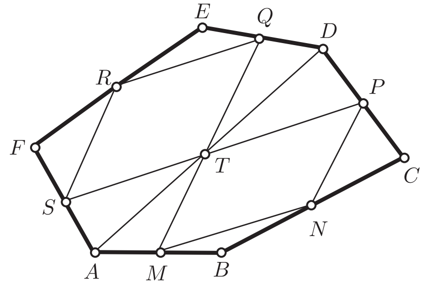
1346. Iz date jednakosti dobijamo: $\mathfrak{I}_s \circ \mathfrak{I}_a \circ \mathfrak{I}_s(a) = \mathfrak{I}_b(a)$ itd., slično prethodnom zadatku.

1347. Iz date jednakosti dobijamo: $\mathfrak{I}_A \circ \mathfrak{I}_B \circ \mathfrak{I}_p \circ \mathfrak{I}_A \circ \mathfrak{I}_B = \mathfrak{I}_p$, tj. $\mathcal{J}_{2\overrightarrow{AB}} \circ \mathfrak{I}_p \circ \mathcal{J}_{2\overrightarrow{AB}} = \mathfrak{I}_p$, pa je $\mathcal{J}_{2\overrightarrow{AB}} \circ \mathfrak{I}_p \circ \mathcal{J}_{2\overrightarrow{AB}}(p) = p$ i sve tačke prave p su nepokretne. Na slici 528 prikazano je preslikavanje jedne tačke P prave p: $\mathcal{J}_{2\overrightarrow{AB}} \circ \mathfrak{I}_p \circ \mathcal{J}_{2\overrightarrow{AB}}(P) = P_1$. Kako je $P = P_1$ to je $\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{P''P_1}$, pa je $\overrightarrow{t} \perp p$, odnosno $AB \perp p$, jer je $\overrightarrow{t} = 2\overrightarrow{AB}$.

1348. Ako su p i q ose klizajućih simetrija $G_{\vec{u}}$ i $G_{\vec{v}}$ i $p \cap q = \{O\}$, ako je $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{PO}$ i $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OQ}$, a p' i q' su simetrale redom duži OP i OQ, sl. 529, tada je $G_{\vec{v}} \circ G_{\vec{u}} = \mathfrak{I}_{q'} \circ \mathfrak{I}_O \circ \mathfrak{I}_O \circ \mathfrak{I}_{p'} = \mathfrak{I}_{q'} \circ \mathfrak{I}_{p'}$, a to je rotacija oko tačke O' za ugao 2α, jer su uglovi Opq i $O'p'q'$ jednaki kao uglovi sa normalnim kracima.



Sl. 529



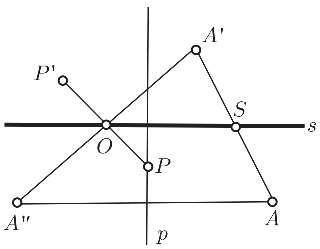
Sl. 530

1349. Iz date jednakosti dobijamo $(\mathfrak{I}_b \circ \mathfrak{I}_a) \circ (\mathfrak{I}_b \circ \mathfrak{I}_a) \circ (\mathfrak{I}_b \circ \mathfrak{I}_a) = \mathfrak{I}_1$, tj. $R_{C,3\alpha} = \mathfrak{I}_1$, gde je $a \cap b = \{C\}$. Odavde je $3\alpha = 360^\circ$, odnosno $\alpha = 120^\circ$. Dakle, $\sphericalangle(a, b) = 60^\circ$.

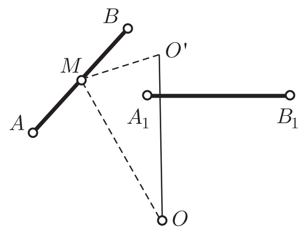
1350. Dijagonala AD deli šestougao na dva četvorougla, sl. 530. Ako je T središte dijagonale AD, tada su $MNPT$ i $QRST$ paralelogrami (videti rešenje **zadatka 859**). Tada, prema **zadatku 1341**, kompozicija šest navednih centralnih simetrija svodi se na $\mathcal{J}_T \circ \mathcal{J}_T$, a to je koincidencija.

1351. Prema **zadatku 1342** kompozicija simetrija: $\mathcal{J}_P \circ \mathcal{J}_N \circ \mathcal{J}_M \circ \mathcal{J}_L \circ \mathcal{J}_K$ je centralna simetrija. Kako je $\mathcal{J}_P \circ \mathcal{J}_N \circ \mathcal{J}_M \circ \mathcal{J}_L \circ \mathcal{J}_K(A) = A$, izlazi da je A centar te simetrije. Prema tome, ako proizvoljnu tačku M preslikamo ovom izometrijom $\mathcal{J}_P \circ \mathcal{J}_N \circ \mathcal{J}_M \circ \mathcal{J}_L \circ \mathcal{J}_K(M) = M_5$, tačka A je središte duži MM_5 itd.

1352. Neka je $\mathcal{J}(P) = P'$ i tačka O središte duži PP'. Tada je $\mathcal{J}_O \circ \mathcal{J}$ indirektna izometrija sa nepokretnom tačkom P, pa je to osna simetrija u odnosu na neku pravu p koja sadrži tačku P, sl. 531. Neka je s prava kroz O normalna na p. Dokažimo da ona sadrži središte S duži AA', gde je $\mathcal{J}(A) = A'$ i A je proizvoljna tačka. Zaista, ako je $\mathcal{J}_O(A') = A''$, biće $\mathcal{J}_p(A) = \mathcal{J}_O \circ \mathcal{J}(A) = A''$, pa je p simetrala duži AA'' i zbog toga normalna na pravoj OS. (Prava OS je srednja linija trougla $AA'A''$, sl. 531. Dakle, $s = OS$, pa prava s sadrži središte duži AA', gde su A i A' proizvoljan par odgovarajućih tačaka izometrije J.



Sl. 531

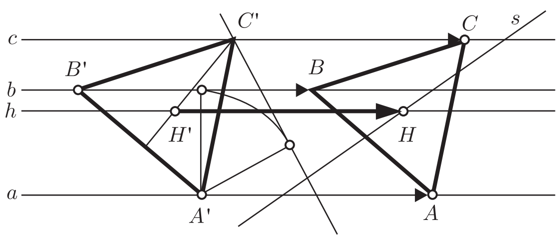


Sl. 532

1353. Pošto su trouglovi suprotno orijentisani, oni su osno simetrični ili postoji klizajuća simetrija G takva da je $G(A) = A_1$, $G(B) = B_1$ i $G(C) = C_1$. U oba slučaja prava s, koja sadrži središta duži AA_1 i BB_1, polovi duž CC_1.

1354. Označimo sa $\mathcal{R}_{O,\alpha}$ i $\mathcal{R}_{O',\alpha}$ pomenute rotacije. Tada je $\mathcal{R}_{O',-\alpha'} \circ \mathcal{R}_{O,\alpha} = \mathcal{J}_M$, gde je M središte duži AB, jer je $(\mathcal{R}_{O',-\alpha'} \circ \mathcal{R}_{O,\alpha})(AB) = BA$, sl. 532. Odatle sledi da je $\sphericalangle OMO' = 90°$, odnosno tačka M se nalazi na krugu sa prečnikom OO'. Na isti način $\mathcal{R}_{O',\alpha} \circ \mathcal{R}_{O',-\alpha})(A_1B_1) = B_1A_1$ i tačka M' se nalazi na krugu sa prečnikom OO'.

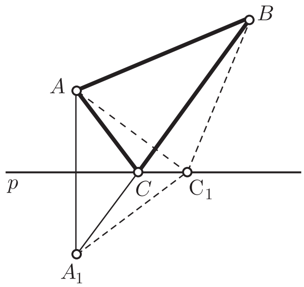
1355. Neka je $A'B'C'$ jednakostranični trougao, takav da $A' \in a$, $B' \in b$, $C' \in c$ i neka je A' proizvoljno izabrana tačka prave a, sl. 533. Rotacijom oko A' za $-60°$ tačka B' se preslika u C' (videti rešenje **zadatka 1288**). Kada dobijemo trougao $A'B'C'$ odredimo ortocentar H' i konstruišemo pravu h kroz H' paralelnu sa a. Neka je $h \cap s = \{H\}$. Traženi trougao ABC dobijamo translacijom trougla $A'B'C'$ za vektor $\overrightarrow{H'H}$.



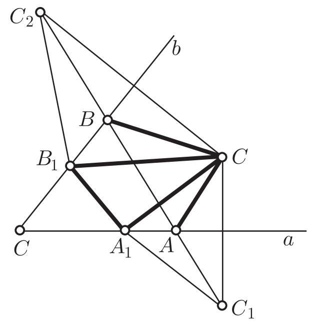
Sl. 533

1356. Neka je $CMNP$ traženi pravougaonik, $M \in BC$, $N \in AB$, $P \in AC$. Dijagonala CN biće najmanja ako je duž CN hipotenuzina visina.

1357. Treba udesiti da zbir duži AC i BC bude najmanji. Konstruišimo tačku A simetričnu sa A u odnosu na pravu p. Presečna tačka duži A_1B i prave p je tražena tačka C, sl. 534. Zbir duži AC i BC jednak je duži A_1B. Ako bismo uzeli bilo koju tačku C_1 prave p, $C_1 \neq C$, onda bi zbir duži AC_1 i BC_1 bio jednak zbiru duži BC_1 i A_1C_1, a iz trougla A_1C_1B je $A_1B < A_1C_1 + BC_1$. Dakle, i obim trougla ABC je manji od obima trougla ABC_1.



Sl. 534



Sl. 535

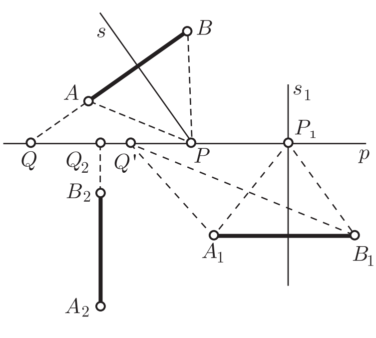
1358. Najkraći put je izlomljena linija ACB iz prethodnog zadatka.

1359. Konstruišemo tačku C_1 simetričnu sa C u odnosu na a i tačku C_2 simetričnu sa C u odnosu na b. Duž C_1C_2 seče krake datog ugla u tačkama A i B. Obim trougla ABC jednak je duži C_1C_2, a obim svakog drugog trougla, kome su temena B_1 i A_1, $B_1 \neq B$ ili $A_1 \neq A$, tačke krakova datog ugla, veći je od C_1C_2. (Videti izlomljenu liniju $C_1A_1B_1C_2$, na slici 535.)

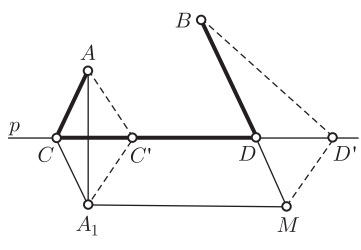
1360. Slično prethodnom zadatku. Konstruišemo A_1 simetrično sa A u odnosu na m i B_1 simetrično sa B u odnosu na n. Duž A_1B_1 seče krake u traženim tačkama.

1361. Tačke A i B mogu biti s iste strane date prave p. Tada ćemo, prema sl. 536, razlikovati tri slučaja.

1) $A_1B_1 \parallel p$. Neka simetrala s_1 duži A_1B_1 seče pravu p u tački P_1. Pošto je $A_1P_1 = B_1P_1$, to je $A_1P_1 - B_1P_1 = 0$. Za ma koju drugu tačku Q' prave p, ova razlika će biti veća. Pošto je ta razlika $|A_1Q' - B_1Q'| \leq A_1B_1$, a znak $-$ važi samo ako tačka Q pripada pravoj AB, sledi da najveća vrednost razlike ne postoji.



Sl. 536



Sl. 537

2) $A_2B_2 \perp p$. Iz prethodnog razmišljanja zaključujemo da tačka Q_2, dobijena u preseku p i A_2B_2, zadovoljava uslov da je razlika rastojanja od A_2 i B_2 najveća. Najmanja razlika ne postoji.

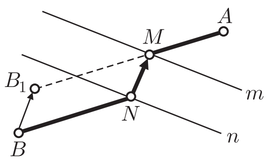
3) Ako je prava AB kosa prema pravoj p, onda razlika rastojanja ima i najmanju i najveću vrednost, tj. postoje tačke P i Q koje se dobijaju kao u prethodnim slučajevima.

Ako su A i B s raznih strana prave p, tada konstruišemo tačku B_1 simetričnu sa B u odnosu na p i svodimo na prethodni slučaj. (Zbog simetrije je $AP = A_1P$ i $AQ = A_1Q$.)

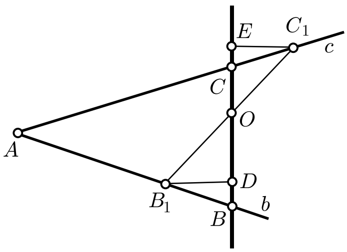
1362. Odredimo tačku $A_1 = \mathcal{J}_p(A)$ i tačku M takvu da je $\overrightarrow{A_1M} \parallel p$ i tačke M i B su s iste strane prave AA_1, sl. 537. Duž BM seče p u tački D. Zatim dobijamo C iz uslova $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{A_1M}$. Lako se dokaže da je $AC + CD + DB = m + BM$. (Mora biti minimalan zbir $AC + BD$.) Za svake druge dve tačke, C' i D', biće $AC' + BD' = BD' + D'M > BM = AC + BD$.

1363. Slično prethodnom zadatku. Konstruišemo tačke A_1 i A_2 tako da je A središte duži A_1A_2, $AA_1 = AB$ i $AA_1 \parallel p$. Manja od duži A_1B i A_2B seče p u jednoj od traženih tačaka itd.

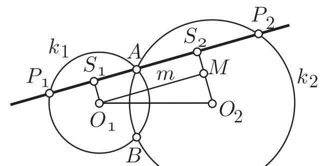
1364. Most je najkraći ako je $MN \perp m$. Ako se duž BN translacijom za vektor $\overrightarrow{BB_1}$ preslika u duž B_1M, $BB_1 \perp m$ i $BB_1 = MN$, onda će linija AMB_1 određivati dužinu puta *na suvom*. Da bi ovaj put bio najkraći, treba da tačke A, M i B_1 budu kolinearne. Prema tome, konstrukciju vršimo na sledeći način: konstruišemo vektor $\overrightarrow{BB_1}$, a zatim AB_1 seče m itd., sl. 538.



Sl. 538



Sl. 539



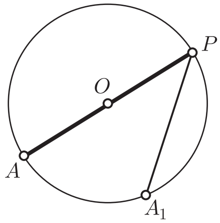
Sl. 540

1365. Slično prethodnom zadatku. Izvršimo translaciju tačke A i tačke B, tako da su vektori $\overrightarrow{AA_1}$ i $\overrightarrow{BB_1}$ normalni na obale odgovarajućih kanala, a duži AA_1 i BB_1 jednake širinama ovih kanala. Odsečak prave A_1B_1 između kanala predstavlja deo trase puta itd.

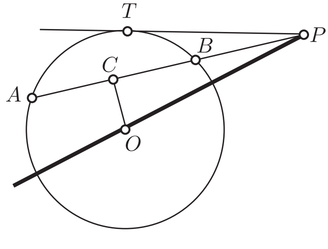
1366. Tražena duž BC je najmanja ako je $AB = AC = m$. Zaista, neka su B_1 i C_1 tačke, $B_1 \neq B$ i $C_1 \neq C$, takve da je $AB_1 + AC_1 = 2m$ i neka je tačka B_1 između A i B, sl. 539. Tada je tačka C između A i C_1 i $BB_1 = CC_1$. Neka su B_1D i C_1E normale na pravoj BC. Pravougli trouglovi BB_1D i CC_1E su podudarni, pa je $BD = CE$, odnosno $BC = DE$. Međutim, iz pravougiih trouglova OB_1D i OC_1C (gde BC seče B_1C_1 u O) sledi da su hipotenuze OB_1 i OC_1 veće od kateta OD i OE, pa je $B_1C_1 > DE = BC$.

1367. Neka su O_1S_1 i O_2S_2 simetrale tetiva AP_1 i AP_2, sl. 540, i neka je $P_1P_2 = 2m$. Ako je M podnožje normale iz O_1 na O_2S_2, tada lako dokažemo da je $O_1M = m$. Duž O_1O_2 je hipotenuza trougla O_1O_2M, što znači da je $O_1M = m \leq O_1O_2$. Prema tome, m je najveće kada je $m = O_1O_2$, što znači da je tražena prava p paralelna sa O_1O_2.

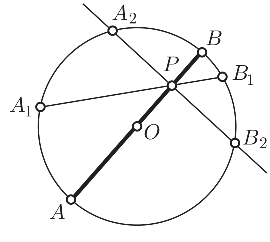
1368. Ako je $P \in k$, sečica prolazi kroz centar i najveći zbir je $0 + PA$, gde je PA prečnik kruga k, sl. 541. Ako je P van kruga, a A i B presečne tačke sečice p i kruga k, C središte tetive AB ($OC \perp AB$), tada je $PA + PB = PC + AC + PC - BC = 2PC$, sl. 542. Kako je trougao POC pravougli, to je $PC < PO$, pa je $PA + PB \leq 2PO$. Dakle, zbir je najveći ako sečica prolazi kroz centar kruga. (Najmanji je ako je to tangenta.)



Sl. 541



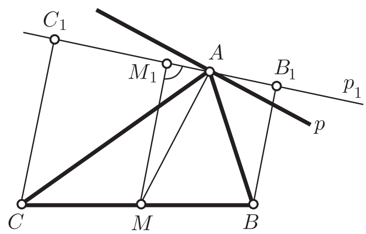
Sl. 542



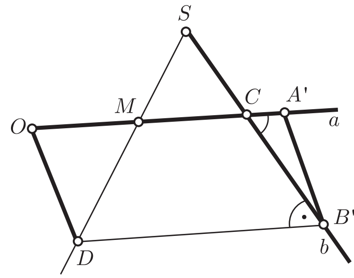
Sl. 543

Ako je P u krugu i A_1B_1 proizvoljna sečica, tada je $PA_1 + PB_1 = A_1B_1$, pa je jasno da je rešenje ponovo sečica kroz centar O kruga, sl. 543. (Najmanji je zbir ako sečica određuje tetivu normalnu na prečnik – tetiva A_2B_2.) Dakle, u svakom slučaju da bi zbir odsečaka bio najveći, sečica se povlači kroz centar datog kruga.

1369. Ako je p_1 proizvoljna prava kroz A, zatim BB_1, CC_1 i MM_1 normale na p_1, gde je M središte stranice BC, tada je $BB_1 + CC_1 = 2MM_1$ (srednja linija trapeza). Trougao AMM_1 je pravougli sa hipotenuzom AM, sl. 544. Dakle, $MM_1 \leq AM$. Prema tome, tražena prava p je normalna na težišnu liniju AM.



Sl. 544

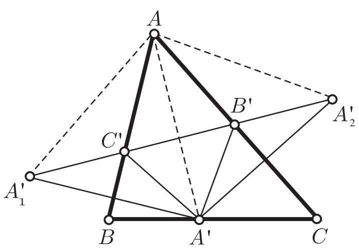


Sl. 545

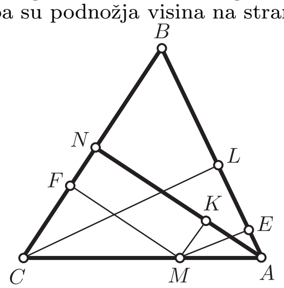
1370. Temena traženog kvadrata su središta stranica datog kvadrata. (Videti **zadatak 1366**.)

1371. Izaberimo na polupravim Oa i Ob tačke A' i B' tako da je $OA' = SB'$. Neka je $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{A'B'}$, sl. 545. Četvorougao $A'B'DO$ je paralelogram, pa je $B'D = OA' = B'S$. Sledi da je trougao $B'DS$ jednakokraki, pa kako je $\sphericalangle DB'S = \sphericalangle A'CB'$, sledi da je $\sphericalangle B'SD = 90^\circ - \frac{1}{2}A'CB'$ (ili $\sphericalangle B'SD = \frac{1}{2}\sphericalangle A'CS$, jer ako SD seče $A'C$ u M, tada je $SC = SM$) bez obzira na izbor tačaka A' i B'. Znači, pravu SD možemo konstruisati. Kako je $OD = A'B'$, sledi da je duž $A'B'$ najmanja ako je $OD \perp SD$.

1372. Ako bi tačka A', $A' \in BC$, bila jedno teme traženog trougla, onda bi prava $A'_1A'_2$, gde je $A'_1 = \mathcal{J}_{AB}(A')$ i $A'_2 = \mathcal{J}_{AC}(A')$, u preseku sa stranicama AC i BC odredila temena B' i C' trougla najmanjeg obima, slično **zadatku 1369** (sl. 546). Tada je obim ovog trougla podudaran duži $A'_1A'_2$. Zbog simetričnosti je $\sphericalangle A'_1AA'_2 = 2\sphericalangle BAC$ i $AA' = AA'_1 = AA'_2$. Prema tome, duž $A'_1A'_2$ biće najmanja ako su najmanje duži AA'_1 i AA'_2, a to znači ako je najmanja duž AA'. To će biti u slučaju kada je duž AA' visina datog oštrouglog trougla. Temena traženog trougla biće podnožja visina datog trougla. Trougao ABC je oštrougli, pa su podnožja visina na stranicama.



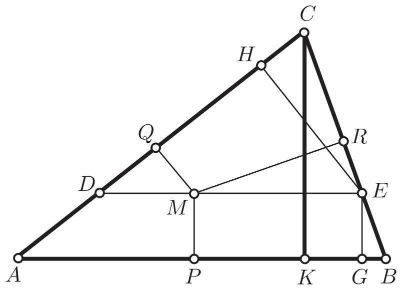
Sl. 546



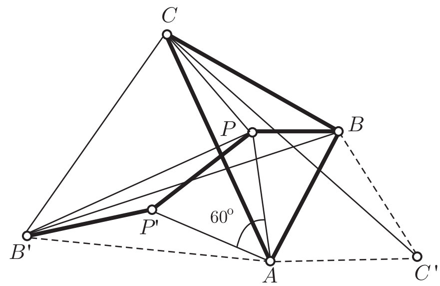
Sl. 547

1373. a) Neka je M tačka stranice AC i neka je $\alpha > \gamma$. Tada je visina AN manja od visine CL, sl. 547. Traži se da zbir normala ME i MF na stranice bude minimalan. Uporedimo zbir $ME + MF$ sa AN. Ako je $MK \perp AN$, onda je $KN = MF$ i $\sphericalangle KMA = \gamma$. Pravougli trouglovi AEM i AKN imaju zajedničku hipotenuzu AM, pa kako je $\sphericalangle AMK < \sphericalangle MAE$, to je $AK < ME$. Zbog toga je $AK + KN < ME + MF$, tj. $AN < ME + MF$. Dakle, tražena tačka je $M = A$.

b) Neka je $\alpha < \beta < \gamma$. Neka je M proizvoljna tačka u trouglu ABC i neka je m prava kroz M paralelna sa AB, na kojoj stranice AC i BC određuju odsečak DE. Prema slučaju a) u trouglu CDE je $EH < MQ + MR$, sl. 548. Normale MP i EG su jednake, pa je $EH + EG < MP + MQ + MR$. Ali, prema slučaju a) u trouglu ABC je visina CK manja od $EH + EG$. Prema tome: $CK < MP + MQ + MR$, pa je tražena tačka $M = C$.



Sl. 548

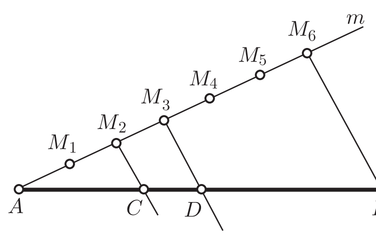


Sl. 549

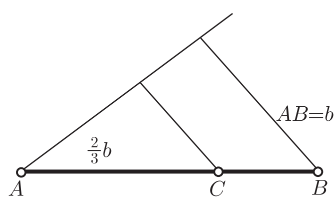
1374. Neka je P tražena tačka. Rotirajmo trougao APC oko tačke A za $60°$. Neka se taj trougao preslika u trougao $AP'B'$. Tada su APP' i ACB' jednakostranični trouglovi i $PP' = AP$, $B'P' = CP$, sl. 549, pa izlomljena linija $B'P'PB$ predstavlja zbir rastojanja tačke P od temena A, B, C. Dakle, ovaj zbir će biti najmanji kada tačke P i P' pripadaju duži BB'. Slično se dokazuje da tačka P pripada duži CC', gde je ABC' jednakostranični trougao, pa je P presečna tačka duži BB' i CC'.

1375. Ma kakva bila tačka M u konveksnom četvorouglu $ABCD$, biće $AM + CM \geq AC$ i $BM + DM \geq BD$, odnosno biće $AM + BM + CM + DM \geq AC + BD$. Prema tome, ovaj zbir će biti najmanji ako tačka M pripada dijagonalama AC i BD, odnosno ako se AC i BD seku u M. Tada je najmanji zbir $AM + BM + CM + DM = AC + BD$.

1376. Rešenje zadatka pod d) prikazano je na slici 550. Na polupravoj Am konstruisane su tačke $M_1, M_2, \ldots, M_6$, tako da je $AM_1 = M_1M_2 = \cdots = M_5M_6$. Prave kroz M_2 i M_3, paralelne sa BM_6, dele duž $AB = a$ u datoj razmeri.



Sl. 550



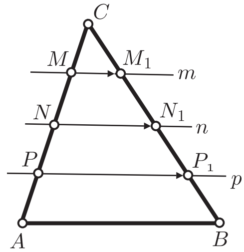
Sl. 551

1377. Slično prethodnom zadatku. Rešenje pod a) dato je na slici 551.

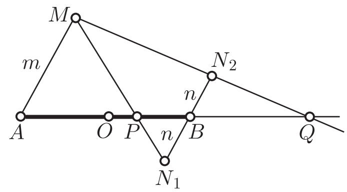
1378. Iz datog uslova je: $MP : PQ : QN = 4 : 2 : 1$ itd.

1379. Prema Talesovoj teoremi je PP_1: $MM_1 = CP : CM = 3 : 1$, pa je $\overrightarrow{PP_1} = 3\overrightarrow{MM_1}$, odnosno $m = 3$. Zatim $PP_1 : NN_1 = CP : CN = 3 : 2$. Znači, $\overrightarrow{PP_1} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{NN_1}$, tj. $n = \dfrac{3}{2}$, sl. 552.

1380. Konstrukcija je data na slici 553. Duži AM i N_1N_2 su paralelne, a $AM = m$ i $BN_1 = BN_2 = n$. Lako se dokazuje da je P presečna tačka pravih AB i MN_1, a Q je presečna tačka pravih AB i NM_2. Za tačku P, zbog $A - P - B$ kažemo da vrši unutrašnju podelu, a za tačku Q kažemo da vrši spoljašnju podelu duži AB u datoj razmeri $m : n$.



Sl. 552



Sl. 553

Za dokaz jednakosti $OA^2 = OP \cdot OQ$ uvedimo oznake: $OA = a = OB$, $OP = p$ i $OQ = q$. Tada proporcija $AP : BP = AQ : BQ$ postaje: $(a+p) : (a-p) = (a+q) : (q-a)$. Sređivanjem ove jednakosti dobijamo: $a^2 = pq$, odnosno $OA^2 = OP \cdot OQ$.

1381. Date formule treba izraziti u vidu proporcija pa izvršiti konstrukciju.

a) Data formula se može predstaviti proporcijom: $b : a = c : x$; b) $x : a = a : b$; c) $x : u = (a+b) : c$; d) $x : a = b : u$ (u je data jedinična duž), e) $x : u = a : b$, f) $x : a = a : u$.

g) Na osnovu poznatih osobina data proporcija se može preobraziti na sledeći način: $(a-x) : x = b : a$ iz $(a-x+x) : x = (b+a) : a$, odnosno $a : x = (b+a) : a$ itd.

h) $(a+x) : (a-x) = 5 : 2$ daje $2a : (a+x) = 7 : 5$. Odavde konstruišemo duž $a+x$ i od ove duži oduzmemo datu duž a.

1382. Na osnovu Talesove teoreme, prema datoj slici, imamo razmere $AC : CD = BC : CE = AB : DE$. Odavde ćemo izračunati tražene dužine.

a) Iz $AC : CD = BC : CE$ dobijamo: $CE = \dfrac{CD \cdot BC}{AC} = \dfrac{4 \cdot 24}{12} = 8$.

b) Iz $AC : CD = BC : CE$, na osnovu osobina proporcija je: $(AC - CD) : (BC - CE) = AC : BC$, odnosno $AD : BE = AC : BC$. Odavde je $BE = \dfrac{AD \cdot BC}{AC} = \dfrac{3 \cdot 25}{15} = 5$.

c) Slično prethodnom slučaju: $BE = \dfrac{AD \cdot CE}{CD} = 3$, pa je $BC = CE + BE = 10$.

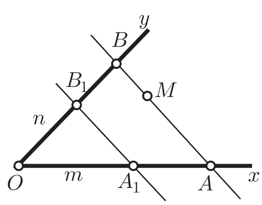
d) $AD = AC - CD = 12$, pa je $CE = \dfrac{6 \cdot 8}{12} = 4$. e) $AC = CD + DA = 10$.

1383. Na osnovu Talesove teoreme zaključujemo da je $GH \parallel MN$ u slučajevima a) i b).

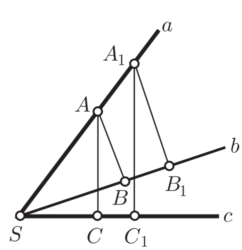
1384. $AC = 17,5$; $AE = 16$; $AB = 20$.

1385. a) Konstruišemo najpre tačke A_1 i $B_!$ takve da je $OA_1 = m$ i $OB_1 = n$. Prava p je paralelna duži A_1B_1 sl. 554.

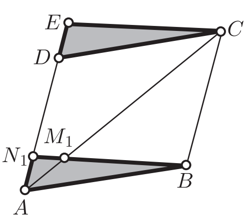
b) Kroz M postavimo neku duž A_2B_2, tako da je $A_2M = m$ i $B_2M = n$. Neka je A_1 tačka kraka Ox. Prava kroz B_2, paralelna sa A_1A_2, seče pravu A_1M u tački B_1. Tada je $MA_1 : MB_1 = m : n$. Konačno, prava kroz B_1, paralelna sa Ox, seče Oy u traženoj tački B. Prava BM je tražena.



Sl. 554



Sl. 555

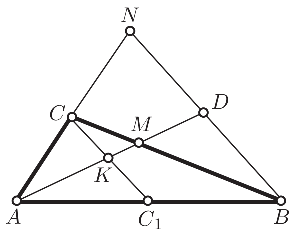


Sl. 556

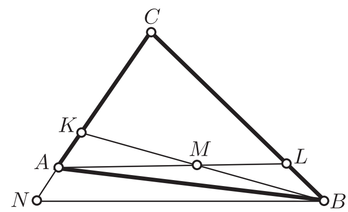
1386. Neka je A utvrđena tačka poluprave Sa, sl. 555, a B i C tačke polupravih Sb i Sc takve da je $AB \perp Sb$ i $AC \perp Sc$. Neka je A_1 proizvoljna tačka poluprave Sa, a A_1B_1 i A_1C_1 normale na Sb i Sc. Prema Talesovoj teoremi je $AB : A_1B_1 = SA : SA_1$ i $AC : A_1C_1 = SA : SA_1$. Odavde dobijamo: $AB : A_1B_1 = AC : A_1C_1$, pa je $AB : AC = A_1B_1 : A_1C_1$ – tj. razmera normalnih odstojanja ma koje tačke poluprave Sa od polupravih Sb i Sc ne menja se.

1387. Neka je E tačka prave AD tako da je $A-D-E$ i $DE = AN_1$, sl. 556. Trouglovi ABN_1 i CDE podudarni su (stav SUS), pa je $\sphericalangle AN_1B = \sphericalangle DEC$, što znači da je $BN_1 \parallel EC$. Osim toga je $N_1E = AD$, pa je $AN_1 : AE = 1 : (n+1)$. Na osnovu Talesove teoreme je $AM_1 : AC = AN_1 : AE$, pa je $AM_1 : AC = 1 : (n+1)$, a odatle je $AM_1 = \dfrac{AC}{n+1}$.

1388. Neka je $BN \parallel CC_1$ i $N \in AC$, sl. 557, i neka AM seče BN u D. Tada je $\dfrac{ND}{DB} = \dfrac{CK}{KC_1} = 1$, pa je $ND = BD$. Slično, iz $\dfrac{AC}{CN} = \dfrac{AC_1}{C_1B} = 1$ sledi $AC = CN$. Duži BC i AD su težišne linije trougla ABN, a M je težište tog trougla, pa je $CM : MB = 1 : 2$.



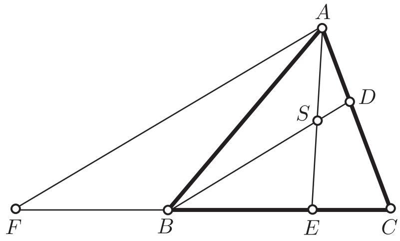
Sl. 557



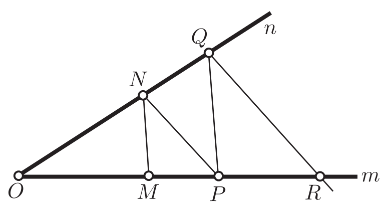
Sl. 558

1389. Produžimo stranicu AC preko A do tačke N tako da je $AN = AK$. Tada je $AN : CN = 1 : 5 = BL : CN$. Na osnovu teoreme obrnute Talesovoj, sledi da je $AL \parallel BN$. Kako je A središte duži KN, biće i M središte duži BK, sl. 558.

1390. Slično prethodnom zadatku. Neka je F tačka prave BC tako da je $F - B - C$ i $FB = BE$, sl. 559. Iz datog uslova je $BE : EC = 2 : 1$, a odavde, na osnovu osobina proporcija: $(BE+EC) : BE = 3 : 2$. Kako je $BE+EC = BC$ i $BE = FB$ sledi $BC : BF = 3 : 2 = CD : DA$, pa je $BD \parallel AF$. Zbog $FB = BE$ biće i $AS = SE$, pa je $AS : SE = 1 : 1$.



Sl. 559

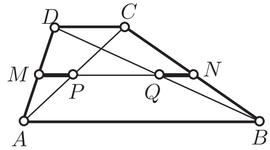


Sl. 560

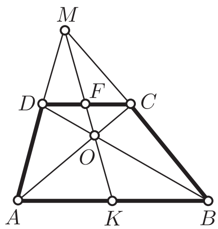
1391. Imamo: iz $LP : PK = LO : OM$ sledi $(LP + PK) : LP = (LO + OM) : LO$ odakle je $LK : LP = LM : LO$, pa je $PO \parallel KM$, na osnovu obrnute Talesove teoreme.

1392. Prema Talesovoj teoremi je $OM : OP = ON : OQ$ i $OP : OR = ON : OQ$. Otuda je $OM : OP = OP : OR$, pa je $OP^2 = OM \cdot OR$, sl. 560.

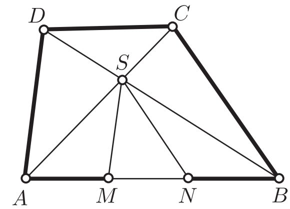
1393. Prema slici 561 dobijamo proporcije $MP : CD = AM : AD$ i $NQ : CD = BQ : BD$. Međutim, $AM : AD = BQ : BD$, pa je $MP : CD = NQ : CD$. Kako su u ovoj proporciji drugi član leve i drugi član desne razmere jednaki, biće jednaki i prvi članovi, tj. biće $MP = NQ$.



Sl. 561



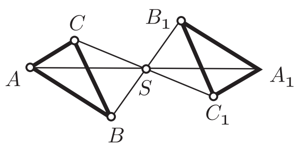
Sl. 562



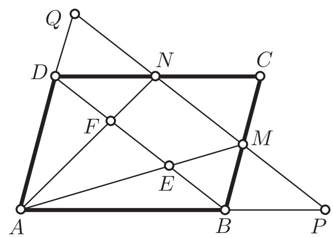
Sl. 563

1394. Prema Talesovoj teoremi je $\dfrac{MK}{MF} = \dfrac{AK}{DF} = \dfrac{KB}{FC}$ (1) (jer $AB \parallel CD$, sl. 562). Iz istih razloga imamo: $\dfrac{AK}{FC} = \dfrac{KB}{DF}$ (2). Množeći jednakosti (1) i (2) dobijamo: $\dfrac{AK^2}{DF \cdot FC} = \dfrac{KB^2}{DF \cdot FC}$. Odavde sledi da je $AK^2 = KB^2$, odnosno $AK = KB$. Sada iz (1) sledi i $DF = FC$.

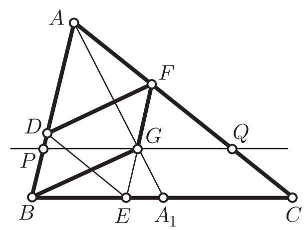
1395. Zbog $AB \parallel CD$ je $AS : AC = BS : BD$. Zatim, zbog $AD \parallel SM$ je $BM : BA = BS : BD$, a zbog $BC \parallel SN$ je $AN : AB = AS : AC$, sl. 563. Desne strane poslednjih dveju proporcija su jednake (na osnovu prve proporcije), pa su im jednake i leve strane, $BM : BA = AN : AB$. Odavde sledi da je $BM = AN$, pa je i $AM = BN$.



Sl. 564



Sl. 565



Sl. 566

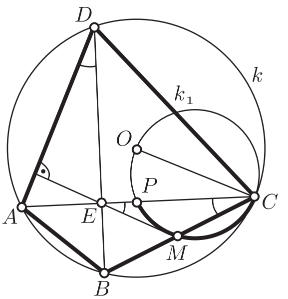
1396. Na slici 564 je prikazana konstrukcija slučaja b). Očigledno je da homotetija sa koeficijentom $k = -1$ predstavlja centralnu simetriju.

1397. Prava MN je paralelna dijagonali BD, pa, ako je PQ homotetična slika dijagonale BD, onda iz jednakosti odsečaka BE, EF i ED sledi $MP = MN = NQ$ (sl. 565). Dalje, trouglovi BMP, CMN i DQN su podudarni među sobom (stav SUS). Iz $\triangle BMP \cong \triangle CMN$ sledi da je $\sphericalangle MBP = \sphericalangle MCN$, što znači da su prave AB i CD paralelne. Slično iz podudarnosti trouglova CMN i DQN zaključujemo da je $BC \parallel AD$.

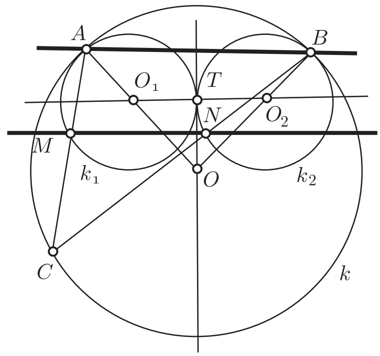
1398. Tačka u kojoj se seku zajednička tangenta i prava određena centrima datih krugova je centar homotetije ako manji krug nije u većem krugu. Ako je manji krug u većem, centar homotetije je tačka koja deli duž O_1O_2 u razmeri $r_1 : r_2$. (Dati krugovi su $k_1(O_1, r_1)$ i $k_2(O_2, r_2)$.) Ako su krugovi nepodudarni, postoje dva centra homotetije.

1399. U četvorouglu $BGFD$ je $BD \parallel GF$. Treba još dokazati da je $BD = GF$, sl. 566. Kroz tačku G postavimo pravu paralelnu sa BC. Ona seče prave AB i AC u tačkama P i Q. Pošto je $BA_1 = A_1C$ i $PQ \parallel BC$ sledi da je $PG = GQ$ i $BE = PG = GQ$. Iz podudarnosti trouglova DBE i FGQ ($\sphericalangle DBE = \sphericalangle FGQ$, $BE = GQ$, $\sphericalangle BED = \sphericalangle GQF$) sledi da je $BD = GF$. U četvorouglu $BGFD$ naspramne stranice BD i GF su paralelne i jednake, pa je taj četvorougao paralelogram.

1400. Pošto je $\triangle BEC$ pravougli, središte hipotenuze je centar kruga opisanog oko trougla. Stoga ćemo dokazati da je $EM = MC$ i $BM = EM$. Imamo da je: $\sphericalangle ADB = \sphericalangle ACB$ (kao periferijski uglovi nad istim lukom), $\sphericalangle MEC = \sphericalangle ADB$ (kao uglovi sa normalnim kracima). Odatle je: $\sphericalangle MEC = \sphericalangle MCE$, pa je $EM = MC$, sl. 567. Slično je i $\sphericalangle MEB = \sphericalangle EBM$ i $BM = EM$. Stoga je $BM = MC$, što je i trebalo dokazati. Krug k_1, konstruisan nad OC kao nad prečnikom, je geometrijsko mesto središta svih tetiva kruga k koje imaju zajedničku tačku C (homotetija sa centrom C i koeficijentom $\dfrac{1}{2}$). Stoga je traženo geometrijsko mesto tačaka luk $\widehat{CP}$ kruga k_1.



Sl. 567

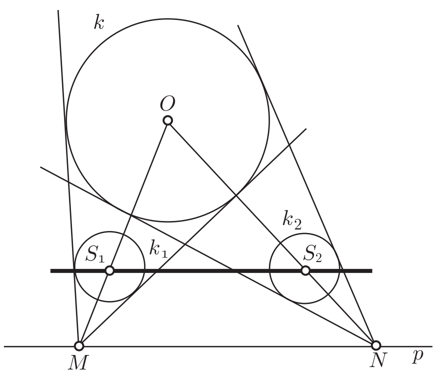


Sl. 568

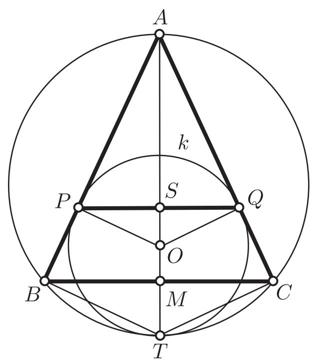
1401. Neka je O centar kruga k, a O_1 i O_2 centri krugova k_1 i k_2, sl. 568. Homotetija s centrom A i koeficijentom $\dfrac{AO}{AO_1}$ preslikava krug k_1 u krug k, tački $M \in k_1$ odgovara tačka $C \in k$, pa je $AC = \dfrac{AO}{AO_1} \cdot AM$, tj. $\dfrac{AC}{AM} = \dfrac{AO}{AO_1}$ (1). Slično se dobija da je $\dfrac{BC}{BN} = \dfrac{BO}{BO_2} = \dfrac{AO}{AO_1}$ (2).

Iz (1) i (2) sledi $\dfrac{AC}{AM} = \dfrac{BC}{BN}$. Dalje, na osnovu osobina proporcija dobijamo: $\dfrac{AC}{AC - AM} = \dfrac{BC}{BC - BN}$, odnosno $\dfrac{CA}{CM} = \dfrac{CB}{CN}$. Odavde, na osnovu obrnute Talesove teoreme, sledi $AB \parallel MN$.

1402. Neka je O centar i r poluprečnik datog kruga, a S_1 i S_2 centri i r_1 poluprečnik krugova upisanih između tangenti kruga k, sl. 569. Tada je $OM : S_1M = r : r_1$ i $ON : S_2N = r : r_1$, odakle je $OM : S_1M = ON : S_2N$. Primenom osobina proporcija dobijamo $(OM - S_1M) : OM = (ON - S_2N) : ON$, tj. $OS_1 : OM = OS_2 : ON$, pa je $S_1S_2 \parallel MN$, na osnovu obrnute Talesove teoreme.



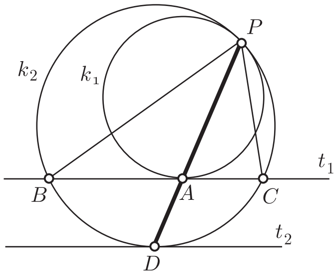
Sl. 569



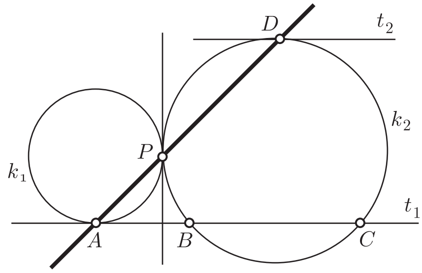
Sl. 570

1403. Neka je T dodirna tačka kruga k i opisanog kruga trougla ABC. Prava AT je simetrala, sl. 570. Ona je normalna na BC i PQ i polovi ove dve duži. Homotetija sa centrom A, koja prevodi T u središte M stranice BC, preslikava krug k u krug koji je upisan u trougao ABC. Kako je $\sphericalangle ABT = \sphericalangle ACT = 90^\circ$ i $OP \perp AB$, $OQ \perp AC$, $BC \parallel PQ$, to se centar O kruga k preslikava u središte S duži PQ, pa je S centar upisanog kruga datog trougla.

1404. Uočimo homotetiju s centrom P koja krug k_1 preslikava u k_2. Tačka A se preslikava u presečnu tačku D prave PA i kruga k_2, a tangenta t_1 kruga k_1 u tangentu t_2 kruga k_2, i $t_1 \parallel t_2$,



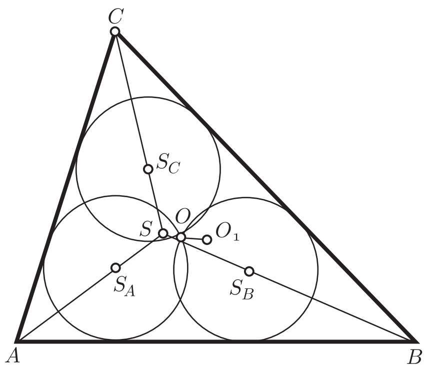
Sl. 571



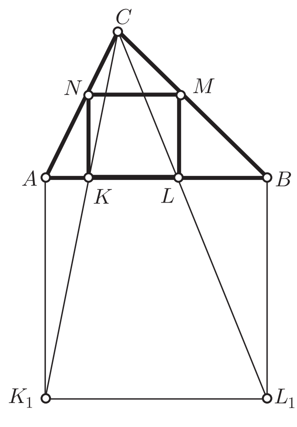
Sl. 572

sl. 571 i 572. Zbog toga je tačka D središte luka $\widehat{BC}$ kruga k_2, pa je prava PD simetrala unutrašnjeg ili spoljašnjeg ugla kod temena P u trouglu ABP.

1405. Neka su S_A, S_B, S_C centri podudarnih krugova (S_A pripada simetrali ugla α, S_B simetrali ugla β i S_C simetrali ugla γ). Sem toga, stranice trougla $S_AS_BS_C$ su paralelne odgovarajućim stranicama trougla ABC. Zbog toga ova dva trougla imaju zajedničke simetrale uglova, a samim tim i zajednički centar upisanog kruga, tačku S, koji je ujedno i centar homotetije kojom se ABC preslikava u $S_AS_BS_C$, sl. 573. Tačka O je jednako udaljena od tačaka S_A, S_B, S_C, te predstavlja centar kruga opisanog oko trougla $S_AS_BS_C$. Njegova homotetična slika je centar O_1 kruga opisanog oko trougla ABC. Zbog toga su tačke S, O i O_1 kolinearne.



Sl. 573



Sl. 574

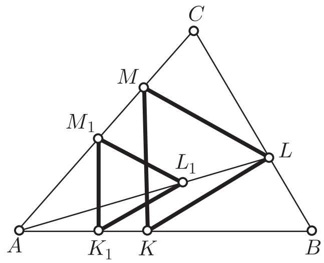
1406. Na kracima Ac i Ab odredimo tačke C_1 i N_1, tako da je $C_1N_1 \perp Ab$ i $C_1N_1 = m$ i na pravoj AD odredimo tačku D_1 tako da je $C_1D_1 = n$. Trougao AC_1D_1 se homotetijom preslikava u trougao ACD.

1407. Neka su B i C tačke u kojima normala na pravu a u tački A seče prave b i c. Duž PQ je homotetična slika stalne duži MN sa centrom A i koeficijentom $k = \dfrac{AC}{AB}$, pa je dužina duži PQ, $PQ = k \cdot MN$, stalna.

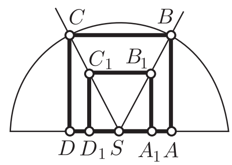
1408. Kvadrat ABL_1K_1 je homotetična slika traženog kvadrata. Na slici 574 jasno se vidi rešenje zadatka.

1409. Najpre se konstruiše neka duž K_1M_1 tako da $K_1 \in AB$ i $M_1 \in AC$ i $K_1M_1 \perp AB$, sl. 575. Zatim konstruišemo jednakostranični trougao $K_1M_1L_1$. Sada se traženi trougao dobija kao homotetična slika trougla $K_1L_1M_1$. Centar homotetije je tačka A.

1410. Slično prethodnom zadatku.



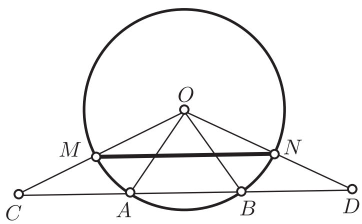
Sl. 575



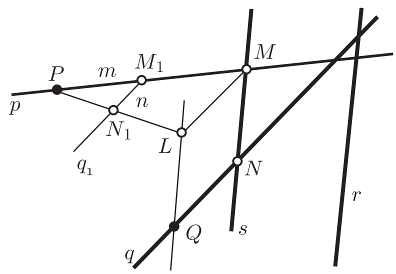
Sl. 576

1411. Najpre se konstruiše duž A_1D_1 na prečniku datog polukruga tako da je tačka S središte duži A_1D_1. Zatim konstruišemo kvadrat $A_1B_1C_1D_1$ i homotetijom sa centrom S ga preslikamo kao što je prikazano na slici 576.

