dr Mirjana MALENICA, dr Mirjana VUKOVIĆ,
Mirko V. RADIĆ, mr Madžida HAVERIĆ

ZBIRKA ZADATAKA IZ MATEMATIKE SA RJEŠENJIMA

(sa republičkih takmičenja u Bosni i Hercegovini i kvalifikacionih ispita na Prirodno-matematičkom fakultetu u Sarajevu)

„SVJETLOST"
OOUR Zavod za udžbenike i nastavna sredstva
Sarajevo, 1985.

Odgovorni urednik

RAMIZ DŽANANOVIĆ

Recenzenti

RADOMIR ŽIVKOVIĆ, vanredni profesor
Prirodno-matematičkog fakulteta u Sarajevu

EMINA AVDAGIĆ, profesor, Prva gimnazija u Sarajevu

Lektor

EDINA NAMONI

Tehnički urednik

MILORAD BABIĆ

Korektor

GORDANA BOROVČANIN

Tiraž: 3 000 primjeraka

Izdaje: „SVJETLOST",
OOUR Zavod za udžbenike i nastavna sredstva,
Sarajevo

Za izdavača

SAVO ZIROJEVIĆ

Štampa

„BIROGRAFIKA" — Subotica

PREDGOVOR

Zbirka zadataka sa republičkih takmičenja iz matematike u Bosni i Hercegovini i kvalifikacionih ispita iz matematike na Prirodno-matematičkom fakultetu u Sarajevu sadrži, kao što se vidi iz naslova, zadatke sa takmičenja i kvalifikacionih ispita. Sastoji se iz četiri dijela. U prvom dijelu su zadaci sa republičkih takmičenja.

Prvo republičko takmičenje iz matematike za učenike srednjih škola u Bosni i Hercegovini održano je u proljeće 1959. godine. Zadaci sa takmičenja od 1959. god. do 1973. god. sadržani su u zbirci koja je pod istim naslovom izdata 1975. god., a pripremile su je Mirjana Malenica i Hatidža Đulić-Mulahalilović. U sadašnjoj zbirci sadržani su zadaci sa takmičenja od 1974. god. do, uključivo, 1983. god.

Budući da smo saradivali više godina u organizaciji takmičenja, imali smo mogućnost da prikupimo sve zadatke. Zapazivši zanimanje učenika, a i profesora, za zadatke koji su se pojavljivali na ranijim takmičenjima došli smo do zaključka da postoji potreba za jednom ovakvom zbirkom. No, to je i vrlo solidan fond zadataka za vježbanje. Smatramo da će zbirka koristiti učenicima pri vježbanju, ali i poticati kod njih želju da učestvuju na jednom od sljedećih takmičenja.

Veći dio zadataka je urađen, za neke su data uputstva, a za sve zadatke u prvom, drugom i trećem dijelu rezultati. Međutim, čitaocu preporučujemo da ni u kom slučaju ne čita odmah data uputstva, odnosno postupak rješavanja zadataka, čak i onda kad mu se čini da nema nikakve ideje ni da započne rješavanje. Tek poslije upornog nastojanja da riješi zadatak i, ako u tome ne uspije, treba da pogleda rješenje u zbirci, ali ni tada cijeli tok rješavanja, nego samo početak. Navedena rješenja u zbirci služe da bi čitalac, u slučaju da zna riješiti zadatak, mogao uporediti svoje rješenje sa rješenjem u zbirci. Čitalac neće naučiti da rješava zadatke ako čita gotova rješenja, nego ako se sam trudi da ih riješi.

Vodili smo računa da posvetimo malo veću pažnju zadacima koje takmičari nisu riješili ili su ih polovično riješili. Posebna pažnja posvećena je konstruktivnim zadacima, zadacima iz stereometrije i problemima.

U drugom dijelu zbirke su neki od zadataka koji su predlagani za takmičenje. Ti zadaci nisu svrstani po razredima. Smatramo da će izrada ovih zadataka biti od koristi. Na ovaj način učenici će sami pronalaziti puteve za rješavanje bez ikakvog unaprijed određenog klasificiranja.

U trećem dijelu ove zbirke dati su zadaci koji su bili na kvalifikacionim ispitima iz matematike na Prirodno-matematičkom fakultetu u Sarajevu.

Kvalifikacioni ispiti na ovom fakultetu uvedeni su 1967. god. Zadaci od 1967. god. do, uključivo, 1973. god. nalaze se u već spomenutoj zbirci izdatoj 1975. god. Sadašnja zbirka sadrži zadatke od 1974. god. do, uključivo, 1983. god.

Na odsjecima za matematiku, fiziku i hemiju polažu se pismeni ispiti iz matematike. U ovoj zbirci dati su upravo zadaci sa tih ispita; prvo po godinama, a onda po odsjecima: matematika, fizika i hemija. Veći dio ovih zadataka smo potpuno riješili, a za sve zadatke smo dali rezultate. U ove zadatke su uključeni i oni zadaci koji su davani na kvalifikacionim ispitima pri ponovnom raspisivanju konkursa. Smatramo da ovi zadaci mogu poslužiti i kao priprema za polaganje kvalifikacionih ispita i na tehničkim fakultetima. Ukoliko zbirka ne sadrži zadatke za neku godinu, to znači da na određenom odsjeku te godine nije držan kvalifikacioni ispit.

U četvrtom dijelu dati su zadaci čije rezultate namjerno nismo dali. Predlažemo da učenici svoja originalna rješenja šalju Matematičko-fizičkom listu. Ti su zadaci svrstani po godinama školovanja, pa se svakom učeniku koji želi da se takmiči preporučuje da uradi zadatke navedene za njegov razred.

Zahvaljujemo se recenzentima Radomiru Živkoviću, profesoru na Odsjeku za matematiku Prirodno-matematičkog fakulteta u Sarajevu i Emini Avdagić, profesoru škole „Revolucionari i narodni heroji I gimnazije" u Sarajevu na korisnim primjedbama koje su uzete u obzir prilikom definitivnog sređivanja rukopisa.

AUTORI

PRVI DIO

ZADACI SA REPUBLIČKIH TAKMIČENJA IZ MATEMATIKE

ŠESNAESTO TAKMIČENJE

I razred

1. Dati su skupovi $A=\{8r-1,\ 5r\}$ i $B=\{3r+4,\ 6r+3,\ 6r+1\}$. Naći $A \cap B$ ako je:

i) r prirodan broj,

ii) r racionalan broj.

2. Dokazati da zbir kvadrata pet uzastopnih cijelih brojeva ne može biti potpun kvadrat.

3. Naći rješenja jednačine

$$ax+b\,((f(x))^2+(g(x))^2)+ax-bx+f(x)+g(x)=0$$

ako je

$$f(x)=\frac{x+|x|}{2}, \quad g(x)=\frac{x-|x|}{2},$$

pri čemu je a realan, b nenegativan parametar.

4. Konstruisati $\triangle ABC$ takav da je $a+b=12$ cm, $\gamma=60°$ i da simetrala ugla γ čini sa suprotnom stranicom ugao od 45°.

II razred

1. Neka je $A=abcd$ (a je cifra hiljada, b cifra stotina itd.) prirodan broj, a $B=bcda$ prirodan broj djeljiv brojem 7.

i) Ako je $a=0$ ili $a=7$, dokazati da je broj A djeljiv brojem 7.

ii) Dokazati da je prirodan broj $10A-3a$ djeljiv brojem 7, pa odatle zaključiti da je broj A djeljiv brojem 7 ako i samo ako je $a=0$ ili $a=7$.

iii) Neka je $a=7$, $b=d$, $c=0$. Odrediti broj A tako da bude djeljiv i brojem 3.

2. Za realan broj x označimo sa $E(x)$ najveći cio broj koji nije veći od x.

i) Riješiti jednačinu $E(x)=|x|$.

ii) Riješiti jednačinu $E(a)\cdot E(x)=0$ za zadani realni broj a.

iii) Riješiti jednačinu $E(x)+x=k$ za zadani cio broj k.

iv) Riješiti jednačinu sa dvije nepoznate $E(x)\cdot E(y)=1$.

3. Za koje vrijednosti parametra a jednačina

$$|x^2-6x+8|+|x^2-6x+5|=a$$

ima više od tri rješenja?

4. Kroz četiri date tačke na datoj pravoj konstruisati prave tako da one određuju romb zadanog oštrog ugla α.

III razred

1. Odrediti parove cijelih brojeva x i y koji zadovoljavaju sistem nejednačina:

$$y-|x^2-2x|+\frac{1}{2}>0, \quad y+|x-1|<2.$$

2. Neka su $ABCD$ i $A_0B_0C_0D_0$ dva paralelograma i neka su tačke M, N, P i Q redom na dužima AA_0, BB_0, CC_0, DD_0 tako da je

$$AM:AA_0=BN:BB_0=CP:CC_0=DQ:DD_0=\lambda.$$

i) Dokazati da je $MNPQ$ paralelogram.

ii) Šta je geometrijsko mjesto tačaka presjeka dijagonala četvorougla $MNPQ$ kada se broj λ mijenja?

3. Dat je $\triangle ABC$ takav da je $AC>AB>BC$, a tačka O je centar upisane kružnice. Putnik koji polazi iz tačke O treba da prođe kroz tačke A, B i C (idući po stranicama trougla) i da se ponovo vrati u tačku O. Koji je između mogućih puteva najkraći?

4. Dokazati da funkcija

$$f(x)=\operatorname{tg} 3x\cdot\operatorname{ctg} 2x$$

ne može imati vrijednosti iz intervala $\left(\frac{1}{9}, \frac{3}{2}\right)$

IV razred

1. Četiri tačke M, N, P i Q koje ne pripadaju istoj ravni su središta ivica tetraedra T.

i) Dokazati da tri od četiri zadane tačke pripadaju istoj strani tetraedra.

ii) Konstruisati tetraedar i odrediti broj rješenja.

2. Aritmetička i geometrijska progresija sa pozitivnim članovima imaju jednak broj članova i jednake krajnje članove ($a_1=b_1$, $a_n=b_n$). Ako je S_a suma aritmetičke, a S_b suma geometrijske progresije, dokazati da je $S_a\geqslant S_b$.

3. Dat je polinom

$$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$$

pri čemu su $a_0, \ldots, a_n$ cijeli brojevi. Ako taj polinom za četiri cijele vrijednosti argumenta x ima vrijednost 7, onda on ne može ni za jednu cijelu vrijednost argumenta x imati vrijednost 14. Dokazati!

4. Ispitati funkciju

$$y=\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{\sin x}$$

i nacrtati njen grafik.