1412. Na pravoj AB konstruišemo tačke C i D, različite od A i B, tako da je $AC = AB$ i $BD = AB$. Neka OC seče k u M i OD seče k u N. Lako se može dokazati da je MN tražena tetiva, sl. 577.



Sl. 577



Sl. 578

1413. Neka je Q_1 proizvoljna tačka prave q. Odredimo tačke P_1 i R_1 na pravim p i r tako da je $P_1Q_1 : Q_1R_1 = m : n$. Tražena prava s je paralelna pravoj P_1Q_1.

1414. Na pravoj p odredimo tačku M_1, tako da je $PM_1 = m$. Zatim konstruišemo polupravu M_1q_1 paralelnu sa q, i na njoj odredimo tačku N_1 tako da je $M_1N_1 = n$, sl. 578. Prave PN_1 i r_1 ($r_1 \parallel r$ i $Q \in r_1$) seku se u tački L. Prava kroz L, paralelna sa q, seče pravu p u traženoj tački M.

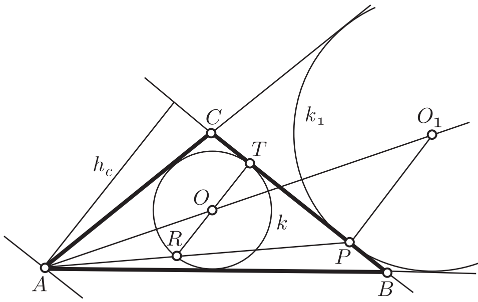
1415. Oko datog trougla opišemo krug, pa odredimo centar homotetije kojom se ovaj krug preslikava u krug k itd.

1416. Neka je k upisani krug trougla ABC i k_1 spolja pripisan krug koji dodiruje stranicu BC u tački P. Na osnovu osobina tangentnih duži, nije teško dokazati da je $PT = AB - AC = d$, sl. 579. Krugovi k i k_1 su homotetični sa centrom homotetije A. Ako je R odgovarajuća tačka tački P, tada je TR prečnik kruga k. Dakle, možemo odmah konstruisati pravougli trougao PRT. Zatim, koristeći datu duž h, konstruišemo tačku A itd.

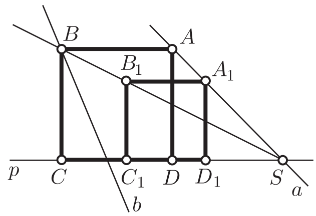
1417. *I slučaj*: Prava p sadrži dva susedna temena, recimo C i D. Iz proizvoljno izabrane tačke A_1 prave a konstruišemo normalu A_1D_1 na pravu p i konstruišemo kvadrat $A_1B_1C_1D_1$. Zatim, homotetijom čiji je centar tačka S, presek pravih p i a, preslikamo ovaj kvadrat tako da se tačka B_1 preslika u tačku B, $B \in b$. Dalja konstrukcija jasno se vidi na slici 580.

II slučaj: Prava p sadrži dva nesusedna temena, recimo B i D. Tada su tačke A i C simetrične u odnosu na pravu p, pa se određivanje tačaka A i C vrši kao u **zadatku 1237**, sl. 581.

1418. Centar traženog kruga je na simetrali s datog ugla. Konstruišemo neki krug k_1 koji dodiruje krake datog ugla. Zatim, odredimo tačke A_1 i A_1' na krugu k_1 tako da je OA seče k_1 u

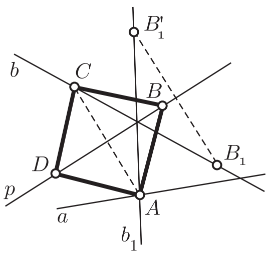


Sl. 579

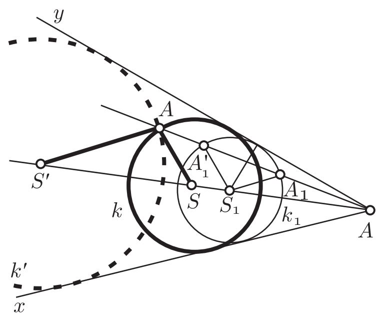


Sl. 580

tačkama A_1 i A'_1. Postoje dva kruga k i k', koji su homotetični sa k_1, sa centrom homotetije O i sadrže tačku A, sl. 582. Ova dva kruga predstavljaju rešenja zadatka. Dokaz se izvodi lako, na osnovu homotetičnosti sa k_1.

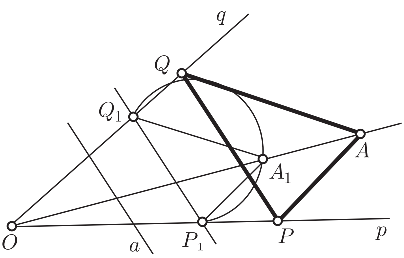


Sl. 581

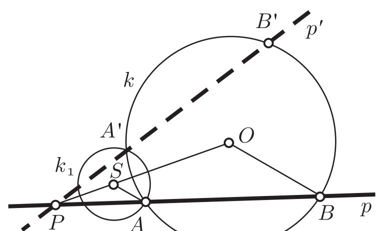


Sl. 582

1419. Na kracima datog ugla konstruišemo tačke P_1 i Q_1, tako da je $P_1Q_1 \parallel a$. Zatim, konstruišemo skup svih tačaka iz kojih se duž P_1Q_1 vidi pod datim uglom α. Prava OA seče ovaj skup u tački A_1. Traženi trougao APQ homotetičan je trouglu $A_1P_1Q_1$ (centar homotetije je teme O datog ugla) i konstruiše se kao na slici 583.



Sl. 583



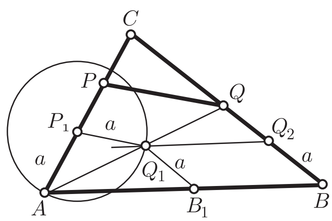
Sl. 584

1420. Neka je S tačka duži OP takva da je $AS \parallel BO$. Tada je $SA : OB = PA : PB$, tj. $SA : OB = 1 : 3$. Kako je i $PS : PO = 1 : 3$, izlazi da je tačka S, koja se lako konstruiše, sl. 584, centar kruga k_1 homotetičnog sa datim krugom, pri čemu je centar homotetije tačka P i koeficijent $k = \dfrac{1}{3}$. Iz ovog rasuđivanja lako je izvući zaključak o načinu konstruisanja sečice p. Zadatak može imati jedno ili dva rešenja, ili neće imati rešenja, što zavisi od preseka $k_1 \cap k$.

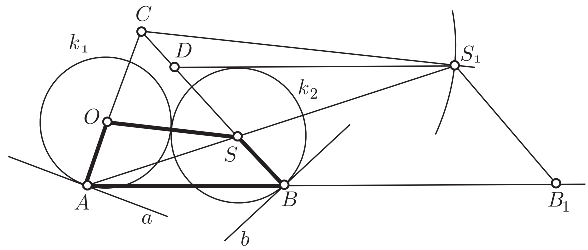
1421. Slično **zadatku 1418**. Centar homotetije je presek prave t i simetrale duži AB.

1422. Konstruišemo pravu a_1 paralelnu sa a i pravu b_1, paralelnu sa b, tako da rastojanje između paralelnih pravih bude jednako poluprečniku datog kruga. Krug koji sadrži centar datog kruga i dodiruje prave a_1 i b_1 (konstruiše se kao u **zadatku 1418**) koncentričan je sa traženim krugom.

1423. Na stranicama AC i BC datog trougla odredimo tačke P_1 i Q_2 tako da je $AP_1 = BQ_2$. Prava kroz Q_2, paralelna stranici AB i krug k sa centrom P_1 i poluprečnikom AP_1, seku se u tački Q_1, tako da se duž P_1Q_1 preslikava u traženu duž PQ homotetijom čiji je centar teme A, sl. 585.



Sl. 585



Sl. 586

1424. Neka su a i b prave, k_1 i k_2 traženi krugovi, sl. 586. Neka se normale OA i BS na date prave seku u C. Zadatak liči na prethodni. Treba na stranicama AC i BC trougla ABC odrediti tačke O i S tako da je $OA = SB$ i $OS = OA + SB$. Stoga ćemo konstruisati najpre četvorougao AB_1S_1C, homotetičan sa $ABSO$, sa centrom homotetije A. U tom cilju najpre odredimo tačku D, $D \in BC$, tako da je $BD = AC$, pa kroz D konstruišemo pravu paralelnu sa AB. Zatim konstruišemo krug sa centrom C i poluprečnikom $AC + BD$. Presek ove prave i kruga određuje tačku S_1 itd.

1425. Slično prethodnom zadatku. Tačka D određuje se tako da je $AC : BD = m : n$ itd.

1426. Slični su svi trouglovi: na slici 49 – jer imaju jednak jedan ugao i proporcionalne stranice koje zahvataju taj ugao, 50 – iz istih razloga kao 49, 51– imaju jednaka dva ugla.

1427. a) Trouglovi ne mogu biti slični jer nemaju jednakih uglova.

b) Slični su jer su im uglovi jednaki.

c) Dati trouglovi su jednakokraki. Slični su ako date stranice zahvataju ugao od 40°.

1428. a) $\triangle PAC \sim \triangle QBC$ i $\triangle ABQ \sim \triangle ACR$. b) Iz sličnosti trouglova BCQ i ACP dobijamo: $\dfrac{z}{x} = \dfrac{n}{m+n}$. c) Iz sličnosti trouglova ABQ i ACR proizlazi: $\dfrac{z}{y} = \dfrac{m}{m+n}$. d) Sabirajući ispravne jednakosti b) i c) dobićemo: $\dfrac{z}{x} + \dfrac{z}{y} = \dfrac{n}{m+n} + \dfrac{m}{m+n} = \dfrac{n+m}{m+n}$, odnosno $\dfrac{z}{x} + \dfrac{z}{y} = 1$. Ako ovu jednakost podelimo sa z, dobićemo $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{z}$.

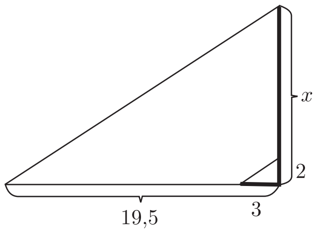
1429. Pravougli trouglovi PST i PQR imaju jednake uglove: $\sphericalangle S = \sphericalangle Q$ (pravi uglovi) i $\sphericalangle STP = \sphericalangle QPR$ (sa normalnim kracima), pa je $\triangle PST \sim \triangle RQP$. Odavde sledi:
$ST : PS = PQ : RQ$, odakle je $ST \cdot RQ = PS \cdot PQ$.

1430. a) $\sphericalangle BFC = \sphericalangle ADC = 90^\circ$ i $\sphericalangle BCF = \sphericalangle ACD$ kao uglovi sa normalnim kracima ($BC \perp AC$ i $CF \perp CD$).

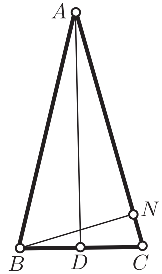
b) Iz sličnosti trouglova BFC i ADC sledi: $BF : BC = AD : AC$, a odavde je
$BF \cdot AC = BC \cdot AD$.

1431. Prema slici 587 iz sličnih pravouglih trouglova dobijamo $x : 19,5 = 2 : 3$, a odavde je $x = 13$. (Pretpostavljamo da su Sunčevi zraci u svakom momentu paralelni.)

1432. Koristimo sličnost trouglova pri kojoj se dve odgovarajuće stranice odnose kao $1 : 500000$. Dakle, $AB = 3$ cm, $AC = 4$ cm i $BC = 2$ cm.



Sl. 587



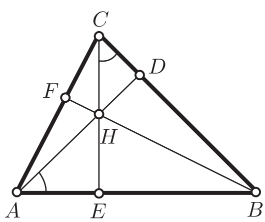
Sl. 588

1433. Na osnovu osobina sličnih trouglova je $a : c = h_c : h_a$, odnosno $a : c = 16 : 12$, pa pošto je dati trougao jednakokraki $a : b : c = 16 : 16 : 12$. Skraćivanjem razmere na desnoj strani jednakosti dobijamo $a : b : c = 4 : 4 : 3$. Pošto je obim sličnog trougla 22, a $4 + 4 + 3 = 11$, sledi da su stranice sličnog trougla 8, 8 i 6.

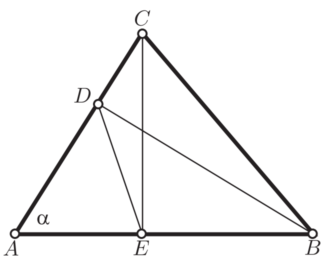
1434. Na osnovu poznatih osobina je $a : b = h_b : h_a$ i $a : c = h_c : h_a$, odnosno $a : b = 2 : 3$ (1) i $a : c = 4 : 3$ (2). Proširujući desnu razmeru proporcije (1) sa 2, dobijamo $a : b = 4 : 6$. Prema tome $a : b : c = 4 : 6 : 3$. Stranice dužina 4, 6, 3 zadovoljavaju nejednakosti trougla, što znači da ovakav trougao postoji.

1435. Iz sličnih trouglova ABD i BCN, sl. 588, imamo proporciju $BC : CN = AB : BD$, pa kako je $AB = 4BD$, biće $BC : CN = 4 : 1$. Zamenimo $BC = \frac{1}{2}AC$ i dobijamo $\frac{1}{2}AC : CN = 4 : 1$, odakle je $AC : CN = 8 : 1$. Odavde sledi da je $AN = 7CN$.

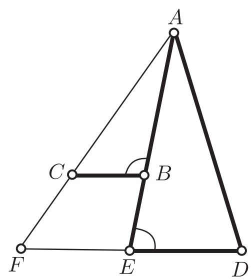
1436. Pravougli trouglovi AEH i CDH su slični, sl. 589, jer su oštri uglovi EAH i DCH jednaki, kao uglovi sa normalnim kracima, odakle je $AH : EH = CH : DH$, a odavde je $AH \cdot DH = CH \cdot EH$. Slično se dokazuje da je $AH \cdot DH = BH \cdot FH$.



Sl. 589



Sl. 590



Sl. 591

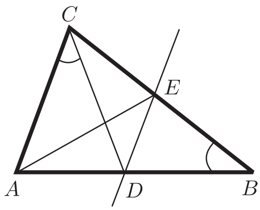
1437. Iz sličnosti trouglova ABD i ACE dobija se traženi zaključak.

1438. Pravougli trouglovi ABD i ACE imaju zajednički oštar ugao α, pa su slični. Prema tome $AB : AD = AC : AE$, a odavde $AB : AC = AD : AE$. Dakle, trouglovi ABC i ADE su slični jer imaju zajednički ugao α, a stranice koje zahvataju ovaj ugao proporcionalne su, sl. 590.

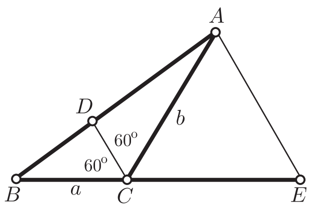
1439. Na osnovu prethodnog zadatka je $\sphericalangle ADE = \sphericalangle ABC = \sphericalangle ABD + \sphericalangle CBD$. Međutim, $\sphericalangle ABD = \sphericalangle ACE$ jer su im odgovarajući kraci normalni, sl. 590.

1440. Postavimo date trouglove kao što su na slici 591 trouglovi ABC i ADE tako da je AE simetrala ugla DAF. (Po pretpostavci su uglovi ABC i AED suplementni, pa je $BC \parallel DE$.) Prema osobini simetrale ugla je $AD : AF = DE : EF$, ili $AD : DE = AF : EF$. Međutim, zbog $BC \parallel DE$ je $AF : EF = AC : BC$, pa je $AD : DE = AC : BC$ ili $BC : DE = AC : AD$, što se i tvrdilo.

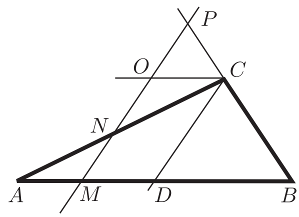
1441. Trouglovi ABC i ACD su slični jer imaju zajednički ugao BAC i po uslovu $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ACD$, sl. 592. Otuda je $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AD}$, odnosno $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{AD}$ (jer je $AC = BD$). Kako je AE simetrala ugla BAC, važi: $\frac{AB}{AC} = \frac{BE}{CE}$, pa je $\frac{BD}{AD} = \frac{BE}{CE}$. Dalje važi: $\frac{BD + AD}{BD} = \frac{BE + CE}{BE}$, tj. $\frac{BA}{BD} = \frac{BC}{BE}$ i $AC \parallel DE$, po obrnutoj Talesovoj teoremi.



Sl. 592



Sl. 593

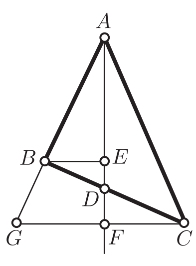


Sl. 594

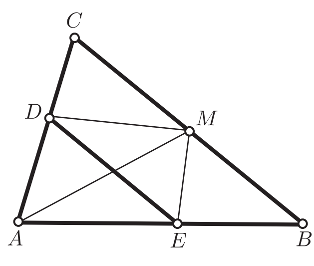
1442. Neka je E tačka prave BC takva da je $AE \parallel CD$, sl. 593. Trougao AEC je jednakostranični, a trouglovi BCD i BEA su slični i iz proporcionalnosti njihovih stranica dobijamo $d(C, D) = \frac{ab}{a + b}$.

1443. Neka je O tačka duži NP takva da je $CO \parallel AB$, sl. 594. Iz sličnosti trouglova OCP i DBC je $OP : OC = CD : BD$, odakle je $OP = \frac{OC \cdot CD}{\frac{AB}{2}}$. Slično iz $\triangle OCN \sim \triangle DAC$ dobijamo $ON = \frac{OC \cdot CD}{\frac{AB}{2}}$, pa je $OP = ON$. Dalje je $MN + PM = MN + MN + ON + OP = 2MO = 2CD$, jer je $MOCD$ paralelogram i $MO = CD$.

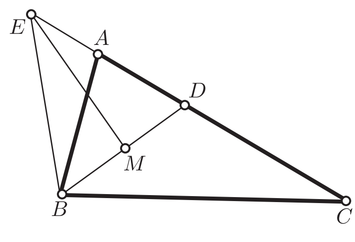
1444. Označimo sa G presek pravih AB i CF. Tada je $AG = AC$, sl. 595. Trouglovi BDE i CDF su slični. Otuda imamo: $AE : AF = AB : AG = AB : AC$ i $AB : AC = BD : DC$. Kako je $BD : CD = DE : DF$, zaključujemo da je $AE : AF = DE : DF$, a odavde $AE \cdot DF = AF \cdot DE$.



Sl. 595



Sl. 596



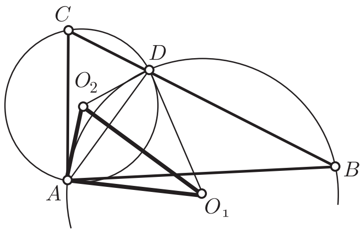
Sl. 597

1445. Koristeći osobine simetrale ugla dobijamo proporcije $BE : AE = MB : MA$ i $CD : DA = CM : AM = BM : AM$, sl. 596, odakle je $BE : AE = CD : DA$ i odavde je $(BE + AE) : AE = (CD + DA) : AD$, odnosno $AB : AE = AC : AD$. Po prvom stavu sličnosti zaključujemo da je $\triangle ABC \sim \triangle AED$.

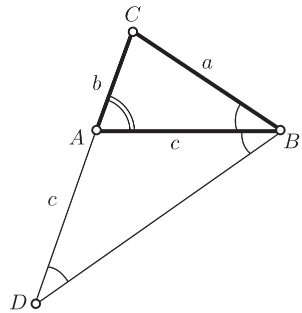
1446. Ugao ABD jednak je uglu između tangente i stranice AB (naizmenični uglovi), pa je $\sphericalangle ABD = \sphericalangle ACB$ i trouglovi ABC i ADB su slični itd.

1447. Trougao BDE je jednakokraki, pa je $\sphericalangle EBD = \sphericalangle BDE$, a prema uslovu je i $\sphericalangle ABD = \sphericalangle DBC$, sl. 597. Iz trougla BCD je $\gamma = \sphericalangle BDE - \sphericalangle DBC = \sphericalangle EBD - \sphericalangle ABD = \sphericalangle ABE$. Prema tome, $\triangle ABE \sim \triangle BCE$. Otuda je $BE : CE = AE : BE$, odnosno, zbog $BE = DE$ je $DE : CE = AE : DE$.

1448. Centralni ugao AO_1D dva puta je veći od ugla β (β je periferijski ugao nad istom tetivom, sl. 598). Kako je $\sphericalangle AO_1O_2$ polovina ugla AO_1D, sledi da je $\sphericalangle AO_1O_2 = \beta$. Na isti način se dokazuje da je $\sphericalangle AO_2O_1 = \gamma$. Dakle, $\triangle AO_1O_2 \sim \triangle ABC$.



Sl. 598

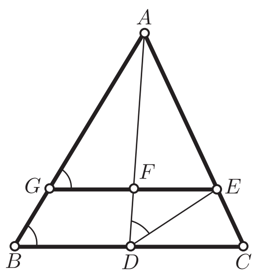


Sl. 599

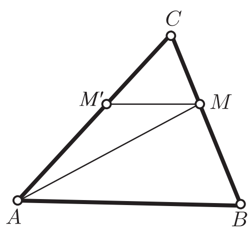
1449. Dokažimo najpre: $a^2 = b(b+c) \Rightarrow \alpha = 2\beta$. Neka je D tačka prave AC takva da je $C - A - D$ i $AD = c$. Tada je trougao ADB jednakokraki, pa je $\sphericalangle ADB = \sphericalangle ABD$, sl. 599. Iz $a^2 = b(b+c)$ dobijamo: $a : b = (b+c) : a$, a prema slici 599 to daje proporciju $BC : CA = CD : BC$. Trouglovi ABC i BDC imaju zajednički ugao γ, pa su prema prvom stavu slični. Zbog toga je $\sphericalangle BDC = \beta = \sphericalangle ABD$, što daje jednakost: $\sphericalangle CBD = 2\beta$, a otuda i $\alpha = 2\beta$.

Obrnuto, treba dokazati: $\alpha = 2\beta \Rightarrow a^2 = b(b+c)$. Na pravoj AC konstruišimo tačku D, tako da je $\sphericalangle CBD = \alpha = 2\beta$. Tada su trouglovi ABC i BDC slični. Sem toga, zbog $\alpha = \sphericalangle ADB + \sphericalangle ABD = 2\beta$ i $\sphericalangle ABD = \beta$, sledi da je $\sphericalangle BDC = \beta$, pa je trougao ABD jednakokraki i $AD = c$, tj. $CD = b+c$. Sada iz sličnosti trouglova ABC i BDC dobijamo traženi zaključak.

1450. Neka je G tačka na stranici AB takva da je $EG \parallel BC$, sl. 600. Tada je $\triangle EDF \sim \triangle AGF$, jer je $\sphericalangle AGE = \sphericalangle ABC = \sphericalangle ADE$, pa je $FE : FD = FA : FG$, odakle je $FE \cdot FG = FA \cdot FD$. Pošto je AD težišna linija, biće $GF = FE$, pa je $FE^2 = FA \cdot FD$.



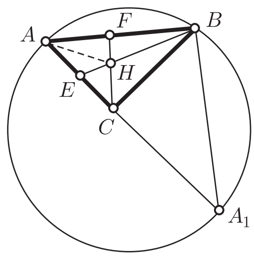
Sl. 600



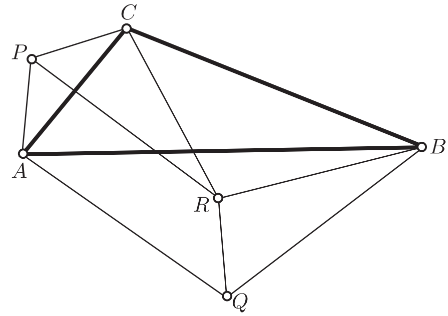
Sl. 601

1451. Označimo sa M' tačku na stranici AC takvu da je $MM' \parallel AB$, sl. 601. Jasno je da su trouglovi CMM' i CBA slični, pa važi $\dfrac{MM'}{AB} = \dfrac{CM}{BC}$, tj. $MM' \cdot BC = AB \cdot MC$ (1) i $\dfrac{CA}{CB} = \dfrac{CM'}{CM}$ odakle je $\dfrac{CA}{CB} = \dfrac{CA - CM'}{CA - CM} = \dfrac{AM'}{BM}$, tj. $CA \cdot BM = CB \cdot AM'$ (2). Sabiranjem (1) i (2) dobijamo $CB \cdot AM' + MM' \cdot BC = CA \cdot BM + AB \cdot MC$ (3). U trouglu AMM' je $AM \leq AM' + M'M$, odakle množenjem sa BC dobijamo $AM \cdot BC \leq AM' \cdot BC + MM' \cdot BC = AB \cdot MC + AC \cdot MB$. Znak jednakosti važi ako i samo ako je $M \equiv M'$, tj. $M \equiv C$.

1452. Označimo sa H zajedničku tačku visine CF i težišne linije BE, sl. 602. Dokazaćemo da je AH simetrala ugla BAC. Ugao ABA_1 je prav (nad prečnikom), pa je $CF \parallel A_1B$. Zbog toga $EH : HB = EC : CA_1$, odakle je $EH : HB = AE : AB$. Na osnovu osobina simetrale ugla zaključujemo da je $\sphericalangle EAH = \sphericalangle HAB$.



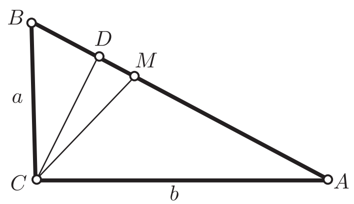
Sl. 602



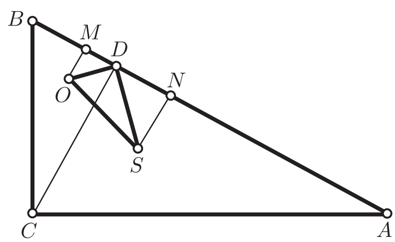
Sl. 603

1453. Zbog $\sphericalangle PBA = \sphericalangle CBR$ biće $\sphericalangle PBR = \sphericalangle ABC$, pa kako je $PB : AB = BR : BC$, sledi da je $\triangle PBR \sim \triangle ABC$. Slično se dokazuje i da je $\triangle CQR \sim \triangle ABC$. Sada imamo: $\sphericalangle APR = \sphericalangle APB - \sphericalangle BPR = \sphericalangle APR - \sphericalangle BAC$. Zbog toga je $\sphericalangle APR + \sphericalangle PAQ = \sphericalangle APB + 2\sphericalangle PAB = 180^\circ$. Dakle, $PR \parallel AQ$. Slično se dokazuje i da je $AP \parallel QR$, sl. 603.

1454. Prema osobini simetrale ugla imamo $AC : BC = AM : MB$, odnosno $b : a = m : n$. (Sa CM označili smo simetralu ugla, a sa CD visinu.) Trougao ACD sličan je trouglu ABC, sl. 604, pa je $AD : b = b : c$, odakle je $AD = \dfrac{b^2}{c}$. Slično dobijamo $BD = \dfrac{a^2}{c}$, pa je $AD : BD = \dfrac{b^2}{c} : \dfrac{a^2}{c} = a^2 : b^2$, odnosno $AD : BD = m^2 : n^2$.



Sl. 604

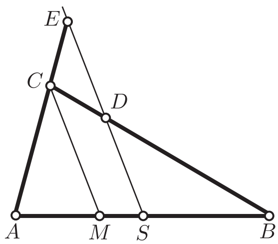


Sl. 605

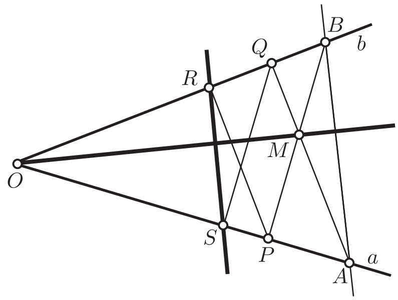
1455. Neka su M i N podnožja normala iz O i S na hipotenuzu AB. Duži OM i SN su poluprečnici pomenutih upisanih krugova. Kako su trouglovi BCD i CAD slični, to su im poluprečnici upisanih krugova proporcionalni stranicama, $OM : SN = a : b$, sl. 605. Trouglovi OMD i SND su jednakokraki pravougli, pa su slični. Zbog toga je $OD : SD = OM : SN$, odnosno $OD : SD = a : b$. Kako je $\sphericalangle ODS = 90^\circ$, trougao SOD je pravougli, pa $\triangle SOD \sim \triangle ABC$ po prvom stavu sličnosti.

1456. Na osnovu Talesove teoreme je $\dfrac{AE}{AC} = \dfrac{AS}{AM}$ i $\dfrac{BC}{BD} = \dfrac{BM}{BS}$. (Na slici 606 sa M je označen kraj simetrale ugla, a sa S središte stranice AB.) Iz osobina simetrale ugla je $\dfrac{AC}{BC} = \dfrac{AM}{BM}$. Množenjem dve poslednje jednakosti dobijamo $\dfrac{AC}{BD} = \dfrac{AM}{AS}$, odakle zbog $AS = BS$ dobijamo:

$\dfrac{AC}{BD} = \dfrac{AM}{AS}$. Sada ovu jednakost pomnožimo sa prvom i imamo jednakost: $\dfrac{AE}{BD} = 1$, odakle vidimo da je $AE = BD$.



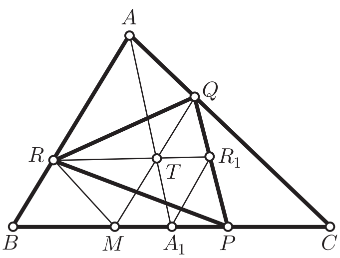
Sl. 606



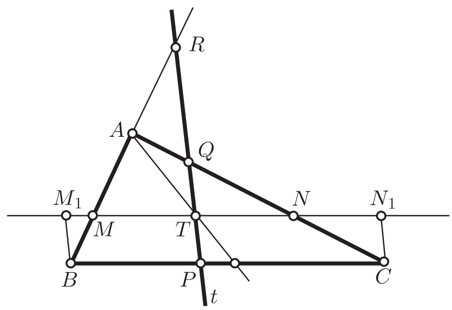
Sl. 607

1457. Označimo sa A presek prave MQ sa polupravom Oa i sa B presek poluprave Ob sa MP, sl. 607. Zbog $AQ \parallel PR$ je $OP : OR = OA : OQ$, a zbog $BP \parallel QS$ je $OB : OP = OQ : OS$. Pomnožimo ove dve jednakosti i dobićemo $OB : OR = OA : OS$. Na osnovu toga zaključujemo da je $AB \parallel RS$. Međutim, u trouglu OAB tačka M je ortocentar (presek visina AQ i BP), pa je $OM \perp AB$ a sami tim je $OM \perp RS$.

1458. Neka je T zajednički presek težišnih linija AA_1 i RR_1. Dokazaćemo da je T zajedničko težište trouglova ABC i PQR. Neka je M tačka stranice BC takva da je $BM = PC$, sl. 608. Zbog $BM = PC$ je i $CM = BP$, pa je $CM : BM = CQ : QA$. Otuda je $(CM + BM) : CM = (CQ + QA) : CQ$, odnosno $CB : CM = CA : CQ$. Dakle, $MQ \parallel AB$. Slično se dokaže da je i $RM \parallel AC$, pa je $MQ = AR$. U trouglu MQP je A_1R_1 srednja linija, pa je $A_1R_1 = \dfrac{MQ}{2} = \dfrac{AR}{2}$ i $A_1R_1 \parallel MQ$. Dakle, trouglovi ART i A_1R_1T su slični i $AT : TA_1 = AR : A_1R_1 = 2 : 1$, a takođe i $RT : TR_1 = AR : A_1R_1 = 2 : 1$, što je i trebalo dokazati.



Sl. 608



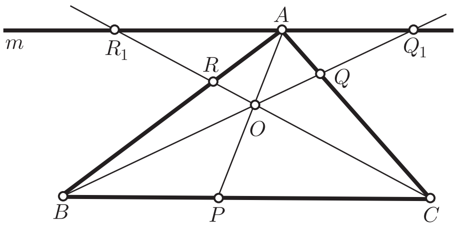
Sl. 609

1459. Neka je p prava kroz težište paralelna stranici BC, koja seče stranice AB i AC u tačkama M i N, sl. 609. Na pravoj p odredimo tačke M_1 i N_1, tako da su prave BM_1 i CN_1 paralelne sa t. Koristeći osobine paralelograma i sličnih trouglova, dobijamo $TP : TQ = NN_1 : TN$ i $TP : TR = MM_1 : TM$, odakle sledi da je $\dfrac{TP}{TQ} + \dfrac{TP}{TR} = \dfrac{NN_1}{TN} + \dfrac{MM_1}{TM} = 1$ (jer je $TM = TN$), a odavde je $\dfrac{1}{TQ} + \dfrac{1}{TR} = \dfrac{1}{TP}$.

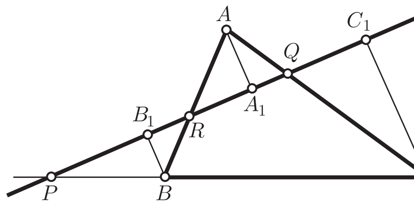
1460. Neka je m prava kroz A paralelna sa BC i neka su Q_1 i R_1 tačke u kojima prave BQ i CR seku pravu m, sl. 610.

Uslov je potreban, jer ako prave AP, BQ i CR imaju zajedničku tačku O, tada je $\frac{BP}{PC} = \frac{Q_1A}{AR_1} \cdot \frac{CQ}{QA} = \frac{BC}{AQ_1}$, $\frac{AR}{RB} = \frac{AR_1}{BC}$. Množenjem ovih jednakosti dobijamo: $\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1$.

Dokažimo da je *uslov dovoljan*. Pretpostavimo da je O zajednička tačka pravih BQ i CR i neka je P' presečna tačka prave AO i prave BC. Tada prema dokazanom delu teoreme sledi: $\frac{BP'}{P'C} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1$, pa kako po pretpostavci važi uslov $\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1$, zaključujemo da je $\frac{BP'}{P'C} = \frac{BP}{PC}$. Odavde na osnovu osobina proporcija je: $(BP' + P'C) : BP' = (BP + PC) : BP$, odnosno $BC : BP' = BC : BP$. Sledi da je $BP' = BP$, pa se tačke P i P' poklapaju, tj. prave AP, BQ i CR se seku u O. Slično zaključujemo u slučaju paralelnih pravih AP, BQ i CR.



Sl. 610

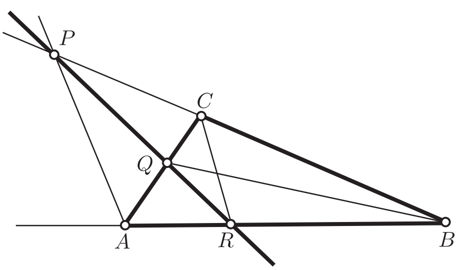


Sl. 611

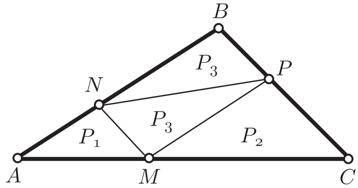
1461. *Uslov je potreban*, jer ako tačke P, Q, R pripadaju jednoj pravoj p i ako su A_1, B_1, C_1 podnožja normala iz A, B, C na p, tada je: $\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} = -\frac{BB_1}{CC_1}$, $\frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} = -\frac{CC_1}{AA_1}$, $\frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = -\frac{AA_1}{BB_1}$, pa dobijamo (sl. 611) $\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = -\frac{BB_1}{CC_1} \cdot \frac{CC_1}{AA_1} \cdot \frac{AA_1}{BB_1} = -1$.

Dokaz da je *uslov dovoljan* izvodimo slično prethodnom zadatku.

1462. Prema osobinama simetrala uglova dobijamo proporcije: $\frac{BP}{PC} = \frac{AB}{AC}$, $\frac{CQ}{QA} = \frac{BC}{AB}$, $\frac{AR}{RB} = \frac{AC}{BC}$. Kad pomnožimo ove proporcije dobićemo $\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1$, pa su tačke P, Q, R na osnovu prethodnog zadatka kolinearne, sl. 612.



Sl. 612

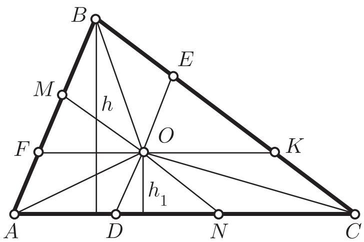


Sl. 613

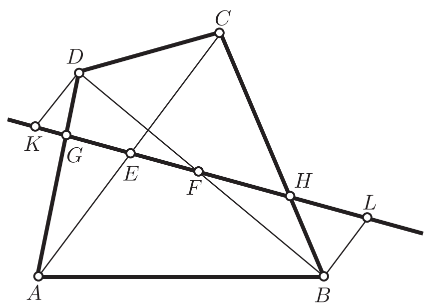
1463. Koristimo sliku iz rešenja **zadatka 1072**. Jednake su tangentne duži: $AT_3 = AT_2$, $BT_1 = BT_3$ i $CT_1 = CT_2$. Kad primenimo Čevijevu teoremu (zadatak 1470) dobićemo: $\frac{BT_1}{T_1C} \cdot \frac{CT_2}{T_2A} \cdot \frac{AT_3}{T_3B} = 1$, pa prave AT_1, BT_2 i CT_3 imaju zajedničku tačku.

1464. Neka je P površina trougla ABC, a P_3 tražena površina. Četvorougao $MPBN$ je paralelogram, sl. 613, pa je $2P_3 = P - P_1 - P_2$. Trouglovi AMN i MCP su slični sa trouglom ABC, pa uz oznake $AM = x$ i $MC = y$, imamo proporcije: $P_1 : P = x^2 : (x+y)^2$, ili $\sqrt{P_1} : \sqrt{P} = x : (x+y)$ i slično $\sqrt{P_2} : \sqrt{P} = y : (x+y)$. Iz ovih jednakosti dobijamo: $\frac{\sqrt{P_1}}{\sqrt{P}} + \frac{\sqrt{P_2}}{\sqrt{P}} = \frac{x}{x+y} + \frac{y}{x+y}$, odnosno $\frac{\sqrt{P_1}+\sqrt{P_2}}{\sqrt{P}} = 1$, odakle je $P = (\sqrt{P_1}+\sqrt{P_2})^2 = P_1 + P_2 + 2\sqrt{P_1P_2}$. Dakle, $2P_3 = 2\sqrt{P_1P_2}$, odnosno $P_3 = \sqrt{P_1P_2}$.

1465. Neka je h visina trougla ABC na stranicu AC i h_1 odgovarajuća visina trougla AOC. Kako je $2P = AC\cdot h$ i $2P_1 = AC\cdot h_1$, to je $\frac{P_1}{P} = \frac{h_1}{h}$, gde je P površina trougla ABC, a P_1 površina trougla AOC. Iz sličnih trouglova ABC i DON dobijamo: $\frac{h_1}{h} = \frac{DO}{AB} = \frac{AF}{AB}$, jer je $DO = AF$, sl. 614. Otuda je $\frac{P_1}{P} = \frac{AF}{AB}$. Slično, ako površine trouglova BOC i AOB označimo sa P_2 i P_3, dobićemo: $\frac{P_2}{P} = \frac{CN}{CA}$ i $\frac{P_3}{P} = \frac{BE}{BC}$. Sabiranjem ove tri jednakosti, zbog uslova $P = P_1 + P_2 + P_3$, dobijamo $\frac{AF}{AB} + \frac{BE}{BC} + \frac{CN}{CA} = \frac{P_1}{P} + \frac{P_2}{P} + \frac{P_3}{P} = 1$.



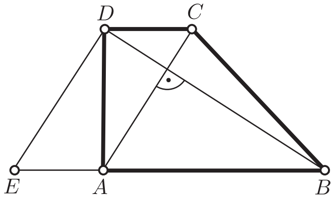
Sl. 614



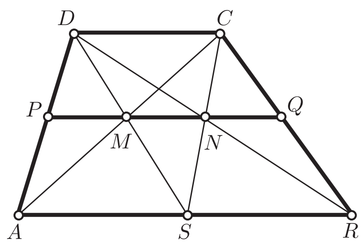
Sl. 615

1466. Neka su E i F središta dijagonala AC i BD i neka prava EF seče AD u G i BC u H, sl. 615. Odredimo tačke K i L na pravoj EF takve da je $DK \parallel AC$ i $BL \parallel AC$. Tada su trouglovi DFK i BFL podudarni pa je $DK = BL$. Zbog toga, iz proporcija $AG : GD = AE : KD$ i $CH : HB = CE : BL$, dobijamo traženu proporciju $AG : GD = CH : HB$.

1467. Na pravoj AB odredimo tačku E, tako da $B - A - E$ i $AE = CD$, sl. 616. Tada su pravougli trouglovi ADE i ABD slični pa je $AB : AD = AD : AE$, odakle je
$AD^2 = AB \cdot AE = AB \cdot CD$.



Sl. 616



Sl. 617

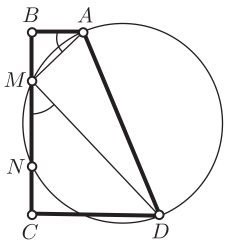
1468. Na osnovu rezultata iz **zadatka 1428**, biće: $\frac{1}{EO} = \frac{1}{BC} + \frac{1}{AD}$ i $\frac{1}{OF} = \frac{1}{BC} + \frac{1}{AD}$, odnosno $EO = \dfrac{1}{\frac{1}{BC} + \frac{1}{AD}}$ i $OF = \dfrac{1}{\frac{1}{BC} + \frac{1}{AD}}$. Sabiranjem ovih jednakosti dobijamo traženi zaključak, jer je $EO + OF = EF$.

1469. Iz sličnosti trouglova AMS i CMD sledi $SM : DM = AS : CD$, tj. $SM : DM = \frac{a}{2} : b$, sl. 617. Slično, iz trouglova BNS i CDN dobijamo $SN : CN = \frac{a}{2} : b$. Odavde sledi $SM : DM = SN : CN$. Zbog toga, na osnovu obrnute Talesove teoreme, proizlazi da je $MN \parallel CD$. Dokažimo još i da je $MN = NQ = MP$. Zbog paralelnosti duži AB i MQ izlazi da je $AS : MN = AC : CM$, a takođe i $AB : MQ = AC : CM$. Sledi da je $AB : MQ = AS : MN$, odnosno $AB : AS = MQ : MN$. Međutim, $AB : AS = 2 : 1$, pa je i $MQ : MN = 2 : 1$ i zbog toga $MN = NQ$. Slično dokazujemo i da je $PM = MN$.

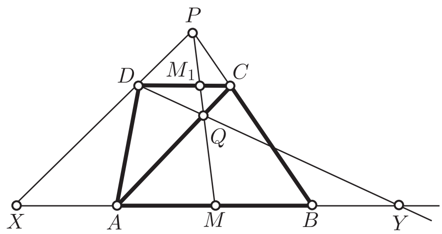
1470. Neka je MN prečnik normalan na osnovice. Tražena jednakost dobija se iz sličnih trouglova AMO i OND, gde je O centar kruga. (Ugao AOD je prav.)

1471. Neka je $AC \perp BC$. Tada su trouglovi ABC i CAD slični itd.

1472. Ugao AMD je prav, jer je konstruisan nad prečnikcm AD (sl. 618). Zbog toga je $\sphericalangle BAM = \sphericalangle CMD$ (sa normalnim kracima), pa su pravougli trouglovi ABM i MCD slični i $BM : AB = CD : MC$. Odavde je $BM \cdot MC = AB \cdot CD$.



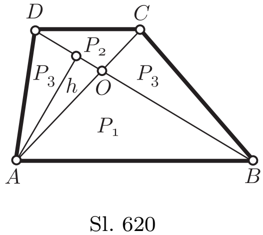
Sl. 618



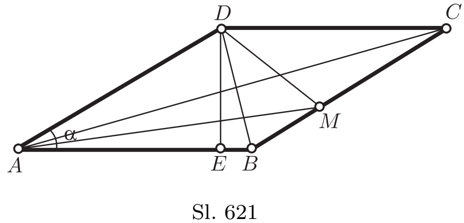
Sl. 619

1473. Sa M_1 označimo presečnu tačku pravih PM i CD. Tvrđenje zadatka sledi iz sledećeg niza jednakosti: $\frac{MY}{M_1D} = \frac{MQ}{QD} = \frac{AQ}{QC} = \frac{AM}{M_1C} = \frac{MB}{M_1C} = \frac{PM}{PM_1} = \frac{MX}{M_1D}$, sl. 619. Kod prve tri jednakosti korišćena je činjenica da je $AB \parallel CD$, a kod četvrte podatak da je $AM = MB$.

1474. Neka se dijagonale trapeza $ABCD$ seku u tački O, sl. 620. Označimo puvršinu trougla ABO sa P_1, a površinu trougla CDO sa P_2. Trouglovi ABC i ABD imaju jednake površine (zajednička osnovica AB i jednake visine) i zajednički deo P_1. Otuda zaključujemo da su površine trouglova AOD i BOC jednake – označimo ih sa P_3. Trouglovi ABO i ADO imaju zajedničku visinu h, pa je $P_1 : P_3 = BO : OD$. Slično dokazujemo i da je $P_3 : P_2 = BO : OD$, odakle je $P_1 : P_3 = P_3 : P_2$ i dobijamo: $P_3 = \sqrt{P_1P_2}$. Prema tome, površina trapeza je $P = P_1 + P_2 + 2P_3 = P_1 + P_2 + 2\sqrt{P_1P_2} = (\sqrt{P_1} + \sqrt{P_2})^2$.



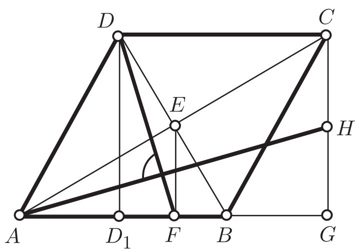
Sl. 620



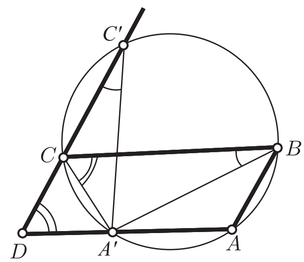
Sl. 621

1475. Koristeći osobine simetrale ugla u trouglu dobićemo proporcije: $BM : MC = BA : AC$ i $BM : MC = BD : CD$, odnosno $BA : AC = BD : CD$ ili: $a^2 = d_1 \cdot d_2$. Znamo da je $d_! \cdot d_2 = 2P = 2ah$, pa je $a^2 = 2ah$, odnosno $a = 2h$. Iz trougla ADE, sl. 621, dobijamo $\alpha = 30^\circ$, pa je $\beta = 150^\circ$.

1476. Primetimo da je E središte duži DE, pa je F središte duži D_1B, gde je D_1 podnožje normale iz D na pravu AB, sl. 622. Trouglovi DD_1B i AGC su slični. Sve odgovarajuće stranice su im među sobom normalne, pa su i odgovarajuće težišne linije AH i DF među sobom normalne.



Sl. 622

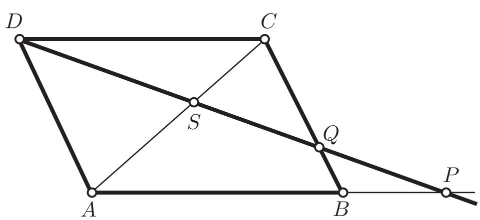


Sl. 623

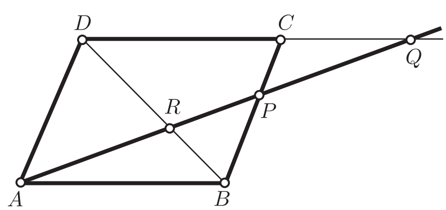
1477. Uglovi $A'BC$ i $A'C'C$ jednaki su jer su periferijski nad tetivom $A'C$, sl. 623. Četvorougao $A'ABC$ je tetivni pa je $\sphericalangle A'CB$ suplementan sa uglom $A'AB$. Međutim, $\sphericalangle D$ je takođe suplementan sa $\sphericalangle A'AB$ (susedni uglovi paralelograma), pa je $\sphericalangle D = \sphericalangle A'CB$. Dakle, trouglovi $A'BC$ i $A'C'D$ su slični. Zbog toga važi proporcija $A'B : A'C = A'C' : A'D$.

1478. Neka je G tačka dijagonale AC takva da je $DG \parallel BE$. Tada je $AF : AG = AE : AD = 1 : 4$, pa je $AF = \dfrac{AG}{4}$. Sem toga, trouglovi ABF i CDG su podudarni ($AB = CD$ i jednaki uglovi), pa je $CG = AF$. Otuda sledi da je $AF = \dfrac{AC}{5}$.

1479. Iz $AD \parallel BC$ sledi: $DS : SQ = AS : SC = AD : CQ$, a iz $AB \parallel CD$ zaključujemo $DS : SP = CS : AS = CD : AP$. Sada iz $DS : SQ = AS : SC$ i $DS : SP = CS : AS$ zaključujemo $DS : SQ = SP : DS$, odakle je $DS^2 = SP \cdot SQ$, sl. 624. Iz $\dfrac{AS}{SC} = \dfrac{AD}{CQ}$ i $\dfrac{CS}{AS} = \dfrac{CD}{AP}$, i njihovim množenjem dobijamo: $1 = \dfrac{AD}{CQ} \cdot \dfrac{CD}{AP}$, odnosno $AP \cdot CQ = AD \cdot CD$. Ovaj proizvod ima stalnu vrednost za dati paralelogram, jer su AD i CD stranice tog paralelograma.



Sl. 624

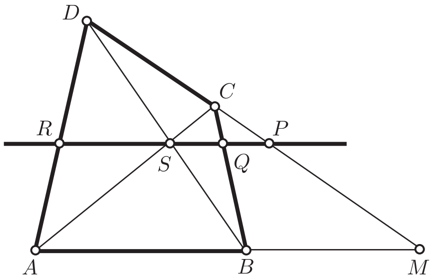


Sl. 625

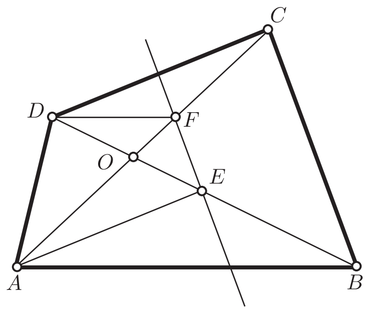
1480. Iz $AD \parallel BC$ dobijamo $AR : RP = DR : RB$, odnosno: $(AR + RP) : AR = (DR + RB) : DR$, tj. $AP : AR = BD : DR$. Odavde je $AR = \dfrac{AP \cdot DR}{BD}$. Slično, na osnovu $AB \parallel CD$ zaključujemo da je $AR : AQ = RB : BD$, odakle, na osnovu prethodne jednakosti, dobijamo $\dfrac{AP \cdot DR}{BD} : AQ = RB : BD$, a odavde $AP : AQ = RB : DR$. Ako ovu proporciju uporedimo sa

prvom, dobićemo $PR : AR = AP : AQ$, a odavde je $\dfrac{1}{AQ} = \dfrac{PR}{AR \cdot AP} = \dfrac{AP - AR}{AR \cdot AP} = \dfrac{1}{AR} - \dfrac{1}{AP}$.
Konačno je: $\dfrac{1}{AR} = \dfrac{1}{AR} + \dfrac{1}{AQ}$, sl. 625.

1481. Označimo sa M presečnu tačku pravih AB i CD, slika 626. Tada je $SQ : QP = AB : BM$. Sem toga je i $RS : SP = AB : BM$. Otuda sledi da je $SQ : QP = RS : SP$. Dalje je $(SQ + QP) : QP = (RS + SP) : SP$, odnosno $SP : QP = RP : SP$, ili $SP^2 = QP \cdot RP$.



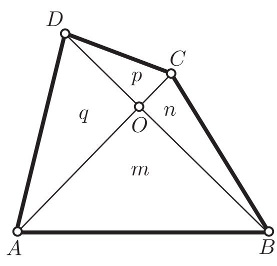
Sl. 626



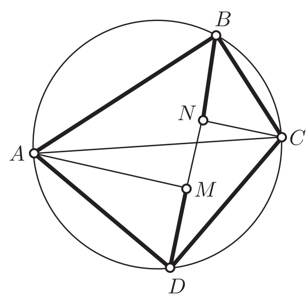
Sl. 627

1482. Neka je O presek dijagonala. Trouglovi AOB i FOD, AOE i COD su slični (uglovi su im ili unakrsni ili sa paralelnim kracima), pa su im odgovarajuće stranice proporcionalne, sl. 627, $\dfrac{AO}{OB} = \dfrac{FO}{OD}$ i $\dfrac{OE}{AO} = \dfrac{OD}{CO}$. Množenjem ovih jednakosti dobijamo $\dfrac{AO}{OB} \cdot \dfrac{OE}{AO} = \dfrac{FO}{OD} \cdot \dfrac{OD}{CO}$, odnosno $\dfrac{OE}{OB} = \dfrac{FO}{CO}$, a to je potrebno i dovoljno da bude $EF \parallel BC$.

1483. Neka su m, n, p i q površine (redom) trouglova AOB, BOC, COD i DOA na koje dijagonale AC i BD dele dati konveksni četvorougao $ABCD$, sl. 628. Kako trouglovi AOB i BOC imaju zajedničku visinu iz temena B, to je $m : n = AO : OC$. Slično je $q : p = AO : OC$. Odatle $m : n = q : p$, odnosno $mnpq = (mp)^2$, čime je tvrđenje dokazano, jer je mp ceo broj.



Sl. 628

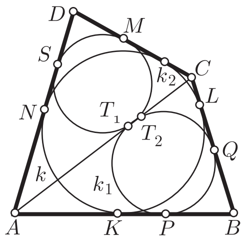


Sl. 629

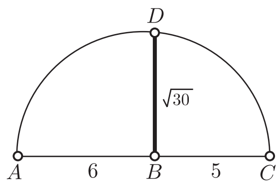
1484. Zbir uglova kod B i D iznosi 180°, pa se oko četvorougla $ABCD$ može opisati krug. Otuda sledi da je $\sphericalangle ADM = \sphericalangle ACB$, pa su pravougli trouglovi ABC i AMD slični. (Na slici 629 duži DM i BN su projekcije stranica AD i BC na dijagonalu BD.) Otuda važi jednakost $MD : AD = BC : AC$, a odavde $MD = \dfrac{AD \cdot BC}{AC}$. Slično, iz trouglova BCN i ACD dobijamo da je $BN = \dfrac{AD \cdot BC}{AC}$. Prema tome, $MD = BN$.

1485. a) Koristeći se jednakošću tangentnih duži, tj. iz $AT = AP$, $BP = BQ$ i $CQ = CT$ izračunamo: $AT = \dfrac{1}{2}(AB + AC - BC)$, gde su T, P i Q dodirne tačke stranica trougla ABC sa upisanim krugom, sl. 630. Slično, ako je T_1 dodirna tačka dijagonale AC sa upisanim krugom trougla ACD, dobijamo $AT_1 = \dfrac{1}{2}(AC + AD - CD)$. Dakle, $|AT - AT_1| = \dfrac{1}{2}\Big|AB + AC - BC - (AC + AD - CD)\Big| = \dfrac{1}{2}\Big|(AB + CD) - (BC + AD)\Big| = 0$, jer je četvorougao $ABCD$ tangentni. Sledi da je $T = T_1$ i krugovi k i k_1 se dodiruju u tački T.

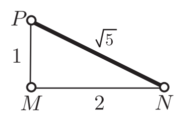
b) Neka su K, L, M, N dodirne tačke stranica datog četvorougla sa upisanim krugom k. Tada je, npr. $AK = AN$. Kako je $AP = AT$ i $AT = AS$, to je $AP = AS$. Dakle, $AK : AP = AN : AS$, pa na osnovu obrnute Talesove teoreme je $PS \parallel KN$. Slično se dokaže da su i ostale stranice četvorougla $PQRS$ paralelne odgovarajućim stranicama tetivnog četvorougla $KLMN$. Sledi da su uglovi ovih četvorouglova jednaki, pa je i četvorougao $PQRS$ tetivni.



Sl. 630



Sl. 631

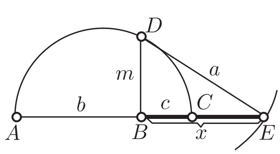


Sl. 632

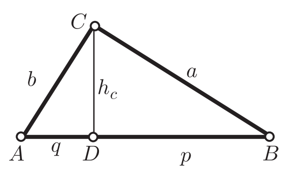
1486. Na slikama 631 i 632 prikazane su konstrukcije duži čije su dužine $\sqrt{30}$ i $\sqrt{5}$. Na slici 631 konstruisane su duži $AB = 6$ i $BC = 5$. Zatim je nad prečnikom AC konstruisan polukrug i normala BD. Kako je trougao ACD pravougli, a BD je hipotenuzina visina, to je $BD = \sqrt{AB \cdot BC} = \sqrt{30}$.

Na slici 632 dobili smo $\sqrt{5}$. Konstruisan je pravougli trougao sa katetama $MN = 2$ i $MP = 1$. Prema Pitagorinoj teoremi je $NP^2 = MN^2 + MP^2$, odnosno $NP = \sqrt{5}$. Slično se postupa i u ostalim slučajevima.

1487. Na slici 633 konstruisana je duž c), tj. duž: $\sqrt{a^2 - bc}$. Najpre su konstruisane duži $AB = b$ i $BC = a$, a zatim polukrug prečnika AC i normala BD. Slično prethodnom zadatku, $m^2 = b \cdot c$. Koristeći dobijenu duž m, sveli smo zadatak na konstrukciju duži $\sqrt{a^2 - m^2}$, a to je kateta pravouglog trougla kome je kateta $BD = m$ i hipotenuza $DE = a$. Tražena duž je $x = BE$. Slično postupamo i u ostalim slučajevima. Na primer, u slučaju d) ako konstruišemo $m^2 = ac$ i $n^2 = bd$, konstrukcija se svodi na $\sqrt{m^2 + n^2}$ itd.



Sl. 633



Sl. 634

1488. Koristimo Pitagorinu teoremu i veze: $h^2 = p \cdot q$, $a^2 = c \cdot p$ i $b^2 = c \cdot q$. Na primer, u slučaju b) najpre iz pravouglog trougla ACD izračunamo q^2, sl. 634, $q^2 = b^2 - h_c^2 = 0,64 - 0,2034 = 0,4096$, pa je $q = 0,64$. Dalje, iz $h_c^2 = p \cdot q$ dobijamo: $0,2304 = 0,64p$, odakle je $p = 0,36$. Znamo da je $c = p + q$, pa je $c = 1$ i na kraju $a^2 = c^2 - b^2 = 1 - 0,64 = 0,36$, pa je $a = 0,6$. Postupajući slično i u ostalim slučajevima dobijamo rezultate:

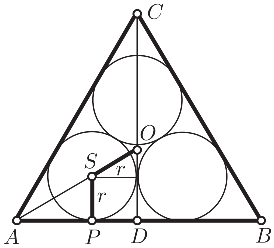
a) $\{25,\ 18{,}75,\ 31,25,\ 15,\ 20,\ 11,25\}$; c) $\{65,\ 156,\ 169,\ 60,\ 25,\ 144\}$;

d) $\{16,\ \ 12,\ \ 20,\ \ 9,6,\ \ 12,8,\ \ 7,2\}$; e) $\left\{5,\ \ 12,\ \ 13,\ \ \frac{60}{13}, \frac{25}{13}, \frac{144}{13}\right\}$;

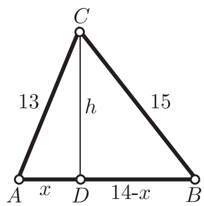
f) Imamo $p+q=20$ i $p \cdot q=64$, odakle je $p=16$ i $q=4$ (ili obrnuto). Dalje je $a^2=20 \cdot 16$, odnosno $a=8\sqrt{5}$ i slično $b=4\sqrt{5}$; g) $\{0,15,\ \ 0,2,\ \ 0,25,\ \ 0,12,\ \ 0,09,\ \ 0,16\}$.

1489. a) Iz pravouglog trougla ACD, sl. 635, izračunamo visinu CD: $h^2=a^2-\left(\frac{a}{2}\right)=\frac{3}{4}a^2$, odakle je $h=\frac{a\sqrt{3}}{2}$. b) Trouglovi ADO i APS su slični, pa je $AD:DO=AP:PS$, odnosno $\frac{a}{2}:\frac{h}{3}=\left(\frac{a}{2}-r\right):r$. Zamenimo $h=\frac{a\sqrt{3}}{2}$ i rešavanjem po r dobijamo $r=\frac{a}{4}(\sqrt{3}-1)$.

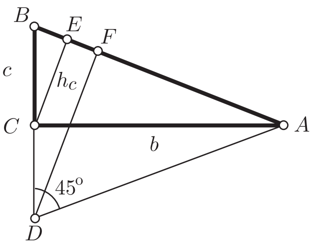
1490. Iz pravouglog trougla ACD, sl. 636, je $h^2=13^2-x^2$, a iz pravouglog trougla BCD je $h^2=15^2-(14-x)^2$, odakle je $13^2-x^2=15^2-(14-x)^2$. Odavde dobijemo $x=5$. Prema tome $h^2=13^2-5^2=144$, pa je $h=12$.



Sl. 635



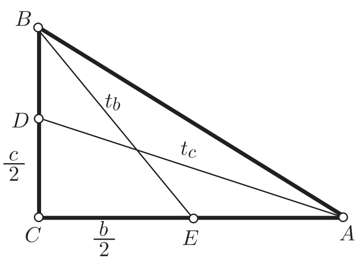
Sl. 636



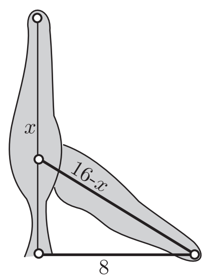
Sl. 637

1491. Neka je D tačka takva da je $\triangle ACD \cong \triangle ACB$. Tada je $\sphericalangle BAD=45^\circ$, sl. 637. Ako je $DF \perp AB$, tada je trougao ADF pravougli jednakokraki i zbog $AD=AB=20$, biće $DF=10\sqrt{2}$. Hipotenuzina visina CE datog trougla je srednja linija trougla BDF, pa je $h_c=CE=5\sqrt{2}$. Sada slično **zadatku 1488** f) odredimo dužine kateta a i b. Imamo: $p \cdot q=h_c^2=50$ i $p+q=c=20$. Dalje možemo postupiti ovako: iz $(p+q)^2=400$ sledi $p^2+2pq+q^2=400$, odnosno $p^2-2pq+q^2=200$ (oduzmemo $4p \cdot q=200$), pa je $(p-q)^2=200$, tj. $p-q=10\sqrt{2}$. Sada iz $p+q=20$ i $p-q=10\sqrt{2}$, dobijamo: $p=10+5\sqrt{2}$ i $q=10-5\sqrt{2}$. Dalje, $a^2=c \cdot p$ pa je $a=10\sqrt{2+\sqrt{2}}$ i $b^2=cq$ i $b=10\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

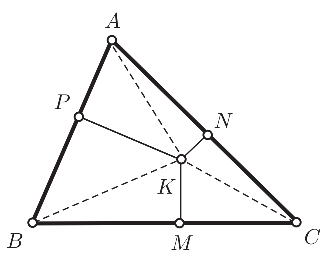
1492. U pravouglom trouglu je hipotenuza dva puta veća od svoje težišne linije. Na slici 638 uočimo pravougle trouglove ACD i BCE. Računamo: $t_a^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2+b^2$ i $t_b^2=a^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2$, odakle dobijamo: $t_a^2+t_b^2=\frac{5}{4}(a^2+b^2)=\frac{5}{4}c^2=\frac{5}{4}(2t_c)^2=5t_c^2$.



Sl. 638



Sl. 639

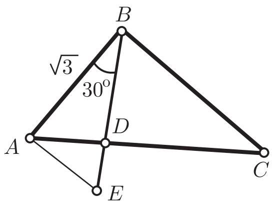


Sl. 640

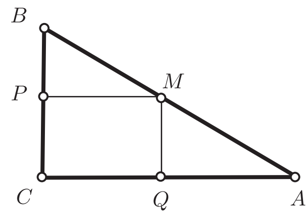
1493. Prema slici 639 je $x^2+8^2=(16-x)^2$. Odavde je $x=6$. Stablo se polomilo na visini od 6 m.

1494. Prema slici 640 imamo: $AP^2=AK^2-KP^2$, $BM^2=BK^2-KM^2$ i $CN^2=CK^2-KN^2$. Saberemo ove tri jednakosti. Dobijamo: $AP^2+BM^2+CN^2=AK^2+BK^2+CK^2-KP^2-KM^2-KN^2=(AK^2-KN^2)+(CK^2-KM^2)+(BK^2-KP^2)=AN^2+CM^2+BP^2$.

1495. Neka je ABC dati pravougli trougao, D tačka hipotenuze takva da je $AD:DB=1:2$, sl. 641. Neka je E tačka prave BD takva da je $\sphericalangle BAE=90°$. Tada je trougao ABE polovina jednakostraničnog trougla i zbog $AB=\sqrt{3}$ imamo da je $AE=1$ i $BE=2$. Trouglovi ADE i CDB su slični, pa je $BC:AE=CD:AD=2:1$, odakle je $BC=2$. Konačno $AC=\sqrt{7}$.



Sl. 641



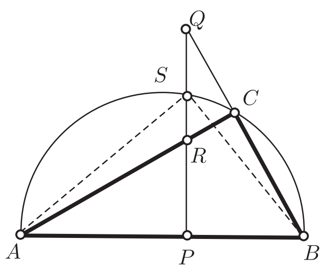
Sl. 642

1496. Koristimo teoremu obrnutu Pitagorinoj teoremi: $(a+b)^2+h_c^2=a^2+b^2+2ab+h_c^2=c^2+2ch_c+h_c^2=(c+h_c)^2$. (Koristili smo uslov $2P=a\cdot b=c\cdot h_c$.)

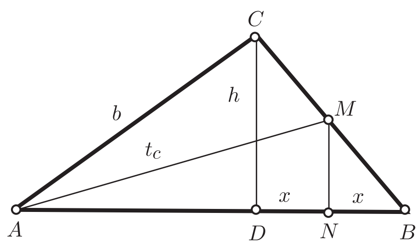
1497. Trouglovi BMP i MAQ su slični datom trouglu BAC, sl. 642. Otuda je $BP:BM=BC:AB$ i $AQ:AM=AC:AB$, pa imamo $\dfrac{BP^2}{BM^2}+\dfrac{AQ^2}{AM^2}=\dfrac{BC^2}{AB^2}+\dfrac{AC^2}{AB^2}=\dfrac{BC^2+AC^2}{AB^2}=1$.

1498. Iz formula za površinu pravouglog trougla sledi: $2P=c\cdot h_c=a\cdot b$. Odavde je $c^2h_c^2=a^2b^2$. Zamenimo $c^2=b^2+a^2$ i dobijemo: $b^2h_c^2+a^2h_c^2=a^2b^2$. Kad poslednju jednakost podelimo sa $a^2b^2h_c^2$ dobićemo traženi uslov.

1499. Trougao ASB je pravougli, pa je $SP^2=AP\cdot PB$, sl. 643. Sem toga, trouglovi APR i QPB su slični, pa je $PQ:PB=AP:PR$, odakle je $AP\cdot PB=PQ\cdot PR$. Zbog toga je $SP^2=PQ\cdot PR$.



Sl. 643

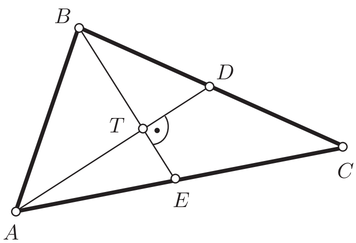


Sl. 644

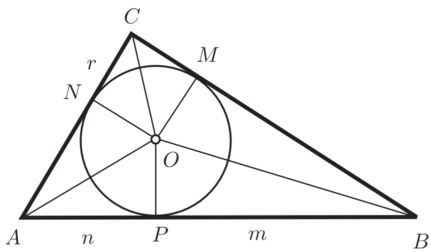
1500. Neka je $t_a=AM$ težišna linija trougla ABC, sl. 644. Tačka M je središte duži BC, pa je normala MN na AB srednja linija pravouglog trougla BCD. Stoga je $MN=\dfrac{1}{2}CD=\dfrac{h}{2}$ i $BN=x$, $BD=2x$. Iz jednakosti: $AC^2-AD^2=h^2=BC^2-BD^2$, dobijamo: $b^2-(c-2x)^2=a^2-(2x)^2$. Odavde je $x=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{4c}$ (1). Zatim, iz jednakosti $AM^2-AN^2=BM^2-BN^2=MN^2$, dobijamo: $t_a^2-(c-x)^2=\left(\dfrac{a}{2}\right)-x^2$, odakle je $t_a^2=c^2-2cx+\dfrac{a^2}{4}$. Sada ovde zamenimo x

iz (1) i dobijemo: $t_a^2 = \dfrac{2b^2+2c^2-a^2}{4}$. Konačno je: $t_a = \dfrac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}$. Slično se dobija: $t_b = \dfrac{1}{2}\sqrt{2c^2+2a^2-b^2}$ i $t_c = \dfrac{1}{2}\sqrt{2a^2+2c^2-c^2}$.

1501. Na pravougle trouglove ATE, ABT i BTD, sl. 645 primenimo Pitagorinu teoremu i pošto se oslobodimo razlomaka dobijamo: $16x^2+4y^2=b^2$, $4x+4y^2=c^2$ i $4x^2+16y^2=a^2$. Zbir prve i treće jednakosti uporedimo sa drugom i dobijamo: $20x^2+20y^2=a^2+b^2=5c^2$. Odavde je $c^2 = \dfrac{(a^2+b^2)}{5}$. Nejednakosti trougla, primenjene na naš trougao daju: $5(a+b)^2 > a^2+b^2$ (uvek tačno) i $5(a-b)^2 < a^2+b^2$. Druga nejednakost daje: $\left(\dfrac{a}{b}\right)^2 - \dfrac{5}{2}\cdot\dfrac{a}{b}+1<0$, a ovo možemo napisati u obliku: $\left(\dfrac{a}{b}-2\right)\left(\dfrac{a}{b}-\dfrac{1}{2}\right)<0$. Prema tome $\dfrac{1}{2}<\dfrac{a}{b}<2$ je uslov za egzistenciju stranice c.



Sl. 645



Sl. 646

1502. Prema slici 403, datoj u rešenju **zadatka 1111**), u trouglu ATT_1 je duž $AC_1 = \dfrac{c}{2}$ težišna linija, a stranice su $AT = \dfrac{2}{3}t_a$, $AT_1 = \dfrac{2}{3}t_b$, $TT_1 = \dfrac{2}{3}t_c$. Sada primenimo rezultat iz **zadatka 1500** i dobijamo $c = \dfrac{2}{3}\sqrt{2t_a^2+2t_b^2-t_c^2}$. Sličnim izračunavanjem dobijamo i ostale stranice: $a = \dfrac{2}{3}\sqrt{2t_b^2+2t_c^2-t_a^2}$ i $b = \dfrac{2}{3}\sqrt{2t_a^2+2t_c^2-t_b^2}$. Koristeći se ovim rezultatima ili rešenjem **zadatka 1500**, dobićemo: $(t_a^2+t_b^2+t_c^2):(a^2+b^2+c^2)=3:4$.

1503. Ako stranice izrazimo preko dužina težišnih linija kao u prethodnom zadatku, uzimajući da je p dužina hipotenuzine težišne linije, dobijamo: $c=2p$, $a^2 = \dfrac{4}{9}(2n^2+2p^2-m^2)$ i $b^2 = \dfrac{4}{9}(2m^2+2p^2-n^2)$ i $m^2+n^2=5p^2$. Pod ovim uslovima važi jednakost: $a^2+b^2=c^2$. Zaista: $a^2+b^2 = \dfrac{4}{9}(m^2+n^2+4p^2) = \dfrac{4}{9}(5p^2+4p^2) = 4p^2 = (2p)^2 = c^2$. Prema tome, trougao je pravougli.

Koristeći prethodni rezultat dobićemo: $(\sqrt{52})^2+(\sqrt{73})^2 = 125 = 5\cdot(5)^2$. Dakle, trougao je pravougli.

1504. Pretpostavimo da je $h_a=12$, $h_b=15$, $h_c=20$. Tada, prema osobinama sličnih trouglova imamo: $a:b=h_b:h_a=15:12$, tj. $a:b=5:4$. Slično dobijamo: $a:c=5:3$, pa je $a:b:c=5:4:3$. Znači, naš trougao je sličan nekom trouglu sa stranicama dužina 3, 4 i 5, a ovaj je pravougli jer je $3^2+4^2=5^2$.

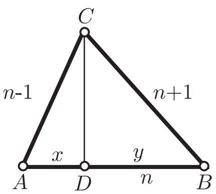
1505. Slično prethodnom zadatku: $h_1:h_2=a_2:a_1$, $h_1:h_3=a_1:a_3$, pa dati uslov dobija izgled (a_1, a_2, a_3 su stranice trougla): $\left(\dfrac{a_2}{a_1}\right)^2+\left(\dfrac{a_3}{a_1}\right)^2=1 \Rightarrow \dfrac{a_2^2}{a_1^2}+\dfrac{a_3^2}{a_1^2}=1 \Rightarrow a_2^2+a_3^2=a_1^2$, pa je trougao pravougli. (Obrnuta Pitagorina teorema)

1506. Iz $a+b=8$ i $a^2+b^2=25$ dobija se: $a^2+(8-a)^2=25$, a ova jednakost se može transformisati u: $2a^2-16a+32=-7$, odnosno: $2(a-4)^2=-7$, što nije moguće. Dakle, dužina hipotenuze ne može biti 5.

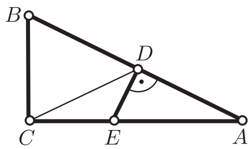
1507. Dokaz da je *uslov potreban.* Ako je trougao pravougli, tada je njegova površina $P = \dfrac{ab}{2}$. Međutim, poznato je da se površina izražava preko poluobima i poluprečnika upisanog kruga: $P = r \cdot s$, gde je s poluobim. Obim trougla na slici 646 je $2s = 2m + 2n + 2r$. Pođimo sada od jednakosti: $a \cdot b = (m + r)(n + r) = mn + r(m + n + r)$, odakle je $a \cdot b = m \cdot n + r \cdot s$ ili $2P = m \cdot n + P$. Konačno dobijamo $P = mn$, odnosno $a \cdot b = 2m \cdot n$, ili $BC \cdot AC = 2AP \cdot PB$.

Dokažimo da je *uslov dovoljan.* Neka je $AC \cdot BC = 2AP \cdot PB$. Uočimo da je $BC - AC = BM + MC - (AN + NC) = BP + r - (AP + r) = BP - AP$. Odavde je $(BC - AC)^2 = (BP - AP)^2$, tj. $BC^2 - 2BC \cdot AC + AC^2 = BP^2 - 2AP \cdot BP + AP^2$. Kako važi uslov $AC \cdot BC = 2AP \cdot BP$, zamenićemo $2BC \cdot AC$ sa $4AP \cdot BP$, pa dobijamo: $BC^2 + AC^2 = BP^2 + 2AP \cdot BP + AP^2$, odnosno $BC^2 + AC^2 = (BP + AP)^2 = AB^2$, pa je trougao ABC pravougli (Obrnuta Pitagorina teorema).

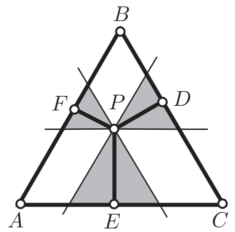
1508. Neka je $h = CD$ visina koja odgovara srednjoj po veličini stranici AB i neka su x i y odsečci na koje tačka D deli stranicu AB, sl. 647. Dužine stranica AC, AB, BC označimo redom sa $n - 1$, n, $n + 1$. Tada je $x + y = n$. Iz pravouglih trouglova ACD i BCD na osnovu Pitagorine teoreme dobijamo jednakosti: $(n-1)^2 - y^2 = h^2$ i $(n+1)^2 - x^2 = h^2$, odakle dobijamo: $(n-1)^2 - y^2 = (n+1)^2 - x^2$. Poslednju jednakost možemo napisati kao $x^2 - y^2 = (n+1)^2 - (n-1)^2$, a odavde je: $(x - y)(x + y) = 4n$. Kako je $x + y = n$, biće: $x - y = 4$.



Sl. 647



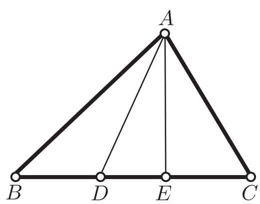
Sl. 648



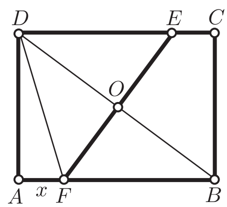
Sl. 649

1509. Hipotenuza je dva puta veća od svoje težišne linije: $AB = 40$ cm, sl. 648. U pravouglom trouglu ADE katete su $DE = 15$ cm i $AD = \dfrac{1}{2}AB = 20$ cm, pa je hipotenuza $AE = 25$ cm (Pitagorina teorema). Trougao AED je sličan trouglu ABC, pa je $AE : AD = AB : AC$, odnosno $25 : 20 = 40 : AC$. Odavde je $AC = 32$ cm. Na kraju je $BC = 24$ cm.

1510. Kroz tačku P povučemo tri prave paralelne sa stranicama trougla. Tako dobijemo tri jednakostranična trougla (na sl. 649 osenčena), kojima je zbir stranica jednak stranici $AC = a$ datog trougla. Prema tome i zbir njihovih visina jednak je visini datog trougla: $PD + PE + PF = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Zbir duži $BD + CE + AF$ sastoji se iz tri stranice osenčenih trouglova i još polovine svake od tih stranica: $BD + CE + AF = \dfrac{3}{2}a$. Dakle: $\dfrac{PD + PE + PF}{BD + CE + AF} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.



Sl. 650



Sl. 651

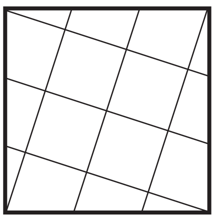
1511. Neka je E podnožje visine iz A na BC, sl. 650. Sada iz dobijenih pravouglih trouglova računamo: $AB^2 = BE^2 + AE^2 = (BD + DE)^2 + AE^2$, $AC^2 = CE^2 + AE^2 = (CD - DE)^2 + AE^2$, $AD^2 = DE^2 + AE^2$. Sada izračunamo levu stranu date jednakosti: $AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot BD -$

$AD^2 \cdot BC$, tako što zamenimo AB^2, AC^2, AD^2, oslobodimo se zagrada i sredimo. Dobijamo: $(DE^2 + AE^2)(DC + BD - BC) + DC \cdot BD^2 + BD \cdot DC^2$. Pošto je $DC + BD = BC$, ostaje $DC \cdot BD^2 + BD \cdot DC^2 = DC \cdot BD(BD + DC) = BC \cdot DC \cdot BD$.

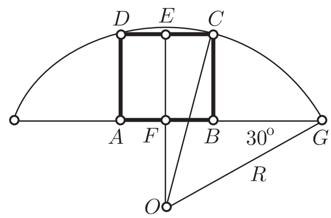
1512. Neka je O presečna tačka dijagonala. Tada je OM zajednička težišna linija trouglova A_1A_3M i A_2A_4M. Primenimo rezultat iz **zadatka 1500** itd.

1513. Neka je presavijanje izvršeno po duži EF, sl. 651. Prava EF je simetrala dijagonale BD, pa kako je $BD = 20$ cm, to je $BO = OD = 10$ cm. Ako je $AF = x$, tada je $DF = BF = 16 - x$, pa iz pravouglog trougla ADF dobijamo: $(16-x)^2 - x^2 = 12^2$. Odavde nalazimo da je $x = 3,5$ cm, pa je $BF = 12,5$ cm. Sada iz pravouglog trougla BOF izračunavamo: $OF^2 = 12,5^2 - 10^2 = 56,25$, pa je $OF = 7,5$ cm, a tražena duž $EF = 15$ cm.

1514. Stranica datog kvadrata je $\sqrt{10}$, a to je hipotenuza trougla sa katetama 3 i 1. Otuda dobijemo rešenje prikazano na slici 652. Četiri pločice ostaju cele.



Sl. 652

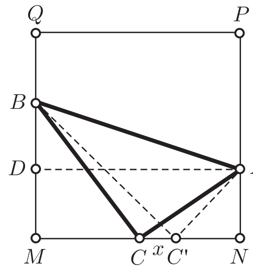


Sl. 653

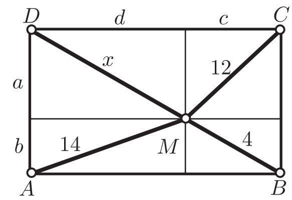
1515. Označimo dužinu stranice kvadrata sa $2x$. Tada, prema slici 653, imamo $OE^1 = R^2 - x^2$ i $OF = \dfrac{R}{2}$, pa je $EF = \sqrt{R^2 - x^2} - \dfrac{R}{2}$. S druge strane je $EF = 2x$, pa imamo jednačinu $R^2 - x^2 = \left(\dfrac{R}{2} + x\right)^2$, koja se može napisati kao $5x^2 + 2Rx = \dfrac{3}{4}R^2$, odnosno: $x^2 + \dfrac{2}{5}Rx + \dfrac{1}{25}R^2 = \dfrac{3}{20}R^2 + \dfrac{1}{25}R^2$. Odavde je $\left(x + \dfrac{1}{5}R\right)^2 = \dfrac{19R^2}{100}$, pa je $x + \dfrac{1}{5}R = \dfrac{R\sqrt{19}}{10}$, odnosno $x = \dfrac{R(\sqrt{19} - 2)}{10}$. Sada zamenimo: $R = 2 + \sqrt{19}$ i dobijemo $x = \dfrac{3}{2}$. Stranica kvadrata je 3.

1516. Pretpostavimo da tačku C treba pomeriti u položaj C' da bi trougao ABC', sl. 654, bio pravougli. Neka je $x = CC'$ duž koju treba odrediti. Neka je, dalje, D središte duži MB. Tada je $BD = \dfrac{1}{3} = AN$ i $MC = NC = \dfrac{1}{2}$. Uočimo pravougle trouglove: ABD, ANC', MBC' i ABC'. Iz njih izračunavamo: $AB^2 = 1 + \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 = \dfrac{10}{9}$, $AC'^2 = \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{2} - x\right)^2$ i $BC'^2 = \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{2} + x\right)^2$. U trouglu ABC' je AB hipotenuza, pa imamo uslov $AC'^2 + BC'^2 = AB^2$. Koristeći prethodne jednakosti dobićemo $\dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{4} - x + x_2 + \dfrac{4}{9} + \dfrac{1}{4} + x + x^2 = \dfrac{10}{9}$, a odavde je $2x^2 = \dfrac{1}{18}$, odnosno $x^2 = \dfrac{1}{36}$. Sledi da je $x = \dfrac{1}{6}$, a može biti i $x = -\dfrac{1}{6}$, što znači da tačku C treba pomeriti levo ili desno za $\dfrac{1}{6}$.

1517. Traži se rastojanje od M do D. Neka su dužine označene kao na slici 655. Primenjući Pitagorinu teoremu, dobijamo $x^2 = a^2 + d^2$, $a^2 = 144 - c^2$, $d^2 = 196 - b^2$ i $c^2 = 16 - b^2$. Vršeći zamene u prvoj jednačini dobijamo $x^2 = 144 - c^2 + 196 - b^2 = 144 - 16 + b^2 + 196 - b^2 = 324$, pa je $x = 18$. Česma je od temena D udaljena 18 m.

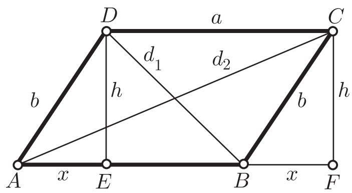


Sl. 654

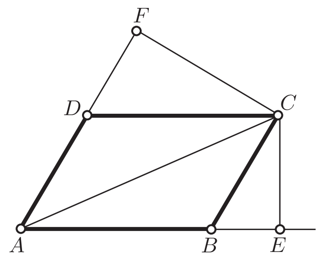


Sl. 655

1518. Prema sl. 656 je $d_1^2 = (a+x)^2 + h^2$, pa kako je $h^2 = b^2 - x^2$, to zamenom dobijamo $d_1^2 = (a+x)^2 + b^2 - x^2 = a^2 + b^2 + 2ax$ (1). Iz trougla BDE izračunamo $d_2^2 = b^2 + a^2 - 2ax$ (2). Sabiranjem jednakosti (1) i (2) dobijamo: $d_1^2 + d_2^2 = a^2 + a^2 + b^2 + b^2$.



Sl. 656



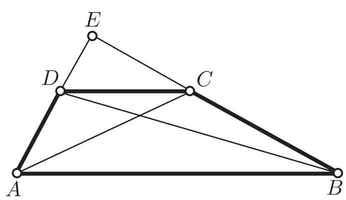
Sl. 657

1519. Koristeći se pravouglim trouglovima ACE i BCE, sl. 657, dobijamo $CE^2 = AC^2 - AE^2$ i $CE^2 = BC^2 - (AE - AB)^2$. Eliminisanjem CE^2 dobijamo: $AC^2 - AE^2 = BC^2 - (AE - AB)^2$. Sličnim postupkom iz trouglova ACF i CDF dobijamo jednakost: $AC^2 - AF^2 = CD^2 - (AF - AD)^2$. Sabiranjem dveju poslednjih jednačina i sređivanjem dobijamo

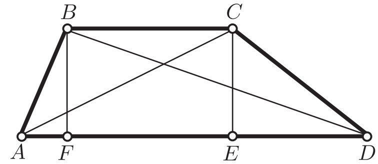
$$2AC^2 - AE^2 - AF^2 = BC^2 - AE^2 + 2AE \cdot AB - AB^2 + CD^2 - AF^2 + 2AF \cdot AD - AD^2.$$

Kako je $AD = BC$ i $CD = AB$, ostaje $2AC^2 = 2AE \cdot AB + 2AF \cdot AD$, odakle posle skraćivanja sa 2 dobijmo traženu jednakost.

1520. Po pretpostavci ugao AEB je prav, sl. 658. Iz trougla ACE na osnovu Pitagorine teoreme je $AC^2 = AE^2 + CE^2$, a iz trougla BDE je $BD^2 = BE^2 + DE^2$. Sabiranjem ovih jednakosti dobijamo: $AC^2 + BD^2 = (AE^2 + BE^2) + (CE^2 + DE^2)$. Međutim, iz pravouglih trouglova ABE i CDE imamo $AE^2 + BE^2 = AB^2$ i $CE^2 + DE^2 = CD^2$. Zamenjujući izraze u zagradama dobijamo $AC^2 + BD^2 = AB^2 + CD^2$.



Sl. 658

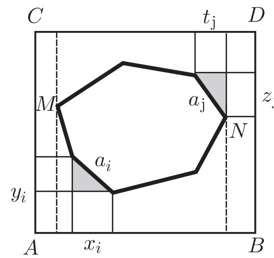


Sl. 659

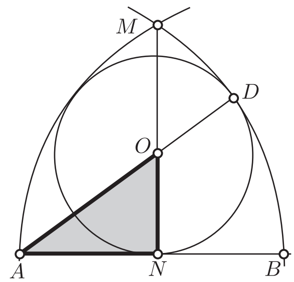
1521. Neka su CE i DF visine trapeza $ABCD$, sl. 659. Imamo $AC^2 - CE^2 = CD^2 - DE^2$ i $BD^2 - DF^2 = AB^2 - AF^2$. Saberimo ove jednakosti: $AC^2 + BD^2 = AB^2 + CD^2 + AE^2 -$

$DE^2 + DF^2 - AF^2 = AB^2 + CD^2 + AD(AE - ED + DF - AF) = AB^2 + CD^2 + AD \cdot 2EF = AB^2 + CD^2 + 2AD \cdot BC$.

1522. Neka su M i N temena mnogougla, takva da vertikale kroz M i N obuhvataju ceo mnogougao. Uočimo stranicu a_i donjeg dela izlomljene linije MN i stranicu a_j gornjeg dela. Prema slici 660 je $a_i^2 = x_i^2 + y_i^2$ i $a_j^2 = z_j^2 + t_j^2$. Sabiranjem kvadrata svih stranica mnogougla dobijamo: $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_i^2 + \cdots + a_j^2 + \cdots = (x_1^2 + x_2^2 + \cdots) + (y_1^2 + y_2^2 + \cdots) + (z_1^2 + z_2^2 + \cdots) + (t_1^2 + t_2^2 + \cdots)$. Kako su sve duži x_i, y_i, z_j, t_j, manje od 1, to je $x_i^2 < x_i$, $y_i^2 > y_i$, $z_j^2 < z_j$ i $t_j^2 < t_j$. Stoga je $a_1^2 + a_2^2 + \cdots < (x_1 + x_2 + \cdots) + (y_1 + y_2 + \cdots) + (z_1 + z_2 + \cdots) + (t_1 + t_2 + \cdots) < 1 + 1 + 1 + 1 = 4$. (Jasno je da je $x_1 + x_2 + \cdots \leq AB = 1$, $y_1 + y_2 + \cdots \leq BC = 1$ itd.)



Sl. 660



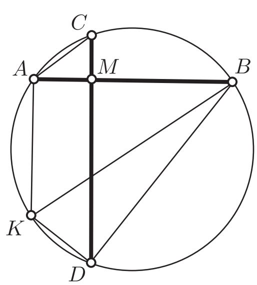
Sl. 661

1523. Neka je O centar upisanog kruga, sl. 661. Dodirna tačka D ovog kruga sa lukom $\widehat{BM}$ mora pripadati pravoj AO. Neka je N dodirna tačka upisanog kruga i duži AB. Iz pravouglog trougla ANO dobijamo $r^2 + 2^2 = (4 - r)^2$, a odavde je $r = 1,5$ cm.

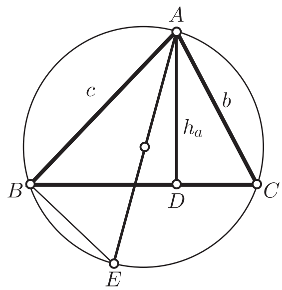
1524. Ako je C centar jednog od manjih polukrugova, a S centar traženog kruga, tada iz pravouglog trougla OCS dobijamo: $3^2 + (6 - r)^2 = (r + 3)^2$. Rešenje ove jednačine je $r = 2$ cm.

1525. a) Neka je M presečna tačka tetiva i AK tetiva paralelna sa CD. Tada je $\sphericalangle BAK = 90°$, BK je prečnik, sl. 662, i $AK < CD$. Sem toga $BK^2 = d^2 = AB^2 + AK^2 < AB^2 + CD^2$.

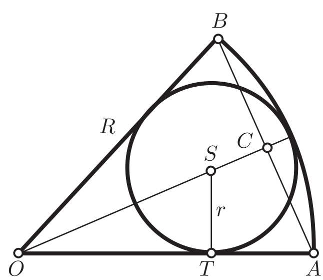
b) Kako je $KD = AC$, to je $KB^2 = d^2 = BD^2 + KD^2 = BM^2 + DM^2 + AM^2 + CM^2$. (Zašto je $KD = AC$ videti u **zadatku 1325**.)



Sl. 662



Sl. 663



Sl. 664

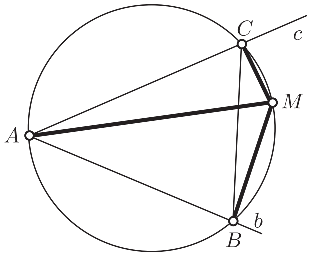
1526. Neka je AE prečnik opisanog kruga i D podnožje visine h_a. Uglovi ADC i ABE su pravi i $\sphericalangle ACB = \sphericalangle AEB$ (nad tetivom AB), pa su trouglovi ACD i AEB slični. Otuda je $AB : AE = AD : AC$, odnosno $b \cdot c = 2R \cdot h$, sl. 663.

1527. Iz sličnih trouglova OST i OAC, sl. 664, dobijamo $(R - r) : r = R : a$, a odavde dobijamo traženu jednakost.

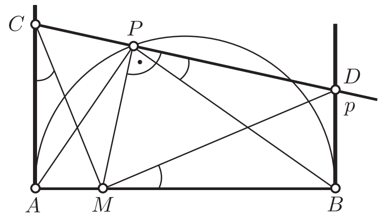
1528. a) Sledi iz sličnosti trouglova BMD i AMB.

b) Sledi iz sličnosti trouglova ABD i AMC.

1529. Bez obzira na izbor kruga, svaki trougao BCM ima poznate uglove: $\sphericalangle CBM = \sphericalangle CAM$ i $\sphericalangle BCM = \sphericalangle BAM$ (nad istim tetivama), a uglovi CAM i BAM su dati, sl. 665. Dakle, BCM pripada klasi sličnih trouglova, pa je razmera stranica $MC : MB$ konstantna.



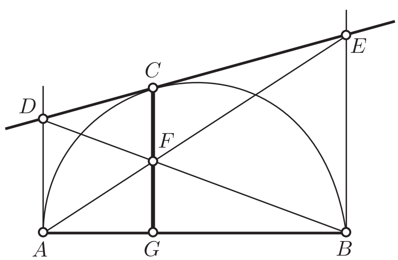
Sl. 665



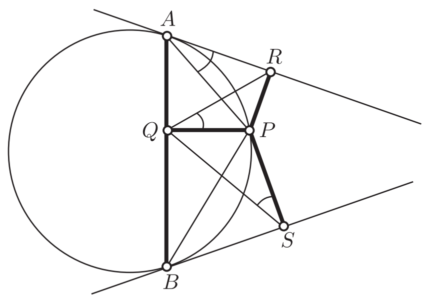
Sl. 666

1530. Četvorougao $MBDP$ je tetivni (uglovi kod B i P su pravi, sl. 666), pa je $\sphericalangle BMD = \sphericalangle BDP$. Slično se dokaže da su uglovi ACM i APM jednaki. Kako je ugao APB prav (nad prečnikom) sledi da su uglovi APM i BPD jednaki. Zaključujemo da su trouglovi AMC i BDM slični, pa je $AC : AM = BM : BD$, odakle je $AC \cdot BD = AM \cdot BM =$ const. (jer su duži AM i BM konstantne).

1531. Tangente AD i BE su paralelne, sl. 667 pa su trouglovi DAF i BEF slični i $AF : EF = AD : BE$. Međutim, $AD = CD$ i $BE = CE$, pa je $AF : EF = CD : CE$, a odavde sledi: $(AF + FE) : (CD + CE) = EF : CE$, odnosno $EA : ED = EF : EC$, pa je $CF \parallel AD$ (obrnuta Talesova teorema) i zbog toga je $CF \perp AB$. Dalje je $CF : AD = EF : EA = BF : BD = FG : AD$ odakle zaključujemo da je $CF = FC$.



Sl. 667



Sl. 668

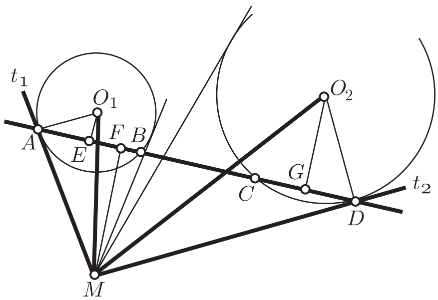
1532. Iz sličnosti pravouglih trouglova ABC i ADE dobijamo $AC \cdot AD = AE \cdot AB$, gde je E presek pravih AB i p.

1533. Dokazaćemo da su trouglovi PQR i PSQ slični, sl. 668. Koristićemo činjenicu da su četvorouglovi $BSPQ$ i $AQPR$ tetivni i jednakost tetivnog i tangentnog ugla nad istom tetivom. Tako je $\sphericalangle PSQ = \sphericalangle PBQ$ (tetivni četvorougao), $\sphericalangle PBQ = \sphericalangle PAR$ (tetivni i tangentni nad tetivom AP) i $\sphericalangle PAR = \sphericalangle PQR$ (tetivni četvorougao), pa je $\sphericalangle PSQ = \sphericalangle PQR$. Slično dokažemo da je $\sphericalangle PQS = \sphericalangle PRQ$. Dakle, $\triangle PQS \sim \triangle PRQ$, pa je $PQ : PS = PR : PQ$, odakle je $PQ^2 = PR \cdot PS$. Slično postupamo i ako je P s druge strane prave AB.

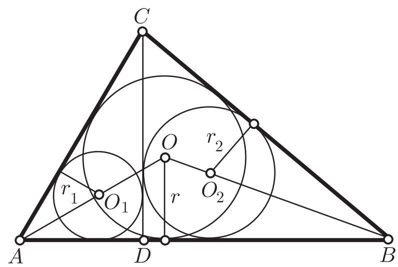
1534. Iz sličnih trouglova MAC i MDA imamo proporciju $AC : AD = MA : MD$, a iz sličnih trouglova MBC i MDB je $BC : BD = MB : MD = MA : MD$ (jer $MA = MB$). Odavde je $AC : AD = BC : BD$, odnosno $AC \cdot BD = AD \cdot BC$.

1535. Koristimo osobine pravouglog trougla ($a^2 = cp$) i dobijamo $AD^2 = AM \cdot AO$ itd.

1536. Dovoljno je da dokažemo da je $\sphericalangle AMO_1 = \sphericalangle DMO_2$, sl. 669. Neka su O_1E, MF i O_2G normale na p. Trouglovi AEO_1 i MFA su slični, a isto tako i trouglovi DGO_2 i MFD. Otuda je $AO_1 : AM = AE : MF$ i $DO_2 : MD = DG : MF$, pa zbog $AE = DG$, imamo $AO_1 : AM = DO_2 : MD$. Sledi da su pravougli trouglovi AMO_1 i DMO_2 slični, pa je $\sphericalangle AMO_1 = \sphericalangle DMO_2$.



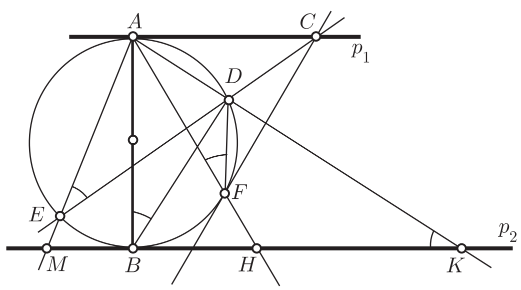
Sl. 669



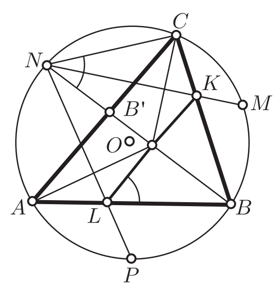
Sl. 670

1537. Označimo sa O, O_1 i O_2 centre, a sa r, r_1 i r_2 poluprečnike krugova upisanih u trouglove ACB, ACD i CBD i $AB = c$, $AC = b$, $CB = a$. Tada je $\triangle ABC \sim \triangle ACD \sim \triangle CBD$, pa je $\triangle AOB \sim \triangle AO_1C \sim \triangle CO_2B$, sl. 670. Odavde je $r : c = r_1 : b = r_2 : a$. Dalje je $b = c\dfrac{r_1}{r}$ i $a = c\dfrac{r_2}{r}$. Iz $a^2 + b^2 = c^2$ dobija se $c^2\dfrac{r_1^2}{r^2} + c^2\dfrac{r_2^2}{r^2} = c^2$, pa j $r_1^2 + r_2^2 = r^2$. Odavde je $r = 5$ cm.