SEDAMNAESTO TAKMIČENJE

I razred

1. Nacrtati grafik i ispitati tok funkcije

$$y=|x-1|+|x+1|+1$$

za svako realno x za koje je $|2x+5|\geqslant 1$.

2. Dokazati da za proizvoljan $\triangle ABC$ važi:

i) $t_c<\frac{a+b}{2}$, gdje je t_c težišna linija trougla koja sadrži vrh C,

ii) $(a>b)\Rightarrow(s_c<t_c)$, gdje je s_c simetrala ugla čije je tjeme C.

3. Neka su M, N, P središta stranica BC, CA, AB trougla ABC, X proizvoljna tačka ravni, a X_1, X_2, X_3 tačke simetrične tački X u odnosu na tačke M, N, P kao centre simetrije. Dokazati da postoji centralna simetrija koja $\triangle ABC$ preslikava na $\triangle X_1X_2X_3$.

4. Riješiti sistem jednačina

$$(a+b)x+(a-b)y=a^2+b^2$$

$$(a-b)x+(a+b)y=a^2-b^2$$

i odgovoriti na pitanja:

Za koje vrijednosti a i b jednačine predstavljaju:

i) dvije prave koje se sijeku,

ii) dvije iste prave,

iii) paralelne prave.

iv) Kada tačke $M(x, y)$, čije su koordinate rješenja datog sistema, predstavljaju cijelu ravan?

II razred

1. Dato je n tačaka u ravni. Neka između svake četiri od njih po tri tačke pripadaju jednoj pravoj. Dokazati da najmanje $n-1$ tačaka pripada jednoj pravoj.

2. Riješiti nejednačinu
$$|x(1-x)|<0{,}05.$$

3. Ako jednačine $ax^2+bx+c=0$ i $a'x^2+b'x+c'=0$ imaju bar jedno zajedničko rješenje, onda vrijedi
$$(ac'-a'c)^2=(ab'-a'b)(bc'-b'c).$$
Dokazati!

4. U ravni su date dvije različite tačke A i B i prava a koja ne sadrži te tačke. Posmatrajmo skup svih trouglova ABX, gdje $X\in a$. Kakvu geometrijsku figuru čini skup težišta svih takvih trouglova?

III razred

1. Riješiti nejednačinu
$$2\cdot\log 2+\left(1+\frac{1}{2x}\right)\cdot\log 3-\log\left(\sqrt[x]{3}+27\right)>0.$$

2. Neka je $ABCD$ proizvoljna trostrana piramida. Ako povučemo tri prave od kojih svaka sadrži središta dviju mimoilaznih ivica piramide, one će se sjeći u jednoj tački. Dokazati!

3. Dokazati da sistem
$$\sin x\geqslant\sqrt{3x^2-20x+32}$$
$$\cos x\geqslant x^2$$
nema rješenja.

4. U kružnom isječku poluprečnika r i centralnog ugla γ upisati pravougaonik maksimalne površine. Naći ugao pod kojim se iz središta kružnice vidi ona stranica pravougaonika koja je tetiva kružnog luka.

IV razred

1. Konstruisati kvadrat tako da mu dva suprotna vrha leže na datoj pravoj, a druga dva na dvjema datim kružnicama koje leže sa raznih strana date prave.

2. Prirodni broj a može se napisati u obliku $a=10a_1+a_0$ gdje je a_1 broj desetica i a_0 cifra jedinica. Neka je c broj koji je jednak ili, za manje od 1, manji od količnika brojeva a i b gdje je b proizvoljan prirodan broj, tj.
$$bc\leqslant a<b(c+1).$$
Dokazati da je tada
$$bc_1\leqslant a_1<b(c_1+1)$$
gdje je c_1 broj desetica broja c.

3. Odrediti onaj pravougli trougao čije su katete a i b i hipotenuza c tako da ugao φ između težišnih linija t_a i t_b dostiže ekstremnu vrijednost.

4. Data je funkcija $y=x^a \ln x$. Odrediti konstantu a tako da grafik ove funkcije ima prevojnu tačku za $x=1$. Nacrtati grafik te funkcije.

OSAMNAESTO TAKMIČENJE

I razred

1. Naći zbir

$$S=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{1974\cdot 1975}+\frac{1}{1975\cdot 1976}.$$

2. Dokazati nejednakost $x^2+y^2+z^2 \geqslant 12$ ako su x, y, z pozitivni brojevi za koje vrijedi $x+y+z=6$.

3. Dva takmičara uzimaju naizmjenično kuglice iz dvije kutije. Svaki takmičar, kada dođe na red, može uzeti iz bilo koje, ali samo jedne, kutije proizvoljan broj kuglica. Pobjednik je onaj koji posljednji uzme kuglice. Kako treba da igra prvi igrač da bi pobijedio ako u jednoj kutiji ima 76, a u drugoj 976 kuglica?

4. Neka su $A_1, A_2, \ldots, A_{100}$ bilo kakve (međusobno različite) tačke ravni. Dokazati da na bilo kojoj kružnici poluprečnika 1 postoji tačka M za koju je suma njenih rastojanja do svih tačaka $A_1, A_2, \ldots, A_{100}$ veća ili jednaka 100.

II razred

1. Naći sve cijele brojeve x, y za koje vrijedi

$$\underbrace{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\ldots+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}}}_{142 \text{ korijena}}=y.$$

2. Naći realna rješenja jednačine

$$\sqrt{x^2+2px-p^2}-\sqrt{x^2-2px-p^2}=1$$

gdje je $p>0$ realan parametar.

3. Dokazati da za svakih n pozitivnih brojeva $a_1, \ldots, a_n$ koji zadovoljavaju uslov $a_1\cdot\ldots\cdot a_n=1$ vrijedi nejednakost

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdot\ldots\cdot(1+a_n)\geqslant 2^n.$$

4. U ravni je dato sedam pravih takvih da nikoje dvije nisu paralelne. Dokazati da među njima postoje dvije koje zaklapaju ugao manji od 26°.

III razred

1. U ravni je raspoređeno n tačaka tako da je površina bilo kojeg trougla sa vrhovima u tim tačkama manja od 1. Dokazati da se sve te tačke mogu obuhvatiti pravougaonikom površine 4.

2. U trapezu sa osnovama a i b $(a>b)$, visinom h, međusobno okomitim dijagonalama i uglom α između krakova vrijedi

$$\frac{1}{h}=\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)\operatorname{ctg}\alpha. \text{ Dokazati!}$$

3. Ako su $x_1, \ldots, x_n$ pozitivni brojevi, dokazati da vrijedi

$$(x_1\cdot\ldots\cdot x_n)^{\frac{1}{n}(x_1+\ldots+x_n)}\leqslant x_1^{x_1}\cdot\ldots\cdot x_n^{x_n}.$$

4. Neka je tačka $M(b)$ jednako udaljena od prave $x=-2$ i kružnica $(x-3)^2+$ $+y^2=1$, $(x-3)^2+(y-b)^2=1$. Odrediti krivu koju opisuje tačka $M(b)$ kad parametar b prolazi skupom realnih brojeva.

IV razred

1. Neka su a, b, c realni brojevi koji zadovoljavaju uslove $a, b\geqslant 0$ i $0<c<1$. Dokazati da je

$$a^c\cdot b^{1-c}\leqslant ac+(1-c)\,b.$$

2. Kako se mijenja zapremina pravilne trostrane piramide upisane u loptu poluprečnika r kad se visina x piramide mijenja.

3. Ako beskonačni aritmetički niz prirodnih brojeva sadrži jedan član koji je kub prirodnog broja, dokazati da on tada sadrži beskonačno mnogo takvih članova.

Navesti primjer beskonačnog aritmetičkog niza prirodnih brojeva čiji nijedan član nije kub prirodnog broja.

4. Dokazati jednakost

$$\cos\frac{2\pi}{11}+\cos\frac{4\pi}{11}+\cos\frac{6\pi}{11}+\cos\frac{8\pi}{11}+\cos\frac{10\pi}{11}=-\frac{1}{2}.$$

DEVETNAESTO TAKMIČENJE

I razred

1. Postoje li prirodni brojevi p i q tako da vrijedi jednakost

$$p^2-4q^2=246\,834? \tag{19.1}$$

2. U ravni su zadane tri različite nekolinearne tačke A, M i N. Konstruirati kvadrat tako da mu jedan vrh leži u A, a dvije stranice, koje ne polaze iz tog vrha, leže na pravima koje prolaze tačkom M, odnosno N.

3. U ravni Oxy grafički prikazati skup svih tačaka $T(x, y)$ čije koordinate zadovoljavaju istovremeno sljedeće nejednakosti

$$|x-y|\leqslant 1$$

$$|x+y|\leqslant 1$$

$$x+|y|\leqslant 1.$$

4. Dokazati: ako je

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}, \tag{19.2}$$

onda za svako neparno n vrijedi jednakost

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^n=\frac{1}{a^n+b^n+c^n}. \tag{19.3}$$

II razred

1. Dat je trougao ABC. Neka su O_1, O_2 i O_3 centri kružnica od kojih svaka dira izvana po jednu stranicu trougla ABC i prave kojima pripadaju dvije preostale stranice. Dokazati da je $\triangle O_1O_2O_3$ oštrougli.

2. Dati su prirodni brojevi

$$a,\ a+d,\ a+2d, \ldots,\ a+(n-1)d.$$

Ako se zna da nijedan od zadanih brojeva nije djeljiv prirodnim brojem n, dokazati da d i n nisu relativno prosti.

3. Dat je jednakostranični trougao ABC stranice a. Iz tačke M stranice AC povučena je normala MN na stranicu AB, zatim normala NP na stranicu BC i, najzad, normala PQ na stranicu AC.

i) Na kojoj udaljenosti od tačke A treba uzeti tačku M da bi konveksni četvorougao $MNPQ$ imao najveću površinu?

ii) Kada će se četvorougao $MNPQ$ svesti na trougao?

4. *i*) Odrediti realan broj k tako da polinom $x^3+y^3+z^3+kxyz$ bude djeljiv sa $x+y+z$.

ii) Za nađeno $k=k_0$ pod i) pokazati da je jednačina

$$x^3+y^3+z^3+k_0xyz=0$$

zadovoljena samo ako je $x+y+z=0$ i $x=y=z$ $(x, y, z \in R)$.

III razred

1. Dokazati da je broj $k^{n+4}-k^n$ djeljiv brojem 120 za svaki prirodni broj k i za svaki prirodni broj $n>2$.

2. Dat je kompleksan broj z različit od ± 1. Dokazati da je broj $\frac{z-1}{z+1}$ čisto imaginaran ako i samo ako $|z|=1$.