1538. Uočimo da je $\sphericalangle AKH = \sphericalangle ABD$ (uglovi sa normalnim kracima) i $\sphericalangle ABD = \sphericalangle AFD$ (uglovi nad tetivom AD kruga k). Zbog toga su trouglovi AKH i AFD slični, pa je $KH : AH = FD : AD$ (1). Slično se dobija $MH : AH = FE : AE$ (2) ($\sphericalangle CAH = \sphericalangle AHM$ i $\sphericalangle CAH = \sphericalangle AEF$ itd.) Dalje, vidimo da je $\sphericalangle CAD = \sphericalangle AED$ (ugao između tangente i tetive), pa je $\triangle CAD \sim \triangle CEA$, sl. 671, i odavde je $AC : AD = CE : AE$ (3). Slično se dobija $CF : FD = CE : FE$ (4). Kako je $AC = CF$, to se iz (3) i (4) dobija $AD : FD = AE : FE$, odakle pomoću (1) i (2) dobijamo $KH : AH = MH : AH$, tj. $KH = MH$.



Sl. 671

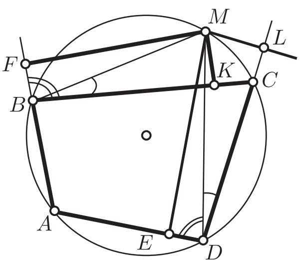


Sl. 672

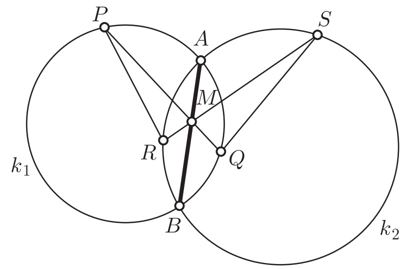
1539. NM je simetrala ugla BNC, sl. 672, pa je $BK : KC = BN : NC$. Slično je i $BL : LA = BN : NA$ (1). Duži NC i NA su jednake, pa je $BK : KC = BL : LA$, a na osnovu toga dokazujemo da je $KL \parallel AC$. Neka je S centar upisanog kruga i B' presečna tačka duži BN i AC. Prava CS je simetrala ugla BCB'. Odatle sledi (iz $\triangle BCB'$) $BS : SB' = BC : CB'$ (2). Trouglovi BCB' i BNA su slični jer je $\sphericalangle ABN = \sphericalangle NBC$ i $\sphericalangle ANB = \sphericalangle ACB$ (kao periferijski uglovi nad istom tetivom). Odavde imamo proporciju $BC : CB' = BN : NA$. Uzimajući u obzir i (1) i (2) dobijamo $BS : SB' = BL : LA$, pa je $LS \parallel AB'$. Sledi da je $LS \parallel KL$, tj. tačka S pripada pravoj KL. Tačka S mora biti u trouglu, pa je $K - S - L$.

1540. Neka je M proizvoljna tačka opisanog kruga četvorougla $ABCD$ i neka je $ME \perp AD$, $MF \perp AB$, $MK \perp BC$, $ML \perp CD$, sl. 673. Iz sličnosti pravouglih trouglova BMK i DML ($\sphericalangle MBK =$

$\sphericalangle MDL$ kao periferijski uglovi nad lukom MC) sledi (1) $MK : ML = MB : MD$. Kako je $\sphericalangle MDE = 180^\circ - \sphericalangle ABM$ (kao naspramni uglovi u tetivnom četvorouglu $ABMD$) i kako je $\sphericalangle MBF = 180^\circ - \sphericalangle ABM$ to je $\sphericalangle MDE = \sphericalangle MBF$, te su pravougli trouglovi MDE i MBF slični. Zbog toga je (2) $ME : MF = MD : MB$. Iz (1) i (2) dobijamo $\dfrac{MK \cdot ME}{ML \cdot MF} = 1$ ili $MK \cdot ME = ML \cdot MF$, što je i trebalo dokazati.



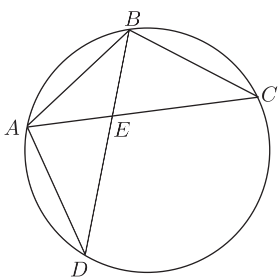
Sl. 673



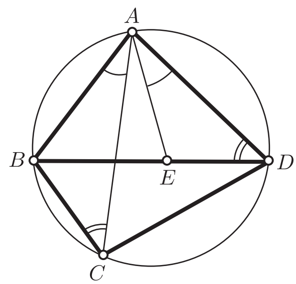
Sl. 674

1541. Koristeći se potencijom tačke M u odnosu na krugove k_1 i k_2, dobijamo $MP \cdot MQ = MA \cdot MB = MR \cdot MS$ tj. $MP \cdot MQ = MR \cdot MS$, ili $MP : MR = MS : MQ$, odakle se dobija da je $\triangle MPR \sim \triangle MSQ$ (jer je i $\sphericalangle PMR = \sphericalangle QMS$), pa je $\sphericalangle MPR = \sphericalangle MSQ$, tj. $\sphericalangle QPR = \sphericalangle QSR$, što znači da su tačke P, R, Q i S na istom krugu, sl. 674.

1542. Iz $AB = BC$ sledi: $\sphericalangle BAC = \sphericalangle BCA$, sl. 675. Osim toga je $\sphericalangle ADB = \sphericalangle BCA$ (nad istim lukom), pa je $\sphericalangle BAE = \sphericalangle ADB$. Sledi da je $\triangle ABD \sim \triangle EBA$. Iz ove sličnosti dobijamo: $\sphericalangle BAD = \sphericalangle AEB = \sphericalangle CED$.



Sl. 675

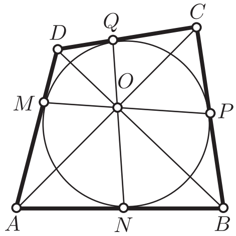


Sl. 676

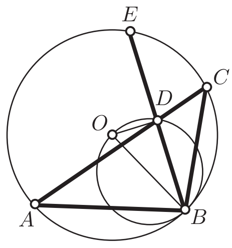
1543. Neka je $ABCD$ tetivni četvorougao, sl. 676, i neka js E tačka dijagonale BD takva da je $\sphericalangle DAE = \sphericalangle BAC$. Sem toga je i $\sphericalangle BCA = \sphericalangle BDA$ (nad istom tetivom), pa je $\triangle ABC \sim \triangle AED$. Odatle imamo proporciju $AC : BC = AD : DE$ iz koje je $AC \cdot DE = AD \cdot BC$ (1). Slično, iz trouglova ABE i ACD dobijamo $AB : BE = AC : CD$, odnosno $AC \cdot BE = AB \cdot CD$ (2). Sabirajući (1) i (2) dobijamo $AC \cdot (BE + DE) = AD \cdot BC + AB \cdot CD$, odnosno $AC \cdot BD = AD \cdot BC + AB \cdot CD$.

1544. Označimo sa O presečnu tačku dijagonale BD i duži MP, sl. 677. Trouglovi DOM i BOP imaju jednake uglove kod O, dok su $\sphericalangle DMO$ i $\sphericalangle BPO$ suplementni (uglovi tangente i tetive, sa raznih strana tetive). Prema **zadatku 1440**, imamo proporciju $DM : BP = DO : BO$. Pretpostavimo da je tačka O_1 presek duži BD i NQ. Iz trouglova BO_1N i DO_1Q je $DQ : BN = DO_1 : BO_1$. Kako je $DQ = DM$ i $BP = BN$, biće $DO : BO = DO_1 : BO_1$, pa je $O_1 = O$. Slično zaključujemo da tačka O pripada i duži AC.

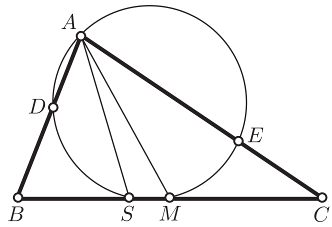
1545. Neka je k opisani krug trougla ABC i D tražena tačka. Označimo sa E presečnu tačku prave BD i kruga k. Tada je $BD \cdot DE = AD \cdot DC$, sl. 678. Prema uslovu izlazi da mora biti $DE = BD$, tj. da je D središte duži BE. Dakle, treba konstruisati tetivu opisanog kruga, povučenu iz B, tako da njeno središte pripada stranici AC. (Videti **zadatak 1184**, sl. 446).



Sl. 677



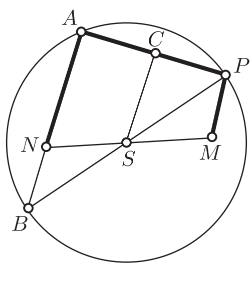
Sl. 678



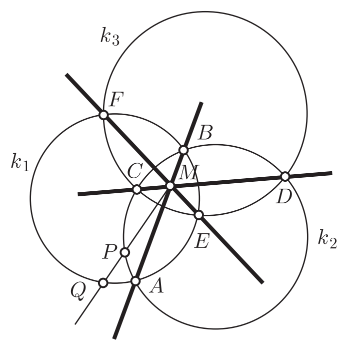
Sl. 679

1546. Prema teoremi o potenciji tačke u odnosu na krug, za tačke B i C dobijamo jednakosti $BS \cdot BM = BD \cdot BA$ i $CM \cdot CS = CE \cdot CA$. Podelimo ove dve jednakosti, vodeći računa da je $BM = CM$, sl. 679 i dobijamo $\dfrac{BS}{CS} = \dfrac{BD}{CE} \cdot \dfrac{BA}{CA}$. Na osnovu osobine simetrale ugla je $\dfrac{BS}{CS} = \dfrac{BA}{CA}$, pa je $\dfrac{BD}{CE} = 1$, tj. $BD = CE$.

1547. Neka je S centar datog kruga i C središte tetive AP, sl. 680. Označimo sa N presečnu tačku tetive AB sa pravom MS. Prava SC je simetrala tetive AP, pa je SC srednja linija trapeza $MPAN$. Dakle, S je u svakom slučaju središte duži MN, pa pošto su M i S date tačke, sledi da je i N stalna tačka. Za svaku tetivu kroz N proizvod $AN \cdot BN$ je stalan, pa kako je $MP = NB$ (trouglovi SMP i SNB su podudarni), sledi da je proizvod $MP \cdot AN$ stalan.



Sl. 680

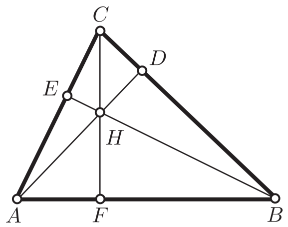


Sl. 681

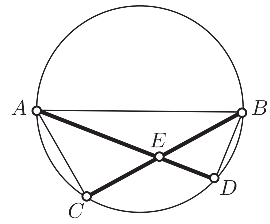
1548. Neka je MN prečnik većeg kruga koji prolazi kroz E i neka je r dužina poluprečnika većeg kruga, a d dužina tetive OE. Tada je $ED \cdot EC = ME \cdot EN = (r+d)(r-d) = r^2 - d^2 = AE^2$, jer je trougao AOE pravougli.

1549. Neka su AB, CD i EF zajedničke tetive, kao što je označeno na slici 681. Neka CD seče EF u tački M. Tačka M je između C i D i između E i F. Pretpostavimo da prava BM seče k_1 u P i k_2 u Q. Pri tome je $B - M - P$ i $B - M - Q$ i važe jednakosti $MB \cdot MQ = ME \cdot MF$, $MB \cdot MP = MC \cdot MD$ i $MC \cdot MD = ME \cdot MF$. Odavde dobijamo $MB \cdot MP = MB \cdot MQ$, a odavde je $MP = MQ$, pa kako su P i Q sa iste strane tačke M, to je $P = Q$. To znači da je $P = Q = A$, pa prava AB sadrži tačku M.

1550. Neka su AD, BE, CF visine oštrouglog trougla i H ortocentar, sl. 682. Svaki od četvorouglova $BDHF$, $CEHD$, $AFHE$ je tetivni, u svakom od opisanih krugova ovih četvorouglova važi teorema o potenciji tačke, pa imamo jednakosti: $AD \cdot AH = AB \cdot AF = AC \cdot AE$, $BE \cdot BH = BC \cdot BD = BA \cdot BF$ i $CF \cdot CH = CA \cdot CE = CB \cdot CD$. Sabiranjem ovih jednakosti dobijamo $2(AD \cdot AH + BE \cdot BH + CF \cdot CH) = AB \cdot AF + BC \cdot BD + CA \cdot CE + AC \cdot AE + BA \cdot BF + CB \cdot CD = AB(AF + BF) + BC(BD + CD) + CA(CE + AE) = AB^2 + BC^2 + CA^2$.



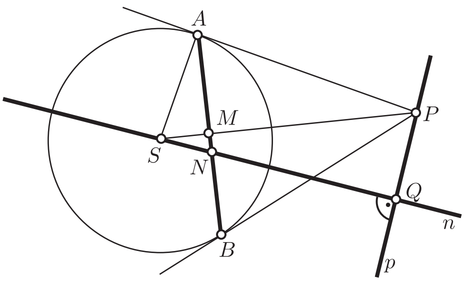
Sl. 682



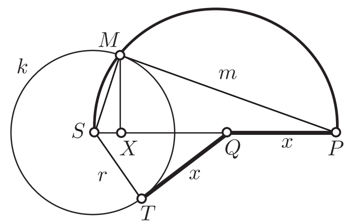
Sl. 683

1551. Prema slici 683 je $AE\cdot AD = AE(AE+ED) = AE^2+AE\cdot ED = AC^2+CE^2+AE\cdot ED$ (jer je AEC pravougli trougao). Prema osobini potencije je $AE\cdot ED = BE\cdot EC$, pa je $AE\cdot AD = AC^2+EC^2+BE\cdot EC = AC^2+EC(EC+BE) = AC^2+EC\cdot BC = AC^2+(BC-BE)BC = AC^2+BC^2-BE\cdot BC$. Odavde je: $AE\cdot AD+BE\cdot BC = AB^2$.

1552. Neka je M presečna tačka duži SP i tetive AB, a N presečna tačka tetive AB i prave n i Q presečna tačka pravih p i n, sl. 684. Pravougli trouglovi SMN i SQP su slični, pa je $SM : SQ = SN : SP$, odnosno $SM\cdot SP = SN\cdot SQ$. U pravouglom trouglu SAP je $SM\cdot SP = SA^2 = r^2$, pa je $SN\cdot SQ = r^2$, što znači da je dužina duži SN stalna, pa je i N stalna tačka.



Sl. 684



Sl. 685

1553. Neka je P proizvoljna tačka prave AB van duži AB. Neka su PC i PD tangentne duži datih krugova. Po teoremi o potencji tačke u odnosu na krug, imamo jednakosti $PC^2 = PA\cdot PB = PD^2$, odakle je $PC = PD$.

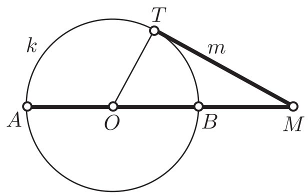
1554. Označimo duž SP sa p. Prema slici 685, iz pravouglog trougla STQ dobijamo $x^2+r^2 = (p-x)^2$. Odavde je $2px = p^2-r^2 = m^2$, gde je $m = PM$. Sada možemo konstruisati duž x. (Tačka X je podnožje normale iz m na SP. Tada je, kao što znamo $PX\cdot PS = PM^2$, tj. $2x\cdot p = m^2$. Sledi da je Q središte duži PX.)

1555. Konstruišemo krug prečnika d, tangentnu duž $MT = m$ i sečicu iz M kroz centar kruga, sl. 686. Nije teško uveriti se da su stranice pravougaonika duži $AM = a$ i $BM = b$.

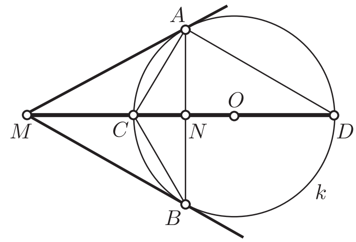
1556. Prava AC je simetrala ugla MAN. Zaista, $\sphericalangle MAC = \sphericalangle ABC$ (tetivni i tangentni uglovi), a kako je C središte luka $\widehat{AB}$, to je $\sphericalangle BAC = \sphericalangle ABC$ i $\sphericalangle BAC = \sphericalangle MAC$, sl. 687. Prava AD je simetrala spoljašnjeg ugla trougla AMN itd.

1557. Duž MN treba podeliti spoljašnjom i unutrašnjom podelom u razmeri $m : n$ itd. Tako dobijamo tačke M i N sa slike 687. Traženi skup tačaka je krug prečnika CD – to je tzv. *Apolonijev krug.* (Videti prethodni zadatak.)

1558. Koristićemo potenciju tačke u odnosu na krug. U tački B konstruišemo normalu $BS = \dfrac{a}{2}$, gde je $AB = a$, sl. 688. Zatim konstruišemo krug $k(S, BS)$ i njegovu sečicu AS koja ga seče u tačkama X, Y. Krug $k_1(A, AX)$ seče duž AB u traženoj tački C. Dokažimo to, tj. dokažimo da je $AB : AC = AC : CB$. Uvedimo oznaku $AC = x$; tada je $CB = a-x$. Prema osobini potencije

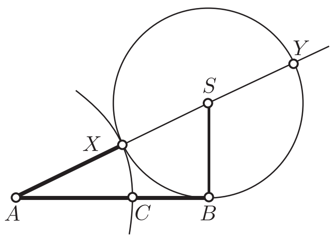


Sl. 686

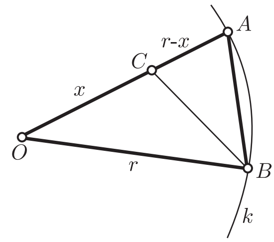


Sl. 687

tačke A, imamo $AX \cdot AY = AB^2$, tj. $x(x+a) = a^2$, odakle je $x^2 = a^2 - ax$, odnosno $x^2 = a(a-x)$. To možemo napisati kao $a : x = x : (a - x)$. Time je ispravnost konstrukcije dokazana.

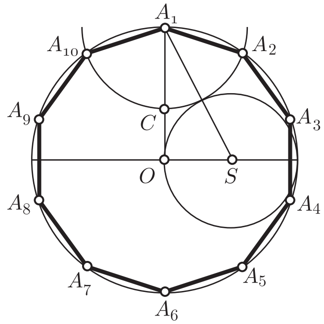


Sl. 688

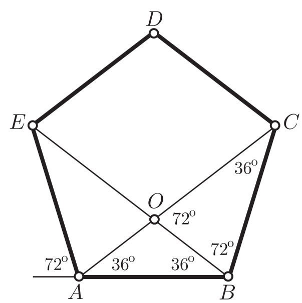


Sl. 689

1559. Neka je C tačka poluprečnika OA, takva da je $r : x = x : (r - x)$, gde je sa x označena duž OC. Na krugu k odredimo tačku B, takvu da je $AB = x$, sl. 689. Tada proporcija $r : x = x : (r-x)$ može da se napiše kao $OA : AB = AB : AC$. Odatle zaključujemo da su trouglovi OAB i BAC slični (prvi stav sličnosti). Dakle, $BC = x$, pa je i trougao OBC jednakokraki. Zbog toga je $\sphericalangle CBA = \sphericalangle COB$, a zbog sličnosti trouglova OAB i BAC je i $\sphericalangle ABC = \sphericalangle AOB$. Sledi da je $\sphericalangle ABO = 2\sphericalangle AOB = \sphericalangle OAB$. Po teoremi o zbiru uglova u trouglu izlazi da je $\sphericalangle AOB = 180^\circ : 5 = 36^\circ = 360^\circ : 10$. Dakle, $\sphericalangle AOB$ je centralni ugao koji odgovara stranici pravilnog desetougla, upisanog u krug k. Konstrukcija pravilnog desetougla (kombinacija slika 688 i 689) prikazana je na slici 690. Ako spojimo svako drugo teme, dobićemo pravilan petougao.



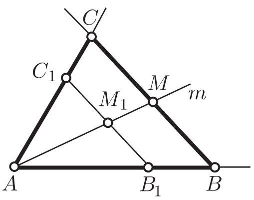
Sl. 690



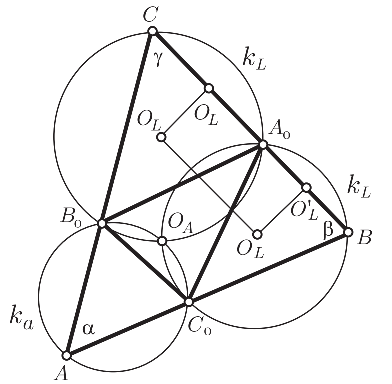
Sl. 691

1560. Izračunavanjem uglova dolazimo do zaključka da je trougao OBC na slici 691 sličan trouglu ABO iz prethodnog zadatka, sl. 689. Otuda dolazimo do traženog zaključka.

1561. Sve konstrukcije vrše se prema datom uputstvu. Na slici 692 data je konstrukcija d). Najpre je konstruisan ugao α i tačke B_1 i C_1 takve da je $AC_1 : AB_1 = 3 : 4$. Zatim je konstruisano središte M_1 duži B_1C_1 i poluprava Am. Na polupravoj Am određena je tačka M takva da je $AM = t_a$. Prava koja sadrži tačku M i paralelna je sa B_1C_1 seče prave AB_1 i AC_1 u tačkama B i C. Dokažimo da je ABC traženi trougao. Ugao BAC jednak je uglu α po konstrukciji, $AC : AB = AC_1 : AB_1 = 3 : 4$ na osnovu Talesove teoreme. Dokažimo da je AM težišna linija. Po Talesovoj teoremi zaključujemo da je $BM : MC = B_1M_1 : M_1C_1$, pa kako je M_1 središte duži B_1C_1, sledi da je i tačka M središte duži BC. Zadatak ima jedno rešenje, uvek kad je dati ugao α konveksan. Ako je α nekonveksan ugao, zadatak nema rešenja.



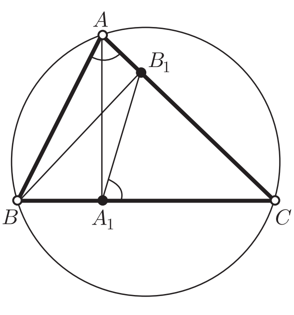
Sl. 692



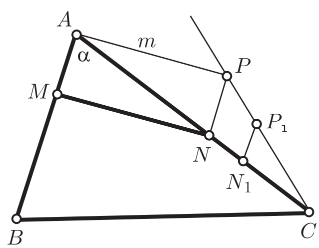
Sl. 693

1562. Iz sličnosti traženog trougla ABC i datog trougla $A_1B_1C_1$ sledi da su uglovi trougla ABC oštri i jednaki uglovima α, β, γ trougla $A_1B_1C_1$. Dakle, tačke A, B, C tražimo na kružnim lukovima koji predstavljaju skupove temena uglova α, β, γ nad odgovarajućim stranicama trougla $A_0B_0C_0$. (Na slici 693 ovi lukovi pripadaju krugovima k_A, k_B, k_C). Da bi, na primer, duž BC bila najveća, ona mora biti paralelna pravoj O_BO_C (jer je $O'_BO'_C$ projekcija duži O_BO_C i $BC = 2O'_BO'_C$). (Videti **zadatak 1367**.)

1563. Neka je ABC traženi trougao, sl. 694. Dati trougao A_1B_1C je sličan trouglu ABC (videti **zadatak 1438**). Kako je $\sphericalangle BAC = \sphericalangle B_1A_1C$, to je moguće konstruisati odgovarajuću tetivu $B'C'$ u proizvoljnom krugu k', poluprečnika r i $BC = B'C'$ itd.



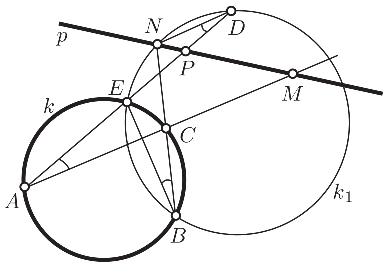
Sl. 694



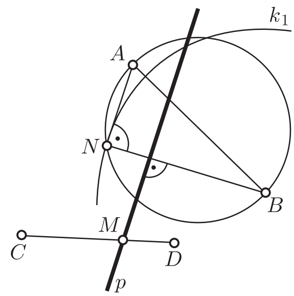
Sl. 695

1564. Neka je P tačka takva da je četvorougao $AMNP$ paralelogram. Tada je $\sphericalangle ANP = \alpha$ i $NP : CN = a : c$, sl. 695. Dakle, možemo konstruisati trougao CN_1P_1, sličan sa CNP i na pravoj CP_1, odrediti P, tako da je $AP = m$ itd.

1565. Na pravoj AP odredimo tačku D, tako da je $A - P - D$ i $AP : PD = m : n$. Neka je E presečna tačka prave AP i datog kruga k. Konstruišimo krug k_1, opisan oko trougla BE, sl. 696. Presečna tačka kruga k_1 i prave p je tačka N. Presek prave BN i kruga k je tražena tačka C. Nije teško dokazati da je C tražena tačka, jer iz $\sphericalangle EAC = \sphericalangle EBC$ (nad istim lukom) i $\sphericalangle EBC = \sphericalangle EDN$ (nad istim lukom), zaključujemo da je $\sphericalangle DAC = \sphericalangle ADN$, odakle sledi da je $AM \parallel DN$ itd.



Sl. 696



Sl. 697

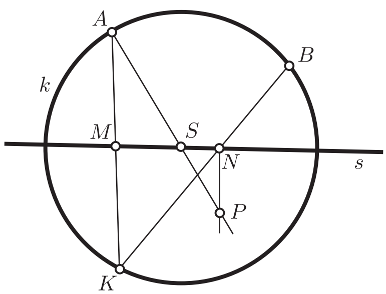
1566. Neka je a' prava paralelna sa a, na rastojanju m, a b' i b'' prave paralelne sa b na rastojanju n. Neka se a i b seku u S, a b' i b'' seku a' u P i Q. Prave PS i QS predstavljaju traženi skup tačaka. Razmotrite samostalno slučaj $a \parallel b$.

Tražena tačka K je presek datog kruga sa opisanim skupom tačaka.

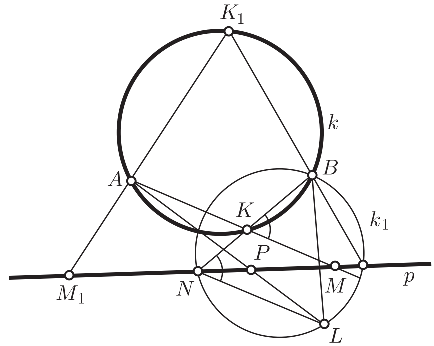
1567. Neka je M tačka prave AB takva da je $AM : MB = m : n$ i P tačka prave BC takva da je $BP : PC = n : p$. Prava MP je tražena. Ima četiri rešenja.

1568. Neka je k krug nad prečnikom AB i k_1 krug sa centrom B i poluprečnikom d. Označimo sa N jednu presečnu tačku krugova k i k_1. Odredimo tačku M prave CD takvu da je $CM : MD = m : n$, sl. 697. Prava p sadrži tačku M i normalna je na BN.

1569. Na pravoj AS odredimo tačku P takvu da je $AS : PS = m : n$. Ugao PNB je suplementan uglu PNK, sl. 698. Prema obrnutoj Talesovoj teoremi je $PN \parallel AK$, a ugao AKB je određen tetivom AB itd.



Sl. 698



Sl. 699

1570. Rešenje je *Apolonijev krug* iz **zadatka 1557**. Najpre konstruišemo tačku D tako da je $B - C - D$ i $AD : CD = AB : CB$ itd.

1571. Koristimo prethodni zadatak. Tačka M je presek Apolonijevog kruga određenog tačkama A, B, C i Apolonijevog kruga određenog tačkama B, C, D.

1572. Konstruišemo tačku D prave AB tako da je $AD : BD = AC : BC$. Presek kruga k, čiji je prečnik duž CD (Apolonijev krug), i prave p je tražena tačka.

1573. Slično prethodnom zadatku. Tačka O je presek dva Apolonijeva kruga. (Videti **zadatak 1557**.)

1574. Kombinovati rešenja **zadataka 1566** i **1568**.

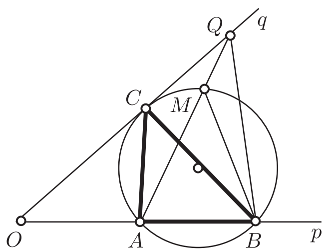
1575. Možemo koristiti ideje iz **zadatka 1551**. Dajemo i rešenja sa korišćenjem Apolonijevog kruga. a) Nad duži $BC = a$ konstruišemo Apolonijev krug i geometrijsko mesto tačaka iz kojih se duž BC vidi pod datim uglom α. Presečna tačka ova dva kruga je teme A.

b) Slično prethodnom zadatku.

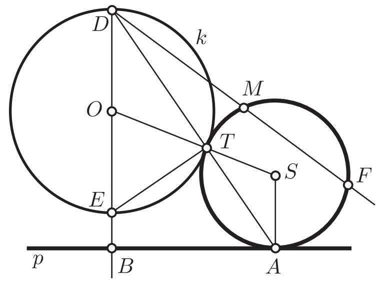
c) Kao pod a).

1576. Pretpostavimo da imamo rešenje na slici 699. Neka je $PM : PN = m : n$. Uzmimo tačku L na AP, tako da je $NL \parallel AK$. Tada je $AP : PL = MP : NP = m : n$. Ugao BNL je jednak uglu BKM, a suplementan uglu AKB. Ovaj poslednji je poznat, određen je tetivom AB. Dakle, treba prvo konstruisati tačku L ($AP : PL = m : n$). Zatim, geometrijsko mesto tačaka iz kojih se duž BL vidi pod uglom BKM itd.

1577. Neka je k krug koji sadrži tačke A, B i dodiruje krak Oq. (Konstrukcija kruga sledi iz sličnosti trouglova AOC i COB, $OA : OC = OC : OB$. Odavde dobijamo duž OC itd.) Dodirna tačka C kruga i kraka Oq je tražena tačka, sl. 700. Zaista, neka je Q, $Q \neq C$, ma koja tačka kraka Oq i neka AQ seče k u tački M. U trouglu BMQ je $\sphericalangle AMB$ spoljašnji i $\sphericalangle AMB > \sphericalangle AQB$. Kako je $\sphericalangle AMB = \sphericalangle ACB$ (nad istim lukom), sledi da $\sphericalangle ACB > \sphericalangle AQB$ za svako Q, $Q \in Oq$ i $Q \neq C$.



Sl. 700

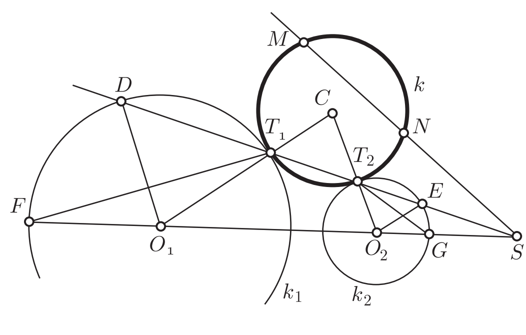


Sl. 701

1578. Koristimo potenciju tačke S u kojoj se seku prava AB i zajednička tangenta traženog i datog kruga. Tačku S konstruišemo tako što uzmemo bilo koji krug koji sadrži tačke A, B i seše dati krug u C i D. Presek pravih AB i CD je S. Dalje se konstruiše zajednička tangenta itd.

1579. Neka je S centar traženog i O centar datog kruga, sl. 701. Prečnik DE datog kruga, normalan na p, seče p u tački B. Poluprečnici SA i OD su suprotno usmereni, pa duž AD sadrži dodirnu tačku T krugova. Iz sličnih trouglova ABD i ETD dobijamo $DT : DE = DB : DA$, a odavde $DT \cdot DA = DE \cdot DB$. Ako prava DM seče traženi krug u F, tada je $DT \cdot DA = DM \cdot DF$, pa je $DM \cdot DF = DE \cdot DB$, a odavde $DF : DB = DE : DM$. Tako možemo konstruisati tačku F, jer su ostale poznate. Na taj način zadatak se svodi na **zadatak 1421**.

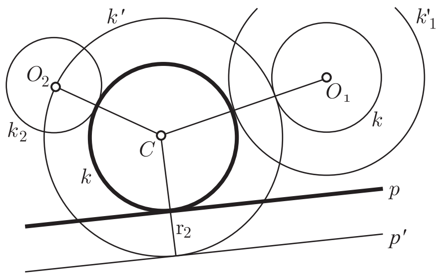
1580. Neka je C centar traženog kruga k, T_1 i T_2 dodirne tačke, O_1 i O_2 centri datih krugova, D, E, S presečne tačke prave T_1T_2 sa k_1, k_2 i O_1O_2, F i G zajedničke tačke krugova k_1 i k_2 sa O_1O_2, sl. 702. Iz sličnih jednakokrakih trouglova DO_1T_1, CT_1T_2 i EO_2T_2 zaključujemo da je $\sphericalangle O_1DT_1 = \sphericalangle O_2T_2E$, pa je $O_1D \parallel O_2T_2$, što znači da je S centar homotetije krugova k_1 i k_2 (može se konstruisati). Prema tome $O_1T_1 \parallel O_2E$ i $\sphericalangle T_1O_1S = \sphericalangle EO_2S$. Iz poslednje jednakosti izlazi da je $\sphericalangle T_1FO_1 = \sphericalangle GT_2E$ (kao odgovarajući periferijski



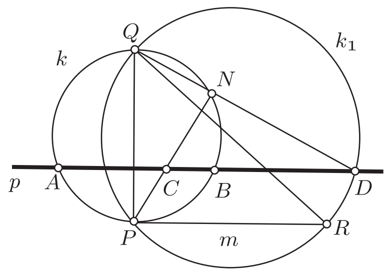
Sl. 702

uglovi), pa su trouglovi ST_1F i SGT_2 slični. Otuda je $ST_1 : SF = SG : ST_2$, odnosno $ST_1 \cdot ST_2 = SF \cdot SG$. Međutim, ako sečica SM seče traženi krug u N, tada je $ST_1 \cdot ST_2 = SM \cdot SN$. Prema tome $SM \cdot SN = SF \cdot SG$, odnosno $SN : SG = SF : SM$, pa možemo kostruisati tačku N i problem svesti na **zadatak 1578**.

1581. Pretpostavimo da je $r_1 > r_2$. Ako konstruišemo krug k_1' koncentričan sa k_1, sa poluprečnikom $r_1 - r_2$ i pravu p' paralelnu sa p na rastojanju r_2, zadatak se svodi na konstrukciju kruga k' koji sadrži tačku O_2 i dodiruje pravu p' i krug k_1', sl. 703. (Videti **zadatak 1579**.)



Sl. 703

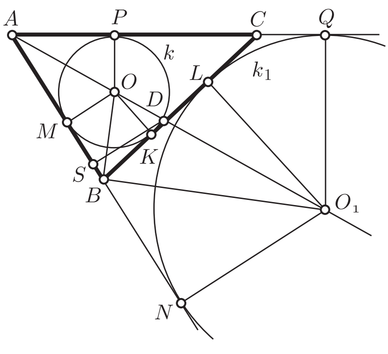


Sl. 704

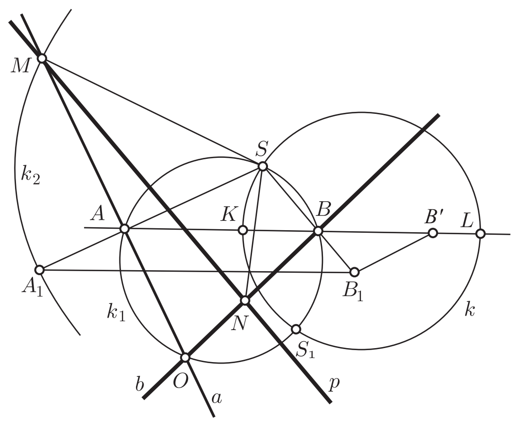
1582. Slično prethodnom zadatku, svodi se na **zadatak 1580**.

1583. Neka je k bilo koji krug koji sadrži tačke A, B, i PQ prečnik kruga normalan na AB. Kroz P (ili kroz Q) konstruišemo duž $PR = m$ paralelnu pravoj AB. Krug k_1, opisan oko trougla PQR, seče pravu AB u tačkama D i E. Neka je D van duži AB. Prava kroz P paralelna sa RD, seče k u N i duž AB u C, sl. 704. Četvorougao $CDRP$ je paralelogram, pa je $CD = PR = m$. Dokažimo da je $AC : CB = AD : BD$. Po konstrukciji tačka P je središte luka APB, pa je NP simetrala ugla ANB trougla ABN. Kako je ugao QPR prav, to je i naspramni ugao RDQ tetivnog četvorougla $PRDQ$ takođe prav. Ugao PNQ je prav kao ugao nad prečnikom PQ, pa je N tačka prave DQ i $PN \perp DQ$. Dakle, prava ND je simetrala spoljašnjeg ugla trougla ABN, odakle sledi traženi zaključak.

1584. Neka je ABC traženi trougao, sl. 705, a k i k_1 upisani krug i spolja pripisani krug koji dodiruju stranicu BC u K i L, pravu AB u M i N i pravu AC u P i Q. Na osnovu jednakosti tangentnih duži, dobijamo $BM + PC = BK + CK = BC$ i $BN + CQ = BL + CL = BC$. Odavde je $MN + PQ = 2BC$. Međutim, zbog $AN = AQ$ i $AM = AP$ je $MN = PQ$, pa otuda $MN = BC$.



Sl. 705



Sl. 706

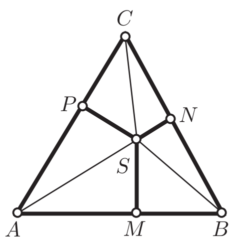
Ako su O i O_1 centri krugova k i k_1 i AD data simetrala ugla α, tada su parovi tačaka

A, D i O, O_1 harmonijski spregnuti, jer su BO i BO_1 simetrale unutrašnjeg i spoljašnjeg ugla trougla. Neka je S podnožje normale iz D na AB. Tada su prave OM, SD i O_1N paralelne, pa je $AM : MS = AN : SN$. Kako je pri tome $MN = BC = a$, to se zadatak svodi na prethodni. Naime, možemo konstruisati ugao α i na njegovoj simetrali odrediti tačku D tako da je $AD = s$. Zatim, konstruišemo normalu DS na krak i traži se duž $MN = a$.

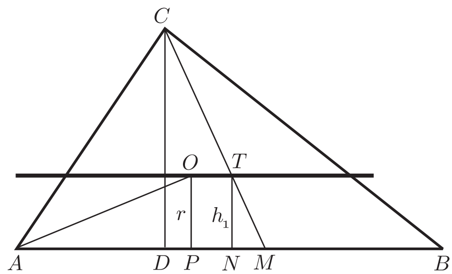
1585. Konstruišemo krug k opisan oko trougla OAB i Apolonijev krug k prečnika KL tako da je $AK : BK = AL : BL = m : n$, sl. 706. Neka su S i S_1 presečne tačke ovih krugova. Neka je S na onom luku AB kruga k, na kome nije O. Na pravoj AB odredimo tačku B' tako da je $AB' = d$. Neka je B_1 tačka u kojoj se seku prava kroz B' paralelna sa SA i prava SB. Na pravoj SA izaberimo tačku A_1 takvu da je četvorougao AA_1B_1B' paralelogram. Krug k_2 kome je centar S, a poluprečnik SA_1 seče pravu a u traženoj tački M. Sada odredimo tačku N na pravoj b tako da je $AM : BN = m : n$. Tačke M i N određuju traženu pravu p. Treba samo dokazati da je $MN = d$. Četvorougao $AOBS$ je tetivni, pa je $\sphericalangle SBN = \sphericalangle MAS$. Kako je $SA : SB = m : n = AM : BN$, sledi da su trouglovi SBN i SAM slični, pa je i $SM : SN = m : n$ i $\sphericalangle ASM = \sphericalangle BSN$. Zbog toga je $\sphericalangle MSN = \sphericalangle ASB$, pa su trouglovi MSN i ASB slični po prvom stavu sličnosti. Međutim, po konstrukciji je i trougao A_1SB_1 sličan sa ASB, pa kako je $SM = SA_1$, sledi da su trouglovi SMN i SA_1B_1 podudarni, te je $MN = A_1B_1 = AB' = d$.

1586. Kako je $3^2 + 4^2 = 5^2$, sledi da je trougao pravougili i njegova površina je $P = 6$. Pretpostavimo da postoji tačka M u trouglu takva da su normale na stranice a, b, c, označene sa h_1, h_2, h_3, manje od 1. Tada je površina trougla jednaka zbiru površina trouglova ABM, BCM, CAM: $P = \frac{1}{2}3 \cdot h_1 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot h_2 + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot h_3$, odnosno $6 < \frac{1}{2} \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 5$, tj. $6 < 6$, a to je kontradikcija. Tražena tačka ne postoji.

1587. Iz $P_{ABC} = P_{ABS} + P_{BCS} + P_{ACS}$ dobijamo $\frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}a \cdot SM + \frac{1}{2}a \cdot SN + \frac{1}{2}a \cdot SP$, odakle, posle deljenja sa $\frac{1}{2}a$, ostaje $h = SM + SN + SP$, sl. 707.



Sl. 707



Sl. 708

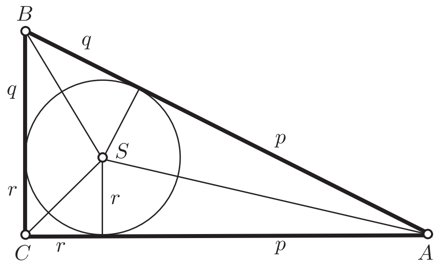
1588. Ako na slici 707, tačka S predstavlja centar upisanog kruga, tada su normale SM, SN, SP jednake r, pa imamo jednakost $P = \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr$. Kako je $P = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}ah_b = \frac{1}{2}ah_c$, možemo u prvu jednakost uvesti zamene: $a = \frac{2P}{h_a}$, $b = \frac{2P}{h_b}$, $c = \frac{2P}{h_c}$. Dobićemo $P = \frac{Pr}{h_a} + \frac{Pr}{h_b} + \frac{Pr}{h_c}$. Podelimo ovu jednakost sa Pr i dobićemo traženi zaključak.

1589. Postupamo slično prethodnom zadatku samo polazimo od jednakosti
$P = \frac{1}{2}a \cdot x + \frac{1}{2}b \cdot y + \frac{1}{2}c \cdot z$.

1590. Postupamo slično **zadatku 1598**. Iz površine imamo $ch_c = bh_b$ i $ch_c = ah_a$, odakle je $h_b = \frac{ch_c}{b}$ i $h_a = \frac{ch_c}{z}$. Sabiranjem ovih jednakosti i zamenom $h_a + h_b = h_c$ dobijamo $h_c = \frac{ch_c}{b} + \frac{ch_c}{a}$. Posle skraćivanja sa ch_c dobijamo $\frac{1}{c} = \frac{1}{b} + \frac{1}{a}$, odnosno $c = \frac{ab}{a+b}$.

1591. Tražena tačka je težište trougla. Neka je ST visina trougla ABS, CD visina trougla ABC i CM težišna linija. Iz sličnosti trouglova MST i MCD dobijamo da je $ST = \frac{1}{3}CD$ itd.

1592. Koristeći formule $P = r \cdot s = r \cdot \frac{AB + BC + CA}{2}$, uz dati uslov, dobijamo $P = \frac{3}{2}r \cdot AB$. Iz sličnih trouglova CDM i TNM imamo vezu $CM : TM = CD : TN$, odnosno $3 : 1 = CD : TN$, pa je $CD = 3TN$. Kako je $CD = h_c$ i površina trougla je $P = \frac{1}{2}AB \cdot h_c$, sledi da je $3r \cdot AB = AB \cdot h_c = AB \cdot 3TN$, pa je $r = TN$. Otuda sledi da je četvorougao $OPNT$ pravougaonik i $OT \parallel AB$, sl. 708.



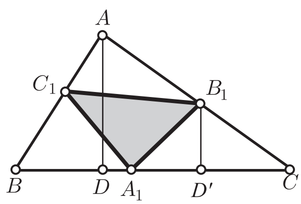
Sl. 709

1593. Prema rešenju **zadatka 1588** površina trougla je $P = \frac{r}{2}(a + b + c) = \frac{r}{2}(2p + 2q + 2r) = pr + qr + r^2$, sl. 709. Za pravougli trougao važi i jednakost $2P = a \cdot b$. Stavljajući $a = q + r$ i $b = p + r$ dobijamo $2P = (q + r)(p + r) = pq + (pr + qr + r^2) = pq + P$. Iz $2P = pq + P$ sledi $P = pq$. (Vidi i **zadataka 1517**.)

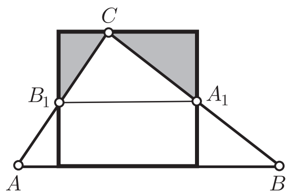
1594. Iz $P_{ABE} = \frac{3}{5}P = P_{BCD}$, gde je P površina trougla ABC, sledi da je $P_{ABS} = P_{CDES}$, tj. $P_{ABS} : P_{CDES} = 1 : 1$ (trougao BES je zajednički deo).

1595. Neka su D i D' tačke na stranici BC takve da je $AD \perp BC$ i $B_1D' \perp BC$, sl. 710. Trouglovi ADC i $B_1D'C$ su slični, pa je $B_1D' = kAD$. Zbog $A_1C = (1 - k)BC$, biće $P_{A_1CB_1} = k(1 - k)P_{ABC}$. Slično je i $P_{B_1AC_1} = P_{C_1BA_1} = k(1 - k)P_{ABC}$. Dakle, $P_{A_1B_1C_1} = (1 - 3k(1 - k))P_{ABC}$. Treba odrediti $k \in [0, 1]$ za koje je $1 - 3k(1 - k)$ najmanje, tj. $k(1 - k)$ najveće. Primetimo da je $k(1 - k) = k - k^2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + k - k^2 = \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - k\right)^2 \leq \frac{1}{4}$. Znak jednakosti važi za $k = \frac{1}{2}$.

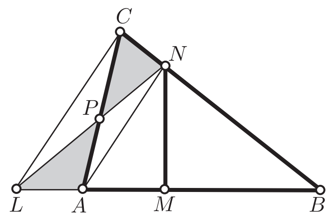
1596. Rešenje vidimo na slici 711. Duž A_1B_1 je srednja linija.



Sl. 710



Sl. 711



Sl. 712

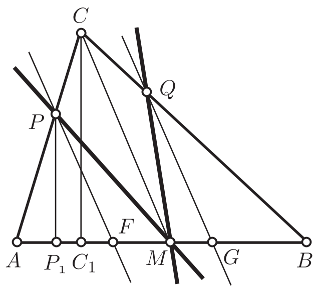
1597. Ako je $M = A$, onda je tražena prava MN, gde je N središte stranice BC, a slično je i ako je $M = B$. Ako je M središte stranice AB, onda je tražena prava CM. Ako je tačka M bliža temenu A nego temenu B, tada odredimo tačku L tako da je M središte duži BL. Kroz A konstruišemo AN paralelno sa LC, sl. 712. Tražena prava je MN. Zaista, MN polovi površinu trougla BLN, a osenčeni trouglovi ALP i CNP imaju jednake površine. (Videti i rešenje **zadatka 1609**.)

1598. Tačkama F i G podelimo stranicu AB trougla ABC na tri jednake duži, sl. 713. Postoje dve mogućnosti.

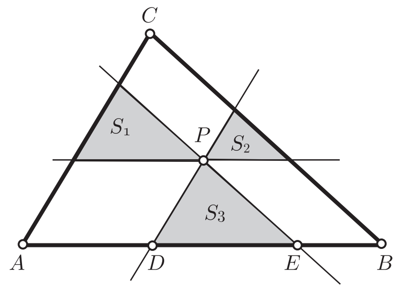
a) Tačka M se nalazi između tačaka F i G. Kroz tačke F i G konstruišemo prave paralelne pravoj CM. Te prave seku stranice AC i BC u tačkama P i Q. Prave MP i MQ su tražene prave.

Dokaz. Iz $\triangle APF \sim \triangle ACM$ sledi $PA:CA=FA:MA=AB:3MA$. Neka su dalje P_1 i C_1 podnožja normala spuštenih redom na AB. Tada iz $\triangle PAP_1 \sim \triangle CAC_1$ sledi $PP_1 : CC_1 = PA : CA$, pa je $PP_1 : CC_1 = AB : 3MA$, odnosno $\frac{3MA \cdot PP_1}{2} = \frac{CC_1 \cdot AB}{2}$, pa je $P_{AMP} = \frac{1}{3}P_{ABC}$. Slično se dokazuje da važi $P_{BMQ} = \frac{1}{2}P_{ABC}$.

b) Kada se tačka M ne nalazi između F i G prepuštamo čitaocu da sam nađe rešenje. Treba razlikovati slučajeve kad je M bliža tački A nego tački B, i obrnuto.



Sl. 713



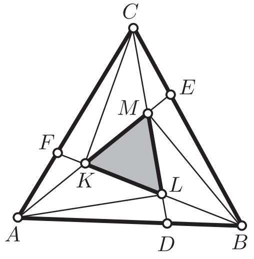
Sl. 714

1599. Po konstrukciji dobijeni trouglovi su slični datom trouglu ABC, sl. 714. Ako sa S označimo površinu trougla ABC, imaćemo $\sqrt{\frac{S_1}{S}} = \frac{AD}{AB}$, $\sqrt{\frac{S_2}{S}} = \frac{BE}{AB}$, $\sqrt{\frac{S_3}{S}} = \frac{DE}{AB}$. Saberimo ove jednakosti: $\sqrt{\frac{S_1}{S}} + \sqrt{\frac{S_2}{S}} + \sqrt{\frac{S_3}{S}} = \frac{AD+BE+DE}{AB} = 1$, pa je $\frac{\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3}}{\sqrt{S}} = 1$, odakle dobijamo $S = (\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3})^2$.