3. Dokazati nejednakost, odnosno jednakost

$$\frac{\sin^{n+2} x}{\cos^n x}+\frac{\cos^{n+2} x}{\sin^n x}\geqslant 1, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \quad n \in N. \tag{19.5}$$

4. Mnogougao sa n stranica nalazi se u unutrašnjosti kvadrata čija stranica a ima dužinu 1. Pokazati da postoje tri vrha A, B i C toga mnogougla takva da površina trougla ABC bude manja od $\frac{8}{n^2}$.

IV razred

1. Dokazati da je za svaki $n \in N$ tačno jedan od brojeva

$$A_n=2^{2n+1}-2^{n+1}+1$$

$$B_n=2^{2n+1}+2^{n+1}+2$$

djeljiv brojem 5.

2. Riješiti jednačinu

$$\cos 2x+\log_4\left(\frac{1}{2}\sin x\right)+2\cos x\cdot\log_{\frac{1}{2}}\sin x=2\cos x+\sin^2 x\cdot\log_2\sin^2 x.$$

3. Dokazati: Ako je proizvod n pozitivnih brojeva jednak 1, njihova suma nije manja od n, tj. iz

$$x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n=1 \quad \text{i} \quad x_1, x_2, \ldots, x_n>0$$

slijedi

$$x_1+x_2+\ldots+x_n\geqslant n.$$

Kada vrijedi znak jednakosti?

4. *i*) Odrediti interval $\mathcal{J}=(0, x\ldots; x)$ gdje je x rješenje jednačine

$$1+7+13+\ldots+x=280.$$

ii) Naći one vrijednosti x iz intervala $\mathcal{J}$ za koje je definirana funkcija

$$f(x)=\log_{(7x^2-4x)}(x^4-4x^3+5x^2).$$

I razred

1. Dati su proizvoljni skupovi A, B i C. Dokazati:

i) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$,

ii) $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$,

iii) zakon asocijativnosti operacije "$\setminus$„ važi ako je $A \cap C = \varnothing$.

2. Dat je trokut ABC. Na polupravoj BA data je tačka D tako da je $BD = AC$. Ako sa M, odnosno N označimo središte duži BC, odnosno AD, naći kut između pravih MN i AC.

3. Neka je p prost broj veći od tri. Dokazati da njegov kvadrat pri dijeljenju brojem 12 daje ostatak 1.

4. Konstruirati trougao ako su dati centri kvadrata konstruirani nad stranicama tog trougla, ali izvan trougla.

II razred

1. Oko pravouglog trapeza $ABCD$ (osnovica AB i CD, $AB > CD$ i visine BC) opisati kvadrat tako da kroz po jedan vrh trapeza prolazi po jedna stranica kvadrata i da se trapez nalazi unutar kvadrata.

2. Fabrika u mjestu A udaljena je od bliže obale pravolinijske rijeke za $AB = a$ km, a sirovinu dobavlja iz uzvodnog mjesta C koje je na istoj obali. Troškovi riječnog prevoza za tona/km su dva puta manji od troškova drumskog prevoza. Ako je $BC = b$ km, pod kojim uglom prema rijeci treba provesti put tako da bi troškovi prevoza sirovine bili najmanji?

3. Dat je kompleksan broj $z = x + iy$ pri čemu je $z \neq \pm 1$. Da bi broj $\dfrac{z-1}{z+1}$ bio čisto imaginaran, potrebno je i dovoljno da je $|z| = 1$. Dokazati.

4. Neka je

$$0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n < \frac{\pi}{2}.$$

Dokazati

$$\operatorname{ctg} \alpha_n < \frac{\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2 + \ldots + \cos \alpha_n}{\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2 + \ldots + \sin \alpha_n} < \operatorname{ctg} \alpha_1. \tag{20.1}$$

III razred

1. Popuniti prazna mjesta (označena crticama) tako da naznačeno množenje bude ispravno. Obrazložiti postupak popunjavanja!

$$-3- \quad - \cdot 45 = 37 - 15 - .$$

2. Riješiti u realnom području sistem jednačina

$$|x|+|y|=1$$
$$x^2+y^2=a$$

uz grafičku ilustraciju.

3. Data je jednačina

$$\log kx=2\log(x+1).$$

Neka se odrede sve vrijednosti parametra k tako da ta jednačina ima jedan i samo jedan korijen.

4. Dat je niz polinoma P_0, P_1, $P_2, \ldots$ pri čemu je

$$P_0(x)=1, \quad P_1(x)=x$$
$$P_{n+1}(x)=x\cdot P_n(x)-P_{n-1}(x), \quad n\geqslant 1.$$

Dokazati jednakost

$$\frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin\varphi}=P_n(2\cos\varphi)(\varphi\neq k\pi, \ k\in Z).$$

IV razred

1. Posmatrajmo tetraedar $ABCD$ čije su svake dvije ivice DA, DB i DC uzajamno normalne. Neka je O centar sfere opisane oko tetraedra, a R radijus te sfere.

i) Dokazati da postoji trougao čije su dužine stranica jednake rastojanjima od tri vrha tetraedra $ABCD$, među kojima je i vrh D, do prečnika sfere koji prolazi kroz četvrti vrh.

ii) Dokazati da je $abc=4Rs$ pri čemu je s površina toga trougla dok su a, b i c dužine ivica DA, DB i DC.

2. *i*) Ako je

(20.11) $$2\cos\varphi=z+\frac{1}{z}, \quad 2i\sin\varphi=z-\frac{1}{z},$$

pri čemu je z kompleksan broj, dokazati da je

(20.12) $$2\cos(n\varphi)=z^n+\frac{1}{z^n}, \quad 2i\sin(n\varphi)=z^n-\frac{1}{z^n}.$$

ii) Primjenjujući tvrdnju *i*), izračunati

$$\cos 20°\cos 40°\cos 80°.$$

3. Dat je niz x_1, x_2, $x_3, \ldots, x_n, \ldots$ pri čemu je

$$x_1=\frac{\alpha}{2},$$

$$x_2=\frac{\alpha}{2}-\frac{x_1^2}{2},$$

$$x_3=\frac{\alpha}{2}-\frac{x_2^2}{2}$$

$$\vdots$$

$$x_n=\frac{\alpha}{2}-\frac{x_{n-1}^2}{2}$$

$$\vdots$$

i $0<\alpha<1$.

Dokazati da je granična vrijednost toga niza jednaka $-1+\sqrt{1+\alpha}$.

4. Od pravolinijskog kanala širine a odvaja se pod pravim uglom pravolinijski kanal širine b. Treba naći najveću dužinu brvna koje se neće zaglaviti pri zaokretu plutajući iz jednog kanala u drugi.

DVADESETPRVO TAKMIČENJE

I razred

1. Konstruirati trougao ako je dato $a+c$, h_a+h_c i α.

2. Uprostiti sljedeći proizvod:

$$(a^{2^0}+1)(a^{2^1}+1)(a^{2^2}+1)\ldots(a^{2^n}+1),\quad a>1. \tag{21.1}$$

3. Neka je dat trougao ABC i neka su A_1 i B_1 podnožja visina povučenih iz vrhova A i B na prave koje sadrže odgovarajuće stranice trougla. Dokazati da simetrala duži A_1B_1 polovi stranicu AB.

4. Dokazati da ne postoje cijeli brojevi a i b takvi da vrijedi

$$a^2-3b^2=17.$$

II razred

1. Kroz vrh C kvadrata $ABCD$ (kome je dužina stranice jednaka 1) povući pravu p (koja ne siječe kvadrat) tako da siječe produžetak stranice AB preko B u tački M, a produžetak stranice AD preko D u tački N. Označimo AM sa a i AN sa b.

i) Dokazati da vrijedi

$$a\cdot b=a+b.$$

ii) U kojim granicama leži $q=a+b$?

iii) Odrediti a i b ako je $a+b=\frac{9}{2}$.

2. Odrediti interval u kome se nalazi parametar a tako da razlomak

$$\frac{x^2+2x-1}{x^2+4x+a}$$

može uzeti sve realne vrijednosti.

3. Dat je trougao ABC u kome je

$$\sphericalangle CAB - \sphericalangle ABC = 90^\circ.$$

i) Dokazati da je visina CC_1 trokuta ABC povučena iz tjemena C tangenta kružnice opisane oko tog trokuta.

ii) Na osnovu toga konstruirati ovaj trougao ako je zadano AB i R.

4. Dokazati da je

$$\frac{1}{2\sqrt{n}} < \frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot2n} < \frac{1}{\sqrt{2n}} \text{ za } n>1.$$

III razred

1. Ako je $a+1$ pozitivan korijen jednačine

$$x^n-2x+1=0$$

dokazati da vrijedi

$$a<\frac{1}{\sqrt[n]{(n-1)^2}}.$$

2. Neka su a i b prirodni brojevi. Dokazati da:

i) ako je $a\cdot b$ paran broj, tada postoje prirodni brojevi c i d takvi da vrijedi

$$a^2+b^2+c^2=d^2,$$

ii) ako je $a\cdot b$ neparan broj, takvi prirodni brojevi c i d ne postoje.

3. Dokazati da za $n\geqslant2$ vrijedi

$$\log^2_{n!}n+\log^2_{n!}(n-1)+\log^2_{n!}(n-2)!>\frac{1}{3}\,(n!=1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n).$$

4. Ravan presijeca bočne ivice pravilne četvorostrane piramide u tačkama A, B, C i D koje se nalaze na udaljenostima a, b, c i d respektivno od vrha piramide. Dokazati da vrijedi

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{1}{b}+\frac{1}{d}.$$

IV razred

1. Zadana je jednačina

$$2x^2 \sin^2\alpha - 4x \sin\alpha + 4\sin^2\alpha - 1 = 0,$$

gdje je x nepoznata, a α parametar koji prima vrijednosti iz $[0, \pi]$. Ispitati realnost i predznak korijena te jednačine.

2. Cjelobrojnim trouglom nazivamo trougao kome su dužine stranica izražene prirodnim brojevima. Naći sve cjelobrojne trouglove čiji je obim jednak površini.