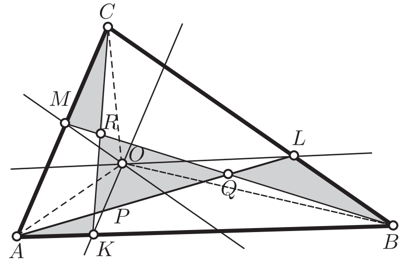
1600. Da bismo rešili ovaj zadatak, uočimo najpre da su trouglovi ADC, BEA i CFB, a isto tako i trouglovi DBC, ECA i FAB, sl. 715, međusobno podudarni. Pored toga su i trouglovi ADL, BEM i CFK, odnosno trouglovi DBL, ECM i FAK, odnosno trouglovi ALK, BML i CKM međusobno podudarni. Dalje je, $P_{ADC} = 2P_{DBC}$, $P_{ADL} = 2P_{DBL}$, $P_{ADM} = 2P_{DBM}$, pošto su u pitanju po 2 trougla istih visina, od kojih svaki prvi ima 2 puta veću osnovicu u odnosu na drugi.

Obeležimo sada površine trouglova DBL, ECM i FAK sa S_1, a površine trouglova ALK, BML i CKM sa S_2. Tada je $P_{ADC} = 5S_1 + 2S_2 + S$, $P_{DBC} = 4S_1 + S_2$, pa dobijamo jednakost $5S_1 + 2S_2 + S = 2(4S_1 + S_2)$, iz koje je $S = 3S_1$.

Slično je $P_{ADM} = 2S_1 + S_2 + S$, $P_{DMB} = S_1 + S_2$ i $2S_1 + S_2 + S = 2(S_1 + S_2)$, pa je $S = S_2$. Konačno imamo $P = S + 9S_1 + 3S_2 = S + 3S + 3S = 7S$. Dakle, $S = \frac{P}{7}$.



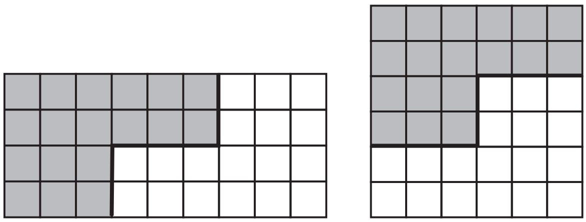
Sl. 715



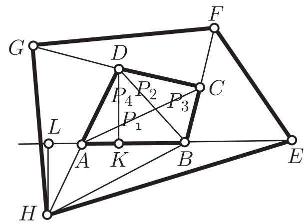
Sl. 716

1601. Zbir površina trouglova ABO, BCO i CAO jednak je površini P trougla. Međutim, $P_{ABL} = P_{ABO}$ (zajednička osnovica i jednaka visina, sl. 716). Slično je $P_{BCM} = P_{BCO}$ i $P_{CAK} = P_{CAO}$. Zbog toga je $P = P_{ABL} + P_{BCM} + P_{CAK}$. Dalje je, $P_{PQR} = P_{ABC} - (P_{ABL} + P_{BCM} + P_{CAK}) + P_{AKB} + P_{BLQ} + P_{CMR} = P_{AKP} + P_{BLQ} + P_{CMR}$, što se i tvrdilo.

1602. Moguće je. Jedan način je prikazan na slici 717.



Sl. 717



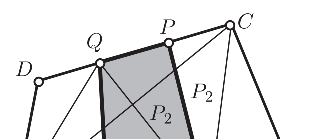
Sl. 718

1603. Označimo sa P_1 i P_2 površine trouglova ABD i BCD, sl. 718. Dokazaćemo da trougao ABH ima površinu P_1. Trouglovi ABH i ABD imaju jednake osnovice ($AD = AH$) i zajedničku visinu iz B, pa je površina trougla ABH jednaka površini trougla ABD. Tako i površina trougla HBE iznosi P_1 ($BE = AB$, visina je HL). Dakle, površina trougla AHE iznosi $2P_1$. Slično dokazujemo da je površina trougla CFG jednaka $2P_2$.

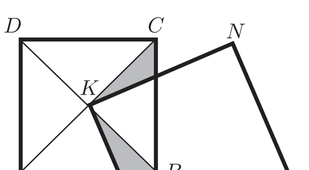
Ako sa P_3 označimo površinu trougla ABC, a sa P_4 površinu trougla ACD, onda, slično prethodnom izlaganju, dokazujemo da je površina trougla BEF jednaka $2P_3$, a površina trougla DGH jednaka $2P_4$.

Površina P četvorougla $EFGH$ jednaka je zbiru površina trouglova AEH, BEF, CFG, DGH i četvorougla $ABCD$, a to je: $P = 2P_1 + 2P_3 + 2P_2 + 2P_4 + 1 = 1 + 2(P_1 + P_1 + P_3 + P_4)$. Kako je $P_1 + P_2 = P_3 + P_4 = 1$, to je $P = 1 + 2 \cdot 2 = 5$ (dm^2).

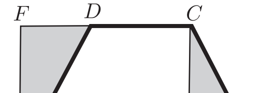
1604. Na slici 719 označene su sa P_1 i P_2 površine delova četvorougla $ANCQ$. (To su trouglovi koji po dva imaju jednake osnove i zajedničke visine). Dakle, površina četvorougla $MNPQ$ je polovina površine četvorougla $ANCQ$. Trougao BCN ima tri puta manju površinu od trougla ABC. (Ista visina, a osnovica tri puta manja.) Slično je i $P_{ADQ} = \dfrac{1}{3}P_{ACD}$. Zato je $P_{BCN} + P_{ADQ} = \dfrac{1}{3}(P_{ABC} + P_{ACD}) = \dfrac{1}{3}P_{ABCD} = 1$. Dakle, $P_{ANCQ} = 2$, pa je $P_{MNPQ} = 1$.



Sl. 719



Sl. 720

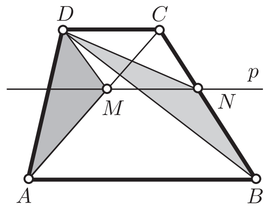


Sl. 721

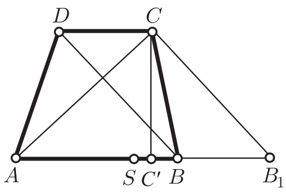
1605. Veći kvadrat uvek prekriva četvrtinu manjeg kvadrata, jer su osenčeni trouglovi na slici 720 podudarni.

1606. Ako trapez dopunimo trouglom DAF, sl. 721, koji je podudaran sa trouglom BCE, dobićemo pravougaonik $AECF$, koji je dopunski jednak datom trapezu. Kako je površina trougla AEC jednaka polovini površine pravougaonika, sledi da je $P_{AEC} = \dfrac{1}{2}P_{ABCD}$.

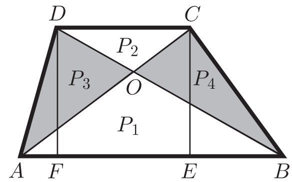
1607. Trouglovi ACD i BCD imaju zajedničku osnovicu CD, sl. 722 i jednaku visinu (visina trapeza), pa je $P_{ACD} = P_{BCD}$. Slično je $P_{MCD} = P_{NCD}$, pa je $P_{AMD} = P_{BND}$ (razlike jednakih površina).



Sl. 722



Sl. 723



Sl. 724

1608. Neka je B_1 tačka takva da je $A - B - B_1$ i $BB_1 = CD$. Iz datog uslova dokazujemo da je trougao AB_1C jednakokraki pravougli, pa je ugao između dijagonala prav, sl. 723.

1609. Neka je AB osnovica trapeza $ABCD$ i B_1 tačka na pravoj AB takva da je $BB_1 = DC$. Tada je $CB_1 \parallel DB$ i $\sphericalangle ACB_1 = 90°$, sl. 723. Centar opisanog kruga oko pravouglog trougla AB_1C je središte S duži AB_1, pa je $SA = SB_1 = SC = \dfrac{AB + BB_1}{2} = \dfrac{AB + CD}{2} = m$. Neka je CC' visina trapeza. Iz trougla SCC' sledi da je $SC \geq CC' = h$. Dakle, $h \leq m$, pa je površina trapeza $P = mh \leq m^2$.

1610. Treba dokazati ekvivalenciju: $ABCD$ je trapez $\Longleftrightarrow P_{AOD} = P_{BOC}$, sl. 724.

1° Ako je $ABCD$ trapez, onda je $DF = CE$, pa je $P_{ABD} = P_{ABC}$, a otuda $P_{ABD} - P_{ABO} = P_{ABC} - P_{ABO}$, tj. $P_{AOD} = P_{BOC}$.

2° Obrnuto, ako je $P_{AOD} = P_{BOC}$, onda je i $P_{ABD} = P_{ABC}$, tj. $\dfrac{1}{2}AB \cdot DF = \dfrac{1}{2}AB \cdot CE$, odakle je $DF = CE$. Znači, $CD \parallel AB$, pa je četvorougao $ABCD$ trapez.

1611. Trouglovi ABD i ABC imaju zajedničku osnovicu AB i jednake visine (visina trapeza). Dakle, $P_1 + P_4 = P_1 + P_3$, pa je $P_3 = P_4$, sl. 724

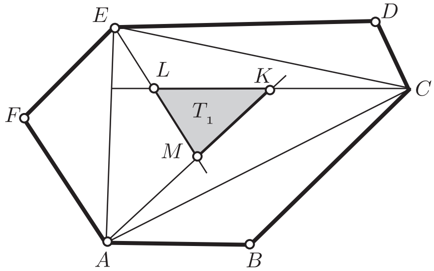
Trouglovi ABO i ADO imaju osnovice BO i OD i zajedničku visinu h_1 iz temena A, pa je $P_1 = \dfrac{1}{2}BOh_1$ i $P_3 = \dfrac{1}{2}DOh_1$, odnosno $P_1 : P_3 = BO : DO$. Slično dobijamo odnos površina trouglova BCO i DCO – $P_4 : P_2 = BO : DO$, a kako je $P_4 = P_3$, biće $P_3 : P_2 = BO : DO$. Izlazi da je $P_1 : P_3 = P_3 : P_2$, odakle je $P_3^2 = P_1 \cdot P_2$ ili $P_3 = \sqrt{P_1P_2}$.

Kako je površina trapeza $P = P_1 + P_2 + 2P_3$, biće konačno: $P = P_1 + P_2 + 2\sqrt{P_1P_2}$ ili $P = (\sqrt{P_1} + \sqrt{P_2})^2$.

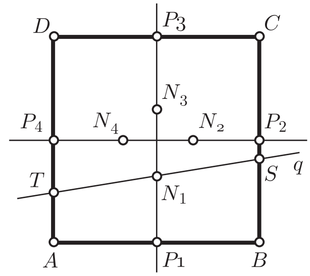
1612. Slično **zadatku 1607**.

1613. Neka je P_1 površina datog šestougla. Konstruišimo $AK \parallel BC$, $CL \parallel AB$ i $EM \parallel CD$, sl. 725. Dobijamo trougao KLM, osenčen na slici, čiju površinu ćemo označiti sa P_2. Tada $P_1 - P_2$ predstavlja površinu triju paralelograma: $ABCK$, $CDEL$ i $AFEM$. Površina trougla ACM je zbir površine trougla KLM i polovina površina triju paralelograma: $P = P_2 + \dfrac{P_1 - P_2}{2} = \dfrac{P_1 + P_2}{2}$. Slično, konstruisanjem paralela kroz B, D i F dobijamo trougao podudaran sa KLM. (U oba slučaja stranice trougla jednake su razlikama paralelnih stranica šestougla.) Lako je uveriti se da je površina trougla BDF takođe $\dfrac{P_1 + P_2}{2}$.

1614. Neka je q proizvoljna od tih pravih i P_1, P_2, P_3, P_4 središta stranica AB, BC, CD, DA kvadrata $ABCD$, sl. 726. Označimo sa $ABST$ manji od dobijenih trapeza, a sa N_1 presek P_1P_3 i TS. Kako je $P_{ABST} = AB \cdot P_1N_1$, $P_{TSCD} = CD \cdot N_1P_3$, to je $P_1N_1 : N_1P_3 = 2 : 3$, pa svaka od datih pravih sadrži jednu od tačaka N_1, N_2, N_3 ili N_4. (Ove tačke se nalaze na dužima P_1P_3 i P_2P_4 i dele ih u odnosima $2 : 3$ i $3 : 2$). Datih pravih ima 9, pa neke tri od tih pravih sadrže istu tačku N, čime je tvrđenje dokazano (Dirihleov princip).

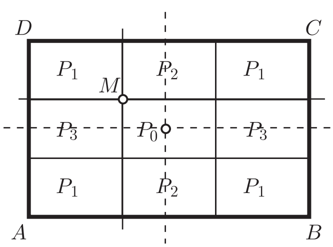


Sl. 725

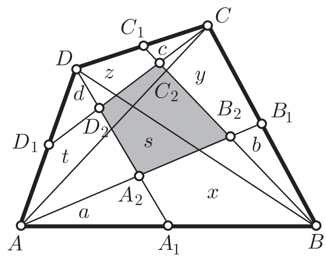


Sl. 726

1615. Neka je P površina datog pravougaonika. Ako bi prave bile postavljene kroz presečnu tačku dijagonala, tada bi pravougaonik bio podeljen na četiri jednaka dela i površine $\frac{P}{4}$. Pretpostavimo da izabrana tačka leži u jednom od ova četiri dela. Preslikajmo dve presečne prave simetrijom u odnosu na centar pravougaonika. Tada dobijemo četiri prave, kao na slici 727, koje dele pravougaonik na devet delova. Tada je $P = 4P_1+2P_2+2P_3+P_0$. Prema tome, $4P_1+2P_2+2P_3 < P$, odnosno $2P_1 + P_2 + P_3 < \frac{P}{2}$, ili $(P_1 + P_2) + (P_1 + P_3) < \frac{P}{2}$. Zbirovi u zagradama predstavljaju površine odsečenih delova koji sadrže tačke A i C, pa je jedan od njih sigurno manji od $\frac{P}{4}$.



Sl. 727

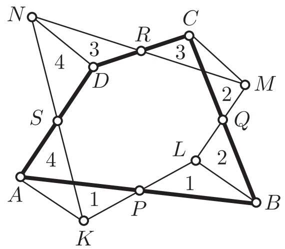


Sl. 728

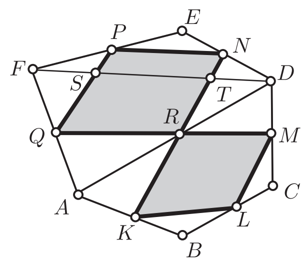
1616. Na slici 728 označene su površine delova četvorougla slovima a, b, c, d, x, y, z, t, s, a površina četvorougla $ABCD$ je S. Kako je $P_{ABB_1} = \frac{1}{2}P_{ABC}$ i $P_{CDD_1} = \frac{1}{2}P_{CDA}$, sabiranjem dobijamo $a+b+c+d+x+z = \frac{1}{2}S$ (1) i slično dobijamo iz trouglova BCD i ABD: $a+b+c+d+y+t = \frac{1}{2}S$ (2). Takođe je i $a+b+c+d+x+y+z+t+s = S$. Iz (1)+(2)−(3) dobijamo $a+b+c+d = s$, što se i tvrdilo.

1617. Neka su $ABCD$ i $KLMN$ dati četvorouglovi sa zajedničkim središtima stranica, tačkama P, Q, R, S. Duži AB i KL se polove, pa su trouglovi AKP i BLP podudarni (uglovi sa zajedničkim temenom su jednaki kao unakrsni). Na slici 729 ovi trouglovi su označeni brojem 1. Slično se dokazuje da su podudarni trouglovi BLQ i CMQ (na slici označen brojem 2), zatim CMR i DNR (označeni sa 3), kao i DNS i AKS (označeni sa 4).

Ako četvorougao $ABCD$ dopunimo trouglovima AKP, CMQ, DNR i DNS, tj. trouglovima 1, 2, 3 i 4, dobijamo desetougao $AKPBQMCRNS$. Isti desetougao dobijamo ako četvorougao $KLMN$ dopunimo trouglovima BLP, BLQ, CMR i AKS, a to su takođe trouglovi označeni brojevima 1, 2, 3 i 4. Dakle, površine četvorouglova $ABCD$ i $KLMN$ manje su od površine desetougla za zbir površina trouglova 1, 2, 3 i 4, što znači da ova dva četvorougla imaju međusobno jednake površine.



Sl. 729



Sl. 730

1618. Neka je $ABCDEF$ jedan od tih šestouglova, sl. 730, sa središtima stranica: K, L, M, N, P, Q. Uočimo tačku R, središte stranice AD. Četvorouglovi $KLMR$ i $NPQR$ su paralelogrami. (Videti rešenje **zadatka 859**.) Dakle, položaj tačke R određen je tačkama K, L i M. Dokazaćemo da je površina šestougla dva puta veća od zbira površina četvorouglova $KLMR$ i $NPQR$.

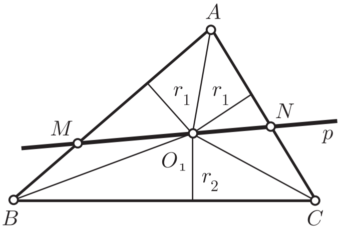
Trougao ENP ima četiri puta manju površinu od trougla DEF (dva puta su mu manje dimenzije stranica). Slično je površina trougla AQR jednaka četvrtini površine trougla ADF. Ocenjujući slično trouglove BNR i FPQ utvrdićemo da je $P_{NPQR} = \frac{1}{2}P_{ADEF}$. Takođe je i $P_{KLMN} = \frac{1}{2}P_{ABCD}$. Iz ovoga sledi zaključak o površini šestougla, što važi za sve šestouglove kojima su tačke K, L, M, N, P, Q središta stranica.

1619. Neka je O centar upisanog kruga, r njegov poluprečnik. (Na slici 731 O je označeno sa O_1, a r sa r_1 i r_2, što će biti neophodno u drugom delu dokaza).

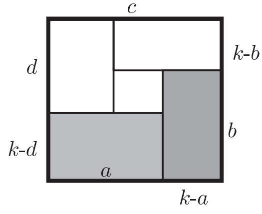
1° Dokažimo da svaka prava kroz O zadovoljava uslove zadatka. Neka su M i N presečne tačke sa stranicama AB i AC. Tada je

$$\frac{P_{BMNC}}{P_{AMN}} = \frac{P_{OBM} + P_{OBC} + P_{OCN}}{P_{OAM} + P_{OAN}} = \frac{\frac{1}{2}r \cdot BM + \frac{1}{2}r \cdot BC + \frac{1}{2}r \cdot CN}{\frac{1}{2}r \cdot AM + \frac{1}{2}r \cdot AN} = \frac{MB + BC + CN}{AM + AN}.$$

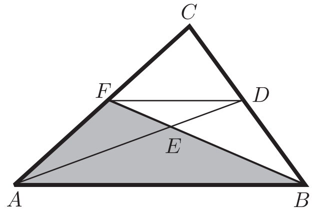
2° Dokažimo da prava koja ne sadrži centar upisanog kruga nema ovu osobinu. Neka je O_1, presečna tačka prave p i simetrale ugla BAC. Normale iz O_1 na stranice označimo sa r_1, r_1, r_2. Tada $r_1 \neq r_2$, pa imamo $\frac{P_{BMNC}}{P_{AMN}} = \frac{\frac{1}{2}r_1 \cdot BM + \frac{1}{2}r_2 \cdot BC + \frac{1}{2}r_1 \cdot CN}{\frac{1}{2}r_1 \cdot AM + \frac{1}{2}r_1 \cdot NA} = \frac{BM + BC + CN}{AM + AN} +$ $\frac{(r_1 - r_2) \cdot BC}{r_1(AM + AN)} \neq \frac{MB + BC + CN}{AM + AN}$.



Sl. 731



Sl. 732



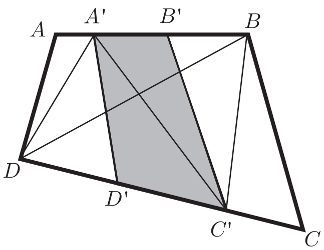
Sl. 733

1620. Neka je k dužina stranice datog kvadrata i a, b, c, d dužine stranica pravougaonika i neka je a najduža od njih. Dakle $a \geq b$, a zbog $d \leq a$ je i $k - d \geq k - a$. Iz uslova o jednakosti površina dvaju pravougaonika, osenčenih na slici 732, dobijamo jednakost $a(k - d) = b(k - a)$.

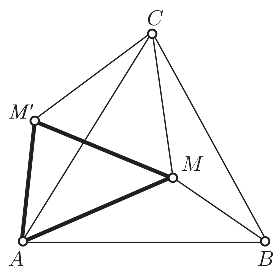
Uzimajući u obzir da je $a \geq b$ i $k - d \geq k - a$, zaključujemo da je $a = b$ i $a = d$. Slično se dokaže i da je $b = c$. Dakle, stranice unutrašnjeg pravougaonika su jednake, pa je on kvadrat.

1621. Trouglovi ABE i BDE imaju zajedničku visinu i $AE : DE = m : n$, pa možemo zaključiti da je $P_{ABE} = mP$ i $P_{BDE} = nP$. Slično je $P_{AEF} = mQ$ i $P_{DEF} = nQ$, sl. 733. Zbog $BD = CD$ i zajedničke visine, važi jednakost: $P_{BDF} = P_{CDF} = nP + nQ$. Dakle, $P_{ABF} = mP + mQ = m(P + Q)$ i $P_{BCF} = 2nP + 2nQ = 2n(P + Q)$, pa je tražena razmera
$P_{ABF} : P_{BCF} = m(P + Q) : 2n(P + Q) = m : 2n$.

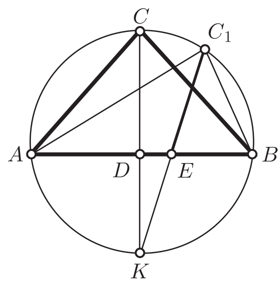
1622. Razmotrimo trouglove ABD i $A'BD$, pa BCD i $BC'D$ na slici 734 i dobijemo $P_{DA'BC'} : P_{ABCD} = (1 - a)$. Slično, iz trouglova $A'BC'$ i $A'B'C'$, kao i $DA'C'$ i $D'A'C'$ dobijemo $P_{A'B'C'D'} : P_{DA'BC'} = (1 - a - b) : (1 - a)$. Odavde sledi da je $P_{A'B'C'D'} = 1 - (a + b)$.



Sl. 734



Sl. 735



Sl. 736

1623. *Prvi način*: Pošto je $c \cdot h = a \cdot b$, odnosno $h = \dfrac{ab}{c}$, dovoljno je dokazati: $c + \dfrac{ab}{c} > a + b$ što je ekvivalentno sa $c^2 + ab > ac + bc$ odnosno $c^2 - ac - bc + ab > 0$, odakle dobijamo $(c - a)(c - b) > 0$. Poslednja nejednakost je tačna, jer je hipotenuza veća od obe katete.

Drugi način. Koristićemo površinu: $2P = c \cdot h = a \cdot b$. Polazimo od $(c + h)^2$. Naime: $(c + h)^2 = c^2 + 2ch + h^2 > c^2 + 2ch = a^2 + b^2 + 2ab = (a + b)^2$. Dakle, $(c + h)^2 > (a + b)^2$, pa budući da je $c + h > 0$ i $a + b > 0$, odavde sledi: $c + h > a + b$.

1624. Prema uslovima je $a > b > h_a$, pa je $2P = ah_a = bh_b < ab$. Dakle, $\dfrac{2P}{ab} < 1$, pa je $\dfrac{2P}{ab}(a - b) < a - b$, odnosno $\dfrac{2P}{b} - \dfrac{2P}{a} < a - b$, ili $h_b - h_a < a - b$, odakle je $b + h_b < a + h_a$.

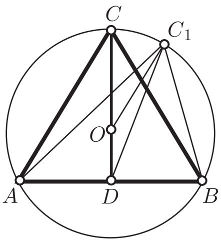
1625. Rotiramo trougao BCM oko C za -60°. Tada je trougao CMM' jednakostranični, pa je $MM' = CM$. Osim toga je $AM' = BM$, sl. 735. Kako u trouglu AMM' važi $AM \leq AM' + MM'$, to zamenom jednakih duži dobijamo $MA \leq MB + MC$.

1626. Neka je $ABCDE$ konveksan petougao. Nije teško dokazati da je u konveksnom četvorouglu zbir dijagonala veći od zbira dveju naspramnih stranica. Tako iz konveksnih četvorouglova $ABCD$, $ABDE$, $BCDE$, $ABCE$, $ACDE$ dobijamo nejednakosti $AC + BD > AB + CD$, $AD + BE > AB + DE$, $BD + CE > BC + DE$, $AC + BE > BC + AE$, $AD + CE > AE + CD$. Kad ove nejednakosti saberemo i podelimo sa 2, dobićemo traženi zaključak.

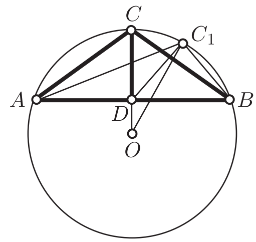
1627. Neka su ACB jednakokraki i AC_1B proizvoljan trougao sa zajedničkom stranicom AB i jednakim naspramnim uglom. Oni imaju zajednički opisani krug sl. 736, pa simetrale uglova ACB i AC_1B prolaze kroz istu tačku K kruga. Označimo simetrale (odsečke simetrala) sa CD i C_1E. Duž C_1K je tetiva, a CK prečnik opisanog kruga, pa je $CK > C_1K$, tj. $CD + DK > C_1E + EK$. Trougao DEK je pravougli sa hipotenuzom KE, pa je $DK < KE$. Prema tome, $CD > C_1E$.

1628. a) Postupamo slično kao u prethodnom zadatku. Prema slici 737, CD i C_1D su težišne linije. Kako je $OC = OC_1 = r$, to iz trougla C_1DO imamo $C_1O + OD > C_1D$, odnosno $CO + OD = CD > C_1D$, što se i tvrdilo.

b) Slično prethodnom zadatku. Prema slici 738 je $CD + DO = r$ i $C_1D + DO > r = C_1O$, pa je $C_1D > CD$.

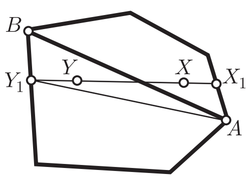


Sl. 737

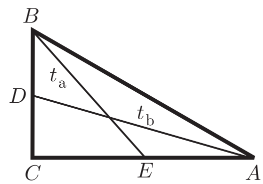


Sl. 738

1629. Ako su X, Y unutrašnje tačke, onda je $X_1Y_1 > XY$ sl. 739. Ako X_1 nije teme mnogougla, onda je bar jedan od uglova kod X_1 tup ili prav. Neka je to ugao AX_1Y_1. Tada je $AY_1 > X_1Y_1$. Ako Y_1 nije teme, onda slično zaključujemo da je $AB > AY_1$. Dakle, $AB > XY$.



Sl. 739



Sl. 740

1630. Iz pravouglih trouglova ACD i BCE dobijamo $t_a^2 = b^2 + \dfrac{a^2}{4}$ i $t_b^2 = a^2 + \dfrac{b^2}{4}$, sl. 740. Dalje je $\dfrac{t_a^2}{t_b^2} = \dfrac{4b^2 + a^2}{4a^2 + b^2}$. Ovaj količnik je najmanji ako se b smanjuje do nule, tj. $\dfrac{t_a^2}{t_b^2} > \dfrac{a^2}{4a^2} = \dfrac{1}{4}$, a najveći je ako se a samnjuje do nule, pa je $\dfrac{t_a^2}{t_b^2} < \dfrac{4b^2}{b^2} < 4$. Odavde se dobija traženi zaključak.

1631. Površina pravouglog trougla je $P = \dfrac{r}{2}(a+b+c) = \dfrac{1}{2}ch$, a odavde je $\dfrac{r}{h} = \dfrac{c}{a+b+c} < \dfrac{c}{c+c} = \dfrac{1}{2}$. Zatim iz $(a-b)^2 \geq 0$, dobijamo $a^2 + b^2 \geq 2ab$. Ako ovu nejednakost saberemo sa jednakošću $c^2 = a^2 + b^2$, dobićemo $2c^2 \geq (a+b)^2$, odakle je $a + b \leq c\sqrt{2}$. Zbog toga je $\dfrac{r}{h} \geq \dfrac{c}{c\sqrt{2}+c} = \dfrac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2} - 1 > 0,4$.

1632. Kako je $R = \dfrac{c}{2}$ i $r = \dfrac{1}{2}(a+b-c)$, biće $R + r = \dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ (na osnovu nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine). Zamenimo $ab = 2S$.

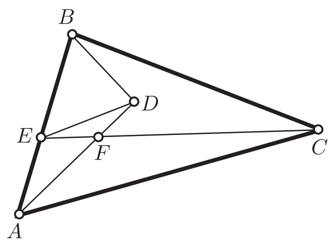
1633. a) $2\sqrt{(s-b)(s-c)} = \sqrt{(a-b+c)(a+b-c)} = \sqrt{a^2 - (b-c)^2} \leq a$.

b) Koristićemo nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine: $(a+b) + (a+c) + (b+c) \geq 3\sqrt[3]{(a+b)(a+c)(b+c)}$, tj. $\dfrac{a+b+c}{2} \geq \dfrac{3}{4}\sqrt[3]{(a+b)(a+c)(b+c)}$ (1). Zatim, $\dfrac{1}{a+b} + \dfrac{1}{b+c} + \dfrac{1}{c+a} = \dfrac{1}{(a+b)(b+c)(c+a)}((a+b)(c+a) + (a+b)(b+c) + (b+c)(c+a)) \geq \dfrac{3}{(a+b)(b+c)(c+a)}\sqrt[3]{(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2}$ (2). Pomnožimo nejednakosti (1) i (2) i stavljajući

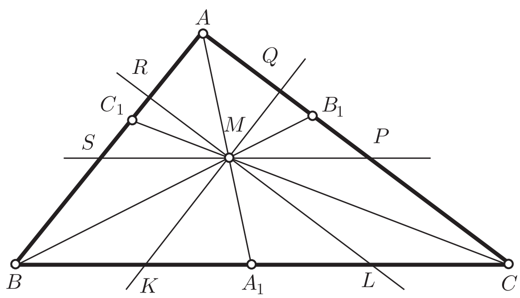
$s = \dfrac{a+b+c}{2}$, dobijamo traženu nejednakost $\dfrac{(a+b+c)}{2}\left(\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{c+a}\right) \geq$
$\dfrac{3}{4}\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)} \cdot \dfrac{3\sqrt[3]{(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2}}{(a+b)(b+c)(c+a)} = \dfrac{9}{4}$.

c) Dokažimo najpre da je $\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n} \geq \dfrac{4}{m+n}$ za $m>0$ i $n>0$. Polazeći od $(m-n)^2 \geq 0$, dobijamo $m^2+n^2 \geq 2mn$, a odavde $(m+n)^2 \geq 4mn$, tj. $\dfrac{m+n}{mn} \geq \dfrac{4}{m+n}$ i konačno, $\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n} \geq \dfrac{4}{m+n}$. Primenom ove nejednakosti dobijamo $\dfrac{1}{s-a}+\dfrac{1}{s-b} \geq \dfrac{4}{s-a+s-b} = \dfrac{4}{c}$ i slično, $\dfrac{1}{s-b}+\dfrac{1}{s-c} \geq \dfrac{4}{a}$, $\dfrac{1}{s-c}+\dfrac{1}{s-a} \geq \dfrac{4}{b}$. Saberemo ove nejednakosti, skratimo sa dva i dobijamo traženu nejednakost.

1634. Duž EC seče AD ili BD. Neka EC seče AD u F sl. 741. Sabirajući nejednakosti $EF+DF \geq ED$ i $AF+CF \geq AC$ dobijamo $EF+DF+AF+CF = EC+AD \geq ED+AC$. Odavde dobijamo traženu nejednakost $EC-ED \geq AC-AD \geq 1$.



Sl. 741



Sl. 742

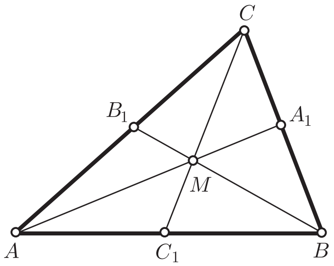
1635. Pretpostavimo da je BC najveća stranica datog trougla. Kroz datu tačku konstruišemo prave paralelne sa stranicama trougla. Tako dobijamo tačke $K, L \in BC$; $P, Q \in CA$; $R, S \in AB$ sl. 742. Trouglovi KLM, MPQ i SMR su slični datom trouglu BCA, pa su im najveće stranice KL, $MP = LC$ i $SM = BK$. Prema **zadatku 1619** je $MA_1 \leq KL$, $MB_1 \leq MP$ i $MC_1 \leq MS$. Sabiranjem ove tri nejednakosti dobijamo $MA_1+MB_1+MC_1 \leq KL+MP+MS = BC$.

1636. a) Označimo sa S_1, S_2, S_3 redom površine trouglova MBC, MCA, MAB, sl. 743. Trouglovi ABC i MBC imaju zajedničku osnovicu, pa je $AA_1 : MA_1 = S : S_1 = (S_1+S_2+S_3) : S_1$, gde je S površina datog trougla. Primenom osobina proporcija dobijamo: $(AA_1 - MA_1) : MA_1 = (S_2+S_3) : S_1$, odnosno $\dfrac{MA}{MA_1} = \dfrac{S_2}{S_1}+\dfrac{S_3}{S_1}$. Slično dobijamo: $\dfrac{MB}{MB_1} = \dfrac{S_3}{S_2}+\dfrac{S_1}{S_2}$ i $\dfrac{MC}{MC_!} = \dfrac{S_1}{S_3}+\dfrac{S_2}{S_3}$.
Saberimo ove tri jednakosti. Dobijamo $\dfrac{AM}{A_1M}+\dfrac{BM}{B_1M}+\dfrac{CM}{C_1M} =$
$\left(\dfrac{S_1}{S_2}+\dfrac{S_2}{S_1}\right)+\left(\dfrac{S_2}{S_3}+\dfrac{S_3}{S_2}\right)+\left(\dfrac{S_3}{S_1}+\dfrac{S_1}{S_3}\right) \geq 6$. (Videti **zadatak 545** a.)

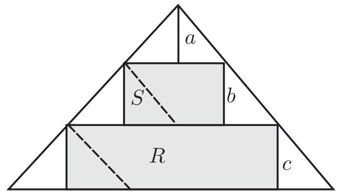
b) Prema rešenju prethodnog zadatka je $\dfrac{AM}{A_1M} = \dfrac{S_2+S_3}{S_1}$, $\dfrac{BM}{B_1M} = \dfrac{S_3+S_1}{S_2}$ i $\dfrac{CM}{C_1M} = \dfrac{S_1+S_2}{S_3}$. Množenjem ovih jednakosti dobijamo

$$\frac{AM}{A_1M}\cdot\frac{BM}{B_1M}\cdot\frac{CM}{C_1M} = \frac{(S_2+S_3)(S_3+S_1)(S_1+S_2)}{S_1S_2S_3} \geq \frac{2\sqrt{S_2S_3}\cdot 2\sqrt{S_3S_1}\cdot 2\sqrt{S_1S_2}}{S_1S_2S_3} = 8.$$

Znak jednakosti važi ako je tačka M težište trougla.



Sl. 743

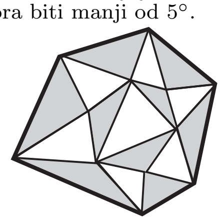


Sl. 744

1637. Ako iz datog trougla isečemo pravougaonike R i S dobićemo jedan trougao sličan datom i četiri pravougla trougla, od kojih možemo sklopiti još dva slična datom. (Videti na slici 744 isprekidane linije.) Označimo sa a, b, c visine ovih sličnih trouglova. Visina datog trougla je $(a+b+c)$, pa imamo veze $\frac{P_1}{P}=\frac{a^2}{(a+b+c)^2}$, $\frac{P_2}{P}=\frac{b^2}{(a+b+c)^2}$ i $\frac{P_3}{P}=\frac{c^2}{(a+b+c)^2}$. Traženi izraz je: $\frac{P_R+P_S}{P}=\frac{P-P_1-P_2-P_3}{P}=1-\left(\frac{P_1}{P}+\frac{P_2}{P}+\frac{P_3}{P}\right)=1-\frac{a^2+b^2+c^2}{(a+b+c)^2}=\frac{2(ab+bc+ca)}{(a+b+c)^2}\leq\frac{2}{3}$. Znak jednakosti važi ako je $a=b=c$. (Na kraju smo koristili nejednakost iz **zadatka 544** b) i uslov iz **zadatka 561**.)

1638. Jedanaestougao ima 44 dijagonale. Ako su dve dijagonale paralelne, tvrđenje je dokazano, jer one određuju ugao 0°. Ako nema paralelnih dijagonala, tada možemo kroz neku tačku u ravni postaviti 44 prave paralelne dijagonalama jedanaestougla. One razbijaju ravan na 88 uglova. Kako je $360^\circ : 88 = 4,\ldots$, to bar jedan od ovih 88 uglova mora biti manji od 5°.

1639. Jedno rešenje sa šestouglom vidimo na slici 745. Ovakvu podelu nije moguće izvršiti na osmouglu, u šta se možemo uveriti prebrojavanjem stranica "crnih" i "belih" trouglova. Naime, sve stranice "belih" trouglova su istovremeno i stranice "crnih". Jedino stranice osmougla (na slici 714 šestougla) nisu zajedničke. Dakle, ako je podela osmougla moguća, onda "crni" trouglovi imaju 8 stranica više. Pretpostavimo da je "crnih" trouglova c, a "belih" b. Tada je $3c-3b=8$, što nije moguće, jer je leva strana jednakosti deljiva sa 3, a desna nije. Dakle, tražena podela osmougla nije moguća.



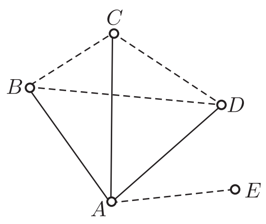
Sl. 745

1640. Neka su $A_1A_2\ldots A_{2001}$ temena datog mnogougla. Posmatrajmo 2001 trouglova, $A_1A_2A_3$, $A_2A_3A_4,\ldots$, $A_{2000}A_{2001}A_1$ i $A_{2001}A_1A_2$ i pretpostavimo da je površina svakog od njih veća od jedan. U svakom trouglu je proizvod dve stranice veći ili jednak $2P$. (Na primer, zbog $b\geq h_a$ je $a\cdot b\geq a\cdot h_a=2P$.) Stoga će, na primer, za trougao $A_1A_2A_3$ biti $A_1A_2\cdot A_2A_3>2$, a na osnovu nejednakosti aritmetičke i geometrijske sredine dobijamo $A_1A_2+A_2A_3>2\sqrt{2}$. Slično je i za ostale posmatrane trouglove. Napišimo odgovarajuće nejednakosti za svih 2001 navedenih trouglova. Zatim, saberemo sve te nejednakosti. Zbir levih strana će predstavljati dvostruki obim datog mnogougla. Tada bi za obim O datog mnogougla važilo $2\cdot O>2001\cdot 2\sqrt{2}$, tj. $O>2001\cdot\sqrt{2}>2800$, što je protivrečno datom uslovu da je $O=2800$. Odatle sledi da postoji trougao čija je površina manja od 1.

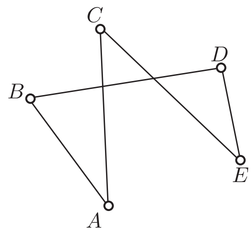
1641. U krug možemo smestiti kvadrat stranice 1. Izdelimo kvadrat na k^2 kvadrata stranice $\frac{1}{k}$ i u svaki upišemo krug. Suma radijusa je $k^2\cdot\frac{1}{2k}=\frac{k}{2}=2000$, odakle je $k=2\cdot 2000=4000$.

1642. Neka je A_i bilo koja od datih tačaka. Konstruišimo krug S s centrom A_i i radijusom 1. Tada na tom krugu može biti najviše 6 tačaka datog skupa (jer je rastojanje između svake dve veće ili jednako 1). Drugim rečima, A_i je krajnja tačka najviše 6 duži dužine 1. Tačaka A_i ima n, pa broj svih duži dužine 1 nije veći od $\frac{6n}{2}=3n$. ($6n$ se deli sa 2 jer je svaka duž računata dva puta.)

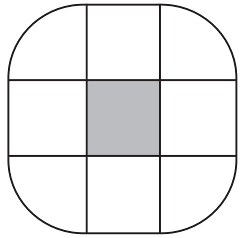
1643. a) Pošto iz svake tačke polaze ukupno četiri duži, dovoljno je dokazati da ne postoji tačka iz koje polaze tri ili četiri istobojne duži. Pretpostavimo suprotno: postoji tačka iz koje polaze bar 3 duži uste boje. Neka je ta tačka A, a istobojne duži AB, AC i AD. Duž BC je druge boje (uslov zadatka), a takođe i duži CD i BD. Međutim, ove duži obrazuju trougao, a pošto su istobojne, to je prema uslovu zadatka nemoguće, pa je pretpostavka pogrešna, sl. 746.



Sl. 746



Sl. 747


Sl. 748

b) Neka su A i B spojene crvenom duži, sl. 747. Iz B polazi tačno još jedna duž crvene boje (neka to bude BD). Iz D polazi još tačno jedna duž crvene boje. To ne može biti duž AD (suprotno uslovu). Neka bude duž DE. Iz E polazi još tačno jedna duž crvene boje. To ne može biti duž EA, jer tada ne bi mogle iz C polaziti 2 duži crvene boje (kod tačaka A, B, E, D sve crvene duži su potrošene), pa je to duž EC. Iz tačke C polazi još jedna crvena duž i to AC, jer bi u protivnom iz neke druge tačke polazile tri crvene duži.

1644. Da bi rastojanje između dve tačke bilo veće od 1 potrebno je da se krugovi poluprečnika $\frac{1}{2}$, opisani oko tih tačaka kao centara, ne seku. S obzirom na to da se tačka može naći na samom krugu, potrebno je da se u krug poluprečnika 9,5 smesti 400 krugova poluprečnika $\frac{1}{2}$ bez presecanja. Površina tih 400 krugova je $400\left(\frac{1}{2}\right)^2\pi = 100\pi$. Površina kruga poluprečnika 9,5 je $(9,5)^2\pi = 90,25\pi$, što je manje od 100π. Znači da se 400 tačaka na traženi način ne mogu smestiti u krug poluprečnika 9.

1645. Da bi krug poluprečnika 1 ceo pripadao kvadratu stranice $a = 15$, njegov centar mora pripadati kvadratu stranice ne većem od 13. Takođe, njegov centar mora biti i van 20 figura oblika prikazanog na slici 748. Ta figura predstavlja uniju 5 kvadratića stranice 1 i četiri četvrtine kruga poluprečnika 1. Površina takve figure jednaka je $5 + \pi$. Centar traženog kruga ne sme pripadati nijednoj od tih figura i mora pripadati kvadratu stranice $a_1 = 13$. Prema tome, dovoljno je dokazati da je zbir površina 20 uočenih figura manji od površine kvadrata stranice $a_1 = 13$, a to je tačno, jer je $20(5 + \pi) < 13^2$.

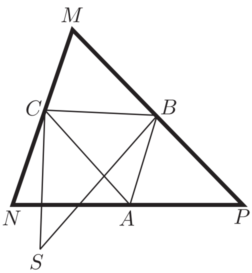
1646. Ako n novčića, $n > 625$, leže na stolu i ne prekrivaju se, onda oni pokrivaju površinu veću od 625π, odnosno od površine stola poluprečnika 25, a to nije moguće. Prema tome novčići se delimično pokrivaju.

Neka se na stolu nalazi n novčića, $n < 144$. Ti novčići prekrivaju n krugova poluprečnika 1. Za svaki takav krug uočimo koncentrični krug poluprečnika 2. Novi novčić možemo postaviti na sto tako da se ne preklapa sa već postavljenih n novčića ako postoji tačka na stolu koja ne pripada ni jednom od konstruisanih krugova poluprečnika 2, a pripada krugu poluprečnika 24, koji je koncentričan sa granicom stola. Dovoljno je dokazati da je zbir površina n krugova poluprečnika 2, za $n < 144$, manji od površine kruga poluprečnika 24, a to je tačno, jer je
$n \cdot 4\pi < 144 \cdot \pi \cdot 4 = 576\pi = 24^2\pi$.

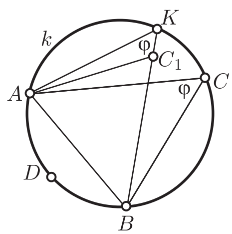
1647. Neka je p_1 prava u ravni datih krugova koja je normalna na pravoj p. Projektujmo normalno na p_1, sve date krugove. Projekcija svakog kruga je duž koja je jednaka prečniku kruga. Pri tome su projekcije unutrašnjih krugova sadržane u projekciji spoljašnjeg kruga tj. u duži dužine 3. Kako je zbir dužina projekcija svih unutrašnjih krugova jednak 25, to postoji tačka A koja pripada projekciji kruga prečnika 3 i koja pripada projekcijama bar ješ 9 unutrašnjih krugova. Prava q koja sadrži tačku A i normalna je na p_1 je tražena prava – paralelna je pravoj p i seče bar 9 od unutrašnjih krugova.

1648. Neka iz tačke A polazi bar šest duži i neka su $A_1, A_2, \ldots, A_6$ tačke sa kojima je spojena tačka A. Među ovih šest duži postoje dve, na primer AA_1 i AA_2, koje zahvataju ugao ne veći od $60°$. Odatle sledi da u trouglu AA_1A_2 duž A_1A_2 nije najveća. Neka je, na primer, $A_1A_2 < AA_1$. Dakle, duž AA_1 nije konstruisana zato što je tački A_1 tačka A najbliža, već zato što je tački A tačka A_1 najbliža, pa je $AA_1 < AA_2$. No, tada je i $A_1A_2 < AA_2$, pa sličnim rasuđivanjem dobijamo $AA_2 < AA_1$, što je kontradikcija.

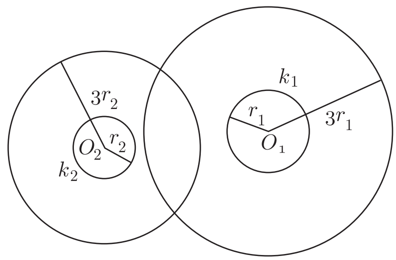
1649. Neka je ABC trougao sa najvećom površinom (ili jedan od takvih trouglova) od svih trouglova sa temenima u datim tačkama. Neka je MNP trougao kome su A, B, C središta stranica. Tada trougao MNP sadrži sve tačke datog skupa tačaka, sl. 749. Zaista, ako neka tačka S iz datog skupa tačaka ne pripada trouglu MNP, kao, na sl. 749, tada trougao BCS ima veću površinu od trougla ABC, a to nije moguće. Površina trougla MNP je 4 puta veća od površine trougla ABC, što znači da je ne veći od 4.



Sl. 749



Sl. 750



Sl. 751

1650. Neka su A i B dve od datih tačaka, takve da je AB najmanja od svih duži čiji su krajevi date tačke. Ako je C bilo koja od preostalih tačaka, tada je $\sphericalangle ACB = \varphi$ oštar, jer je AB najmanja stranica u trouglu ABC. Izaberimo tačku C tako da φ bude najveći od svih oštrih uglova ACB, sl. 750. U krugu k, opisanom oko trougla ABC, nema nijedne od n datih tačaka. Dokažimo to. Pretpostavimo da je neka tačka C_1 u krugu k. Tada prava BC_1 seče krug u tački K, pa je $\sphericalangle AKB = \sphericalangle ACB = \varphi$. Ugao AC_1B je spoljašnji u trouglu AC_1K, pa je $\sphericalangle AC_1B > \sphericalangle AKC_1 = \varphi$. Ovo je protivrečno činjenici da je $\sphericalangle ACB$ izabran da bude najveći, što znači da tačka C_1 ne može biti u krugu (sa one strane prave AB sa koje je C). Tačka C_1 ne može biti u krugu ni sa one strane sa koje je tačka D, jer je $\sphericalangle ADB$ obavezno tup, a slično prethodnom lako bi se dokazalo da je $\sphericalangle AC_1B > \sphericalangle ADB$. Prema tome, preostale $(n-3)$ tačake su van unutrašnjosti kruga k.

1651. Konstruišimo sve prave određene datim tačkama. Zatim, u ravni datog kruga uočimo tačku P kroz koju ne prolazi nijedna od ovih pravih. Neka je p_o prava kroz P koja dodiruje dati krug. Sada obrćemo pravu p_o oko tačke P, tako da seče krug i prolazi redom kroz date tačke, jednu po jednu. (Nije moguće da prava p_o prođe istovremeno kroz dve date tačke, jer bi u tom slučaju tačka P pripadala nekoj pravoj određenoj datim tačkama, što je suprotno pretpostavci o izboru tačke P.) Tako prava prolazi kroz položaje $p_1, p_2, \ldots, p_{2000}$. U momentu kada prava p_0 prođe kroz 1001-vu tačku, zaustavićemo obrtanje. To će biti tražena sečica p, koja deli dati krug na dva odsečka, od kojih svaki sadrži tačno 1000 datih tačaka.

1652. Posmatrajmo sve duži čiji su krajevi parovi datih tačaka. Među njima postoji bar jedna od koje ni jedna druga nije veća. Neka je to duž AB. Dokazaćemo da krugovi s centrima A i B pokrivaju svih 25 tačaka. Zaista, ako je $AB \leq 1$ cm, onda su sve tačke pokrivene tim krugovima, jer rastojanje proizvoljne tačke do tačaka A i B nije veće od duži AB. Neka je $AB > 1$ cm i neka je M neka od preostale 23 tačke. Po uslovu zadatka je $AM < 1$ cm ili $BM < 1$ cm. Ako je $AM < 1$ cm, onda je tačka M pokrivena krugom sa centrom A, a ako je $BM < 1$ cm, onda je tačka M pokrivena krugom sa centrom B. Pošto je M proizvoljna tačka, to su onda sve tačke pokrivene sa ta dva kruga.