3. Neka je M proizvoljna tačka koja leži unutar pravilnog mnogougla sa n stranica. Dokažite da postoje dva vrha A i B ovog mnogougla takva da

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot 180^\circ \leqslant \sphericalangle AMB \leqslant 180^\circ.$$

4. Data su dva niza

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

$$b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots$$

za čije članove vrijedi

$$a_{n+1} = p_1 a_n + q_1 b_n,$$

$$b_{n+1} = p_2 a_n + q_2 b_n,$$

pri čemu su p_1, p_2, q_1, q_2 dati brojevi, ali takvi da je

$$|p_1| + |q_1| < 1 \quad \text{i} \quad |p_2| + |q_2| < 1.$$

Dokazati da je

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \quad \text{i} \quad \lim_{n\to\infty} b_n = 0.$$

DVADESETDRUGO TAKMIČENJE

I razred

1. Dokazati da bar jedan od tri proizvoda $(1-a)b$, $(1-b)c$ i $(1-c)a$ u kojima su brojevi a, b i c takvi da vrijedi:

$$0 < a < 1, \quad 0 < b < 1 \quad \text{i} \quad 0 < c < 1,$$

ne može biti veći od $\frac{1}{4}$.

2. Tačka K je sredina strane AB kvadrata $ABCD$, a tačka L dijeli dijagonalu AC u odnosu 3:1. Dokazati da je $\sphericalangle KLD$ pravi!

3. Dokazati da za proizvoljne prirodne brojeve p i q vrijedi nejednakost:

$$\left|\sqrt{2} - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{3q^2}. \tag{22.1}$$

4. Od dvanaest različitih dvocifrenih brojeva mogu se izabrati dva čija je razlika dvocifren broj kome su obje cifre jednake. Dokazati!

II razred

1. Ako je

$$x+\frac{1}{y}=y+\frac{1}{z}=z+\frac{1}{x}, \tag{22.2}$$

tada je $x=y=z$ ili $(xyz)^2=1$. Dokazati!

2. U tjemenima A i B jednakostraničnog trougla ABC podignute su normale na duž AB. Kroz tačku C povučena je proizvoljna prava koja siječe normale u tačkama P i Q, a zatim simetrala duži PQ koja siječe pravu AB u tački S.

i) Dokazati da je trougao PQS jednakostraničan!

ii) Odrediti položaj prave PQ tako da površina trougla PQS bude $\frac{4}{3}P_0$, gdje je P_0 površina trougla ABC!

3. Kojih šestocifrenih brojeva ima više: onih koji se mogu predstaviti u obliku proizvoda dva trocifrena broja ili onih koji se ne mogu predstaviti u tom obliku?

4. U tablicu 10×10 zapisani su brojevi od 1 do 100 redom. Dokazati da će, ako se u svakoj koloni i svakom retku tačno polovini brojeva stavi znak minus, zbir svih brojeva, u tako dobivenoj tablici, biti jednak nuli!

III razred

1. Riješiti jednačinu

$$\left(\sqrt{\sqrt{x^2-8x+7}-\sqrt{x^2-8x-9}}\right)^x+\left(\sqrt{\sqrt{x^2-8x+7}+\sqrt{x^2-8x-9}}\right)^x=2^{x+1}. \tag{22.3}$$

2. Dokazati da težišne linije, koje odgovaraju katetama pravouglog trougla, obrazuju ugao φ takav da je $\cos\varphi\geqslant\frac{4}{5}$.

3. Data je trojka brojeva $2, \sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}$. Svaka dva od navedena tri broja mogu se zamijeniti svojom sumom, odnosno razlikom podijeljenom sa $\sqrt{2}$. Da li je moguće, kad se taj postupak ponovi nekoliko puta, dobiti trojku brojeva $1, \sqrt{2}, 1+\sqrt{2}$?

4. Na nogometnom turniru su se svake dvije momčadi sastale samo po jednom. Po završetku turnira prvoplasirana momčad je osvojila sedam bodova, drugoplasirana pet, a trećeplasirana tri boda. Koliko je momčadi sudjelovalo na tom turniru?

IV razred

1. Riješiti jednačinu

$$\sqrt{x^2-k}=x-2\sqrt{x^2-1} \tag{22.4}$$

za sve $k<0$.

2. U tetraedru je dužina jednog i samo jednog brida veća od 1. Pokazati da tada zapremina tetraedra nije veća od $\frac{1}{8}$!

3. Naći sve realne vrijednosti promjenljive $x \in [0, 2\pi]$ koje zadovoljavaju nejednakost:

$$2\cos x \leqslant \left|\sqrt{1+\sin 2x}-\sqrt{1-\sin 2x}\right| \leqslant \sqrt{2}. \tag{22.5}$$

4. Dokazati nejednakost

$$\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\ldots+\sqrt{n}}}}<2 \tag{22.6}$$

za svaki prirodan broj n.

DVADESETTREĆE TAKMIČENJE

I razred

1. Neka su a, b i c dužine stranica nekog trougla. Dokazati da je tada

$$a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c) \leqslant 3abc. \tag{23.1}$$

2. Neka je $\frac{1}{2}<\lambda<1$. Na stranicama BC, CA i AB trougla ABC naneseni su odsječci

$$BA_1=\lambda\, BC,\ CB_1=\lambda\, CA \text{ i } AC_1=\lambda\, AB. \tag{23.2}$$

Dokazati da obim trougla $A_1B_1C_1$ nije veći od obima trougla ABC pomnoženog sa λ.

3. Naći realna rješenja jednačine

$$\sqrt{x^2-p}+2\sqrt{x^2-1}=x, \tag{23.3}$$

gdje je p realan parametar.

4. U ravni je dato 25 tačaka tako da se između bilo koje tri tačke mogu naći dvije čije je rastojanje manje od 1. Dokazati da se između zadanih tačaka može naći barem 13, koje mogu biti pokrivene krugom radijusa 1.

II razred

1. Neka je R skup svih realnih brojeva, a preslikavanje $f:R\to R$ zadano ovako

$$f(x)=x^2+(a+1)x+1 \qquad (x\in R). \tag{23.4}$$

i) Odrediti sve realne vrijednosti parametra a za koje je tačan iskaz

$$(x\in R)\Rightarrow\left(\left|\frac{f(x)}{x^2+x+1}\right|<3\right). \tag{23.5}$$

ii) Odrediti $A\cap B$, gdje je

$$A=\{a\in R:a\cdot(a-2)^{1/2}\in R\}, \tag{23.6}$$

a B skup svih, u *i*) određenih, vrijednosti parametra a.

iii) Vidjeti koje krive linije predstavlja graf funkcije

$$x\to y=|f(x)| \tag{23.7}$$

u zavisnosti od vrijednosti parametra a i dokazati da sve tako dobivene krive prolaze jednom fiksnom tačkom.

iv) Navesti one vrijednosti parametra a za koje kriva $y=|f(x)|$ predstavlja parabolu i odrediti analitički i grafički geometrijsko mjesto tjemena tih parabola.

v) Šta se može reći o jednoznačnosti datog preslikavanja $f:R\to R$?

2. Dokazati da težišnica CM povučena iz vrha C trougla ABC polovi svaku duž XY ako $X\in AC$, $Y\in BC$ i $XY\| AB$, a zatim da presječna tačka N duži AY i BX leži na težišnici CM.

3. Data su 34 cijela broja i operacija koja proizvoljno odabrana 23 od tih brojeva povećava za 1. Dokazati da ako primijenimo uzastopno nekoliko puta ovu operaciju možemo postići da svi brojevi budu međusobno jednaki.

4. U ravni je dato sedam pravih od kojih nikoje dvije nisu paralelne. Dokažite da postoje dvije od tih pravih među kojima je ugao manji od 26°!

III razred

1. Za koje je realne brojeve a, x i y izraz

$$r=\frac{2\sqrt{xy}+1}{[\sqrt{2}(x\sin xy+\sqrt{a})]^2+x^2(1+\cos 2xy)} \tag{23.8}$$

realan broj?

2. U kružnicu ω je upisan trougao ABC. Konstruisana je kružnica ω_1 koja dodiruje kružnicu ω i stranice CA i CB. Dokazati da vrijedi $CA_1=\dfrac{ab}{p}$, gdje je A_1 tačka dodira kružnice ω_1 i stranice BC, a $2p=a+b+c$.

3. Dokazati da su težišnice AA_1 i BB_1 trougla ABC okomite ako i samo ako vrijedi

$$\operatorname{ctg} \hat{C}=2(\operatorname{ctg} \hat{A}+\operatorname{ctg} \hat{B}). \tag{23.9}$$

4. Dato je 99 prirodnih brojeva manjih od 100. Ako zbir ma koliko njih nije djeljiv sa 100, onda su svi ti brojevi jednaki.

IV razred

1. Neka su a, b, c i d cijeli brojevi. Dokazati da sistem jednačina

$$\begin{aligned} ax+by&=m \\ cx+dy&=n, \end{aligned} \tag{23.10}$$

za sve cijele brojeve m i n, ima cjelobrojna rješenja ako i samo ako je $ad-bc=\pm 1$.

2. Neka je f realna funkcija definisana za sve realne vrijednosti argumenta i neka za sve vrijednosti ispunjava uslov:

$$f(x+a)=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-[f(x)]^2}, \tag{23.11}$$

gdje je a realan i pozitivan parametar. Dokazati da je f periodična funkcija, tj. da postoji pozitivan realan broj b takav da je $f(x+b)=f(x)$ za svaki x i naći b.

3. Za niz $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ vrijedi

$$a_0=0, \quad a_{n+1}=5a_n+\sqrt{24a_n+1}, \quad n=0, 1, \ldots . \tag{23.12}$$

Dokazati da su svi članovi niza prirodni brojevi.

4. Neka su $a_1, a_2, \ldots, a_n$ realni brojevi takvi da je za svako x

$$1+a_1 \cos x+a_2 \cos 2x+\ldots+a_n \cos nx \geqslant 0. \tag{23.13}$$

Dokazati da je

$$a_1+a_2+\ldots+a_n \leqslant n. \tag{23.14}$$

DVADESETČETVRTO TAKMIČENJE

I razred

1. Naći sve godine do kraja ovog vijeka (uključujući i 1982. god.) koje imaju sljedeću osobinu: postoji bar jedna osoba koja u toj godini navršava onoliko godina života koliki je zbir cifara godine rođenja te osobe.

2. Skup $\{1, 2, \ldots, 9\}$ je razbijen u dva disjunktna podskupa A i B. Dokazati da bar u jednom od njih postoje tri različita broja x, y i z za koje vrijedi $x+y=z$. Dokazati da takva tvrdnja ne vrijedi za skup $\{1, 2, \ldots, 8\}$.

3. Može li se proizvoljan zadani trougao razrezati pravom na dva podudarna trougla? Obrazložiti!

4. Dokazati da se svaki pozitivan racionalan broj može napisati u obliku konačnog zbira međusobno različitih brojeva oblika $\frac{1}{n}$ $(n=1, 2, \ldots)$.

II razred

1. Odrediti najmanju vrijednost izraza

$$\left| z-\frac{1}{z} \right| \quad (z \text{ kompleksan broj}) \tag{24.1}$$

ako je $|z|=2$.

2. Odrediti najveću vrijednost odnosa četvorocifrenog (prirodnog) broja prema zbiru njegovih cifara.

3. Ako su $a_1, a_2, \ldots, a_n$ i $b_1, b_2, \ldots, b_n$ pozitivni realni brojevi i ako je

$$a_1+a_2+\ldots+a_n=1, \quad b_1+b_2+\ldots+b_n=1, \tag{24.2}$$

dokazati da važi nejednakost

$$\frac{b_1^2}{a_1}+\frac{b_2^2}{a_2}+\ldots+\frac{b_n^2}{a_n} \geqslant 1. \tag{24.3}$$

4. U ravni je dato n tačaka tako da rastojanje između bilo koje dvije tačke nije veće od 1. Ako je m najmanje rastojanje između neke dvije od njih, dokazati da je

$$m<\frac{2(\sqrt{n}+1)}{n-1}. \tag{24.4}$$

III razred

1. Na nogometnom turniru svake dvije ekipe su se sastale samo po jednom. Po završetku turnira prvoplasirana ekipa osvojila je sedam bodova, drugoplasirana pet, a trećeplasirana tri boda. Koliko ekipa je sudjelovalo na tom turniru? (Svaka pobjeda donosi dva boda.)

2. Neka su težišnice AD i BE trougla ABC međusobno normalne. Naći sve moguće vrijednosti kosinusa ugla ACB tog trougla.

3. Odrediti koliko rješenja imaju sistemi:

$$i) \quad \begin{aligned} \cos x_1 &= x_2 \\ \cos x_2 &= x_3 \\ &\vdots \\ \cos x_{n-1} &= x_n \\ \cos x_n &= x_1, \end{aligned} \qquad\qquad ii) \quad \begin{aligned} \sin x_1 &= x_2 \\ \sin x_2 &= x_3 \\ &\vdots \\ \sin x_{n-1} &= x_n \\ \sin x_n &= x_1. \end{aligned}$$

Odgovor obrazložiti!

4. Data je familija $\mathscr{F}$ podskupova skupa X koji se sastoji od n elemenata, sa osobinom da za svaki skup A i za svaki skup B iz $\mathscr{F}$ vrijedi $A \cap B \neq \varnothing$. Koliko najviše članova može imati familija $\mathscr{F}$?

IV razred

1. Odrediti četvorocifreni broj $\overline{abcd}$ koji ispunjava uslove

$$\overline{cda} - \overline{abc} = 297 \quad \text{i} \tag{24.5}$$

$$a + b + c = 23. \tag{24.6}$$

2. Pretpostavimo da jednačina

$$x^3 - px + q = 0 \tag{24.7}$$

ima tri realna korijena.

i) Dokazati da je $p > 0$.

ii) Ako je $q > 0$, onda je najmanji po apsolutnoj vrijednosti korijen ove jednačine manji ili jednak od broja $\min\left(\sqrt{\frac{p}{3}}, \sqrt[3]{\frac{q}{2}}\right)$.

3. Zadan je tetraedar $ABCD$. Označimo sa A' centar kružnice opisane oko trougla BCD, a sa π_A ravan koja sadrži tačke A i A' i normalna je na ravan trougla BCD. Analogno konstruišimo ravni π_B, π_C i π_D. Dokazati da se ove četiri ravni sijeku u jednoj tački!

4. Dat je skup X od 2^n elemenata. Ako je A podskup skupa X, uvedimo oznake: $A^1 = A$ i $A^{-1} = X - A$. Za podskupove $A_1, \ldots, A_k$ skupa X reći ćemo da se nalaze u posebnom položaju ako je za proizvoljan izbor brojeva $p_1, \ldots, p_k$, gdje je $p_i = 1$ ili $p_i = -1$ ispunjeno

$$A_1^{p_1} \cap A_2^{p_2} \cap \ldots \cap A_k^{p_k} \neq \varnothing. \tag{24.8}$$

Koliko se najviše podskupova skupa X može nalaziti u posebnom položaju?

DVADESETPETO TAKMIČENJE

I razred

1. Riješiti po x (x realan broj) jednačinu

$$f(x) + f(1-x) = 1, \tag{25.1}$$

gdje je

$$f(x) = \begin{cases} |x|, & x \leqslant \dfrac{1}{2} \\[2ex] 1 - x, & x > \dfrac{1}{2}. \end{cases} \tag{25.2}$$

2. Rasporediti brojeve 1, 2, ..., 9 na kružnici tako da suma bilo koja dva susjedna broja ne bude djeljiva ni sa 3, ni sa 5 ni sa 7. Koliko takvih rasporeda ima?

3. Dato je sedamnaest brojeva. Zbir svakih pet je pozitivan. Dokazati da je zbir svih tih brojeva pozitivan!

4. Zadan je paralelogram $ABCD$. Nad stranicama AB, BC, CD i DA konstruisani su kvadrati koji leže izvan paralelograma. Centar paralelograma, sredina bilo koje njegove stranice i centar kvadrata, konstruisanog nad tom stranicom, su vrhovi trougla.

i) Dokazati da su svi takvi trouglovi podudarni!

ii) Dokazati da je četvorougao koji čine sredine kvadrata kvadrat!

II razred

1. Neka je R skup realnih brojeva, a preslikavanja $F:R\to R$ i $f:R\to R$ zadana ovako:

(25.3) $$F(x)=x^4-2x^3-4x^2+Ax+B \quad \text{i} \quad f(x)=x^2+px+q.$$

Odrediti realne koeficijente A i B tako da vrijedi

(25.4) $$F(x)=f[f(x)] \qquad (x\in R),$$

a zatim za nađene vrijednosti koeficijenata A i B riješiti nejednačinu

(25.5) $$F(x)<0.$$

2. Proizvod dva prirodna broja je trocifren broj čije su sve cifre jednake, a njihov zbir je dvocifren broj čije su cifre takođe jednake. Naći sve takve brojeve!

3. Mogu li se svi desetocifreni brojevi, koji se pišu ciframa 1 i 2, razdijeliti na dvije grupe tako da suma bilo koja dva broja iz iste grupe u svom (desetičnom) zapisu ima ne manje od dvije trojke?

4. U kružnici su date dvije tetive AB i CD koje se ne sijeku i tačka P na tetivi CD. Odrediti na kružnici tačku M tako da tetive MA i MB odsijecaju na tetivi CD odsječak čije je središte zadana tačka P!

III razred

1. Među trouglovima čije stranice a, b i c zadovoljavaju uslov $1<a\leqslant 2\leqslant b\leqslant 5<c\leqslant 6$ odrediti trougao najveće površine!

2. Dokazati da težišnice koje odgovaraju katetama pravouglog trougla ABC obrazuju ugao x takav da je $\sin x\leqslant\frac{3}{5}$

3. Naći sve trojke cifara x, y, z takve da je

(25.6) $$\frac{1}{x+y+z}=0,xyz.$$

4. Na jednom takmičenju svaki učesnik se bori sa svakim i nijedna borba se ne završava neriješeno. Dokazati da među takmičarima postoji takav koji će imenovati sve učesnike, osim sebe, kada imenuje sve učesnike koje je pobijedio, a takođe i učesnike koji su pobijeđeni od ranije navedenih. Provjeriti tvrdnju na jednom primjeru!

IV razred

1. Bez upotrebe logaritamskih tablica dokazati da je

$$\mathrm{tg}\, 11^\circ < 0{,}2. \tag{25.7}$$

2. U konus je upisana kugla poluprečnika r. Odrediti zapreminu konusa ako je poznata udaljenost d vrha konusa od ravni koja dodiruje kuglu i okomita je na jednu od izvodnica konusa.

3. Od cifara 1 i 2 sastavljeno je 6 petocifrenih brojeva. Dokazati da se među tih 6 brojeva mogu izabrati dva koja se razlikuju u ne više od dva mjesta!

4. Dat je strogo rastući niz $a_1, a_2, a_3, \ldots$ prirodnih brojeva, tako da je

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 2 \quad \text{i} \quad a_m a_n = a_{mn}, \tag{25.8}$$

ako su m i n relativno prosti brojevi. Dokazati da je:

i) $a_3 = 3$,

ii) $a_n = n$ za sve prirodne brojeve n!

UPUTSTVA, RJEŠENJA, REZULTATI

ŠESNAESTO TAKMIČENJE

I razred

1. *Rezultat.* *i*) Za r prirodan broj:

$A \cap B = \varnothing$ ako je $r > 2$,

$A \cap B = \{7\}$ ako je $r = 1$,

$A \cap B = \{10, 15\}$ ako je $r = 2$.

ii) Za r racionalan (ne prirodan) broj:

$A \cap B = \varnothing$ ako je $r \neq -3, -1$,

$A \cap B = \{-15\}$ ako je $r = -3$,

$A \cap B = \{-5\}$ ako je $r = -1$.

2. *Rješenje.* Pretpostavimo da tvrdnja ne vrijedi, tj. $x^2 = n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 + (n+3)^2 + (n+4)^2 = 5n^2 + 20n + 30 = 5(n^2 + 4n + 6)$. Odavde slijedi da je 5 faktor broja x^2 što je moguće samo ako je 5 faktor broja x. Sada imamo

$$(5x_1)^2 = 5(n^2 + 4n + 6) \Rightarrow n^2 - x_1^2 = 4(x_1^2 - n) - 6 \Rightarrow \frac{(n - x_1)(n + x_1)}{2} = 2(x_1^2 - n) - 3.$$

Na desnoj strani posljednje jednakosti nalazi se neparan broj, kao razlika parnog i neparnog broja. Međutim, broj na lijevoj strani iste jednakosti je paran. Naime, jedan od brojeva $n - x_1$ i $n + x_1$ mora biti paran (jer je izraz na lijevoj strani posljednje jednakosti cio broj), pa se lako vidi da i drugi od ta dva broja mora biti paran, a odatle slijedi da je broj na lijevoj strani posljednje jednakosti paran. Prema tome, posljednja jednakost je nemoguća, a time i pretpostavka učinjena na početku.

3. *Rezultat.* Za $a = -\frac{1}{2}$, $b = 0$ rješenje je svako realno x. Za a proizvoljno i $b \geqslant 0$ jednačina ima rješenje $x = 0$.

Za a proizvoljno i $b > 0$ rješenje je $x = \frac{b - 2a - 1}{b}$.