1653. Neka je k_1 krug s centrom O_1 i poluprečnikom r_1 koji je veći od svih ostalih poluprečnika. Udaljimo sve krugove koji seku ovaj krug. Pri tome smo od krugova oslobodili površinu ne veću od $9P_1$, koja leži u krugu s centrom O_1 i poluprečnikom $3r_1$, gde je P_1 površina kruga k_1, sl. 751. Neka je k_2 krug s centrom O_2 čiji je poluprečnik r_2 veći od svih poluprečnika preostalih krugova. Udaljimo i sve krugove koji seku ovaj krug. Pri tome se, slično kao maločas, oslobodila od krugova površina ne veća od $9P_2$, gde je P_2 površina kruga k_2.

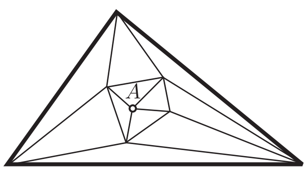
Ovaj postupak nastavimo sve dok *ima* krugova. Kako su svi prvobitni krugovi obuhvaćeni krugovima čiji su poluprečnici $3r_1, 3r_2, \ldots$, to je $9P_1+9P_2+\cdots+9P_k > 1m^2$, tj. $P_1+P_2+\cdots+P_k > \frac{1}{9}m^2$, što je i trebalo dokazati.

1654. *Prvo rešenje*: Neka je A bela tačka. Konstruišimo krug poluprečnika $2000m$, čiji je centar tačka A. Moguća su dva slučaja. Na krugu je bar jedna bela tačka ili na krugu nema ni jedne bele tačke. U prvom slučaju označimo sa B belu tačku. Onda je $AB = 2000m$ i dokaz je završen. Pređimo na drugi slučaj. Konstruišimo pravilan šestougao $C_1C_2C_3C_4C_5C_6$ koji je upisan u krug. Kako je $C_1C_2 = C_2C_3 = \cdots = C_6C_1 = 2000m$, to je dokaz završen.

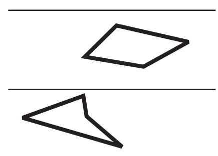
Drugo rešenje: Konstruišimo u ravni jednakostraničan trougao stranice $2000m$. Po Dirihleovom principu od tri temena dva moraju biti iste boje.

1655. Uočimo u ravni proizvoljan krug poluprečnika $\sqrt{3}$ i na krugu proizvoljnu tačku P. Možemo konstruisati romb $OAPB$ stranice dužine 1, tako da mu poluprečnik OP bude dijagonala. Trouglovi OAB i PAB su jednakostranični, pa tačke O, A i B moraju biti u tri različite boje. Zbog toga su O i P iste boje. Kako je P bilo koja tačka na krugu, jasno je da na krugu postoji tačka iste boje kao P, takva da je $PP_1 = 1$.

1656. Neka je A jedna od 1000 tačaka koje se nalaze u pomenutom trouglu, sl. 752. Ona je teme izvesnog broja trouglova. Kako se ti trouglovi ne poklapaju, zbir njihovih uglova kod temena A iznosi $360°$. Ovakvih tačaka, kao što je tačka A, ima 1000, pa zbir uglova trouglova sa temenima u ovim tačkama iznosi $360000°$. Ovom zbiru treba dodati još $180°$. (To je zbir uglova trougla u kom se nalaze svih 1000 tačaka.) Zbir unutrašnjih uglova svih nepreklapajućih trouglova je $360180°$, pa je traženi broj trouglova $360180 : 180 = 2001$.



Sl. 752



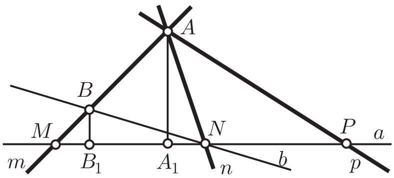
Sl. 753

1657. Neka je p prava koja nije paralelna ni sa jednom od pravih određenih parovima datih tačaka, takva da sve date tačke budu sa jedne strane prave p. Sada vršimo translaciju ove prave ka datim tačkama. Kada prava prođe kroz prve četiri tačke, mi nacrtamo prvi četvorougao, i tako idemo do kraja, dok ne nacrtamo poslednji, hiljaditi četvorougao. Oni se ne mogu seći, što je jasno sa slike 753. (Možemo postupiti i slično rešenju **zadatka 1651**.)

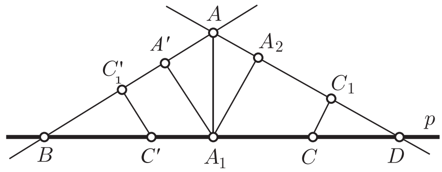
1658. Na opisani način desetougao se razlaže na trouglove. (Ne može biti neki mnogougao sa više od tri strane, jer bi se on morao dalje razlagati nepresecajućim dijagonalama.) Ne može u trouglu ostati neka tačka, jer bi se njenim spajanjem sa temenima trougao razlagao na manje trouglove. Dobijene trouglove prebrojimo slično **zadatku 1656**. Ima ih ukupno $((10-2)\cdot 180+990\cdot 360) : 180 = 1988$. Oni imaju ukupno $1988 \cdot 3 = 5764$ stranica. Osim stranica koje pripadaju desetouglu, sve su druge brojane po dva puta (zajedničke za dva trougla). Prema tome, nepresecajućih duži ima $10 + 5754 : 2 = 2987$.

1659. Pretpostavimo da ne pripadaju sve prave jednom pramenu. Uočimo tada sve presečne tačke tih pravih i iz svake tačke povucimo normale na sve prave. Tada mora postojati jedna normala koja je najmanja. Neka je to AA_1, sl. 754. Kroz tačku A prolaze najmanje tri prave, recimo m, n, p, i one seku pravu a tako da je jedna od presečnih tačaka između ostalih, na primer $M - N - P$. Tada kroz N mora postojati bar još jedna prava, recimo prava b. Ali tada prava b seče duž AM ili duž AP, pa je normala BB_1 na a manja od AA_1, što dovodi do protivrečnosti.

1660. Postupamo slično prethodnom zadatku. Pretpostavimo da tvrđenje nije tačno, tj. da ne leže sve tačke na jednoj pravoj. Konstruišimo normale iz svake od datih tačaka na svaku od pravih koje prolaze kroz parove datih tačaka. Među tim normalama postoji bar jedna od koje ni



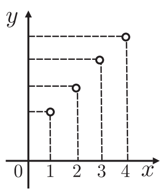
Sl. 754



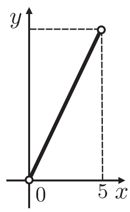
Sl. 755

jedna druga nije manja. Neka je to normala iz tačke A na pravu p koja prolazi kroz tačke B i C, sl. 755. Označimo sa A_1 podnožje normale iz tačke A na pravu p. Po uslovu zadatka na pravoj p postoji, sem tačaka B i C, bar još jedna od datih tačaka. Neka je to tačka D. Jedna od tačaka B, C, D je između drugih dveju, neka je to tačka C. Ako je pri tome $A_1 - C - D$, označimo sa A_2 i C_1 podnožja normala, konstruisanih iz tačaka A_1 i C na pravu AD, redom. Kako je $AA_1 > A_1A_2 \geq CC_1$, to smo došli do kontradikcije, jer smo dobili da je normala CC_1 manja od normale AA_1. Ako je $B - C - A_1$ (na slici, za ovaj raspored, označena je tačka C' umesto C), tada umesto prave AD uzimamo pravu AB, i ponovo dolazimo do kontradikcije.

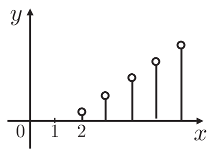
1662. Rešenja su prikazana na slikama 756–759.



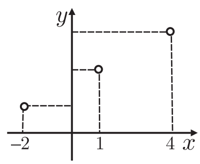
Sl. 756



Sl. 757



Sl. 758

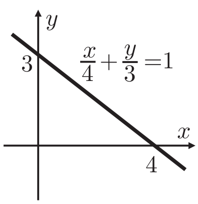


Sl. 759

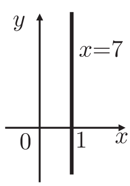
1663. Rešenje zadatka c) je na slici 760.

1664. a) $x = 1$, b) $x = -1$, c) $l(2x+1) = 2(2x+1)+4 = 4x+6$. Dobijamo x iz uslova $2x+4 = 4x+6$, a to je $x = -1$, d) $x = 1$.

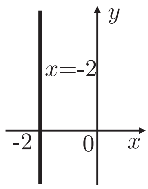
1666. Rešenja zadataka a), b) c), d) dajemo na slikama 761–764. Za e) i f) rešenja su osa Oy i osa Ox.



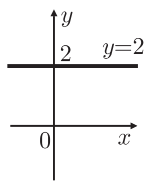
Sl. 760



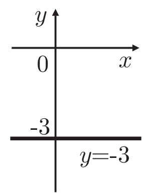
Sl. 761



Sl. 762



Sl. 763



Sl. 764

1667. a) Nule funkcija su: 1) -1, 2) -2, 3), 2, 4) 2. b) 1) $k = 3$. (U datu formulu zamenimo $y = 0$, $x = 2$ i dobijamo $0 = (k-1)\cdot 2 - 4$, odakle je $k = 3$, 2) $k = \dfrac{1}{2}$

1668. a) Na primer: 2) $x < y \Rightarrow x - y < 0$. Tada je $f(x) - f(y) = 3x - 2 - (3y - 2) = 3(x-y) < 0$ zbog $x - y < 0$, pa je $f(x) - f(y) < 0$, odnosno $f(x) < f(y)$.

c) Rastuće su funkcije: 2) (jer $a^2 > 0$) i 3), a opadajuće: 1) i 4).

1669. Zamenimo $x = 3$ i $y = -1$ i dobijemo $-1 = (k-3)\cdot 3 + k$. Odavde je $k = 2$. Dakle, data funkcija je $y = -x + 2$.

1670. $a = -1$. Funkcija je $y = -3x + 5$.

1671. Ako su koeficijenti uz x jednaki, prave su paralelne. a) Iz $2 = m - 2$ dobijemo $m = 4$. Tražena funkcija je $y = 2x + 4$, b) $m = 1$, c) Prva funkcija ima oblik $y = 2x + 1$, a iz druge je $y = -\dfrac{m}{1-m}x - \dfrac{3}{1-m}$. Odavde je $-\dfrac{m}{1-m} = 2$, pa je $m = 2$. Tražena funkcija je $y = 2x + 3$.

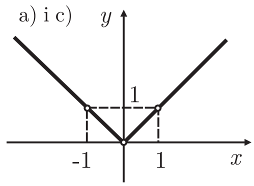
1672. Data funkcija je $y = \dfrac{2}{3}x + \dfrac{1}{3}$. Na osnovu prethodnog zadatka, tražena funkcija ima oblik $y = \dfrac{2}{3}x + b$. Zamenimo $x = -1$ i $y = 1$, pa dobijemo $1 = -\dfrac{2}{3} + b$, pa je $b = -\dfrac{5}{3}$. Tražena funkcija je $y = \dfrac{2}{3}x + \dfrac{5}{3}$.

1673. a) Neka je $y = ax+b$. Zamenom koordinata datih tačaka dobijamo $0 = b$ i $1 = -2a+b$, pa je $a = -\dfrac{1}{2}$, $b = 0$. Tražena funkcija je $y = -\dfrac{1}{2}x$, b) $a = 1$, $b = -3$, $y = x - 3$.

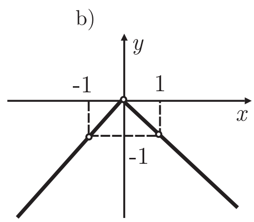
1674. Npr. a) $f\left(\dfrac{x}{2}\right) = 2 \cdot \dfrac{x}{2} - 1 = x - 1$ itd. b) $g(x-1) = (x-1) + 3 = x + 2$ itd.

1675. a) $f(f(x)) = x \Rightarrow f(x+3) = x \Rightarrow$ za $t = x + 3$ je $f(t) = t - 3$. Inverzna funkcija je $f^{-1}(x) = x - 3$, b) $f^{-1}(x) = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{2}$. c) $f^{-1}(x) = 3x$.

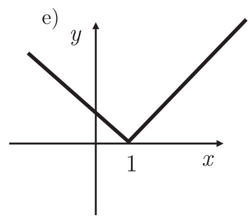
1676. Neka rešenja su na slikama 765–769.



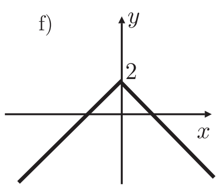
Sl. 765



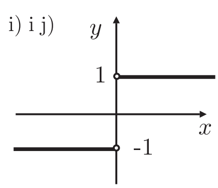
Sl. 766



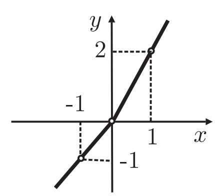
Sl. 767



Sl. 768

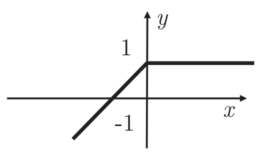


Sl. 769

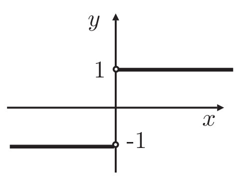


Sl. 770

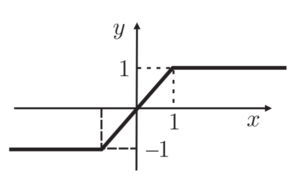
1677. Rešenja su, na primer: a) na slici 770, c) na slici 771 i g) na slici 772.



Sl. 771



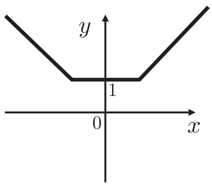
Sl. 772



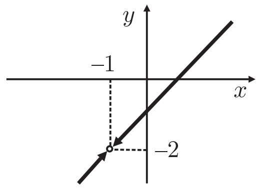
Sl. 773

1678. a) Uzimajući u obzir definiciju apsolutne vrednosti i vrednosti izraza $|x+1|$ i $|x-1|$, imamo $y = \begin{cases} -1, & x < -1 \\ x, & -1 \leq x \leq 1 \\ 1, & x > 1. \end{cases}$ Grafik je na slici 773.

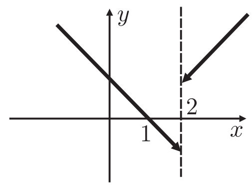
b) $y = \begin{cases} -x, & x < -1 \\ 1, & -1 \leq x \leq 1 \\ x, & x > 1. \end{cases}$ Grafik je na slici 774.



Sl. 774



Sl. 775



Sl. 776

e) $y = \dfrac{1}{2}(x + |x|)$, jer je $\sqrt{x^2} = |x|$ itd.

f) $y = \sqrt{(x+2)^2} + \sqrt{(x-1)^2} + \sqrt{(x-3)^2} = |x+2| + |x-1| + |x-3|$, itd.

g) $y = \dfrac{(x-1)(x+1)}{x+1} = x - 1$, $x \neq -1$, sl. 775. h) $y = \dfrac{(x-2)(x-1)}{|x-2|}$, $x \neq 2$.

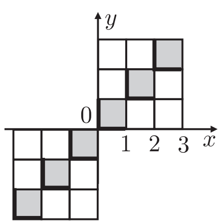
Za $x > 2$ je $y = x - 1$, a za $x < 2$ je $y = -x + 1$. Grafik je dat na slici 776.

1679. Izraz $\dfrac{1}{4m^2 + 12mn + 9n^2 + 1} = \dfrac{1}{(2m+3n)^2 + 1}$ ima najveću vrednost kad mu je imenilac najmanji, a to je za $2m + 3n = 0$. Tada je $4m + 6n = 2(2m + 3n) = 0$, pa data funkcija ima oblik $y = -2|x|$ itd.

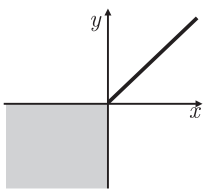
1680. Stavimo $x = 2$ i $x = \dfrac{1}{2}$ i dobijemo uslove: $\dfrac{1}{2}f(2) + 2f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 2$ i $\dfrac{1}{2}f\left(\dfrac{1}{2}\right) + 2f(2) = \dfrac{1}{2}$, odakle je $f(2) = 0$.

1681. Sabiranjem i oduzimanjem jednačina dobija se: $f\left(\dfrac{x}{x-1}\right) = \dfrac{3}{2}$ i $g(2x+1) = \dfrac{x}{2}$. Smenom $\dfrac{x}{x-1} = p$ i $2x + 1 = q$ dobija se $x = \dfrac{p}{p-1}$ i $x = \dfrac{q-1}{2}$, pa je $f(p) = \dfrac{3p}{2(p-1)}$ i $g(q) = \dfrac{q-1}{4}$, odnosno $f(x) = \dfrac{3x}{2(x-1)}$ i $g(x) = \dfrac{x-1}{4}$.

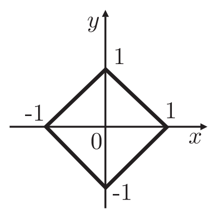
1682. Po definiciji data jednakost važi za svako x i y za koje je $n \leq x < n+1$, $n \leq y < n+1$, $n \in D$, a $E(x) = E(y) = n$. Tačke koje zadovoljavaju ove uslove osenčene su na slici 777. Skupu ne pripadaju gornje i desne ivice osenčenih kvadratića.



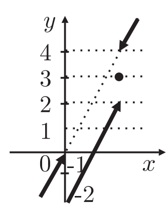
Sl. 777



Sl. 778



Sl. 779



Sl. 780

1683. Primetimo da x i y ne mogu imati suprotne znake. Na primer, ako je $x > 0$, onda je $x + |x| = 2x > 0$, pa mora biti i $y + |y| > 0$, a to ne može biti za $y < 0$. Prema tome, ako je $x > 0$ i $y > 0$, tada dati uslov postaje $2x = 2y$, odnosno $y = x$. Ako je $x \leq 0$ i $y \leq 0$, dobijamo $0 = 0$, pa sve tačke trećeg kvadranta zadovoljavaju taj uslov. Skup svih tačaka prikazan je na slici 778.

1684. Pošto je $|-x| = |x|$ i $|-y| = |y|$, to je traženi skup tačaka simetričan u odnosu na obe koordinatne ose. Ako je $x \geq 0$ i $y \geq 0$, dobijamo $x + y = 1$. Odsečak ove prave iz prvog kvadranta preslikamo u ostale kvadrante koordinatng sistema i dobijemo skup tačaka sa slike 779.

1685. Na primer, u slučaju a) imamo funkciju $y = \begin{cases} 2x, & \text{za} \quad x < 0 \\ -1, & \text{za} \quad x = 0 \\ 2x-2, & \text{za} \quad 0 < x < 2 \\ 3, & \text{za} \quad x = 2 \\ 2x, & \text{za} \quad x > 2 \end{cases}$. Grafik vidimo na slici 780.

1686. d), f) i g). Jednakost e) bila bi identitet uz uslov $x \neq 0$.

1687. Nemoguće su jednačine a), e), f), g), h), jer se svode na ekvivalentnu jednačinu $0 \cdot x = k$, $k \neq 0$. Neodređene su jednačine b), c), d), jer se svode na ekvivalentnu jednačinu $0 \cdot x = 0$, koja je zadovoljena za svako x.

1688. a) Jesu, jer dodavanjem $(-x)$ na obe strane prve jednačine dobija se $2x + (-x) = x + 1 + (-x)$, tj. $x = 1$. b) Jednačine su ekvivalentne, jer se druga dobija ako prvu pomnožimo sa 2. c) Jednačine su ekvivalentne, jer se svode na oblik $0 \cdot x = 1$, tj. obe jednačine su nemoguće.

d) Jednačine su ekvivalentne jer obe imaju jedno isto rešenje (to je 1). e) Nisu ekvivalentne.

1689. a) 7, b) 13, c) $5\frac{1}{3}$, d) 10, e) 15, f) 7, g) 2, h) 10, i) -1, j) 3, k) 3, l) 13, m) 13, n) 3, o) $0,2$, p) 3, q) 6.

1690. a) 2, b) 2, c) 2, d) -6, e) -13, f) $1\frac{6}{13}$, g) 8, h) $\frac{6}{5}$, i) 3, j) $\frac{11}{40}$.

1691. a) 3, b) 1, c) 5, d) Nema rešenja, e) -1, f) 4, g) $\frac{1}{3}$, h) Nema rešenja, i) $-\frac{3}{7}$, j) 5, k) 8, l) 3, m) jednačina je zadovoljena za svako x, osim $x = 0$ i $x = 2$, n) 2, o) 8, p) 5, q) -2.

1692. a) Za $x > 0$ je $|x| = x$, pa imamo $x + 1 = 5 \Rightarrow x = 4$. Za $x < 0$ je $|x| = -x$, pa je $-x + 1 = 5 \Rightarrow x = -4$. b) 8, -8; c) $x \geq 0$; d) 2 ili -2; e) 0; f) -5 ili $-\frac{1}{3}$; g) $-4 \leq x \leq 1$; h) $x = -2$ ili $x \geq 2$; i) Ako je $x > 4$, tada je $|x - 4| = x - 4$ i dobijamo $x = -5$, što nije moguće, jer $-5 < 4$. Za $x < 4$ je $|x - 4| = -x + 4$, pa dobijamo $x = \frac{1}{7}$ – to je jedinstveno rešenje. j) Na primer: $\sqrt{x^2 - 4x + 4} = \sqrt{(x-2)^2} = |x - 2|$. Slično transformišemo i ostale korene. Dobijamo jednačinu $|x - 2| - |x - 3| = |x - 1|$ koja nema rešenja. k) Slično prethodnom zadatku. Rešenja su $x = 1$ ili $x = 3$.

1693. a) $-a$, b) $-a$, c) $b - a$, d) 1, e) $\frac{a^2}{b-a}$, f) m, g) a, h) $\frac{a+b}{ab}$, i) $-b$, j) $6a$, k) $4a$.

1694. a) mn, b) $3b$, c) a, d) $c - d$.

1695. Data jednačina je ekvivalentna redom sa $\frac{x-29}{1971} - 1 + \frac{x-27}{1973} - 1 + \frac{x-25}{1975} - 1 + \frac{x-23}{1977} - 1 + \frac{x-21}{1979} - 1 + \frac{x-19}{1981} - 1 = \frac{x-1971}{29} - 1 + \frac{x-1973}{27} - 1 + \frac{x-1975}{25} - 1 + \frac{x-1977}{23} - 1 + \frac{x-1979}{21} - 1 + \frac{x-1981}{19} - 1 \Longleftrightarrow \frac{x-2000}{1971} + \frac{x-2000}{1973} + \frac{x-2000}{1975} + \frac{x-2000}{1977} + \frac{x-2000}{1979} + \frac{x-2000}{1981} = \frac{x-2000}{29} + \frac{x-2000}{27} + \frac{x-2000}{25} + \frac{x-2000}{23} + \frac{x-2000}{21} + \frac{x-2000}{19} \Longleftrightarrow (x - 2000)\left(\frac{1}{1971} + \frac{1}{1973} + \frac{1}{1975} + \frac{1}{1977} + \frac{1}{1979} + \frac{1}{1981} - \frac{1}{29} - \frac{1}{27} - \frac{1}{25} - \frac{1}{23} - \frac{1}{21} - \frac{1}{19}\right) = 0 \Longleftrightarrow x - 2000 = 0$. Rešenje je $x = 2000$.

1696. a) -1, b) 2, c) Ne mogu biti ekvivalentne, d) ekvivalentne su za svako a, za koje jednačine imaju smisla.

1697. a) $\frac{1}{2}$, b) 1, c) 4.

1698. a) $a=-2$, $b=0$, b) a= b, c) Rešenje je uvek određeno, d) $a=-3$, $b=0$.

1699. Za $a \neq b$ data jednačina se svodi na identičnost.

1700. 1) Jednačina je ekvivalentna sa $(a-2)(a+2)x=-(a+2)$. Ako je $a \neq 2$ i $a \neq -2$, rešenje jednačine (posle skraćivanja) je $x=\frac{1}{2-a}$. Ako je $a=2$, jednačina ima oblik $0 \cdot x=-4$, što nije moguće, dakle, nema rešenja. Ako je $a=-2$, jednačina se svodi na $0 \cdot x=0$, što je ispunjeno za svako realno x – jednačina je neodređena.

2) Jednačina je ekvivalentna sa $(b-a)x=a^2$, za $a \neq b$ i $a \neq -b$ pa je $x=\frac{a^2}{b-a}$.

3) Jednačina je ekvivalentna sa $(b-a)x=ab(b-a)$ pri uslovu $a \neq 0$ i $b \neq 0$. Ako je $a \neq b$, jedinstveno rešenje je $x=ab$. Za $a=b$ jednačina se svodi na $0 \cdot x=0$, tj. neodređena je.

4) Ako je $a \neq -c$ jedinstveno rešenje je $x=-\frac{ac+b^2}{a+c}$. Ako je $a=-c$ i $b^2=c^2$ jednačina je zadovoljena za svako x takvo da je $x \neq -b$ i $x \neq -c$, a ako je $a=-c$ i $b^2 \neq c^2$, nema rešenja.

5) Jednačina ima smisla za $a \neq 0$, $a \neq 1$ i $a \neq -1$ i tada je $x=\frac{a-1}{2}$.

6) Za $pq \neq 0$ je $y=0$ ako je $p \neq q$, a jednakost važi za svako y ako je $p=q$.

7) Za $abc \neq 0$ jednačina je ekvivalentna sa $(a+b+c)x=(a+b+c)^2$. Ako je $a+b+c \neq 0$ rešenje je $x=a+b+c$, a ako je $a+b+c=0$, jednačina prelazi u identitet $0 \cdot x=0$ zadovoljen za svako x.

8) Jednačina ima smisla za $a \neq b$ i $a \neq -b$. Ako je $b \neq 0$ i $a+ab+b^2 \neq 0$, rešenje je $x=a$. U protivnom dobijamo identitet.

9) Pri uslovu $x \neq a$ i $x \neq b$, biće $x=0$ za $a \neq b$, a identičnost $0 \cdot x=0$ imamo za $a=b$.

10) Zbog $a^2-5a+6=(a-2)(a-3)$, jednačina ima jedinstveno rešenje $x=\frac{1}{a-2}$ ako je $a \neq 2$ i $a \neq 3$. Ako je $a=2$ nema rešenja, a za $a=3$ dobijamo identičnost $0 \cdot x=0$.

11) Jednačina je ekvivalentna sa $cx=ab$. Za $c \neq 0$ je $x=\frac{ab}{c}$. Ako je $c=0$ i $ab=0$ dobijamo identičnost $0 \cdot x=0$ i ako je $c=0$ i $ab \neq 0$, jednačina nema rešenja.

12) Mora biti $m \neq n$ i $m \neq -n$. Ako je $m=0$, jednačina nema rešenja, a ako je $m \neq 0$, onda je $x=\frac{m^2-n^2}{2m}$.

13) Ne može biti $x=1$ ni $x=-1$. Tada je jednačina ekvivalentna sa $(a+b-1)x=a+b+1$. Ako je $a+b=1$, jednačina nema rešenja, a ako je $a+b \neq 1$, tada je $x=\frac{a+b+1}{a+b-1}$ uz dodatni uslov $a+b \neq 0$, jer bismo za $a+b=0$ dobili $x=-1$, a tada jednačina nema smisla.

14) Ako je $c \neq a$, onda je $x=\frac{c+a}{c^2+ac+a^2}$, a ako je $c=a$, jednačina je zadovoljena za svako x.

15) $x=\frac{a+b}{2}$ ako je $a-3b+1 \neq 0$. U protivnom imamo identičnost.

16) Za $mnp \neq 0$ jednačina je ekvivalentna sa $(mn+np+pm)x=(m+n+p)(mn+np+pm)$, pa za $mn+np+pm \neq 0$ ima jedinstveno rešenje $x=m+n+p$. U protivnom svodi se na identičnost $0 \cdot x=0$.

17) Za $a \neq 0$ je $x=\frac{3}{2a^2}$, a za $a=0$ imamo identičnost ako je $x \neq 0$.

18) Mora biti $abx \neq 0$. Ako razlomke $\frac{a+x}{ax}$, $\frac{b+a}{ab}$, $\frac{x+b}{bx}$ predstavimo u obliku $\frac{1}{x}+\frac{1}{a}$,

$\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$, $\frac{1}{b} + \frac{1}{x}$, jednačina se svodi na $\frac{2x^2}{x} + \frac{2a^2}{a} + \frac{2b^2}{b} = 0$. Za $a \neq -b$ rešenje je $x = -(a+b)$. Ako je $a = -b$, jednačina nema rešenja (jer $x \neq 0$).

19) Pri uslovu $ab \neq 0$, jednačina ima rešenje $x = 2b$ za $a \neq b$. U. protivnom je ekvivalentna sa $0 \cdot x = 0$.

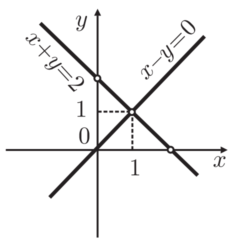
20) Pri uslovu $m \neq \pm n$, za $n \neq 0$ ima rešenje $x = -\frac{m^2+n^2}{4n}$. Za $n = 0$ nema rešenja.

21) Za $n \neq 1$ i $n \neq -1$ je $x = \frac{3}{4}$.

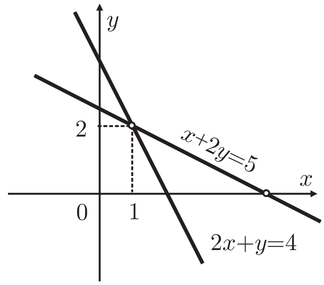
Slično se postupa i u ostalim slučajevima. Ovde dajemo rezultate za slučajeve kad su rešenja određena. Čitaocima prepuštamo diskusiju.

22) $y = 1$ 23) $y = \frac{1}{2a}$ 24) $x = ab$ 25) $y = \frac{3(a-b)}{a-3a}$ 26) $x = m$ 27) $x = a+b$ 28) $x = m-1$ 29) $y = \frac{c}{c-1}$ 30) $x = c$.

1701. a) Rešenja za slučajeve a) i 2) prikazana su na slkama 781 i 782. 3) $(1,3)$.

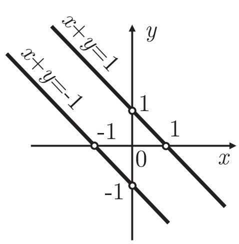


Sl. 781

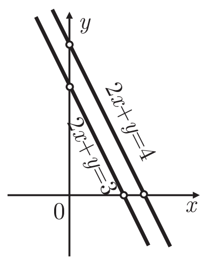


Sl. 782

b) Grafici su paralelne prave (sl. 783 i 784).



Sl. 783



Sl. 784

d) Grafici se poklapaju.

1702. 1) Sistem je saglasan. Rešenje je $(x,y) = (5,3)$. 2) Sistem nije saglasan. 3) Ima beskonačno mnogo rešenja, jer ako prvu jednačinu pomnožimo sa 0,6, dobićemo drugu. Dakle, sistem je ekvivalentan jednačini $6x - 9y = 4,2$, a njena rešenja su sve tačke odgovarajuće prave. 4) Sistem je neodređen, ima beskonačno mnogo rešenja. 5) Ako prvu jednačinu pomnožimo sa -2 i dodamo drugoj dobićemo nemoguću jednakost $0 = -3$. Dakle, sistem je nesaglasan (nemoguć) i nema rešenja. 6) i 7). Nema rešenja. 8) sistem nije saglasan.

1703. a) 1) 1; 2) -1; 3) 0; 4) 9; 5) -2.

b) 1) $(1,-1)$; 2) $(1,1)$; 3) $(1,3)$; 4) $(2,3)$; 5) $(9,2)$; 6) $(-5,-6)$; 7) $(59,369)$.

1704. a) $(5,7)$; b) $(3,1)$; c) $(-1,4)$; d) $(-1,-2)$; e) $(2,3)$; f) $(6,18)$; g) $(1,2)$; h) $(2,3)$; i) $(2,-5)$; j) $(3,2)$; k) $(11,6)$; l) $(5,9)$; m) $(6,8)$.

1705. a) Uvođenjem smena $\frac{1}{x}=u$ i $\frac{1}{y}=v$, dobijamo sistem $\begin{array}{l}3u+5v=16\\3u-3v=4\end{array}$, čije rešenje je $u=2$, $v=2$, pa je $x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{1}{2}$. b) $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$; c) $(2,5)$; d) $\left(\frac{1}{5},\frac{1}{4}\right)$; e) $(5,3)$. Smenom $\frac{1}{x+y}=u$, $\frac{1}{x-y}=v$, dobijamo sistem $\begin{array}{l}8(u+v)=5\\8(v-u)=3\end{array}$, čije rešenje je $u=\frac{1}{8}$, $v=\frac{1}{2}$. Dalje imamo sistem $\begin{array}{l}x+y=8\\x-y=2\end{array}$, čije rešenje je $x=5$, $y=3$; f) $(10,-3)$; g) $(2,3)$; h) $(5,3)$; i) $(7,4)$.

1706. a) Za $y\geq 0$ je $|y|=y$. Tada rešavamo sistem jednačina $\begin{array}{l}2x+3y=13\\3x-y=3\end{array}$, čije rešenje je $(2,3)$, tj. $x=2$, $y=3$. Ako je $y<0$, tada je $|y|=-y$, pa imamo sistem $\begin{array}{l}2x-3y=13\\3x-y=3\end{array}$, čije rešenje je $x=-\frac{4}{7}$, $y=-\frac{33}{7}$. Dakle, sistem ima dva rešenja: $(2,3)$ i $\left(-\frac{4}{7},-\frac{33}{7}\right)$.

b) Iz dveju datih jednačina dobijamo $|x-1|=1-|y-5|=y-5>0$, $|y-5|=6-y\Rightarrow y=\frac{11}{2}$; $|x-1|=y-5=\frac{1}{2}$. 1) $x-1=\frac{1}{2}\Rightarrow x_1=\frac{3}{2}$; 2) $x-1=-\frac{1}{2}\Rightarrow x_2=\frac{1}{2}$. Rešenja su $\left(\frac{3}{2},\frac{11}{2}\right)$ i $\left(\frac{1}{2},\frac{11}{2}\right)$.

Postupajući slično u ostalim slučajevima, dobićemo sledeća rešenja: c) $(-5,2)$ i $(3,2)$; d) $(5,5)$ i $(5,3)$. (*Uputstvo*: $x-3=1+|y-4|>0$.) e) $x\geq 0$, $y=1-x$. (*Uputstvo*: Pošto je $y=1-|x|$, to je $|x+y|=|1+x-|x||=1$.) i $x-|x|=0$; f) $\left(\frac{3}{2},\frac{2}{3}\right)$, $(-1,-1)$, $(1,1)$, $\left(-\frac{3}{2},-\frac{2}{3}\right)$; g) $(2,1)$; h) za $x\geq 0$, $y\geq 0$ je $(x,y)=(2,1)$; za $x\geq 0$, $y\leq 0$, $(x,y)=(0,-3)$, za $x\leq 0$, $y\geq 0$ je $(x,y)=(-6,9)$ i za $x\leq 0$, $y\leq 0$ je $(x,y)=(0,-3)$;

i) Slično prethodnom zadatku.

1° ($x\geq 0$ i $y\geq 1$) $\Rightarrow |x|=x$, i $|y-1|=y-1$, pa sistem postaje $\left.\begin{array}{l}x+y-1=1\\x+2y=3\end{array}\right\}\iff \left.\begin{array}{l}x+y=2\\x+2y=3\end{array}\right\}\iff y=1$ i $x=1$, što je moguće, jer je $x\geq 0$ i $y\geq 1$.

2° ($x\geq 0$ i $y<1$) $\Rightarrow |x|=x$ i $|y-1|=1-y$, pa je $\left.\begin{array}{l}x+1-y=1\\x+2y=3\end{array}\right\}\iff \left.\begin{array}{l}x-y=0\\x+2y=3\end{array}\right\}\iff$ $x=1$ i $y=1$, što je moguće, jer je $x\geq 0$ i $y<1$.

3° ($x<0$ i $y\geq 1$) $\Rightarrow |x|=-x$ i $|y-1|=y-1$, pa je $\left.\begin{array}{l}-x+y-1=1\\x+2y=3\end{array}\right\}\iff \left.\begin{array}{l}-x+y=2\\x+2y=3\end{array}\right\}\iff$ $y=\frac{5}{3}$ i $x=-\frac{1}{3}$, što je moguće.

4° ($x<0$ i $y<1$) $\Rightarrow |x|=-x$ i $|y-1|=1-y$, pa je $\left.\begin{array}{r}-x+1-y=2\\x+2y=3\end{array}\right\}\iff x=-3$ i $y=3$, što je nemoguće, jer je $x<0$ i $y<1$.

1707. a) $k\neq 7,5$; b) $k\neq 2$.

(*Uputstvo*: Sistem $\begin{array}{l}a_1x+b_1y=c_1\\a_2x+b_2y=c_2\end{array}$ je saglasan ako je $\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$.)

1708. (*Uputstvo*: Sistem $\begin{array}{l}a_1x+b_1y=c_1\\a_2x+b_2y=c_2\end{array}$ je neodređen ako je $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$ i ($a_1=b_1=c_1=0$, ili bar jedan od koeficijenata a_1 i b_1 nije jednak nuli, (Videti objašnjenje uz **zadatak 1710**.) a) $k=8$; b) $m=-3$; c) $a=6$, $b=21$; d) $m=\frac{10}{3}$, $n=\frac{4}{3}$; e) $a=3$, $b=5$.

1709. Treba da bude ispunjen uslov $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$, pa da sistem ne bude saglasan, tj. da nema rešenja a) $k=2$ $(k\neq 2)$; b) $4a+1=(b-1)^2$. (Za $a=-\frac{3}{16}$, $b=\frac{1}{2}$ sistem je neodređen); c) $a=-8$, $b\neq 24$. (Za $a\neq -8$ ima jedinstveno rešenje. Za $a=-8$, $b=24$ sistem je neodređen.)

1710. a) $x=1$, $y=\frac{5}{a}$, za $a\neq 0$. Za $a=0$ sistem je nemoguć. b) $x=\frac{7a}{2a-1}$, $y=\frac{3a^2-5a}{2a-1}$ za $a\neq\frac{1}{2}$. Ako je $a=\frac{1}{2}$, sistem je nemoguć. c) $x=\frac{6a-5}{a}$, $y=\frac{5-3a}{a}$, za $a\neq 0$. Ako je $a=0$, sistem je nemoguć. d) $x=\frac{14}{5a+4}$, $y=\frac{9a+10}{5a+4}$ za $a\neq -\frac{4}{5}$. Ako je $a=-\frac{4}{5}$, sistem je nemoguć. e) Sistem ima smisla za $a\neq 0$ i $b\neq 0$. Ako je $a+b=0$, sistem je nemoguć, a ako je $a+b\neq 0$, tada je $x=\frac{ab}{a+b}$, $y=\frac{b}{a+b}$. f) Sistem ima smisla za $b\neq 0$. U slučaju $a=\frac{1}{b}$, $b\neq 1$, sistem je nemoguć, a u slučaju $b=1$ i $a=1$ sistem je neodređen. g) Za $m\neq 2$ je $x=\frac{1}{2-m}$, $y=\frac{2(1-m)}{2-m}$. Za $m=2$ sistem je nemoguć. h) Za $ab\neq 0$, $x=3b$, $y=-2a$. i) Za $a\neq 6$ i $a\neq -2$ je $x=\frac{a-9}{a-6}$, $y=\frac{a}{a-6}$. Ako je $a=6$ sistem nije saglasan. Ako je $a=-2$, sistem je neodređen. j) Za $m\neq\frac{1}{3}$ i $m\neq -1$ je $x=\frac{2(m-1)}{3m-1}$, $y=\frac{m+1}{1-3m}$. Za $m=\frac{1}{3}$ sistem je nemoguć, a za $m=-1$ neodređen. k) Za $a+b\neq 0$ je $x=\frac{1}{a+b}$, $y=\frac{b^2}{a+b}$. Za $a+b=0$ sistem je nemoguć. l) Ako je $a\neq 1$ i $a\neq -1$, onda je $x=\frac{a}{a+1}$, $y=\frac{1}{a+1}$. Ako je $a=1$ sistem je ekvivalentan sa $\begin{matrix}x+y=1\\x+y=1\end{matrix}$, tj. neodređen je. Ako je $a=-1$, sistem je ekvivalentan sa $\begin{matrix}x+y=1\\x+y=-1\end{matrix}$, pa nije saglasan. m) Za $a^2\neq b^2$ je $x=\frac{a^2}{a-b}$, $y=\frac{b}{b-a}$. Za $a=b$ sistem je nemoguć, a za $a=-b$ je neodređen. n) Za $a\neq b$ i $a\neq -b$ i $ab\neq 0$ je $x=a+b$, $y=a-b$. o) Za $ab\neq 0$ je $x=\frac{a+b}{a}$, $y=\frac{a-b}{b}$. p) Date jednačine imaju smisla za $a\neq 0$, $b\neq 0$, $a\neq b$ i $a\neq -b$ i tada je $x=a(a+b)$, $y=b(a-b)$. q) Prva jednačina ima smisla za $a\neq b$ i $a\neq -b$. Tada, ako je $a\neq 0$ biće $x=(a+b)^2$, $y=(a-b)^2$, dok je za $a=0$ sistem neodređen. r) Sistem ima smisla za $x\neq a$ i $y\neq b$ i tada je neodređen. s) Nalazimo najpre $\frac{2x}{2y}=\frac{a+b-c}{a+c-b}$, odakle je $x=\frac{a+b-c}{a+c-b}\cdot y$. Ovo zamenimo u drugoj jednačini i posle sređivanja nalazimo $y=a+c-b$, pa je $x=a+b-c$. t) $x=\frac{(a-p)(a-q)}{a-b}$, $y=\frac{(b-p)(b-q)}{b-a}$. u) Koristeći se osobinama proporcija dobijamo $\frac{a(a+x)}{ab}=\frac{b(b+y)}{ab}=\frac{a^2+ax+b^2+by}{ab+ab}=\frac{a^2+b^2+c^2}{2ab}$, gde smo $ax+by$ zamenili sa c^2. Odavde imamo $\frac{a+x}{b}=\frac{a^2+b^2+c^2}{2ab}\Rightarrow x=\frac{b^2+c^2-a^2}{2a}$. Slično je $y=\frac{c^2+a^2-b^2}{2b}$.

1711. a) $(2,1)$; b) $(5,1)$; c) $(2,2)$; d) $(-1,-2)$; e) $(3,2,3)$; f) $(5,0,4)$; g) $(-1,0,1,0)$; h) $(-1,1,-1,1)$; i) $(1,2,0,3,4)$.

1712. a) Pomnožimo prvu jednačinu sa 4 i dodamo drugoj, pa pomnožimo istu jednačinu sa 2 i saberemo sa trećom jednačinom; dobićemo ekvivalentan sistem (1).

$$\begin{array}{lllll} 2x+3y+z=7 & & & 2x+3y+z=7 & \\ 5x+13y=18 & (1) & & 5x+13y=18 & (2) \\ 9x+10y=19 & & & 67x=67 & \end{array}$$

Sada pomnožimo drugu jednačinu sa -10, a treću sa 13, pa ih saberemo. Tada treća jednačina postaje $67x=67$. Tako sistem dovodimo na trougaoni oblik (2). Rešenje je $(1,1,2)$. Slično dobijamo rešenja ostalih sistema b) $(-2,-1,-3)$; c) $(0,1,-3)$; d) $(1,2,1,2)$; e) $(2,-3,3,-2)$.

1713. a) $(1,2,3)$; $b)(20,15,10)$; c) $(6,2,-2)$; d) $(10,15,18)$. e) Ako saberemo sve jednačine, dobićemo $3x+3y+3z+3u=168$, odnosno $x+y+z+u=56$. Sada oduzimamo od ove jednačine redom date jednačine i dobijamo $u=17$, $x=11$, $y=13$, $z=15$. f) Postupamo slično prethodnom zadatku. Rešenje je $(5,3,4,1,-3,-2)$.

1714. Slično **zadatku 1705**. a) $\left(\frac{1}{4},1,\frac{1}{2}\right)$; b) $(1,1,-1)$; c) $(3,4,0)$. d) Rešenje $x=y=z=0$ je očigledno. Ako pretpostavimo da je $x\neq 0$, $y\neq 0$, $z\neq 0$, sistem se može napisati u obliku: $\begin{array}{l}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{3}{2}\\ \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{5}{6}\\ \frac{1}{z}+\frac{1}{x}=\frac{4}{3}\end{array}$. Dalje postupamo kao u **zadatku 1213**. Dobijamo rešenje: $x=1$, $y=2$, $z=3$.

1715. a) Postupamo slično prethodnom zadatku. Sabiranjem datih jednačina dobijamo $2x+2y+2z=a+b+c$. Od ove jednakosti oduzimamo date pomnožene sa 2 i dobijamo $x=\frac{a+c-b}{2}$, $y=\frac{a+b-c}{2}$, $z=\frac{b+c-a}{2}$.

b) Slično prethodnom zadatku dobijamo $x+y+z=\frac{a^2+a+1}{a+2}$, $a\neq -2$, pa oduzimamo od ovoga date jednačine. Dobijamo, npr. $(1-a)x=-\frac{a^2-1}{a+2}$, odakle za $a\neq 1$ dobijamo $x=-\frac{a+1}{a+2}$. Slično je $y=\frac{1}{a+z}$, $z=\frac{(a+1)^2}{a+2}$. Ako je $a=1$, sistem je neodređen (sve jednačine prelaze u $x+y+z=1$), a za $a=-2$ sistem nije saglasan (svodi se na jednakost $0=3$.

c) Iz prve jednačine $z=-(x+y)$ zamenimo u drugu i treću. Za $a\neq b$, $b\neq c$, $c\neq a$ dobijamo $x=\frac{1}{(a-b)(a-c)}$, $y=\frac{1}{(a-b)(c-b)}$, $z=\frac{1}{(a-c)(b-c)}$. Ako su dva od brojeva a, b, c jednaki među sobom, ili je $a=b=c$, sistem nije saglasan.

d) Oduzimajući od prve jednačine drugu i od druge treću, dobijamo $\begin{array}{l}(a-b)(x+y)+(a^2-b^2)x=a^3-b^3\\ (b-c)(x+y)+(b^2-c^2)x=b^3-c^3\end{array}$. Ako je $a\neq b$ i $b\neq c$, ove jednačine daju $\begin{array}{l}x+y+(a+b)x=a^2+ab+b^2\\ x+y+(b+c)x=b^2+bc+c^2\end{array}$, pa oduzevši prvu od druge dobijamo $(a-c)x=a^2+ab-bc-c^2$, odnosno $(a-c)x=(a-c)(a+b+c)$. Za $a\neq c$ biće $x=a+b+c$. Dalje dobijamo $y=-(ab+bc+ca+a+b+c)$ i $z=abc+ab+bc+ca$.

e) *Uputstvo*: Pomnožimo prvu jednačinu sa $-a^2$, drugu sa a, treću sa -1, saberemo itd. Dobijamo $x=\frac{1}{(a-c)(b-c)}$, $y=\frac{1}{(a-b)(a-c)}$, $z=\frac{1}{(a-b)(a-c)}$.

f) Ako je $a+b+c\neq 0$ i nisu svi brojevi a, b, c jednaki, tada saberemo jednačine i dobijemo $x+y+z=3$. Priključimo ovoj jednačini prve dve i dobijemo jedinstveno rešenje $x=y=z=1$. Ako je $a+b+c\neq 0$ i $a=b=c$, sistem je neodređen. (Sve jednačine imaju oblik $x+y+z=3$.) U ostalim slučajevima sistem je takođe neodređen.

g) Ako je $a=b=c=1$, sistem je neodređen. (Rešenja zadovoljavaju uslov $x+y+z=1$.) Sistem je neodređen i ako su dva od brojeva a, b, c jednaki 1. Ako su bar dva od brojeva a, b, c različiti od 1, tada dobijamo rešenje $x=\frac{(b-1)(c-1)}{D}$, $y=\frac{(a-1)(c-1)}{D}$, $z=\frac{(a-1)(b-1)}{D}$, gde je $D=abc-a-b-c+2\neq 0$.

h) Očigledno je $x\neq 0$, $y\neq 0$, $z\neq 0$. Sistem se svodi na $\begin{array}{l}\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=c\\ \frac{a}{x}+\frac{c}{z}=b\\ \frac{a}{y}+\frac{c}{z}=a\end{array}$. Postupajući slično zadatku a), dobijamo $x=\frac{2a}{b+c-1}$, $y=\frac{2b}{a+c-b}$, $z=\frac{2c}{a+b-c}$.

i) Označimo jednake razlomke sa t i dobićemo rešenje $x_k = a_k + m_k \cdot t$, gde je $t = \dfrac{a - a_1 - a_2 - \cdots - a_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}$, $k \in \{1, 2, \dots, n\}$.

1716. Rešavajući po x, dobijamo $x = \dfrac{77y+1}{60} = \dfrac{60y + 17y + 1}{60} = y + \dfrac{17y+1}{60}$. Neka je ceo broj $\dfrac{17y+1}{60} = z$, tada je $y = \dfrac{60z - 1}{17} = 3z + \dfrac{9z-1}{17}$. Označimo sa $\dfrac{9z-1}{17}$ sa u, $u \in D$. Tada imamo $z = \dfrac{17u+1}{9} = 2u + \dfrac{1-u}{9}$. Na kraju, neka je $u = 1 - 9v$, $v \in D$. Prema uslovu zadatka z, u, v moraju biti celi brojevi. Sada izračunamo $z = 2 - 17v$, pa je $y = 7 - 60v$ i $x = 9 - 77v$, gde je $v \in D$. b) Slično prethodnom zadatku. Rešenja su $x = 4u - 1$, $y = 3u - 2$, gde je $u \in D$.