4. *Rješenje. Analiza.* Pretpostavimo da je zadatak riješen. Neka je $\triangle ABC$ takav da ispunjava uslove zadatka i neka je pri tome CD simetrala ugla γ, gdje je D presjek te simetrale sa stranicom AB. Produžimo stranicu BC preko vrha C do tačke E tako da je $CE = CA$ i spojimo tačke A i E. Tada je

$$BE = BC + CE = BC + CA = a + b = 12.$$

Osim toga je

$$\sphericalangle CEA = \sphericalangle CAE, \; \gamma = 2 \cdot \sphericalangle CEA,$$

tj.

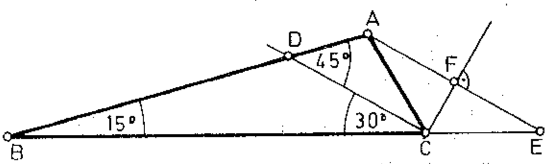
$$\sphericalangle CEA = 30°.$$

Pošto je $\sphericalangle BDC=135°$, $\sphericalangle BCD=30°$, to je $\sphericalangle CBA=15°$. Dakle, $\triangle ABE$ se može konstruisati. Tačka C leži u presjeku simetrale duži AE i duži BE.

Konstrukcija i dokaz. Očigledni!

Determinacija. Pošto je

$$\sphericalangle CBA+\sphericalangle BEA=15°+30°=45°<180°,$$



Sl. 16. 1.

to tačka A uvijek postoji. Simetrala duži AE uvijek siječe pravu BE jer je

$$\sphericalangle CFE+\sphericalangle CEF=90°+$$
$$+30°=120°<180°.$$

Postoje uvijek dva rješenja, u zavisnosti od toga da li je $\sphericalangle CDA=45°$ ili je $\sphericalangle CDB=54°$ (sl. 16.1.).

II razred

1. *Rješenje. i)* Kako je

$$B=1\,000b+100c+10d+a=10\,(100b+10c+d)+a,$$

to iz $a=0$ ili $a=7$ (dakle $7|a$), zbog $7|B$, slijedi $7|(100b+10c+d)$. Pošto je $A=1\,000a+100b+$ $+10c+d$, zaključujemo da mora $7|A$, jer je A jednak zbiru dvaju brojeva djeljivih brojem 7.

ii) Iz $C=10A-3a=10\,(100b+10c+d)+10\,000a-3a=B+9\,996a$, zbog $7|B$ i $7|9\,996$ slijedi $7|C$.

Zato, ako $7|A$ tada $7|3a$ tj. $7|a$, pa je $a=0$ ili $a=7$, jer je a cifra.

Obrnuto, ako je $a=0$ ili $a=7$, tada $7|A$ na osnovu *i)*.

iii) Neka je $a=7$, $b=d$, $c=0$. Na osnovu *i)* imamo $7|A$, tj. $7|(100+1)\,b$, odnosno $7|b$. Zato je $b=0$ ili $b=7$, jer je b cifra.

Za $b=0$ imamo $A=7\,000$, pa kako $3\nmid 7\,000$, ovaj slučaj otpada.

Za $b=7$ imamo $A=7\,707$. Kako $3|7\,707$, traženi broj je 7 707.

2. *Rješenje. i)* Iz $|x|=E\,(x)$ slijedi da je $|x|$ cio broj, odnosno da je x cio broj. Iz $E\,(x)=$ $=|x|\geqslant 0$ slijedi $E\,(x)\geqslant 0$, odnosno $x\geqslant 0$. Obrnuto, ako je $x\geqslant 0$ cio broj, tada je $E\,(x)=x=|x|$. Prema tome, rješenje date jednačine su svi cijeli nenegativni brojevi.

ii) Neka je $E\,(a)=0$, tj. $0\leqslant a<1$. Tada je $E\,(x)$ proizvoljno, pa je svaki realan broj x rješenje date jednačine.

Neka je sada $E\,(a)\neq 0$. Tada je $E\,(x)=0$, pa je rješenje svako $x\in[0,1)$.

iii) Kako su k i $E\,(x)$ cijeli brojevi, iz $x=k-E\,(x)$ slijedi da je x cio broj. No, tada je $E\,(x)=$ $=x$, pa je zadana jednačina ekvivalentna jednačini

$$2x=k\ (x \text{ cio broj}).$$

Ako je k neparan broj, tada jednačina nema rješenja, a ako je k paran broj, tada postoji jedinstveno rješenje $x=\dfrac{k}{2}$.

iv) Pošto su $E\,(x)$ i $E\,(y)$ cijeli brojevi, mora biti $E\,(x)=1$ i $E\,(y)=1$, ili $E\,(x)=-1$ i $E\,(y)=$ $=-1$, odakle dobijamo rješenja

$$x\in[1,2),\qquad y\in[1,2)$$

ili

$$x\in[-1,0),\qquad y\in[-1,0).$$

3. *Rješenje.* Ako je $x^2-6x+5\geqslant 0$, tada je $x^2-6x+8>0$, pa data jednačina ima oblik

$$2x^2-12x+13-a=0.$$

Ova jednačina ne može imati više od dva rješenja ni za jedno a.

Isti zaključak je i u slučaju kada je $x^2-6x+8\leqslant 0$.

Ako je $x^2-6x+5<0$ i $x^2-6x+8>0$, tada data jednačina glasi

$$x^2-6x+8-x^2+6x-5=a,$$

tj.

$$a=3,$$

pa možemo reći: za $a=3$ rješenja date jednačine su svi x koji zadovoljavaju uslove $x^2-6x+8\geqslant 0$, $x^2-6x+5\leqslant 0$, tj. uslove $1\leqslant x\leqslant 2$, $4\leqslant x\leqslant 5$, što znači da data jednačina ima beskonačno mnogo rješenja. Dakle, za $a=3$ data jednačina ima više od tri rješenja.

4. *Rješenje. Analiza.* Pretpostavimo da je zadatak riješen. Neka su A, B, C i D četiri tačke na datoj pravoj p_1 a, b, c, i d prave koje prolaze redom kroz tačke A, B, C, D i određuju romb $PQRS$ tako da je $\measuredangle QPS$ jednak datom oštrom uglu α (sl. 16.2). Tada je $\measuredangle SRQ=\alpha$, tj. $\measuredangle ARD=$ $=\alpha$. Dakle, geometrijsko mjesto tačaka R je kružni luk k iz čije se svake tačke duž AD vidi pod uglom α. Geometrijsko mjesto tačaka P je kružni luk k' iz čije se svake tačke duž BC vidi pod uglom α. Neka su G i H tačke presjeka prave PR i kružnih lukova AGD i BHC koji su dopune lukovima k i k' redom, do pune kružnice. Tada, imajući u vidu da dijagonala romba polovi odgovarajuće uglove romba, imamo

$$\measuredangle SPR=\measuredangle QPR\Rightarrow\measuredangle BPH=\measuredangle CPH\Rightarrow\widehat{BH}=\widehat{CH},\text{ pa je } H \text{ središte luka } \widehat{BHC}.$$

Potpuno analogno se zaključuje da je i G središte luka $\widehat{AGD}$.

Konstrukcija. Konstruiramo:

i) kružne lukove k i k' o kojima je riječ u analizi,

ii) središta G i H lukova $\widehat{AD}$ i $\widehat{BC}$ koji su dopune lukova k i k' do pune kružnice,

iii) pravu GH,

iv) $\{P\}=GH\cap k'$, $\{R\}=GH\cap k$,

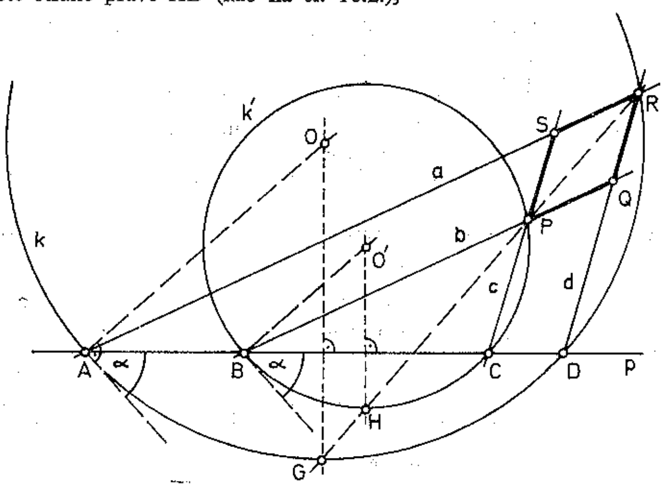
v) prave RD, PC, RA, PB,

vi) tačke Q i S kao presjeke pravih PB i RD, odnosno PC i RA (sl. 16.2).

Dokaz. Pošto $P\in k'$, to je $\measuredangle BPC=\alpha$, pa je $\measuredangle SPQ=\alpha$ (kao unakrsni). Iz $\widehat{BH}=\widehat{HC}$ slijedi $\measuredangle BPH=\measuredangle CPH$, tj. $\measuredangle SPR=\measuredangle QPR$. Slično zaključujemo da je $\measuredangle SRQ=\alpha$, odnosno da je $\measuredangle SRP=\measuredangle QRP$. Dakle, PR je dijagonala četvorougla $PQRS$ i polovi uglove iz čijih vrhova polazi (ti uglovi su jednaki), pa je $PQRS$ romb čija konstrukcija se tražila.

Determinacija. Pošto se geometrijska mjesta k i k' mogu konstruisati:

i) sa iste strane prave AD (kao na sl. 16.2.),



Sl. 16.2.

ii) sa raznih strana prave AD,

zatim se mogu konstruisati lukovi k_1 i k_1' iz čijih se tačaka duži AD, odnosno BC vide pod uglom $180°-\alpha$,

iii) sa iste strane prave AD,

iv) sa raznih strana prave AD,

to zadatak ima četiri rješenja.

III razred

1. *Rezultat.* Parovi (x, y) cijelih brojeva koji zadovoljavaju dati skup nejednačina su $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(2, 0)$.

2. *Rješenje.* Zadanu relaciju možemo napisati u obliku

$$\overrightarrow{AM}=\lambda\,\overrightarrow{AA_0},\ \overrightarrow{BN}=\lambda\,\overrightarrow{BB_0},\ \overrightarrow{CP}=\lambda\,\overrightarrow{CC_0},\ \overrightarrow{DQ}=\lambda\,\overrightarrow{DD_0}. \tag{16.1}$$

i) Dokažimo da je $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{QP}$, odakle će slijediti da je $MNPQ$ paralelogram.

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}=-\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}=-\lambda\overrightarrow{AA_0}+\overrightarrow{AB}+\lambda\,\overrightarrow{BB_0}=\overrightarrow{AB}+\lambda\,(\overrightarrow{BB_0}-\overrightarrow{AA_0})$$

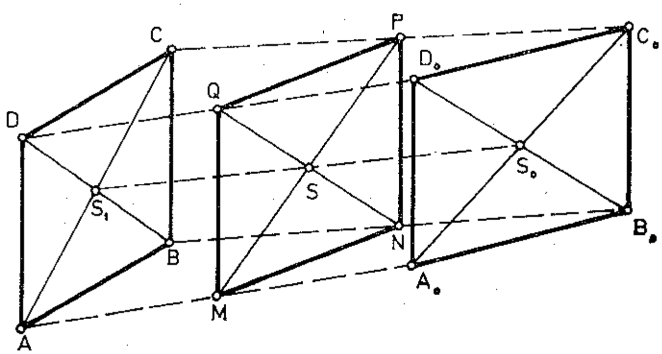
$$\overrightarrow{QP}=\overrightarrow{QD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CP}=-\overrightarrow{DQ}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CP}=-\lambda\,\overrightarrow{DD_0}+\overrightarrow{DC}+\lambda\,\overrightarrow{CC_0}=\overrightarrow{DC}+\lambda\,(\overrightarrow{CC_0}-\overrightarrow{DD_0}).$$

Ali

$$\overrightarrow{BB_0}-\overrightarrow{AA_0}=\overrightarrow{A_0B_0}-\overrightarrow{AB}\ \text{ i }\ \overrightarrow{CC_0}-\overrightarrow{DD_0}=\overrightarrow{A_0B_0}-\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC},$$

odakle slijedi jednakost vektora $\overrightarrow{MN}$ i $\overrightarrow{QP}$.

ii) Uzmimo tačku A za pol i računajmo (vidi sl. 16.3):



Sl. 16.3.

$$\overrightarrow{AS}=\overrightarrow{AM}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MQ})=\overrightarrow{AM}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\lambda\,(\overrightarrow{A_0B_0}-\overrightarrow{AB})+\overrightarrow{AD}+\lambda\,(\overrightarrow{A_0D_0}-\overrightarrow{AD})=$$

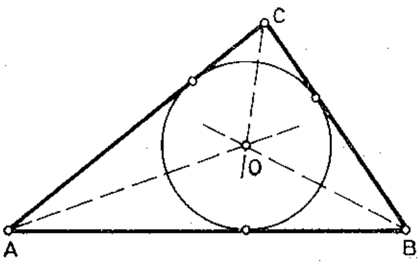
$$=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})+\frac{\lambda}{2}((\overrightarrow{A_0B_0}+\overrightarrow{A_0D_0})-(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}))+\lambda\overrightarrow{AA_0}=$$

$$=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})+\frac{\lambda}{2}(2\overrightarrow{AA_0}+(\overrightarrow{A_0B_0}+\overrightarrow{A_0D_0})-(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})).$$

Ovdje je λ parametar koji se mijenja u intervalu $[0, 1]$ (zbog uslova u zadatku), a svi vektori koji se pojavljuju na desnoj strani posljednje jednakosti su konstantni. Prema tome, geometrijsko mjesto tačaka S je duž S_1S_0, jer se za $\lambda=0$ dobija vektor tačke S_1, a za $\lambda=1$ vektor tačke S_0.

3. Najkraći put treba tražiti među sljedeće tri mogućnosti (sl. 16.4.):

$$s_1 = OC + CB + BA + AO,$$
$$s_2 = OA + AC + CB + BO,$$
$$s_3 = OB + BA + AC + CO.$$



Sl. 16.4.

$$s_1 = \frac{r}{\sin\frac{\gamma}{2}} + \frac{r}{\sin\frac{\alpha}{2}} + r\left(\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + 2\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\right),$$

$$s_2 = \frac{r}{\sin\frac{\alpha}{2}} + \frac{r}{\sin\frac{\beta}{2}} + r\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + 2\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\right),$$

$$s_3 = \frac{r}{\sin\frac{\beta}{2}} + \frac{r}{\sin\frac{\gamma}{2}} + r\left(\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} + 2\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right).$$

Uporedimo s_1 i s_2. Pretpostavimo da je $s_1 < s_2$, tj.

$$\frac{1}{\sin\frac{\gamma}{2}} - \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} < \frac{1}{\sin\frac{\beta}{2}} - \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}$$

$$\frac{1-\cos\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}} < \frac{1-\cos\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}$$

$$\frac{2\sin^2\frac{\gamma}{4}}{2\sin\frac{\gamma}{4}\cos\frac{\gamma}{4}} < \frac{2\sin^2\frac{\beta}{4}}{2\sin\frac{\beta}{4}\cos\frac{\beta}{4}} \Rightarrow \operatorname{tg}\frac{\gamma}{4} < \operatorname{tg}\frac{\beta}{4} \Rightarrow \gamma < \beta,$$

što je tačno zbog $AB < AC$.

Potpuno analognim upoređivanjem zaključujemo da je $s_2 < s_3$. Prema tome, s_1 je najkraći put.

4. *Rješenje.* Kako je

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}, \quad \operatorname{tg} 3x = \frac{3\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1-3\operatorname{tg}^2 x},$$

to datu funkciju možemo napisati u obliku

$$y = \frac{3-a}{1-3a}\,\frac{1-a}{2} \tag{16.2}$$

pri čemu je $a = \operatorname{tg}^2 x$. Jednačinu (16.2) možemo pisati u obliku

$$a^2 - 2(2-3y)\,a + (3-2y) = 0. \tag{16.3}$$

Jednačina (16.3), posmatrana kao kvadratna jednačina po a, može imati samo realna nenegativna rješenja zbog prirode veličine a. Za one y za koje posljednja jednačina ima rješenja, postojaće, dakle, x za koje će data funkcija uzeti određenu vrijednost. S druge strane, to se neće desiti u slučaju:

i) ako jednačina (16.3) ima imaginarne korijene, tj. kada je

$$(2-3y)^2 - (3-2y) < 0,$$

tj.

$$\frac{1}{9}<y<1,$$

ii) ako jednačina (16.3) ima oba korijena negativna, tj. kada je

$$3-2y>0,\ 2-3y<0,\ 9y^2-10y+1\geqslant 0,$$

tj.

$$1\leqslant y<\frac{3}{2}.$$

Prema tome, jedan od gornja dva slučaja će nastupiti za $\frac{1}{9}<y<\frac{3}{2}$.

IV razred

1. *Rješenje. i*) Očito je da svakoj strani tetraedra T pripada bar jedna od datih tačaka. Neka je $N\in ABC$ ($N\in BC$). Pretpostavimo da na strani ABC nema više nijedne tačke. Tada su one na ivicama AD, BD i CD pa strana BCD sadrži tri od njih, što se i tvrdi.

Neka je sada i $M\in ABC$. Ako je još i $P\in ABC$, tvrdnja zadatka je ispunjena. Ako $P\notin ABC$, tada $P\in AD$ (ili $P\in BD$) uz pretpostavku da $Q\in CD$. Tada bismo imali

$$MN\|AC\|PQ\Rightarrow MN\|PQ,$$

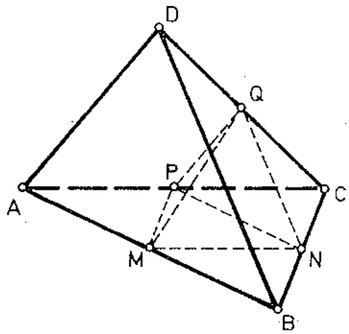
$$MP\|BD\|NQ\Rightarrow MP\|NQ,$$

odakle bi slijedilo da je $MNQP$ paralelogram, tj. tačke bi bile komplanarne, suprotno pretpostavci zadatka.

Prema tome, ako $M, N\in ABC$ mora biti i $P\in ABC$.

ii) *Analiza.* Tačke M, N, P *i* Q određuju tetraedar (sl. 16.5). Ako tačkama M, N i P povučemo prave paralelne sa NP, MP, MN, dobijamo $\triangle ABC$. Kada još nađemo tačku D ($QD=CQ$), tetraedar $ABCD$ je određen.

Determinacija. Kada je nađen $\triangle ABC$, tada je vrh D određen troznačno, jer tačkom Q mogu prolaziti sve tri ivice AD, BD i CD. Ako su, dakle, tačke M, N, P u jednoj strani tetraedra, dobijamo skup (T) od tri tetraedra. Sva tri tetraedra iz tog skupa su različita, jer su im osnove ABC iste, a bočne ivice su im različite. Od tačaka M, N, P i Q možemo formirati četiri trojke tačaka tako da te trojke budu središta ivica koje pripadaju jednoj strani tetraedra. Na taj način smo formirali četiri skupa od po tri različita tetraedra.



Sl. 16.5

Dokažimo da ni dva tetraedra iz različitih skupova ne mogu biti jednaka. Neka je, na primjer, T tetraedar kod koga su M, N, P sredine ivica jedne njegove strane, a T' tetraedar kod koga su M, N, Q sredine ivica jedne njegove strane i neka je $T=T'$. Pošto su, po pretpostavci, M, N, P, Q tačke koje ne leže u istoj ravni, slijedilo bi da prava MN pripada dvjema različitim stranama tetraedra $T=T'$, tj. slijedilo bi da MN pripada ivici tetraedra, što je nemoguće, jer su M i N sredine različitih ivica tetraedra. Prema tome, zadatak ima dvanaest rješenja.

2. *Rješenje.* Obilježimo sa q količnik u geometrijskoj progresiji. Tada je $b_n=b_1 q^{n-1}=a_n$, pa imamo

$$S_a=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n=\frac{a_1+a_1 q^{n-1}}{2}\cdot n=a_1\cdot\frac{1+q^{n-1}}{2}\cdot n$$

$$S_b=a_1\frac{q^n-1}{q-1}.$$

Dalje je

$$S_b-S_a=a_1\left(\frac{q^n-1}{q-1}-\frac{1+q^{n-1}}{2}\cdot n\right).$$

Kako je $a_1>0$, dovoljno je ispitati razliku u zagradi.

$$\frac{q^n-1}{q-1}-\frac{1+q^{n-1}}{2}\cdot n=(1+q+q^2+\ldots+q^{n-1})-\frac{1+q^{n-1}}{2}\cdot n=$$

$$=\frac{1}{2}((1)+q^{n-1})+(q+q^{n-2})+\ldots(q^k+q^{n-k-1})+\ldots+(q^{n-1}+1))-$$

$$-\frac{1}{2}n(1+q^{n-1})=\frac{1}{2}(((1+q^{n-1})-(1+q^{n-1}))+\ldots+((q^k+q^{n-k-1})-$$

$$-(1+q^{n-1}))+\ldots+((q^{n-1}+1)-(1+q^{n-1}))).$$

Posmatrajmo opšti član posljednje sume

$$q^k+q^{n-k-1}-1-q^{n-1}=(q^k-1)(1-q^{n-k-1}).$$

Ako je $0<q<1$, tada je prvi faktor na desnoj strani posljednje jednakosti negativan, a drugi pozitivan, a ako je $q\geqslant 1$, tada je prvi faktor nenegativan, a drugi nepozitivan. Dakle, u svakom slučaju je proizvod, a time i opšti član sume, nepozitivan. Prema tome je $S_a\geqslant S_b$.