1717. a) Datu jednačinu možemo napisati kao $(x - y) \cdot (x + y) = 2 \cdot 2 \cdot 2$. Uzimajući u obzir sve kombinacije, dobijamo sledeće sisteme linearnih jednačina: $\left.\begin{matrix} x - y = 1 \\ x + y = 8 \end{matrix}\right\}$, $\left.\begin{matrix} x - y = 2 \\ x + y = 4 \end{matrix}\right\}$ od kojih samo drugi ima rešenje u skupu prirodnih brojeva: $x = 3$, $y = 1$.

Postupajući slično u slučajevima b), c) i d), dobijamo rešenja: b) $(7, 6)$;

c) $(53, 52)$, $(19, 16)$, $(13, 8)$, $(11, 4)$; d) $(495, 494)$, $(33, 10)$; e) $x(2 + y) = 1 \cdot 7$ i $x = 1$, $y = 5$;

f) $xy - x - y + 1 = 1$ ili $(x - 1)(y - 1) = 1$, odakle je $x = 2$, $y = 2$;

g) Neka je $|x - y| = n$, $n \in N$. Tada je $x + y = n^2$. Ako je $x > y$, imamo sistem jednačina $\begin{matrix} x + y = n^2 \\ x - y = n \end{matrix}$ koji daje $x = \dfrac{n(n+1)}{2}$, $y = \dfrac{n(n-1)}{2}$, dakle, $x, y \in N$. Ako je, pak, $x < y$, imaćemo $\begin{matrix} x + y = n^2 \\ y - x = n \end{matrix}$, odakle je $x = \dfrac{n(n-1)}{2}$, $y = \dfrac{n(n+1)}{2}$, gde je $n \in N$ i $n \neq 1$.

h) Kako je $x^2 + 2xy - 3y^2 = (x - y)(x + 3y) = 5$, dobijamo sistem $\begin{matrix} x - y = 1 \\ x + 3y = 5 \end{matrix}$, koji daje $x = 2$, $y = 1$. i) Slično prethodnom zadatku: $x = 8$, $y = 5$.

j) Nema rešenja u skupu prirodnih brojeva. k) $(6, 6)$, $(6, 4)$.

l) $(x - y)(x + y)(x^2 + y^2) = 1 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7$, pa kako je $x - y < x + y < x^2 + y^2$ sledi da je $\left.\begin{matrix} x - y = 1 \\ x + y = 5 \\ x^2 + y^2 = 35 \end{matrix}\right\}$ ili $\left.\begin{matrix} x - y = 1 \\ x + y = 7 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{matrix}\right\}$. Drugi sistem daje rešenje $x = 4$, $y = 3$.

m) $p(x+y) = xy \iff xy - px - py + p^2 = p^2 \iff (x - p)(y - p) = p^2$. Jedini delioci broja p^2 su 1, p i p^2, pa imamo tri mogućnosti: $\left.\begin{matrix} x - p = 1 \\ y - p = p^2 \end{matrix}\right\}$, $\left.\begin{matrix} x - p = p \\ y - p = p \end{matrix}\right\}$, $\left.\begin{matrix} x - p = p^2 \\ y - p = 1 \end{matrix}\right\}$, koje daju rešenja $x_1 = p + 1$, $y_1 = p^2 + p$; $x_2 = 2p$, $y_2 = 2p$; $x_3 = p^2 + p$, $y_3 = p + 1$.

n) $5p + 1 = x^2 \iff (x - 1)(x + 1) = 5p$ itd. Rešenja su $x = 6$, $p = 7$, ili $x = 4$, $p = 3$. o) Ako je $x = 1$, onda je $x^2 + 4 = 5$, a 5 je prost broj. Ako je $x \geq 2$, imamo $x^4 + 4 = p \iff x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2 = p \iff (x^2 + 2)^2 - (2x)^2 = p \iff (x^2 + 2 - 2x)(x^2 + 2 + 2x) = p \iff ((x - 1)^2 + 1)((x + 1)^2 + 1) = p$, a leva strana je složen broj. Ovaj slučaj nema rešenja za $x \geq 2$. Znači, jedino rešenje je $x = 1$ i $p = 5$.

p) Neka je $x \leq y \leq z$. Tada je $3z \geq xyz$. Znak $=$ može da važi samo ako je $x = y = z$, ali tada je $3z = z^3$, što nije moguće u skupu prirodnih brojeva. Zbog $z > 0$ važi $xy < 3$, pa je $x = 1$, $y = 1$ ili $x = 1$, $y = 2$. Rešenje daje samo drugi slučaj i tada je $z = 3$. Dakle, uz pretpostavku $x \leq y \leq z$ je $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$. Ako isključimo ovu pretpostavku, zaključujemo da je rešenje (x, y, z) svaka permutacija brojeva 1, 2, 3.

q) Očito nijedan od ovih brojeva nije jednak 1, jer bi tada leva strana jednakosti bila veća od 1. Takođe, nijedan od ovih brojeva nije veći od 2, jer bi tada za $a > 2$, na primer, bilo $\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2} + \dfrac{1}{d^2} \leq \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2} + \dfrac{1}{d^2} \leq \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4} < 1$. Preostala je samo jedna mogućnost $a = b = c = d = 2$, koja daje rešenje jednačine.

1718. a) $x^2 + 2x - 11 = y(3 + x) \iff y = \dfrac{x^2 + 2x - 1}{x + 3} = \dfrac{x^2 + 2x - 3 - 8}{x + 3} = \dfrac{(x - 1)(x + 3) - 8}{x + 3} = x - 1 - \dfrac{8}{x + 3}$. Prema tome, $y \in D$ ako je $x \in \{-11, -7, -5, -4, -2, -1, 1, 5\}$.

Odgovarajuće vrednosti za y su redom: -11, -6, -2, 3, -11, -6, -2, 3. Slično postupamo u slučajevima b), c) i d).

b) $xy = 10x + 10y \iff y = 10 + \dfrac{100}{x-10}$. Rešenja su:

$$(x, y) \in \{(11, 110),\ (12, 60),\ (14, 35),\ (15, 30),\ (20, 20),\ (30, 15),\ (35, 14),\ (60, 12),\ (110, 11)\}$$

c) Mora biti $x \neq 0$ i $y \neq 0$. Tada je $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{2} \iff y = 2 + \dfrac{4}{x-2}$ itd. Rešenja su $(-2, 1)$, $(1, -2)$, $(3, 6)$, $(4, 4)$, $(6, 3)$.

d) $xy - x = 2 + y^3 \iff x = y^2 + y + 1 + \dfrac{3}{y-1}$ i $y \neq 1$. Rešenja su $(10, 2)$, $(-2, 0)$, $(22, 4)$, $(2, -2)$.

e) $x^2 + y^2 = 1 \iff (x^2 = 0$ i $y^2 = 1) \vee (x^2 = 1$ i $y^2 = 0)$. Rešenja su $(1, 0)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)(0, -1)$; f) $(1, 3)$, $(1, 1)$, $(2, 2)$, $(0, 2)$;

g) $x^2 + xy + y^2 = 1 \iff (x + y)^2 + x^2 + y^2 = 2$, pa su dva sabirka na levoj strani jednaka 1, a jedan je jednak 0. Rešenja su $(0, 1)$, $(0, -1)$, $(1, 0)$, $(-1, 0)$, $(1, -1)$, $(-1, 0)$.

h) $x^2 + 4y^2 + z^4 = 2x - 20y - 23 \iff (x - 1)^2 + (2y + 5)^2 + z^4 = 3$, odakle sledi da je svaki sabirak na levoj strani jednakosti jednak 1, pa dobijamo rešenja $(x, y, z) \in \{(2, -2, 1)$, $(2, -2, -1)$, $(2, -3, 1)$, $(2, -3, -1)$, $(0, -2, 1)$, $(0, -2, -1)$, $(0 - 3, 1)$, $(0, -3, -1)\}$.

1719. a) $x^2 + 3x + 24 = p^2$, $p \in N \iff 4x^2 + 12x + 96 = 4p^2 \iff (2x + 3)^2 + 87 = 4p^2 \iff (2p - 2x - 3)(2p + 2x + 3) = 87 = 3 \cdot 29$. Imamo sledeće mogućnosti

$$1)\ \left.\begin{array}{l} 2p - 2x - 3 = \pm 1 \\ 2p + 2x + 3 = \pm 87 \end{array}\right\} \Rightarrow x = \frac{\pm 86 - 6}{4} \qquad 2)\ \left.\begin{array}{l} 2p - 2x - 3 = \pm 3 \\ 2p + 2x + 3 = \pm 29 \end{array}\right\} \Rightarrow x = \frac{\pm 26 - 6}{4}$$

$$3)\ \left.\begin{array}{l} 2p - 2x - 3 = \pm 29 \\ 2p + 2x + 3 = \pm 3 \end{array}\right\} \Rightarrow x = \frac{\mp 26 - 6}{4} \qquad 4)\ \left.\begin{array}{l} 2p - 2x - 3 = \pm 87 \\ 2p + 2x + 3 = \pm 1 \end{array}\right\} \Rightarrow x = \frac{\mp 86 - 6}{4}.$$

Lako se dobije da su svi traženi celi brojevi 20, 5, -8, -23.

b) Slično, iz $n^2 + 2n + 13 = m^2$ dobijamo $m = 4$ i $n = 1$.

c) Neka je $8n^2 + 10n + 3 = p$, gde je p prost broj, tada je $(4n + 3)(2n + 1) = p$. Odavde sledi da mora biti $4n + 3 = 1$ ili $2n + 1 = 1$, odnosno $4n + 3 = 1$ ili $2n + 1 = -1$. Proverom dolazimo do jedinstvenog rešenja $p = 3$, $n = 0$.

1720. Iz jednakosti $\dfrac{44}{65} = \dfrac{x}{13} + \dfrac{y}{5}$ sledi jednačina $5x + 13y = 44$, koju treba rešiti u skupu prirodnih brojeva. Izrazimo x preko y: $x = \dfrac{44 - 13y}{5} = 8 - 2y + \dfrac{4 - 3y}{5}$. Stavimo $\dfrac{4 - 3y}{5} = u$ (u ceo broj), odakle je $y = \dfrac{4 - 5u}{3} = 1 - 2u + \dfrac{1 + u}{3}$. Uvedimo novu celobrojnu promenljivu $v = \dfrac{1 + u}{3}$, odakle dobijamo $u = 3v - 1$. Izrazimo najzad x i y pomoću v: $x = 13v + 1$, $y = -5v + 3$.

Za $v = 0$ dobijamo jedino rešenje jednačine u skupu prirodnih brojeva $x = 1$, $y = 3$.

1721. Prema uslovu zadatka je $20x - 50y = 130$, gde je sa x označen broj novčanica od 20 dinara koje Zoran daje Dušanu, a sa y broj novčanica od 50 dinara koje Dušan treba (kao kusur) da vrati Zoranu, da bi razlika vrednosti novca koji je Zoran dao Dušanu i novca koji je Dušan vratio Zoranu bila 130 dinara. No, gornja jednačina je ekvivalentna jednačini $2x - 5y = 13$. Njeno rešenje se nalazi kao u prethodnom zadatku i glasi $x = 5u + 4$, $y = 2u - 1$, pri čemu je u prirodan broj. Na primer, za $u = 1$, dobije se rešenje $x = 9$, $y = 1$, čiji je smisao sledeći: ako Zoran dâ Dušanu 9 dvobanki, Dušan će vratiti jednu petobanku, da bi mu ostalo 130 dinara.

1722. Iz $x^2 - y^2 = 101010$, sledi $(x - y)(x + y) - 2 \cdot 50505$. Brojevi $(x - y)$ i $(x + y)$ su oba parna ili oba neparna. Zbog toga njihov proizvod mora biti ili deljiv sa 4 ili neparan broj, a broj $2 \cdot 50505$ ne zadovoljava ni jedan od tih uslova.

1723. Obeležimo sa a i b dužine kateta, a sa c dužinu hipotenuze pravouglog trougla i neka je $a = 21$. Tada je $c^2 - b^2 = 21^2$, odnosno $(c + b)(c - b) = 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7$. Kako su $c + b$ i $c - b$ celi brojevi i $c + b > c - b$, to je $c - b < 21$, pa postoje sledeće mogućnosti

$$\left.\begin{array}{l} c - b = 3 \\ c + b = 147 \end{array}\right\} \iff \begin{array}{l} c = 75 \\ b = 72 \end{array}, \quad \left.\begin{array}{l} c - b = 7 \\ c + b = 63 \end{array}\right\} \iff \begin{array}{l} c = 35 \\ b = 28 \end{array}, \quad \left.\begin{array}{l} c - b = 9 \\ c + b = 49 \end{array}\right\} \iff \begin{array}{l} c = 29 \\ b = 20 \end{array}.$$

Prema tome, postoje tri tražena trougla sa stranicama $a = 21$, $b = 72$, $c = 75$; $a = 21$, $b = 28$, $c = 35$ i $a = 21$, $b = 20$, $c = 29$.

1724. Iz $11x + 8y = 73$ zaključujemo da je $0 \leq x \leq 6$ i da x mora da bude neparan broj. Zamenom $x = 1$, $x = 3$, $x = 5$ u jednačinu dobija se jedino rešenje $x = 3$ i $y = 5$.

1725. a) Broj x ne može biti deljiv sa 3, jer ni 17 nije deljivo sa 3. Prema tome, $x = 3k \pm 1$, pa data jednačina prelazi u $9k^2 \pm 6k + 1 - 3y = 17$, odakle je $3(k^2 \pm 2k - y) = 16$, što nije moguće, jer 16 nije deljivo sa 3. Jednačina nema rešenja.

b) Iz date jednačine je jasno da je x neparan broj. Napišimo jednačinu u sledećem obliku $3x^2 - 3 - 4y^2 = 10$, odnosno $3(x-1)(x+1) - 4y^2 = 10$. Brojevi $(x-1)$ i $(x+1)$ su parni, pa je njihov proizvod deljiv sa 4 i leva strana jednačine je broj deljiv sa 4. To nije moguće, jer broj 10 nije deljiv sa 4. c) Slično zadatku pod a).

d) Pošto je $2x^2 - 7$ neparan broj, mora biti i y neparan broj: $y = 2k + 1$. Tada jednačina prelazi u $x^2 = 10k^2 + 10k + 6$. Sledi da je x paran broj $x = 2m$. Kada ovo zamenimo i skratimo, dobićemo $2x = 5k(k+1) + 3$. Broj $k(k+1)$ je paran, $2x$ je takođe paran, ali je 3 neparan broj, pa je ova jednakost nemoguća.

e) $x^2 + 4x - 8y = 11 \Longleftrightarrow (x+3)(x+1) - 8y = 14$. Slično zadatku b). f) Slično zadatku d).

g) Kvadrat celog broj, pri deljenju sa 8 može imati ostatak 0, 1 ili 4. Neka je $x^2 \equiv 0 \pmod 8$, tada je $y^2 \equiv 2 \pmod 8$, što nije moguće. Ako je $x^2 \equiv 1 \pmod 8$, tada je $y^2 \equiv 21 \pmod 8 \equiv 5 \pmod 8$, što nije moguće. Konačno, ako je $x^2 \equiv 4$, $\pmod 8$, tada je $y^2 \equiv 6 \pmod 8$, što takođe nije moguće.

h) Broj 1992 je deljiv sa 3, pa mora biti $x^2 + y^2$ deljivo sa 3. Ako je $x = 3m$ i $y = 3n$, onda su x^2 i y^2 deljivi sa 9, a takođe i njihov zbir. Međutim, 1992 nije deljivo sa 9. Ako x i y nisu deljivi sa 3, njihovi kvadrati pri deljenju sa 3 daju ostatak 1, pa nikako zbir $x^2 + y^2$ ne može biti deljiv sa 3. Jednačina nema rešenja.

i) Videti **zadatak 1722**. Jednačina nema rešenja. j) Slično prethodnom zadatku.

1726. Neka je $\frac{a}{b}$, $b \neq 0$, dati razlomak, a x traženi broj, tada $\frac{a+x}{b+x} = \frac{b}{a}$. Za $a \neq b$ je $x = -(a+b)$. Ako je $a = b$, rešenje je svaki broj x.

1727. Ako je x dužina stuba $\frac{x}{3} + \frac{x}{2} + 2 = x$. Odavde $x = 12$ metara.

1728. $x : y = 2 : 3$ i $(x+1) : (y+4) = 1 : 2$. Traženi brojevi su 4 i 6.

1729. $x = 2y + 2$ i $x + y = 2(x - y) + 8$, pa je $x = 22$, $y = 10$.

1730. Jabuka je 23, a dece četvoro.

1731. Sin ima x godina, otac y godina: $y - 5 = 5(x-5)$ i $y + 3 = 3(x+3)$. Odavde $x = 13$, $y = 45$ godina.

1732. Dužina druge stranice je x, a dijagonale $x + 1$. Tada je $(x+1)^2 = x^2 + 49$, pa je $x = 24$.

1733. Traženi dvocifreni brojevi $(10x + y)$ zadovoljavaju, prema datom uslovu, jednačinu $10x + y = 3x + 3y + 10$, odakle je $y = \frac{7x - 10}{2}$. Ova jednačina daje rešenje za $x \in \{2, 4\}$. Odgovarajuće vrednosti za y su 2 i 9, pa je traženi skup brojeva dvočlani skup $\{22, 49\}$.

1734. Ako sa x označimo broj zadataka koje je učenik rešio, onda mu je ostalo $(20 - x)$ nerešenih zadataka. Prema uslovu možemo sastaviti jednačinu $4x - 3(20 - x) = 38$, odakle je $x = 14$. Tačno je izradio 14 zadataka, tj. 70 %.

1735. Ako je strelac imao m pogodaka i n promašaja, tada je $5m - 3n = 0$ i $10 < m+n < 20$. Jedini par prirodnih brojeva koji zadovoljava ova dva uslova je $m = 6$, $n = 10$. Dakle, strelac je ispalio 16 hitaca, od kojih 6 u metu.

1736. Označimo sa x godine starosti Mace i sa $2x$ Dačinu starost u vreme kada je bio od Mace dva puta stariji. Sada on ima $4x$ godina, a Maca $3x$ godina. Kroz 15 godina Dača će imati $4x + 15$ godina, a Maca $3x + 15$ godina. Tada će imati zajedno $7x + 30$ godina, što je jednako 100 godina. Tako dobijamo jednačinu $7x + 30 = 100$, odakle je $x = 10$. Dakle, Dači je 40, a Maci 30 godina.

1737. Neka je dužina veće sveće bila a. Za sat izgori $a : 3,5 = \frac{2}{7}a$, a ako je dužina manje b, za jedan sat izgori $\frac{b}{5}$ sveće. Posle 2 časa ostalo je: $\frac{3}{7}a = \frac{3}{5}b$. Odavde je $a = \frac{7}{5}b = 1,40b$. Znači, u početku prva sveća je bila duža za 40 %.

1738. Označimo sa a, b, c, d cene ovih knjiga. Prema datim uslovima je $a + b + c = 16$, $a + b + d = 21$, $a + c + d = 24$ i $b + c + d = 26$. Ako saberemo sve ove jednakosti dobićemo $3(a+b+c+d) = 87$, odakle je $a+b+c+d = 29$. Sada, na primer, iz $(a+b+c)+d = 29$, odnosno: $16 + d = 29$, dobijamo $d = 13$. Slično izračunamo i ostale cene $a = 3$, $b = 5$, $c = 8$.

1739. Uslove $x + y + z = 23$ i $50x + 100y + 500z = 4550$, uz ograničenja $x < y$ i $x < z$, zadovoljava samo $x = 5$, $y = 11$, $z = 7$.

1740. Da bi uhvatio lisicu pas će morati da pređe 120 m.

1741. $60 \cdot 72 + 70 \cdot 96 = (60 + 70 + x) \cdot 46$. Odavde $x = 110$ litara.

1742. $8(x - 66) = 2(66 - y)$ i $7x + 3y = 10 \cdot 59$. Toplija voda ima $x = 80°$ C, a hladnija $y = 10°$ C.

1743. U drugoj leguri je bilo 88 % srebra.

1744. Neka su x i y količine datih smesa, koje mešanjem daju 8 kg nove smese, $x + y = 8$. U prvoj smesi ima $\frac{2}{5}x$ zlata, u drugoj $\frac{3}{10}y$ zlata, a u trećoj, novodobijenoj smesi, treba da bude $\frac{5}{16} \cdot 8 = 2,5$ kg zlata. Otuda dobijamo drugu jednačinu $\frac{2}{5}x + \frac{3}{10}y = 2,5$. Dobijeni sistem jednačina daje rešenje $x = 1$ kg i $y = 7$ kg. Dakle, treba pomešati 1 kg prve i 7 kg druge smese.

1745. U 9 kg smese treba da bude 3,5 kg zlata i 5,5 kg srebra ($3,5 : 5,5 = 7 : 11$ i $3,5 + 5,5 = 9$). Pretpostavimo da brojevi 4, 5, 2 i 5 u datim razmerama $4 : 5$ i $2 : 5$ označavaju brojeve kg zlata i srebra. Ako bismo uzeli x delova smese sa razmerom $4 : 5$ i y delova smese sa razmerom $2 : 5$ dobili bismo sistem linearnih jednačina $4x + 2y = 3,5$ i $5x + 5y = 5,5$. Rešenje je $x = \frac{13}{20}$ i $y = \frac{9}{20}$. Prema tome, treba uzeti $\frac{13}{20}(4 + 5) = \frac{117}{20}$ kg prve smese i $\frac{9}{20}(2 + 5) = \frac{63}{20}$ kg druge smese.

1746. Ako je masa bakra x kg, a cinka y kg, imamo jednačine
$x + y = 40$ i $\frac{100}{9} \cdot \frac{x}{100} + \frac{100}{7} \cdot \frac{y}{100} = 5$. Na osnovu toga se dobija $x = 17,5$; $y = 22,5$.

1747. 15 kg i 8 kg. **1748.** Legirano je 3 kg legure finoće 800 $^0/_{00}$

1749. Ostalo je 187,5 kg gvožđa.

1750. Pomešane količine stoje u razmeri 9 : 35.

1751. $\frac{6}{10} + \frac{2}{x} = 1$ i $x = 5$ dana. **1752.** $x = 13\frac{1}{3}$ časova.

1753. $5x + 8y = 340$ i $8x + 5y = 310$, daje $x = 20$, $y = 30$.

1754. $\frac{12}{x} + \frac{12}{y} = 1$ i $\frac{5}{x} + \frac{5}{y} + \frac{17,5}{y} = 1$. Odavde je $x = 20$, $y = 30$.

1755. Ako je dužina puta x km, onda prema potrebnom planu, dužine deonica triju brigada stoje u produženoj razmeri, kao $6 : 5 : 4$. Dakle, prva brigada trebalo je da gradi $\frac{6}{15}x$ km, druga $\frac{5}{15}x$ km i treća $\frac{4}{15}x$ km puta. Prema izmenjenom planu, dužine izgrađenih deonica stajaće u razmeri $1 : 5 : 4$. Znači, da će prva brigada izgraditi $\frac{1}{10}x$ km, druga $\frac{5}{10}x$ km i treća $\frac{4}{10}x$ km puta. Po novom planu samo prva brigada je dobila manju deonicu, a prema uslovu zadatka to je za 9 km manje nego što je prvobitno planirano. Odavde dobijamo jednakost $\frac{6}{15}x = \frac{1}{10}x + 9$. Rešenje jednačine je dužina puta koji se gradi, a to je $x = 30$ km.

1756. Za jedan dan prva brigada bi završila $\frac{1}{10}$ posla, a druga $\frac{1}{15}$ posla. Trećina prve brigade za jedan dan završi $\frac{1}{30}$ posla, a zajedno sa delom druge brigade, za dan izvrši $\frac{1}{12}$ posla. Otuda dobijamo jednačinu $\frac{1}{30}+\frac{x}{15}=\frac{1}{12}$, čije rešenje je $x=\frac{3}{4}$. Dakle, angažovano je 75 % druge brigade.

1757. Označimo sa x dnevnu normu, a sa y (dana) planirani rok. Prvi uslov daje jednačinu $(x+2)(y-3)=xy$, a drugi $(x+4)(y-5)=xy$. Rešenje je $x=8$, $y=15$. Ivica je dužan da za 15 dana odštampa 120 tabaka.

1758. Rešenje dobijamo iz $\frac{7}{x}+\frac{4}{y}=\frac{5}{9}$ i $\frac{4}{x}+\frac{4}{y}=\frac{7}{18}$. Dakle, $x=18$, $y=24$.

1759. Slično prethodnom zadatku. Manji kran bi radio 36 sati, a veći 24 sata.

1760. Neka je planirana količina x m^3. Po planu drvoseča bi radio $\frac{x-226,8}{6}$ dana, a on je posao okončao za $\frac{x}{9,6}$ dana. (Pripremao je svakog dana po $6\cdot 1,6$ m$^3=9,6$ m^3 drva). Rešenje dobijamo iz jednačine $\frac{x-226,8}{6}-12=\frac{x}{9,6}$. Rešenje je $x=796,8\text{m}^3$.

1761. 360 i 200 kubnih metara.

1762. Pretpostavimo da je Zoranu potrebno z, Dušku d, a Nikoli n dana za samostalno izvršenje posla. Računajući koliki bi deo posla ovi dečaci uradili za jedan dan, dobićemo jednačine $\frac{1}{d}+\frac{1}{z}=\frac{1}{20}$, $\frac{1}{d}+\frac{1}{n}=\frac{1}{15}$, $\frac{1}{n}+\frac{1}{z}=\frac{1}{12}$. Sabiranjem ovih triju jednakosti dobićemo $\frac{2}{d}+\frac{2}{n}+\frac{2}{z}=\frac{12}{60}$, tj. $\frac{1}{d}+\frac{1}{n}+\frac{1}{z}=\frac{1}{10}$. Oduzimanjem jedne po jedne, prvih triju jednačina, od poslednje dobijamo $\frac{1}{n}=\frac{1}{20}$, $\frac{1}{z}=\frac{1}{30}$, $\frac{1}{d}=\frac{1}{60}$. Znači, ako sami rade, Zoranu treba 30 dana, Dušanu 60, a Nikoli 20 dana.

1763. 3 sata, 6 sati, 2 sata. **1764.** 1 sat i 4,8 minuta.

1765. Pretpostavimo da bi prvi radnik sam završio posao za a sati, drugi za b sati, treći za c sati i četvrti za d sati. Tada bi svaki od njih za jedan sat završio redom deo posla $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \frac{1}{d}$. Prva tri prema uslovu, za jedan sat završe zajedno $\frac{1}{6}$ posla. Tako dobijamo jednačinu $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{6}$. Slično, ostali uslovi daju: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{d}=\frac{1}{7,5}$ i $\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=\frac{1}{10}$. Sabiranjem ove tri jednakosti dobićemo: $2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)=\frac{1}{6}+\frac{1}{7,5}+\frac{1}{10}$, ili $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{6}+\frac{2}{15}+\frac{1}{10}\right)=\frac{1}{5}$. Znači, sva četvorica radnika zajedno, za jedan sat bi završili $\frac{1}{5}$ posla, a ceo posao završili bi za 5 sati.

1766. $15\cdot 30=9x$, pa je $x=50$ km na dan.

1767. Označimo sa t sekundi vreme proteklo do susreta, a put izrazimo u metrima. Koristeći poznatu vezu: $s=v\cdot t$, (s je put, v brzina) dobićemo jednačinu $8t+10(t-5400)=135000$. Odavde je $t=10500$ sec. Vozovi će se sresti posle 2 časa i 55 minuta i biće udaljeni 84 km od Beograda, tj. susrešće se kod Šapca.

1768. Brzina parobroda je 16,8 km/h, a vode 4,2 km/h.

1769. Označimo sa t časova vreme koje pešaka posle 3 pređena kilometra deli od polaska autobusa. Prema datim uslovima dobijamo jednačinu: $3\left(t+\frac{1}{2}\right)=4\left(t-\frac{2}{3}\right)$, jer je 30 min$=\frac{1}{2}$

časa i 40 min= $\frac{2}{3}$ časa. Odavde je $t = \frac{25}{6}$ časa. Od Draginca do autobuske stanice ima $3 + 3\left(t + \frac{1}{2}\right)$ km, a to je 17 km.

1770. Neka je prvi pešak prešao put od A do B za $2t$ časova. Tada je rastojanje s od A do B: $s = 5t + 4t = 9t$. Odredićemo koliko je vremena trebalo drugom pešaku za isti put $\frac{9t}{2} : 5 + \frac{9t}{2} : 4 = \frac{9t}{10} + \frac{9t}{8} = \frac{81t}{40} = 2t + \frac{t}{40}$. Dakle, drugi pešak je sporiji za $\frac{t}{40}$ časova.

Ako je rastojanje od A do B 18 km, tada je $9t = 18$, odnosno $t = 2$ časa. Drugi pešak je zaostao za $\frac{2}{40} \cdot 4 = \frac{1}{5}$ km, odnosno za 200 metara.

1771. Neka je planirano da biciklista pređe 96 km za x časova. On je to učinio za $x-2$ časova i kretao se brzinom $\frac{96}{x-2}$ km/h. Prema drugom uslovu imamo jednačinu (1 čas 15 min= $\frac{5}{4}$ časa) $\frac{96}{x-2} - 1 = \frac{5}{4} \cdot \frac{96}{x}$. Sređivanjem dobijamo $x^2 + 22x = 240$, odnosno $x(x+22) = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 5 = 8\cdot 30$. Dakle, $x = 8$, pa je brzina bicikliste $96 : 6 = 16$ km/h.

1772. Ako brzinu toka reke označimo sa x, a brzinu koju čamac postiže bez uticaja toka reke označimo sa v, onda je $v + x = 2$, jer je brzina kretanja čamca nizvodno iznosila 2 km/h. Osim toga, brzine kretanja čamca uzvodno i nizvodno stoje u razmeri $2 : 3$, pa je $\frac{v-x}{v+x} = \frac{2}{3}$. Rešavajući dobijeni sistem jednačina nalazimo da je $x = 3$ km/h.

1773. Prosečna brzina je 67,5 km/h.

1774. Označimo brzinu prvog automobila sa x km/h, a drugog sa y km/h. Prvi uslov daje jednačinu $3x = 2,5y$, a drug: $1,5x + 24 = 1,5y$. Rešenje ovog sistema jednačina je $x = 80$ i $y = 96$.

1775. 350 km.

1776. Ako sa t časova označimo vreme za koje je biciklista stigao iz Jelava na most, onda je prvog dana biciklista stigao na most za $(t + 2,5)$ časova. Na osnovu toga sastavimo jednačinu $8(t + 2,5) + 10t = 38$, odakle dobijamo $t = 1$ čas. Biciklista je prešao preko mosta u 14 časova.

1777. Neka brži motociklista prelazi x metara u minutu, a sporiji y metara u minutu. Iz prvog uslova imamo $x + y = 1650$, a iz drugog $x - y = \frac{1650}{11} = 150$. Rešenje sistema jednačina daje $x = 900$ m i $y = 750$ m u minutu, odnosno prvi se kretao brzinom od 54 km/h, a drugi 45 km/h.

1778. Aca je prvi prošao kroz cilj sa prednošću od 222,2 metra.

1779. Neka udaljenost signala od Bara iznosi x km. Da je voz nastavio vožnju bez zadržavanja brzinom od 60 km/h, stigao bi u Bar po redu vožnje za $\frac{x}{60}$ časova. Posle zadržavanja od 3 min= $\frac{1}{20}$ časa, voz je morao nadoknaditi izgubljeno vreme. Stoga je nastavio vožnju brzinom od 75 km/h. Na osnovu ovih podataka možemo sastaviti jednačinu $\frac{x}{60} = \frac{1}{20} + \frac{x}{75}$. Odavde dobijamo: $x = 15$ km.

1780. 1440 km.

1781. Označimo sa v planiranu brzinu i sa t u časovima izraženo vreme za koje je nadoknađeno zakašnjenje. Povećana brzina iznosi $\frac{6}{5}v$. U momentu t važi jednakost $\frac{6}{5}v \cdot t = v\left(t + \frac{1}{4}\right)$ koja se transformiše u jednakost $\frac{v \cdot t}{5} = \frac{v}{4}$. Ovo važi za $t = \frac{5}{4}$. Dakle, voz je nadoknadio zakašnjenje za 1 sat i 15 minuta.

1782. Pretpostavimo da voz za 1 sekundu pređe v metara, a da je dužina voza x metara. Tada je lokomotiva za 27 sekundi prešla $(225 + x)$ metara, tj. $27v = 225 + x$. Zbog kretanja pešaka u smeru suprotnom kretanju voza, za 9 sekundi lokomotiva prelazi $(x - 9)$ metara, tj. $9v = x - 9$.

Rešavanjem dobijenog sistema jednačina po nepoznatim v i x nalazimo da je $x = 126$ metara, to je dužina voza, i $v = 13$ metara u sekundi. Brzina kretanja voza je $13 \cdot 3600$ metara na sat, odnosno 46,8 km/h.

1783. Neka rastojanje od A do B iznosi s. Označimo sa V_A brzinu voza koji polazi iz mesta A, a sa t vreme od polaska do prvog susreta sa prvim vozom. Za vreme t prvi voz je prešao put od 50 km, tj. $V_A \cdot t = 50$. Oba voza zajedno prešli su relaciju od A do B jedanput. (Na slici 785 put koji je prešao prvi voz je AC, put koji je prešao drugi voz je BC, a ukupno su prešli $AC + BC = AB = s$). Do sledećeg susreta oba voza su zajedno prešla put dužine $3s$. To se jasno vidi na slici 786: prvi voz je prešao put $AB + BD$, a drugi $BA + AD$.

Sl. 785

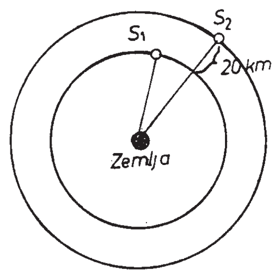
Sl. 786

Kako je $BD + AD = s = AB$, to je $AB + BD + BA + AD = 3s$. Prema uslovu, brzine vozova su ravnomerne, pa je za prelaženje tri puta dužeg puta potrebno 3 puta više vremena. Stoga je prvi voz do drugog susreta prešao put $V_A \cdot 3t$, odnosno $3V_At = s + 30$. Zamenjujući $V_At = 50$, dobijamo $150 = s + 30$, odakle je $s = 120$. Dakle, udaljenost od A do B iznosi 120 km.

1784. Neka je s km rastojanje od Beograda do Kladova. Put Beograd–Kladovo–Beograd hidrobus je prešao za vreme t: $t = \frac{x}{60} + \frac{x}{40}$. Prosečna brzina na celom putu iznosi $v = \frac{2x}{t} = 48$ km/h.

1785. 50 km/h i 40 km/h.

1786. Označimo sa r poluprečnik orbite i sa V_1 brzinu bližeg satelita. Tada je $(r+20)$ poluprečnik orbite drugog satelita, sl. 787. Brzina prvog je $V_1 = \frac{2r\pi}{20}$, a brzina drugog $V_2 = \frac{2(r+20)\pi}{20} = \frac{2r\pi}{20} + 2\pi = V_1 + 2\pi$. Odavde je $V_2 - V_1 = 2\pi$ km/h$\approx 6,28$ km/h.



Sl. 787

1787. Slično prethodnom zadatku izračunamo da je orbita drugog satelita za 20π km$= 62{,}8$ km duža od orbite prvog i iznosi $(20 \cdot 6280 + 62,8)$ km $= 125662,8$ km. Drugi satelit načini pun krug za 20,01 časova. Sateliti će biti u istom međusobnom položaju kada drugi satelit bude kasnio za 20 časova, a to će biti posle 2000 časova, odnosno 18. maja iste godine u 20 časova i 2 minuta.

1788. Brzina je $\frac{17370 \cdot 6,28}{24} = 4545,45$ km/h približno.

1789. Fiksirana tačka iznad ekvatora na visini satelita, rotira oko Zemljine ose (pun krug pređe za 24 časa) brzinom od približno 1190 metara u sekundi. Zbog toga je relativna brzina satelita koji se kreće suprotno zemljinom obrtanju, tj. sa istoka na zapad, 3190 metara u sekundi, a drugog 810 metara u sekundi. Prvi će biti iznad dijametralno suprotne tačke u 16 časova 28 minuta i 33 sekunde, a drugi u 5 časova 37 minuta i 39 sekundi sledećeg dana.

1790. Iz uslova imamo jednačine $V_1 : V_2 = 2 : 3$ i $24V_2 - 24V_1 = 90432$, gde je 90432 km dužina orbite. Odavde je $V_1 = 7536$ km/h i $V_2 = 11304$ km/h.

1791. Ako su V_1 i V_2 brzine vozova, tada je $V_1 + V_2 = 248,5 : 3\frac{7}{45} = 78,75$ m/s i $V_1 - V_2 = 248,5 : 28,4 = 8,75$ m/s. Odavde je $V_1 = 43,75$ m/s i $V_2 = 35$ m/s, odnosno $V_1 = 157,5$ km/h i $V_2 = 126$ km/h.

1792. Označimo sa x broj stvari koje je kupio muž, a sa y broj stvari koje je kupila žena. Tada za svaki bračni par važi jednakost $x^2 - y^2 = 63$. Ova jednačina daje rešenja $x = 32$ i $y = 31$, $x = 12$ i $y = 9$, $x = 8$ i $y = 1$ (videti **zadatak 1717**). Kako je $32 - 9 = 23$, zaključujemo da je Zoran kupio 32 predmeta, a Irena 9 itd. Bračni parovi su Zoran i Maja, Dušan i Irena, Nikola i Iva.

1793. Neka je $1900+10x+y$ godina Nadinog rođenja. Tada je $103-(10x+y)=1+9+x+y+30$, a odavde dobijamo diofantsku jednačinu: $11x+2y=63$, koja daje rešenje $y=4$ i $x=5$. Nada je rođena 1954. godine.

1794. Da bi se gume jednako istrošile, moraju se voziti isti broj kilometara na prednjem i na zadnjem točku. Pretpostavimo da svaka guma pređe x km na prednjem i x km na zadnjem točku, dok se savim istroši. Nepoznata x tada zadovoljava uslov: $\frac{1}{25000}+\frac{1}{15000}=\frac{1}{x}$. Odavde je $x=9375$ km. Motociklista će promeniti mesta gumama posle 9375 km vožnje, a posle 18750 km mora uzeti nove gume.

1795. a) Neka je s udaljenost od A do B. Vreme t potrebno da autobus pređe put od A do B i natrag, iznosi $t=\frac{s}{60}+\frac{s}{30}=\frac{s}{20}$, pa je tražena prosečna brzina $V=2s:t=2s:\frac{s}{20}=40$ km/h. Povećana brzina je 50 km, pa je $2s=50\cdot 4\frac{4}{5}$, odakle je $s=120$ km.

b) U povratku po redu vožnje autobus putuje 4 časa, a zbog gubitka 48 minuta, treba isti put da pređe za $3\frac{1}{5}$ časa. Potrebna brzina je $120:3\frac{1}{3}=37,5$ km/h. Autobus treba da poveća prosečnu brizinu u povratku za četvrtinu, odnosno za 25 %.

1796. Treba odrediti koliko dugo je leteo patrolni avion. To je vreme t koje je proteklo od polaska do susreta dva bombardera. Dobijamo ga iz jednačine $450t+370t=1845$. Odavde je $t=2,25$ časova. Za to vreme patrolni avion je preleteo $2,25\cdot 800$ km $=1800$ km, pa je potrošio $18\cdot 120=2160$ litara kerozina.

1797. Neka su v_1, v_2 i v redom brzine kojima se kreću Mladen, Olja i pokretno stepenište. Neka su t_1 i t_2 vremena koja provedu Mladen i Olja na stepeništu i neka je t vreme za koje neki stepenik prođe vidljiv deo. Tada imamo $15=v_1t_1$ i $10=v_2t_2$, pa kako je $v_1=2v_2$, biće i $15=2v_2t_1$. Sada dobijamo $\frac{2v_2t_1}{v_2t_2}=\frac{15}{10}$, a odavde izlazi da je $\frac{t_1}{t_2}=\frac{3}{4}$.

Označimo sa s broj vidljivih stepenica. Tada iz $s-15=vt_1$ i $s-10=vt_2$ dobićemo $\frac{t_1}{t_2}=\frac{s-15}{s-10}$. Zamenimo $\frac{t_1}{t_2}=\frac{3}{4}$ i biće $\frac{s-15}{s-10}=\frac{3}{4}$, odakle je $s=30$. Dakle, pokretno stepenište ima 30 vidljivih stepenica.

1798. Označimo cenu tašne sa x, cenu pera sa y i cenu knjige sa z. Tada iz uslova zadatka sledi da važe sledeće jednakosti $\frac{x}{5}+\frac{y}{2}+\frac{z}{2,5}=160$, $\frac{x}{2}+\frac{y}{4}+\frac{z}{3}=240$. Oslobađanjem od razlomaka dobijamo jednačine $2x+5y+4z=1600$ i $6x+3y+4z=2880$. Saberimo ove jednačine i dobićemo $8x+8y+8z=4480$, odakle je $x+y+z=560$. Suzana je potrošila ukupno 560 din.

1799. Kada od x litara alkohola odlijemo 2 litra i dolijemo 2 litra vode u rastvoru će biti $(x-2)$ litara čistog alkohola, tj. dobićemo rastvor od $\frac{(x-2)\cdot 100}{x}$ procenata alkohola. Ukupna količina čistog alkohola posle drugog presipanja biće $x-2-2\cdot\frac{x-2}{x}$ litara, a to je prema uslovu $0,36x$. Tako dobijemo jednačinu $x-2-\frac{2(x-2)}{x}=0,36x$. Posle množenja sa x dobijamo $x(x-2)-2(x-2)=0,36x^2$, odnosno $(x-2)^2=0,36x^2$. Kako su x i $x-2$ pozitivne veličine, biće $x-2=0,6x$, odakle je $x=5$. Dakle, posuda sadrži 5 litara rastvora.

1800. Deo posude koji je bio ispunjen 85-procentnim rastvorom, označimo sa x, $x<1$. Broj procenata alkohola u posudi je $85x$. Dopunjavanjem posude dodali smo $21(1-x)$ procenata i tada ih ima ukupno $21+64x$. Odlivanjem, količina alkohola se smanji za $(1-x)(21+64x)$. Poslednjim dolivanjem dodali smo opet $21(1-x)$ procenata alkohola. Na kraju dobijemo $21+64x^2=70$, odakle je $x=\frac{7}{8}$. Dakle, $\frac{7}{8}$ posude bilo je ispunjeno na početku.

1801. Broj kokoški, jaja i dinara izrazićemo preko broja zečeva, koji ćemo označiti sa z. Kokoški je dobio $\frac{3z}{2}$, a one su snele $\frac{3z}{2}\cdot\frac{z}{2}=\frac{3z^2}{4}$ jaja. Za jaja je dobio $\frac{3z^2}{4\cdot 9}\cdot\frac{z}{2}=72000$ dinara. Odavde je $z=120$. Dakle, Noca je imao 120 zečeva i za njih je dobio 180 kokoški.

1802. Vodimo računa o tome da trava svakodnevno raste. 64 krave za 30 dana popasu $64 \cdot 30 = 1920$ "kravljih porcija", a 36 krava za 60 dana popasu $36 \cdot 60 = 2160$ "kravljih porcija". Dakle, za 30 dana broj porcija se povećao za 240 (to je $2160 - 1920$), što znači da dnevno izraste trave za 8 porcija i da je u startu livada imala 1680 porcija.

a) Za 35 dana biće $1680 + 8 \cdot 35 = 1960$ porcija. To će da popase $1960 : 35 = 56$ krava.

b) Označimo sa x broj dana za koje će 50 krava popasti livadu. Njima treba $50x$ porcija, pa dobijamo jednačinu $50x = 1680 + 8x$. Odavde je $x = 40$ dana.

1803. Isto vreme će pokazati kada prvi napreduje šest časova, a drugi isto toliko zaostane. Tačno vreme pokazivaće kada prvi napreduje 12 časova, a drugi isto toliko zaostaje. Isto vreme pokazaće 29. juna, a tačno vreme 26. decembra.

1804. Minutna kazaljka se kreće 12 puta brže od satne. U svakom momentu rastojanje između kazaljki iznosi $\frac{11}{12}$ od puta koji je prešla minutna kazaljka. U momentu poklapanja ta razlika je pun krug. Ako sa x označimo broj minuta proteklih do poklapanja, biće $\frac{11}{12}x = 60$. Dakle, $x = 65\frac{5}{11}$ minuta. Do poklapanja prvi put dolazi u 1 čas i $\frac{5}{11}$ minuta. U toku 12 časova do poklapanja dolazi 11 puta.

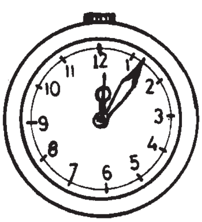
1805. Slično prethodnom zadatku. Do poklapanja kazaljki će doći posle $21\frac{9}{11}$ minuta.

1806. Slično **zadatku 1804**. Rešenje je 7 časova i $5\frac{5}{11}$ minuta. To se događa 11 puta tokom 12 časova.

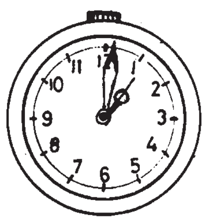
1807. Označimo sa x broj minuta za koliko je prošlo 7 sati u prvom slučaju. Dok velika kazaljka prođe ceo krug, mala prođe dvanaesti deo, a to je podeljak koji odgovara petoj minuti. Mala kazaljka startuje sa broja 7, tj. sa 35-og podeljka, a velika sa broja 12, tj. sa početnog položaja. U momentu poklapanja kazaljki važiće jednakost $35 + \frac{x}{12} = x$. Odavde je $x = \frac{420}{11}$.

U drugom slučaju položaji kazaljki razlikuju se za 30 podeljaka, pa imamo jednačinu $5+\frac{y}{12} = y - 30$, gde smo sa y označili broj minuta posle 1 sata, kada kazaljke zatvaraju opruženi ugao. Odavde je $y = \frac{420}{41}$. Dakle, $x = y$, pa je od polaska u školu do povratka prošlo ravno 6 sati.

1808. Dok kazaljke sa slike 788 zamene mesta i posle x minuta dođu u položaj sa slike 789 one zajedno pređu pun krug. Prema razmatranju iz **zadatka 1804** dobijamo jednakost $x+\frac{x}{12} = 60$. Odavde je $x = \frac{720}{13} = 55\frac{5}{13}$ minuta – toliko je Nemanja radio zadatak.



Sl. 788



Sl. 789

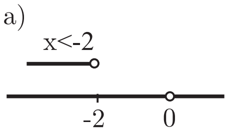
Neka je Nemanja počeo sa radom u 12 časova i y minuta. Rastojanje između kazaljki je $\frac{11}{12}y$, a to je $\frac{1}{13}$ punog kruga. Dakle, $\frac{11}{12}y = \frac{1}{13} \cdot 60$, a odavde je $y = 5\frac{5}{143}$ minuta. Prema tome, Nemanja je počeo sa radom u 12 časova i $\frac{5}{143}$ minuta, a završio u 13 časova i $\frac{60}{143}$ minuta.

1809. Koncert je trajao od 18 časova i $47\frac{119}{143}$ minuta do 21 čas i $33\frac{141}{143}$ minuta, ukupno 2 časa i $46\frac{2}{13}$ minuta.

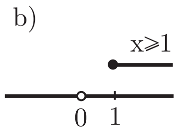
1810. Na osnovu rešenja **zadatka 1806** lako se možemo uveriti da kazaljke koje obrazuju opružen ugao nikada ne mogu tačno zameniti mesta.

1811. a) $x < 2$; b) $x < 3$; c) $x < -36$; d) $x > \frac{24}{37}$; e) $x > \frac{33}{7}$; f) $x < 1$; g) $x < 7$; h) $x \geq 2$; i) $x \geq \frac{8}{5}$; j) $x \leq 4$; k) $x \geq -1$; l) $x \geq -2$.

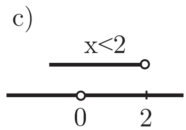
1812. Rešenja su prikazana na slikama 790–793.



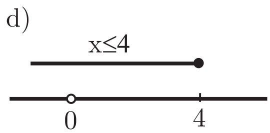
Sl. 790



Sl. 791



Sl. 792



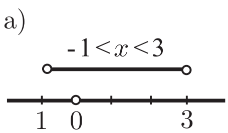
Sl. 793

1813. a) Datoj nejednačini ekvivalentna je nemoguća nejednačina $0 \cdot x < -5$.

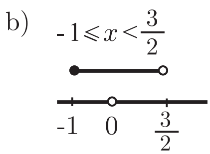
b) Svodi se na $0 \cdot x > 24$, što nije moguće.

1814. a) Svodi se na $0 \cdot x < 1$, a ovo je tačno za svako realno x. b) Dobijamo $0 \cdot x < 6$. c) Ekvivalentno sa $0 \cdot x \geq -10$.

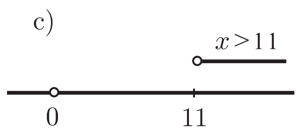
1815. Neka od rešenja su data na sledećim slikama.



Sl. 794



Sl. 795



Sl. 796

1817. a) $3 < x < 9$; b) $\frac{53}{4} < x < 20$; c) Nema rešenja; d) $x > 2$; e) Nema rešenja; f) $2 < x < 3$.

1818. $x - 1$.

1819. a) Ako je $x - 1 \geq 0$, tj. $x \geq 1$, data nejednakost postaje $x - 1 > 2$, odakle je $x > 3$. Ako je $x - 1 < 0$, tj. $x < 1$, tada dobijamo $1 - x > 2$, odakle je $x < -1$. Rešenja nejednačine su $x < -1$ ili $x > 3$.

b) Može se rešiti slično prethodnom zadatku, ili zamenjujući datu nejednačinu ekvivalentnim sistemom: $-1 < 2x - 5 < 1$. Odavde je $2 < x < 3$.

c) $-1 \leq x \leq 7$. d) $1 < x < 3$. e) $x > -1$. f) Nema rešenja. g) $x < -1$.

h) $-1 \leq |x| - 2 \leq 1$, odnosno $1 \leq |x| \leq 3$. Rešenja su $-3 \leq x \leq -1$, $1 \leq x \leq 3$.

1820. a) $x < -3 \lor x > 2$; b) $5 < x < 7$; c) $-8 < x < -3$; d) $-\frac{5}{3} < x < \frac{1}{2}$; e) $-2 < x < 2$; f) $x < -\frac{5}{2} \lor x > \frac{5}{2}$; g) $-1 < x < 1$; h) $-\frac{2}{3} < x < \frac{2}{3}$; i) $x > 1$.

1821. a) $x \neq -1$; b) $(2x + 1)^2 < 0$, nema rešenja; c) $(x - 2)(x + 3) < 0$, $-3 < x < 2$; d) $(x - 1)^2 + 4 < 0$, nema rešenja;

e) rešenja su svi realni brojevi x, jer je $x^2 - x + 1 \geq 0 \iff \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$;

f) $2x^2 - 3x + 7 = 2\left(x^2 - \frac{3}{2}x + \left(\frac{3}{4}\right)^2\right) - \left(\frac{3}{4}\right)^2 + 7 = 2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{47}{8} > 0$ za $\forall x$. Nejednačina nema rešenja.

g) Slično prethodnom. Rešenje je svaki realan broj x.

h) $x^2 + 2x > 6x - 15 \iff (x-2)^2 + 11 > 0$. Rešenje je svaki realan broj x. i) $x < 3$. (*Uputstvo*: Razložiti levu stranu na proste činioce.)

1822. a) $x < -2 \vee x > 2$; b) $1 < x < \frac{3}{2}$; c) $x < -\frac{1}{4} \vee x > \frac{3}{5}$; d) $-1 < x < 0$;

e) $x < 0 \vee x > 2$; f) $x < -1$; g) $x < -2 \vee x > -\frac{2}{3}$; h) $x < \frac{3}{2} \vee x > 9$;

i) $-\frac{3}{2} < x < -\frac{2}{3}$; j) $\frac{2}{3} < x < \frac{5}{7}$; k) $-\frac{7}{8} < x < -\frac{1}{6} \vee x > \frac{5}{4}$;

l) $\frac{1}{2x-1} < \frac{2}{3x+1} \iff \frac{3-x}{(2x-1)(3x+1)} < 0$. Rešenja su $-\frac{1}{3} < x < \frac{1}{2} \vee x > 3$.

m) Ekvivalentno sa $\frac{1}{(x+2)(x+1)} > 0$. Rešenja su $x < -2 \vee x > -1$. n) $x < -1 \vee 0 < x < 1$;

o) $x < -2 \vee x > 2$; p) $x > -2$; q) $x < -1 \vee 0 < x < \frac{1}{2} \vee x > \frac{1}{2}$.

r) $-2 < x - 1 \vee 1 < x < 3$; s) $1 < x < 2 \vee x > 3$; t) $x < -3 \vee x > 1$.

1823. a) $-\frac{3}{2} < x < 4$; b) $x > 2 \vee x < 3$; c) Svako realno x. **1824.** $x = 1$.

1825. a) Za $x > 0$ dobijamo $x^2 - x < 0$, odakle je $0 < x < 1$. Za $x < 0$ biće $x^2 + x < 0$, odakle je $-1 < x < 0$. *II rešenje*: Datu nejednakost možemo zapisati u obliku $|x^2| - |x| < 0$, koja daje uslov $0 < |x| < 1$, a odavde je $-1 < x < 0 \vee 0 < x < 1$. b) $x < -2 \vee -1 < x < 1 \vee x > 2$. c) $x < -4 \vee 0 < x < 4$. d) $-2 < x^2 - x - 4 < 2$. Rešenje je $-2 < x < -1 \vee 2 < x < 3$.
e) $x < 0 \vee x > 1$. f) $x < 0 \vee 0 < x < 2$. g) $-3 < x < -\frac{5}{3}$. h) $(x < 3 \wedge x \neq 1) \vee (x > 5)$.

i) $2 < x < 5$. j) $x \neq -1$, pa je rešenje $-\frac{3}{2} < x < -1 \vee x > -1$. k) $x \neq \frac{1}{2}$ i $x \neq -\frac{1}{2}$.

l) Nema rešenja.

1826. a) Za $a = 0$ data nejednakost postaje $0 \cdot x > -5$, pa je zadovoljena za svako realno x. Za $a > 0$ je $x > -\frac{5}{a}$, a za $a < 0$ rešenje je $x < -\frac{5}{a}$.

b) Datu nejednakost napišimo u obliku $(a-1)x > a - 2$. Za $a = 1$ je $0 \cdot x > -1$ ispunjeno za svako realno x. Ako je $a > 1$, rešenje je $x > \frac{a-2}{a-1}$, a ako je $a < 1$, tada je $x < \frac{a-2}{a-1}$.

c) Data nejednačina je ekvivalentna sa $\frac{(9-4a)x + 4a - 3}{24a} > 0$. Razlikujemo slučajeve $a > 0 \Rightarrow (9-4a)x + 4a - 3 > 0$ ili $a < 0 \Rightarrow (9-4a)x + 4a - 3 < 0$. Dalje kao u prethodnim slučajevima. Rešenja su $\left(x > \frac{3-4a}{9-4a} \text{ za } 0 < a < \frac{9}{4}\right)$ ili $\left(x < \frac{3-4a}{9-4a} \text{ za } a > \frac{9}{4} \text{ ili } a < 0\right)$ ili (x je svaki realan broj za $a = \frac{9}{4}$). d) $x > a^2 - 1$.

e) Za $a = -1$ imamo $0 \cdot x > 0$, što je nemoguće. Za $a > -1$ je $x > 1 - a$, a za $a < -1$ je $x < 1 - a$.

f) Za $a > 2$ je $x < \frac{5(a-2)}{2(a+10)}$, a ako je $-10 < a < 2$, biće $x > \frac{5(a-2)}{2(a+10)}$ i ako je $a < -10$, rešenje je $x < \frac{5(a-2)}{2(a+10)}$. Za $a = -10$, rešenje je svaki realan broj x.

g) Za $a = \dfrac{1}{2}$ rešenje je svaki realan broj x. Za $0 < a < \dfrac{1}{2}$ je $x < \dfrac{2-2a}{3-6a}$, za $a > \dfrac{1}{2}$ je $x > \dfrac{2-2a}{3-6a}$, a za $a < 0$ je $x > \dfrac{2-2a}{3-6a}$.

h) Za $a = -1$ imamo $0 \cdot x < 1$, što važi za svako realno x. Za $a > -1$ je $x < \dfrac{1}{a+1}$, a za $a < -1$ je $x > \dfrac{1}{a+1}$.

1827. $-\dfrac{17}{8} < b < 0$.

1828. $m < -4 \vee m > 2$.

1829. $\dfrac{26}{3} < m < \dfrac{91}{5}$.

1830. $10 < a < 12$.

1831. a) Za sve realne vrednosti parametra m dati sistem jednačina ima jedinstveno rešenje $x = \dfrac{3m+8}{m^2+6}$, $y = \dfrac{4m-9}{m^2+6}$. Prema tome, uslov $x > 0$, $y < 0$ važi ako i samo ako je $-\dfrac{8}{3} < m < \dfrac{9}{4}$, a kako je m ceo broj, to $m \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. b) $m = 0$ ili $m = 1$. c) $a > 1$.

1832. Rešenja sistema zadovoljavaju uslov $x \geq 0$ i $y \geq 0$. a) $p < 1$. b) $-3 < p \leq 0$.

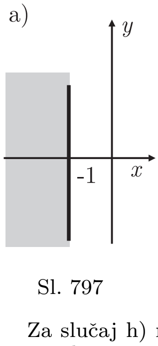
1833. a) $k < -6$ ili $k > 2$. b) $-2 < k < -1 \vee k > 0$.

1834. $m < -\dfrac{5}{2} \vee m > -\dfrac{2}{3}$.

1835. Marina je kupila dve banane, pa jedna banana staje manje od 50 centi: $x \leq 50$ centi. Otuda zaključujemo da Nada nema više od 3 eura (inače bi kupila bar 8 banana), a Persa nema više od 5 eura. Nada ne može imati 2 eura ili manje, jer bi u tom slučaju cena bila $x < 200 : 6 = 33,3$. Tada Persa ne bi mogla imati 3 eura, jer bi onda bilo $x < 200 : 11 \leq 27$, pa bi Nada Mogla kupiti 7 banana. Ne može Persa imati ni 4 ili više eura, jer bi tada bilo $400 : 33,3 \geq 12$, a Persa može da kupi najviše 11 banana. Sledi da Nada ima tačno 3 euara i slično se utvrdi da Persa ima tačno 5 eura. Budući da Nada i Persa ne mogu za 8 eura da kupe 18 banana, to je $x > 1800 : 11$, tj. $x > 44$. Kako je $500 : 46 < 11$, sledi da je $x < 46$. Konačno zaključujemo da je $x = 45$. Dakle, cena banane je 45 centi, sledi da je $x < 46$. Konačno zaključujemo da je $x = 45$. Dakle, cena banane je 45 centi.

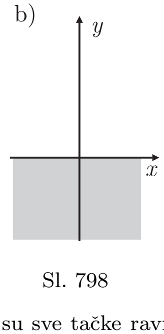
1836. Rešenja su prikazana na slikama 797–801.

a)



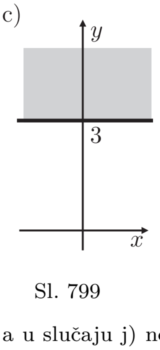
Sl. 797

b)



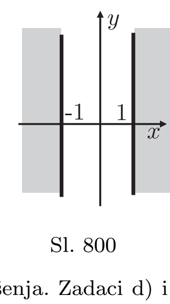
Sl. 798

c)



Sl. 799

d) i f)



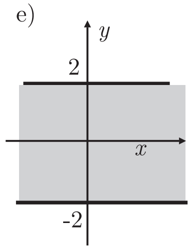
Sl. 800

Za slučaj h) rešenja su sve tačke ravni xOy, a u slučaju j) nema rešenja. Zadaci d) i i) su rešeni na slici 801 itd.

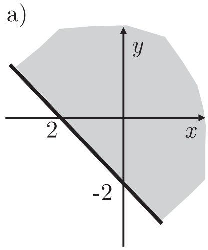
1837. Rešenja a) i c) data su na slikama 802 i 803. d) Videti **zadatak 1684** i sliku 779. e) Videti rešenje na slici 804: $-1 < x + y < 1$;

f) ekvivalentno sa $|y| < |x|$ (odnosno sa $(y - x)(y + x) < 0$), sl. 805,

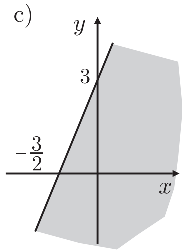
g) $(x - y + 1)(x + y - 1) < 0$ itd.



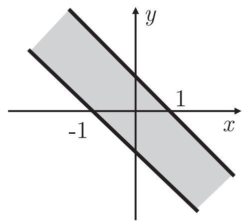
Sl. 801



Sl. 802

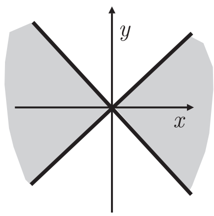


Sl. 803

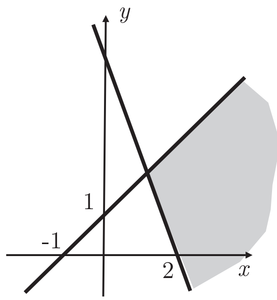


Sl. 804

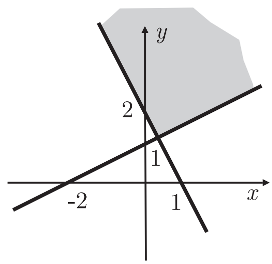
1838. Rešenje zadatka a) je dato na sl. 806 a rešenja zadatka b) na sl. 807.



Sl. 805

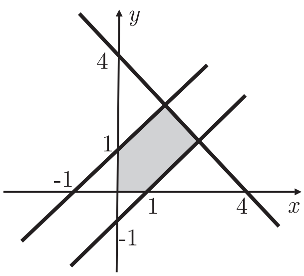


Sl. 806

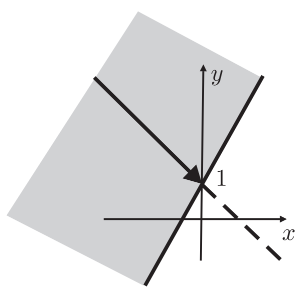


Sl. 807

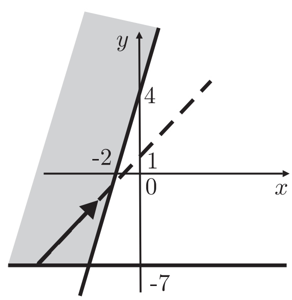
1839. Rešenje zadatka b) dato je na slici 808. Ostali slučajevi se rešavaju slično.



Sl. 808



Sl. 809



Sl. 810

1840. Slučaj a) dat je na slici 809. Rešenje je samo poluprava sa strelicom u osenčenom delu ravni.

Slučaj c) dat je na slici 810. Rešenje je duž u osenčenom delu.

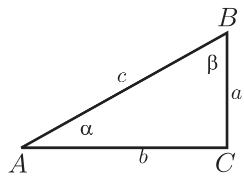
DODATAK

1. TRIGONOMETRIJA PRAVOUGLOG TROUGLA

U pravouglom trouglu ABC, sl. 1, vrednosti trigonometrijskih funkcija oštrog ugla α se definišu kao:

$\sin\alpha = \dfrac{a}{c}$, $\cos\alpha = \dfrac{b}{c}$, $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{a}{b}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{b}{a}$.

Za svaki oštar ugao α ispunjeno je:
$0 < \sin\alpha < 1$, $0 < \cos\alpha < 1$, $\operatorname{tg}\alpha > 0$, $c\operatorname{tg}\alpha > 0$.



Sl. 1

Vrednosti trigonometrijskih funkcija uglova od 30°, 45°, 60°, lako se izračunavaju, a funkcije uglova od 0° i 90° daju se po definiciji. Te vrednosti dajemo u sledećoj tablici. (U literaturi se često, umesto "nije definisano", nalazi simbol "∞", čime se ističe da se vrednost neograničeno povećava).

Funkcija	Ugao								
	0°		30°		45°		90°	90°	
$\sin\alpha$	0	$\nearrow$	$\dfrac{1}{2}$	$\nearrow$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\nearrow$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	1
$\cos\alpha$	1	$\searrow$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\searrow$	$\dfrac{1}{2}$	$\searrow$	0
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\nearrow$	$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$\sqrt{3}$	$\nearrow$	nije def.
$\operatorname{ctg}\alpha$	nije def.	$\searrow$	$\sqrt{3}$	$\searrow$	1	$\searrow$	$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$	$\searrow$	0

Strelice pokazuju da su odgovarajuće funkcije *rastuće* ($\nearrow$) ili *opadajuće* ($\searrow$).

Ako je $\alpha + \beta = 90°$, tada je:

$$\sin\alpha = \cos\beta, \quad \cos\alpha = \sin\beta, \quad \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}\beta, \quad \operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{tg}\beta.$$

(Trigonometrijske funkcije komplementnih uglova.)

Trigonometrijske funkcije su povezane raznim identičnostima. Tzv. **osnovne trigonometrijske identičnosti** su:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},\quad \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha = 1,\quad \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

Iz ovih identičnosti dobija se niz novih, kao npr. identičnosti kojim, za oštar ugao α, izražavamo sve trigonometrijske funkcije preko $\sin\alpha$:

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha},\quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}},\quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}.$$

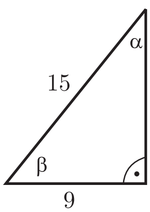
Slično izražavamo trigonometrijske funkcije preko $\operatorname{tg}\alpha$:

$$\sin\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}},\quad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}},\quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

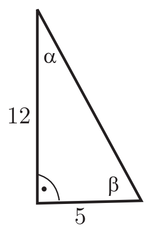
Površina trougla je: $P = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{1}{2}ac\sin\beta.$

Rešiti pravougli trougao, znači **odrediti sve stranice i sve uglove** tog trougla, na osnovu nekih zadatih elemenata.

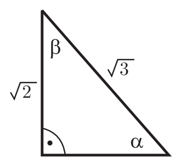
△ **1.** U datim pravouglim trouglovima, sl. 2 do 5, izračunati trigonometrijske funkcije uglova α i β.



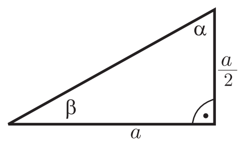
Sl. 2



Sl. 3



Sl. 4



Sl. 5

△ **2.** Izračunati trigonometrijske funkcije oštrih uglova α i β u pravouglom trouglu ABC, sa pravim uglom ACB, ako su mu date dužine, a, b, c stranica:

a) $a = 7$, $b = 24$; b) $a = 6$, $c = 6,5$; c) $b = 2k$, $c = k^2+1$;

d) $a = 1$, $c = 2,6$; e) $b = \frac{6}{7}$, $c = \frac{10}{7}$; f) $a = 3\frac{1}{2}$, $c = 12,5$.

△ **3.** U pravouglom trouglu dužine kateta su a i b, a dužina hipotenuze je c. Izračunati trigonometrijske funkcije ugla α, naspram katete a, ako je:

a) $a = 0,8c$; b) $3a = b$; c) $c = 2a$; d) $a = 2b$;

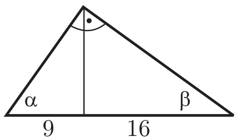
e) $b = 2,4a$; f) $2a + b = 2c$; g) $a + c = 4b$.

△ **4.** Izračunati trigonometrijske funkcije ugla α, ako je dato:

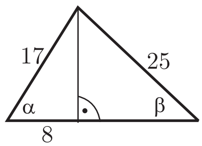
a) $\sin\alpha = 0,8$; b) $\cos\alpha = \frac{24}{25}$; c) $\operatorname{tg}\alpha = 2\frac{2}{5}$;

s) $2\operatorname{ctg}\alpha = \frac{m}{n} - \frac{n}{m}$; e) $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{5}$; f) $\sin\alpha = \frac{2t}{1+t^2}$.

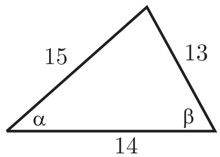
△ **5.** Izračunati vrednosti trigonometrijskih funkcija grčkim slovima naznačenih oštrih uglova u trouglovima na slikama 6 do 9.



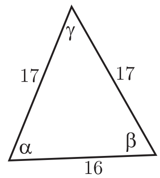
Sl. 6



Sl. 7



Sl. 8



Sl. 9

□ **6.** Izračunati vrednosti trigonometrijskih funkcija nagibnog ugla dijagonale kocke prema ravni osnove.

△ **7.** Izračunati vrednost izraza:

a) $\dfrac{\sin 20^\circ \cdot \operatorname{ctg} 70^\circ}{\cos 70^\circ \cdot \operatorname{tg} 20^\circ}$; b) $\dfrac{\sin 10^\circ \cdot \sin 30^\circ \cdot \sin 50^\circ \cdot \sin 70^\circ}{\cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 60^\circ \cos 80^\circ}$;

c) $\dfrac{2\sin 37^\circ - \cos 53^\circ}{\cos 53^\circ}$; d) $\dfrac{\sin 52^\circ - 2\operatorname{tg} 52^\circ - \cos 38^\circ}{\sin 38^\circ + \operatorname{ctg} 38^\circ - \cos 52^\circ}$;

e) $\sin 30^\circ \cos 60^\circ + \sin 60^\circ \cos 30^\circ$; f) $\cos^2 30^\circ - \sin^2 30^\circ - \cos 60^\circ$;

g) $\dfrac{\sin^2 45^\circ + \sin^2 30^\circ}{\sin^2 60^\circ - \cos^2 45^\circ}$; h) $\dfrac{\operatorname{tg} 30^\circ + \operatorname{tg} 60^\circ}{\sin 60^\circ + \operatorname{ctg} 30^\circ}$.

△ **8.** Izračunati vrednost izraza $\dfrac{\sin(2\alpha - 60^\circ) - \cos\alpha}{\sin 2\alpha}$, ako je:

a) $\alpha = 30^\circ$; b) $\alpha = 45^\circ$.

△ **9.** Izračunati vrednost izraza $\dfrac{\cos(\alpha - 15^\circ) - \sin\alpha}{\cos(2\alpha - 30^\circ) + \sin\alpha}$, ako je:

a) $\alpha = 45^\circ$; b) $\alpha = 60^\circ$.

△ **10.** Izračunati vrednost izraza $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha - 2\cos\alpha + \operatorname{ctg}\alpha}{\cos\alpha - 3\sin\alpha}$, ako je:

a) $\sin\alpha = \dfrac{5}{13}$; b) $\cos\alpha = \dfrac{1}{2}$; c) $\operatorname{tg}\alpha = 3\dfrac{3}{7}$.

□ **11.** Izračunati vrednost izraza: $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha - \cos\alpha}{\cos\beta - \operatorname{ctg}\beta}$, ako je $\sin\alpha = 0,6$ i $\alpha + \beta = 90^\circ$.

□ **12.** Ako je $\alpha + \beta = 90^\circ$, dokazati da je $\dfrac{\sin\alpha + \cos\beta}{\sin\beta + \cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$.

□ **13.** Izračunati oštar ugao α ako važi jednakost:

a) $\sin(\alpha + 23^\circ) = \sin(52^\circ - \alpha)$; b) $\cos(\alpha - 15^\circ 32') = \sin(35^\circ 38' + \alpha)$;

c) $\operatorname{tg}(38^\circ + \alpha) = \operatorname{ctg}(2\alpha - 27^\circ)$.

□ **14.** Dokazati da su tačne formule:

a) $\sin(\alpha + 29^\circ) = \cos(61^\circ - \alpha)$; b) $\operatorname{tg}(74^\circ 30' - \alpha) = \operatorname{ctg}(\alpha + 15^\circ 30')$.

□ **15.** Ako su α, β, γ uglovi trougla, dokazati da je:
a) $\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}+\dfrac{\beta}{2}\right)=\cos\dfrac{\gamma}{2}$; b) $\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\beta}{2}+\dfrac{\gamma}{2}\right)=\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$.

□ **16.** Izračunati α i β ako je $\alpha+\beta=90^\circ$ i $\sin\alpha+\cos\beta=1$.

□ **17.** Ako je $0<\alpha<45^\circ$ i $\sin(45^\circ-\alpha)-3\cos(45^\circ+\alpha)+1=0$, izračunati α.

□ **18.** Konstruisati ugao α ako je:
a) $\sin\alpha=\dfrac{2}{5}$, b) $\cos\alpha=0,6$, c) $\operatorname{ctg}\alpha=\sqrt{5}$, d) $\operatorname{tg}\alpha=2$,
e) $\operatorname{tg}\alpha=2\dfrac{1}{4}$, f) $\cos\alpha=1,01$, g) $\sin\alpha=\dfrac{5}{3}$.

△ **19.** Dokazati da je:
a) $\dfrac{2\operatorname{tg}60^\circ-3\operatorname{ctg}60^\circ}{2\sin 60^\circ}=\cos 0^\circ$, b) $\dfrac{\operatorname{tg}45^\circ-\cos 45^\circ\sin 45^\circ}{\sin 30^\circ}=\sin 90^\circ$.

△ **20.** Odrediti oštar ugao α tako da važi jednakost:
a) $\sin\alpha=0,5$, b) $2\cos\alpha-1=0$, c) $4\sin^2\alpha-3=0$,
g) $3\operatorname{ctg}^2\alpha=1$, d) $\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\cos\alpha$, đ) $\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\sin\alpha$.

○ **21.** Odredi uglove trougla kome su dve stranice dužina a i b, a površina je $P=\dfrac{1}{4}(a^2+b^2)$.

○ **22.** Za koje α je moguća jednakost: $\sin\alpha=\dfrac{a^2+b^2}{2ab}$, $a\neq b$, $a>0$ i $b>0$?

○ **23.** Ako je $\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha=2$ izračunati $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha$ i α.

□ **24.** Dokazati identičnosti (α i β su oštri uglovi):
a) $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}$; b) $\dfrac{1}{1-\sin\alpha}-\dfrac{1}{1+\sin\alpha}=\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{\cos\alpha}$;
c) $\dfrac{1}{1-\sin\alpha}-\dfrac{1}{\cos^2\alpha}=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\cos\alpha}$; d) $1-\dfrac{\sin^2\beta}{1+\cos\beta}=\cos\beta$;
e) $\sin^2\alpha(1+\operatorname{ctg}^2\alpha)=1$; f) $\sin\alpha^2\cos(90^\circ-\alpha)+\sin(90^\circ-\alpha)\cdot\cos\alpha^\circ=1$;
g) $\sin\beta\cdot\operatorname{tg}(90^\circ-\beta)=\cos\beta$; h) $\operatorname{tg}\alpha(\cos\alpha-\cos^3\alpha)=\sin^3\alpha$;
i) $2(\sin^6\alpha+\cos^6\alpha)-3(\sin^4\alpha+\alpha\cos^4\alpha)+1=0$;
j) $\dfrac{\sin\alpha}{1-\sin\alpha}-\dfrac{\sin\alpha}{1+\sin\alpha}=2\operatorname{tg}^2\alpha$; k) $\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}+\dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\dfrac{2}{\sin\alpha}$;
l) $\dfrac{\cos\alpha}{1+\cos\alpha}-\dfrac{\cos\alpha}{1-\cos\alpha}=2\operatorname{ctg}^2\alpha$; m) $\dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2\beta}=\cos^2\beta$

○ **25.** Dokazati da je:
a) $\operatorname{tg}1^\circ\cdot\operatorname{tg}2^\circ\cdot\operatorname{tg}3^\circ\cdots\operatorname{tg}87^\circ\cdot\operatorname{tg}88^\circ\cdot\operatorname{tg}89^\circ=1$.
b) $\sin^2 1^\circ+\sin^2 2^\circ+\sin^2 3^\circ+\cdots+\sin^2 87^\circ+\sin^2 88^\circ+\sin^2 89^\circ=44,5$.

□ **26.** Da li su tačne jednakosti, ako je α oštar ugao trougla:

a) $\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}-\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}=-2\operatorname{ctg}\alpha,$

b) $\dfrac{1}{\sin\alpha}\sqrt{\dfrac{1}{1+\cos\alpha}+\dfrac{1}{1-\cos\alpha}}+\sqrt{2}=\sqrt{2}\left(2+\dfrac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha}\right)?$

△ **27.** Označimo sa T skup čiji su elementi dužine stranica i uglovi pravouglog trougla: $T=\{a,b,c,\alpha,\beta,90°\}$. Odrediti elemente skupa T, ako je $a=102$, $c=321$. (Odrediti elemente skupa T znači isto što i "rešiti trougao".)

△ **28.** Rešiti pravougli trougao ABC, tj. odrediti elemente skupa T iz prethodnog zadatka ako je $\alpha=29°$ i dužina hipotenuze $c=32,7$. (Koristiti tablicu vrednosti trigonometrijskih funkcija, sa strana 438 i 439.)

△ **29.** Odrediti nepoznate elemente skupa $T=\{303,\ 183,\ c,\ \alpha,\ \beta,\ 90°\}$, gde je T skup iz **zadatka 27.**

△ **30.** Odrediti stranice i uglove pravouglog trougla, ako je $\alpha=55°$ i dužina hipotenuzine visine $h_c=134,3$.

□ **31.** Rešiti pravougli trougao ABC, ako su dati elementi (koristiti tablicu):
a) $c=2,48$, $\alpha=18°$; b) $c=0,904$, $\alpha=50°3'$; c) $a=4,32$, $\beta=58°30'$;
d) $b=0,48$, $\alpha=48°$; e) $a=17$, $b=24$; f) $a=3,5$, $b=4,5$;
g) $a=3,8$, $c=4,8$; h) $c=402,73$, $\alpha=28°36'$; i) $c=86,25$, $\beta=63°19'$.

○ **32.** Izračunati dužine stranica trougla ABC, ako je dužina visine iz temena C jednaka 28, a $\beta=33°30'$ i $\gamma=78°40'$.

○ **33.** Izračunati uglove trougla ABC, ako su mu dužine stranica: $a=34$, $b=20$, $c=42$.

○ **34.** Izračunati uglove i dužine stranica trougla ABC, ako su poznate dužine stranice i visine, $a=12$, $h_c=6\sqrt{3}$ i ako je površina trougla $P=18(\sqrt{3}+3)$.

□ **35.** Izračunati oštar ugao između dijagonala pravougaonika, ako su dužine stranica 8 i 12.

REŠENJA ZADATAKA IZ DODATKA

1. Koristeći Pitagorinu teoremu izračunati nepoznatu stranicu, pa tražene funkcije izračunati po definiciji. Na primer, prema slici 2 imamo: $b^2=15^2-9^2\Rightarrow b=12$. Zatim, izračunavamo: $\sin\alpha=\dfrac{a}{c}=\dfrac{9}{15}=\dfrac{3}{5}$, $\cos\alpha=\dfrac{b}{c}=\dfrac{4}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{3}{4}$, $\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{4}{3}$. **2.** Slično prethodnom zadatku.

3. Slično zadatku 1. Na primer b) $c^2=a^2+b^2=10a^2\Rightarrow c=a\sqrt{10}$. Dalje je $\sin\alpha=\dfrac{a}{c}=\dfrac{1}{\sqrt{10}}$, $\cos\alpha=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$, $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{1}{3}$, $\operatorname{ctg}\alpha=3$.

f) Iz datog uslova je $b=2c-2a$, pa na osnovu Pitagorine teoreme dobijamo: $a^2+b^2=c^2\Rightarrow a^2+(2c-2a)^2=c^2\Rightarrow 5a^2-8ac+3c^2=0\Rightarrow(5a-3a)(a-c)=0$. Kako je $a<c$, slijedi $a-c\neq 0$ i $5a-3c=0$, odnosno $a=\dfrac{3}{5}c$. Sada dobijamo $b=\dfrac{4}{5}c$ itd. g) Slično zadatku f).

4. c) *Prvo rešenje*: $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{12}{5} \Rightarrow a = 12,\ b = 5$ i dalje kao u zadatku 1. *Drugo rešenje*. Primenom formula dobijamo: $\sin\alpha = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \dfrac{12}{13}$ itd. Slično se postupa i u ostalim slučajevima a)–f).

5. Na slikama prvo odredimo elemente trougla, kao u zadatku 1, a na slikama najpre odredimo visinu h_c. (Na sl. 6 je $h_c = 12$.) Na sl. 7, h_c je dužine 15; odredimo trigonometrijske funkcije uglova α i β. Za funkcije ugla γ treba odrediti dužinu visine h_a. To možemo učiniti koristeći osobinu $a : c = h_c : h_a$. Odavde je $h_a = \dfrac{ch_c}{a} = \dfrac{240}{17}$ itd.

6. Dijagonala kocke dužine $a\sqrt{3}$, dijagonala baze, dužine $a\sqrt{2}$ i ivica kocke dužine a, su stranice pravouglog trougla iz kojeg izračunavamo tražene vrednosti funkcija.

7. Koristimo osobine komplementarnih uglova: a) 1; b) 1; c) 1; d) -2; e) 1; f) 0; g) 3.

8. a) -1; b) $\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}$. **9.** a) $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$; b) $\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$.

10. a) $-\dfrac{757}{180}$; b) $\dfrac{-\sqrt{3}-9}{3}$. c) $-1,2$ približno. **11.** $\dfrac{1}{3}$.

12. $\sin\beta = \cos\alpha$ i $\cos\beta = \sin\alpha$ itd.

13. a) $\alpha + 23^\circ = 52^\circ - \alpha \Rightarrow \alpha = 37^\circ 30'$ b) $\cos(\alpha - 15^\circ 32') = \sin(90^\circ - \alpha + 15^\circ 32')$ itd. $\alpha = 34^\circ 57'$; c) $\alpha = 26^\circ 20'$. **14.** Slično zadatku 12.

15. Iz $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, biće $\alpha + \beta = 180^\circ - \gamma$, odnosno $\dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{\beta}{2} = 90^\circ - \dfrac{\gamma}{2}$. Otuda je: $\sin\left(\dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{\beta}{2}\right) = \sin\left(90^\circ - \dfrac{\gamma}{2}\right) = \cos\dfrac{\gamma}{2}$. Slično je i b).

16. $\cos\beta = \sin\alpha \Rightarrow \sin\alpha = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 30^\circ$ i $\beta = 60^\circ$.

17. Slično prethodnom zadatku: $\alpha = 15^\circ$.

18. Na primer b) $\cos\alpha = \dfrac{3}{5} \Rightarrow b = 3,\ c = 5$. Konstruišimo pravougli trougao katete $b = 3$, i hipotenuze $c = 5$. Traženi ugao je naspram katete a. **19.** Slično zadataku 7.

20. a) $\sin\alpha = 0,5 \Rightarrow \sin\alpha = \sin 30^\circ \Rightarrow \alpha = 30^\circ$; b) $2\cos\alpha - 1 = 0 \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60^\circ$. c) $4\sin^2\alpha - 3 = 0 \Rightarrow \sin^2\alpha = \dfrac{3}{4} \Rightarrow \sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha = 60^\circ$. d) $\alpha = 60^\circ$.

21. Iz $P = \dfrac{1}{2}ab\sin\gamma = \dfrac{1}{4}(a^2+b^2)$, dobijamo: $\sin\gamma = \dfrac{a^2+b^2}{2ab} \geq 1$ (videti zadatak 539a)). Odavde zaključujemo da je $\sin\gamma = 1$, pa je $(a-b)^2 = 0$, tj. $a = b$. Uglovi trougla su 90°, 45°, 45°.

22. Ne postoji takvo α (videti prethodni zadatak).

23. Iz date jednakosti dobijamo: $\operatorname{tg}^2\alpha + 2 + \dfrac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha} = 4$, odnosno $\left(\operatorname{tg}\alpha + \dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\right)^2 = 4$, odakle je $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = 2$. Datu jednakosti možemo napisati u obliku: $\operatorname{tg}^2\alpha - 2 + \operatorname{ctg}^2\alpha = 0$, tj. $(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha)^2 = 0$. Odavde je $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}\alpha$, pa je $\alpha = 45^\circ$.

24. Koristimo vezu između trigonometrijskih funkcija i iskustva iz **Glave 5** o transformacijama algebarskih izraza. Na primer:

h) $2(\sin^6\alpha + \cos^6\alpha) - 3(\sin^4\alpha + \cos^4\alpha) + 1 = 2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)(\sin^4\alpha - \sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^4\alpha) - 3(\sin^4\alpha + \cos^4\alpha) - 1 = 2\cdot 1\cdot(\sin^4\alpha - \sin^2\alpha\cos^2\alpha + \sin^4\alpha) - 3(\sin^4\alpha + \cos^4\alpha) - 1 = 1 - \sin^4\alpha - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha - \sin^4\alpha = 1 - (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^2 = 1 - 1 = 0$. (Izraz $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha$ je zbir kubova: $(\sin^2\alpha)^3 + (\cos^2\alpha)^3$.)

j) $\dfrac{\sin\alpha}{1-\sin\alpha} - \dfrac{\sin\alpha}{1+\sin\alpha} = \dfrac{\sin\alpha(1+\sin\alpha) - \sin\alpha(1-\sin\alpha)}{(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)} = \dfrac{2\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = 2\operatorname{tg}^2\alpha$.

25. a) Transformišimo proizvod: $\operatorname{tg} 1^\circ \cdot \operatorname{tg} 2^\circ \ldots \operatorname{tg} 44^\circ \cdot \operatorname{tg} 45^\circ \cdot \operatorname{tg} 46^\circ \ldots \operatorname{tg} 88^\circ \cdot \operatorname{tg} 89^\circ =$ $\operatorname{tg} 1^\circ \cdot \operatorname{tg} 2^\circ \ldots \operatorname{tg} 44^\circ \cdot 1 \cdot \operatorname{ctg} 44^\circ \ldots \operatorname{ctg} 2^\circ \cdot \operatorname{ctg} 1^\circ = \operatorname{tg} 1^\circ \cdot \operatorname{tg} 2^\circ \ldots \operatorname{tg} 44^\circ \cdot 1 \cdot \dfrac{1}{\operatorname{tg} 44^\circ} \cdots \dfrac{1}{\operatorname{tg} 2^\circ} \cdot \dfrac{1}{\operatorname{tg} 1^\circ} = 1.$

b) Koristimo osobine komplementnih uglova. Na primer, umesto $\sin^2 89^\circ$ pišemo $\cos^2(90^\circ - 89^\circ) = \cos^2 1^\circ$. Tako dobijamo: $\sin^2 1^\circ + \sin^2 2^\circ + \sin^2 3^\circ + \cdots + \sin^2 44^\circ + \sin^2 45^\circ + \cos^2 44^\circ + \cdots + \cos^2 3^\circ + \cos^2 2^\circ + \cos^2 1^\circ = (\sin^2 1^\circ + \cos^2 1^\circ) + (\sin^2 2^\circ + \cos^2 2^\circ) + (\sin^2 3^\circ + \cos^2 3^\circ) + \cdots + (\sin^2 44^\circ + \cos^2 44^\circ) + \sin^2 45^\circ = 44 + 0,5 = 44,5.$

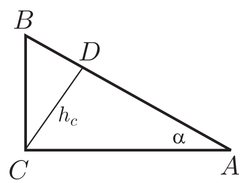
26. Tačne su obe jednakosti. Vršeći na levoj strani jednakosti transformacije slično zadatku 7, uverićmo se u to.

27. Kako je $\sin\alpha = \dfrac{102}{321} = 0,318$, pomoću tablica dobijamo $\alpha = 18^\circ 32'$. Dalje je $\beta = 90^\circ - \alpha = 71^\circ 28'$ Stranicu b izračunaćemo iz: $\dfrac{b}{c} = \sin\beta \Rightarrow b = c.\ \sin\beta = 321 \cdot 0,948 = 304$. Prema tome: $T = \{102,\ 304,\ 321,\ 18^\circ 32' 71^\circ 28'\ 90^\circ\}$.

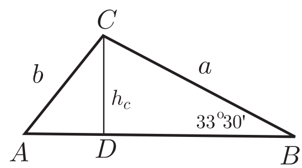
28. Odmah nalazimo $\beta = 90^\circ - \alpha = 61^\circ$. Zatim, $a = c \cdot \sin\alpha = 32,7 \cdot \sin 29^\circ = 32,7 \cdot 0,485 = 15,85$ i $b = c \cdot \sin\beta = 32,7 \cdot \sin 61^\circ = 28,6$. Dakle: $T = \{15,85\ \ 28,6,\ \ 32,7,\ \ 29^\circ,\ \ 61^\circ,\ \ 90^\circ\}$.

29. Iz $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{a}{b} = \dfrac{303}{183} = 1,656$, dobijamo $\alpha = 58^\circ 54'$. Zbog toga je, $\beta = 31^\circ 6'$, a hipotenuzu dobijamo iz $\dfrac{a}{c} = \sin\alpha \Rightarrow c = \dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{303}{0,856} = 753,7$.

30. Iz trougla ACD, sl. 10 imamo: $\dfrac{h_c}{b} = \sin\alpha$, odakle je $b = \dfrac{h_c}{\sin\alpha} = \dfrac{134,3}{0,819} = 163,8$. Sada iz $\dfrac{a}{b} = \operatorname{tg}\alpha$, dobijamo $a = b \cdot \operatorname{tg}\alpha = 163,8 \cdot 1,428 = 233,9$.



Sl. 10



Sl. 11

31. a) $a = 0,766$, $b = 2,36$, $\beta = 72^\circ$; b) $a = 0,699$, $b = 0,576$, $\beta = 39^\circ 30'$. c) $b = 7,05$, $c = 8,27$, $\alpha = 31^\circ 30'$. d) $a = 0,533$, $c = 0,717$, $\beta = 42^\circ$. e) $c = 29,4$, $\alpha = 35^\circ 20'$, $\beta = 54^\circ 40'$. f) $c = 5,70$, $\alpha = 38^\circ$, $\beta = 52^\circ$. g) $\alpha = 52^\circ 20'$, $\beta = 37^\circ 40'$, $b = 2,93$. h) $a = 192,78$, $b = 353,59$, $\beta = 61^\circ 24'$. i) $a = 66,94$, $\alpha = 50^\circ 54'$, $\beta = 39^\circ 6'$.

32. Visina deli dati trougao na dva pravougla trougla ACD i BCD, sl. 11. U trouglu BCD je: $\dfrac{h_c}{a} = \sin 33^\circ 30' \Rightarrow a = \dfrac{h_c}{\sin 33^\circ 30'} = 50,7$ i $\dfrac{BD}{h_c} = \operatorname{ctg} 33^\circ 30' \Rightarrow BD = h_c \cdot \operatorname{tg} 56^\circ 30' = 42,3$.

U trouglu ACD je najpre $\alpha = 180^\circ - \beta - \gamma = 67^\circ 50'$. Dalje, izračunamo $b = 30,2$ i $AD = 11$, (kao i a i BD iz trougla BCD). Znači, dužina stranice trougla ABC su: $AB = AD + BD + 53,7$, zatim $a = 50,7$ i $b = 30,2$.

33. Visina obrazuje dva pravougla trougla, pa treba odrediti projekcije stranica a i b na c, a zatim odrediti kosinuse uglova α i β: $\cos\alpha = 0,600$ i $\cos\beta = 0,882$, pa je $\alpha = 53^\circ 8'$ i $\beta = 28^\circ 7'$. Konačno je $\gamma = 98^\circ 45'$.

34. Iz $P = \dfrac{1}{2} c h_c$ dobijamo: $c = 6 + 6\sqrt{3}$. Iz $\sin\beta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ dobijamo $\beta = 60^\circ$. Projekcija stranice a na c je 6, a stranice b je $6\sqrt{3}$, pa je $\operatorname{tg}\alpha = 1$ i $\alpha = 45^\circ$. Dalje je $\gamma = 75^\circ$ i $b = 6\sqrt{6}$.

35. $67^\circ 23'$.

Funkcija oštrih uglova ($\cos\alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$ i $\mathrm{ctg}\,\alpha = \mathrm{tg}(90^\circ - \alpha)$)

α	$\sin\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	α	$\sin\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	α	$\sin\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$
0°	0,000	0,000	15°	0,259	0,268	30°	0,500	0,577
20′	0,006	0,006	20′	0,264	0,274	20′	0,505	0,585
40′	0,012	0,012	40′	0,270	0,280	40′	0,510	0,593
1°	0,017	0,017	16°	0,276	0,287	31°	0,515	0,601
20′	0,023	0,023	20′	0,281	0,293	20′	0,520	0,609
40′	0,029	0,029	40′	0,287	0,299	40′	0,525	0,617
2°	0,035	0,035	17°	0,292	0,306	32°	0,530	0,625
20′	0,041	0,041	20′	0,298	0,312	20′	0,535	0,633
40′	0,047	0,047	40′	0,303	0,319	40′	0,540	0,641
3°	0,052	0,052	18°	0,309	0,325	33°	0,545	0,649
20′	0,058	0,058	20′	0,315	0,331	20′	0,550	0,658
40′	0,064	0,064	40′	0,320	0,338	40′	0,554	0,666
4°	0,070	0,070	19°	0,326	0,344	34°	0,559	0,675
20′	0,076	0,076	20′	0,331	0,351	20′	0,564	0,683
40′	0,081	0,082	40′	0,337	0,357	40′	0,569	0,692
5°	0,087	0,087	20°	0,342	0,364	35°	0,574	0,700
20′	0,093	0,093	20′	0,347	0,371	20′	0,578	0,709
40′	0,099	0,099	40′	0,353	0,377	40′	0,583	0,718
6°	0,105	0,105	21°	0,358	0,384	36°	0,588	0,727
20′	0,110	0,111	20′	0,364	0,391	20′	0,592	0,735
40′	0,116	0,117	40′	0,369	0,397	40′	0,597	0,744
7°	0,122	0,123	22°	0,375	0,404	37°	0,602	0,754
20′	0,128	0,129	20′	0,380	0,411	20′	0,606	0,763
40′	0,133	0,135	40′	0,385	0,418	40′	0,611	0,772
8°	0,139	0,141	23°	0,391	0,424	38°	0,616	0,781
20′	0,145	0,146	20′	0,396	0,431	20′	0,620	0,791
40′	0,151	0,152	40′	0,401	0,438	40′	0,625	0,800
9°	0,156	0,158	24°	0,407	0,445	39°	0,629	0,810
20′	0,162	0,164	20′	0,412	0,452	20′	0,634	0,819
40′	0,168	0,170	40′	0,417	0,459	40′	0,638	0,829
10°	0,174	0,176	25°	0,423	0,466	40°	0,643	0,839
20′	0,179	0,182	20′	0,428	0,473	20′	0,647	0,849
40′	0,185	0,188	40′	0,433	0,481	40′	0,652	0,859
11°	0,191	0,194	26°	0,438	0,488	41°	0,656	0,869
20′	0,197	0,200	20′	0,444	0,495	20′	0,660	0,880
40′	0,202	0,206	40′	0,449	0,502	40′	0,665	0,890
12°	0,208	0,213	27°	0,454	0,510	42°	0,669	0,900
20′	0,214	0,219	20′	0,459	0,517	20′	0,673	0,911
40′	0,219	0,225	40′	0,464	0,524	40′	0,678	0,922
13°	0,225	0,231	28°	0,469	0,532	43°	0,682	0,933
20′	0,231	0,237	20′	0,475	0,539	20′	0,686	0,943
40′	0,236	0,243	40′	0,480	0,547	40′	0,690	0,955
14°	0,242	0,249	29°	0,485	0,554	44°	0,695	0,966
20′	0,248	0,256	20′	0,490	0,562	20′	0,699	0,977
40′	0,253	0,262	40′	0,495	0,570	40′	0,703	0,988

α	sin α	tg α	α	sin α	tg α	α	sin α	tg α
45°	**0,707**	**1,000**	**60°**	**0,866**	**1,732**	**75°**	**0,966**	**3,732**
20′	0,711	1,012	20′	0,869	1,756	20′	0,967	3,821
40′	0,715	1,024	40′	0,872	1,780	40′	0,969	3,914
46°	0,719	1,036	**61°**	0,875	1,804	**76°**	0,970	4,011
20′	0,723	1,048	20′	0,877	1,829	20′	0,972	4,113
40′	0,727	1,060	40′	0,880	1,855	40′	0,973	4,219
47°	0,731	1,072	**62°**	0,883	1,881	**77°**	0,974	4,331
20′	0,735	1,085	20′	0,886	1,907	20′	0,976	4,449
40′	0,739	1,098	40′	0,888	1,935	40′	0,977	4,574
48°	0,743	1,111	**63°**	0,891	1,963	**78°**	0,978	4,705
20′	0,747	1,124	20′	0,894	1,991	20′	0,979	4,843
40′	0,751	1,137	40′	0,896	2,020	40′	0,981	4,989
49°	0,755	1,150	**64°**	0,899	2,050	**79°**	0,982	5,145
20′	0,759	1,164	20′	0,901	2,081	20′	0,983	5,309
40′	0,762	1,178	40′	0,904	2,112	40′	0,984	5,485
50°	**0,766**	**1,192**	**65°**	**0,906**	**2,145**	**80°**	**0,985**	**5,671**
20′	0,770	1,206	20′	0,909	2,177	20′	0,986	5,871
40′	0,773	1,220	40′	0,911	2,211	40′	0,987	6,084
51°	0,777	1,235	**66°**	0,914	2,246	**81°**	0,988	6,314
20′	0,781	1,250	20′	0,916	2,282	20′	0,989	6,561
40′	0,784	1,265	40′	0,918	2,318	40′	0,989	6,827
52°	0,788	1,280	**67°**	0,921	2,356	**82°**	0,990	7,115
20′	0,792	1,295	20′	0,923	2,394	20′	0,991	7,429
40′	0,795	1,311	40′	0,925	2,434	40′	0,992	7,770
53°	0,799	1,327	**68°**	0,927	2,475	**83°**	0,993	8,144
20′	0,802	1,343	20′	0,929	2,517	20′	0,993	8,556
40′	0,806	1,360	40′	0,931	2,560	40′	0,994	9,010
54°	0,809	1,376	**69°**	0,934	2,605	**84°**	0,995	9,514
20′	0,812	1,393	20′	0,936	2,651	20′	0,995	10,078
40′	0,816	1,411	40′	0,938	2,699	40′	0,996	10,712
55°	**0,819**	**1,428**	**70°**	**0,940**	**2,747**	**85°**	**0,996**	**11,430**
20′	0,822	1,446	20′	0,942	2,798	20′	0,997	12,251
40′	0,826	1,464	40′	0,944	2,850	40′	0,997	13,197
56°	0,829	1,483	**71°**	0,946	2,904	**86°**	0,998	14,301
20′	0,832	1,501	20′	0,947	2,960	20′	0,998	15,605
40′	0,835	1,520	40′	0,949	3,018	40′	0,998	17,169
57°	0,839	1,540	**72°**	0,951	3,078	**87°**	0,999	19,081
20′	0,842	1,560	20′	0,953	3,140	20′	0,999	21,470
40′	0,845	1,580	40′	0,955	3,204	40′	0,999	24,542
58°	0,848	1,600	**73°**	0,957	3,271	**88°**	0,999	28,636
20′	0,851	1,621	20′	0,958	3,340	20′	1,000	34,368
40′	0,854	1,643	40′	0,960	3,412	40′	1,000	42,964
59°	0,857	1,664	**74°**	0,961	3,487	**89°**	1,000	57,290
20′	0,860	1,686	29′	0,963	3,566	20′	1,000	85,940
40′	0,863	1,709	40′	0,964	3,647	40′	1,000	171,885
						90°	**1,000**	∞