3. *Rješenje*. Neka su a, b, c, d cijeli brojevi takvi da je

$$P(a)=P(b)=P(c)=P(d)=7.$$

Tada je

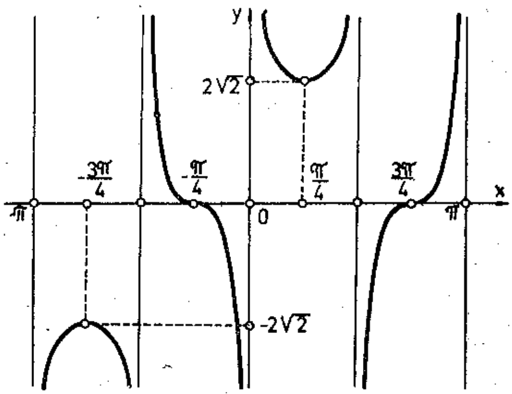
$$P(a)-7=P(b)-7=P(c)-7=P(d)-7=0.$$

Dakle, polinom

$$Q(x)=P(x)-7$$

je djeljiv sa $x-a$, $x-b$, $x-c$, $x-d$ jer su mu a, b, c, d nule. Prema tome je

(16.4) $$P(x)-7=(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)\,q(x).$$



Sl. 16.6.

Pretpostavimo sada da je $P(k)=14$, gdje je k cio broj.

Iz (16.4) tada slijedi

$$14-7=(k-a)(k-b)(k-c)(k-d)\,q(k),$$

tj.

$$7=(k-a)(k-b)(k-c)(k-d)\,q(k).$$

Međutim, posljednja jednakost je nemoguća, jer se broj 7 ne može rastaviti na pet faktora tako da najmanje četiri od njih budu različita (u skupu cijelih brojeva).

4. *Rezultat*. Prave $x=\frac{k\pi}{2}$ su vertikalne asimptote funkcije. Period funkcije je $\omega=2\pi$. Ima dvije vrste ekstrema, i to maksimum u tačkama $\left(-\frac{3\pi}{4}+2k\pi,\ -2\sqrt{2}\right)$ i minimum u tačkama $\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi,\ 2\sqrt{2}\right)$ za $k=0$ $\pm 1, \pm 2, \ldots$ Prevojne tačke su $\left(-\frac{\pi}{4}+k\pi, 0\right)$ za $k=0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots$ (sl. 16.6.).

I razred

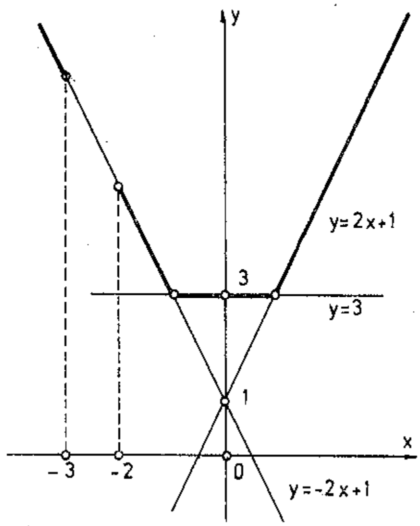
1. *Rezultat.* Data funkcija se može napisati u obliku

$$y=\begin{cases} -2x+1, & x\in(-\infty,\ -3]\ \cup\ [-2,-1) \\ 3, & x\in[-1,1) \\ 2x+1, & x\in[1,+\infty). \end{cases}$$

Grafik funkcije je dat na slici 17.1.

2. *Rješenje.* *i)* Neka je D središte stranice AB. Produžimo težišnicu CD preko D do tačke D_1 tako da je $DD_1=t_c=CD$. Tada je $\triangle ADD_1\cong\triangle DBC$, pa je $AD_1=a=BC$. Sada iz $\triangle CAD_1$, na osnovu nejednakosti trougla, imamo $CD_1<CA+AD_1$, odnosno $2t_c<b+a$, odakle slijedi tražena nejednakost.

ii) Neka je $a>b$. Tada je $\alpha>\beta$. Označimo sa D, odnosno E tačku u kojoj simetrala s_c, odnosno težišnica t_c siječe stranicu AB datog trougla (sl. 17.2). Tada je $\measuredangle BDC=\measuredangle BAC+\measuredangle ACD$, $\measuredangle AEC=\measuredangle ABC+\measuredangle ECB$. Odavde, i iz pretpostavke o uglovima α i β, slijedi $\measuredangle BDC>\measuredangle ABC<\measuredangle ECB$, odnosno $\measuredangle BDC>\measuredangle AEC$, odakle dobijamo traženu nejednakost $s_c<t_c$. Napomenimo da smo tu koristili činjenicu da je $\measuredangle ECB<\measuredangle DCB$, koja slijedi iz osobine težišnice da gradi manji ugao sa većom od stranica trougla koje polaze iz istog vrha.



Sl. 17.1.

3. *Rješenje.* Iz $XN=X_2N$ i $XM=X_1M$ slijedi da je MN srednja linija u $\triangle XX_1X_2$, pa je $MN\|X_1X_2$ i $MN=\frac{1}{2}X_1X_2$. S druge strane je $AN=NC$ i $BM=MC$, tj. MN je srednja linija u $\triangle ABC$, pa je $MN\|AB$ i $MN=\frac{1}{2}AB$. Dakle, $X_1X_2\|MN\|AB$ i $X_1X_2=2MN=AB$, tj.

$$X_1X_2\|AB \text{ i } X_1X_2=AB. \tag{17.1}$$

Na potpuno isti način zaključujemo da je $X_1X_3\|AC$ i $X_1X_3=AC$, odnosno $X_2X_3\|BC$ i $X_2X_3=BC$. Odavde i iz (17.1) slijedi da su $\triangle ABC$ i $\triangle X_1X_2X_3$ podudarni. Odatle slijedi da postoji ili translacija ili centralna simetrija koja preslikava jedan trougao u drugi. Ako bi postojala translacija, tada bi spojnice odgovarajućih vrhova bile jednake, što nije tačno, jer njihova dužina zavisi od položaja tačke X u odnosu na $\triangle ABC$. Dakle, preslikavanje koje jedan trougao preslikava u drugi je centralna simetrija.

4. *Rezultat.* Za $a\neq0$, $b\neq0$ rješenje je $x=\dfrac{a+b}{2}$, $y=\dfrac{a-b}{2}$.

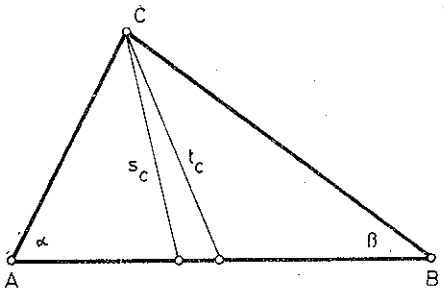
Za $a\neq0$, $b=0$ je x proizvoljno, $y=a-x$. Za $a=0$, $b\neq0$ je x proizvoljno, $y=x-b$; i za $a=b=0$ su x i y proizvoljni.

i) $a\neq0$, $b\neq0$,

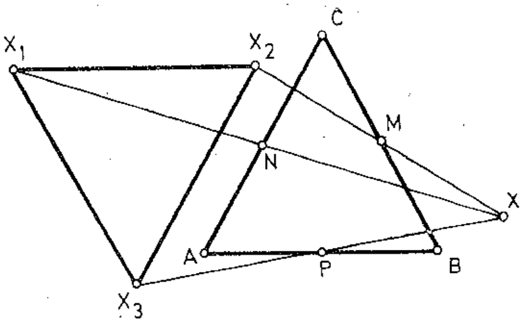
ii) $a\neq0$, $b=0$ ili $a=0$, $b\neq0$,

iii) nemoguće,

iv) $a=b=0$.



Sl. 17.2.



Sl. 17.3.

II razred

1. *Rješenje.* Od n datih tačaka uzmimo bilo koje tri A, B, C koje leže na jednoj pravoj. Pretpostavimo suprotno tvrdnji, tj. pretpostavimo da među datim tačkama postoje dvije, npr. M i N koje ne leže na pravoj AB. Tada su prave MN i AB ili paralelne ili se sijeku. Ako su paralelne, onda među četiri tačke A, B, M, N postoje tri koje ne leže na jednoj pravoj. Ako se pomenute prave sijeku, onda se sa tačkom presjeka ne poklapaju bar dvije od tačaka A, B, C; recimo A i B. Tada među četiri tačke A, B, M, N opet postoje tri koje ne leže na jednoj pravoj. Dakle, najviše jedna od datih tačaka ne pripada pravoj AB, što je i trebalo dokazati.

2. *Rezultat.*

$$0{,}5-\sqrt{0{,}3}<x<0{,}5-\sqrt{0{,}2},$$

$$0{,}5+\sqrt{0{,}2}<x<0{,}5+\sqrt{0{,}3}.$$

3. *Rješenje.* *i)* Ako date jednačine imaju oba rješenja ista, tada vrijedi $a:a'=b:b'=c:c'$, pa je tvrdnja očigledna.

ii) Neka je x_0 jedino zajedničko rješenje.

$$ax_0^2+bx_0+c\equiv 0$$

$$a'x_0^2+b'x_0+c'\equiv 0.$$

Množenjem prve jednakosti sa a, druge sa a i oduzimanjem dobijamo

$$(a'b-ab')\,x_0+a'c-ac'\equiv 0, \tag{17.2}$$

gdje je $a'b-ab'\neq 0$ jer bi inače vrijedila relacija iz *i*). Množenjem prve jednakosti sa b', druge sa b i oduzimanjem dobijamo

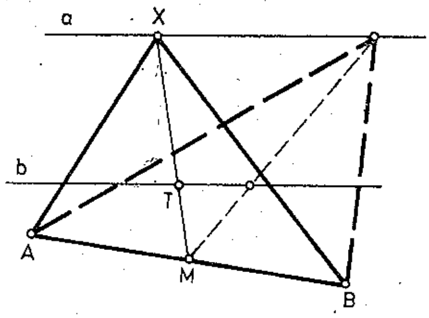
$$(ab'-a'b)\,x_0^2+b'c-bc'\equiv 0. \tag{17.3}$$

Uvrštavanjem vrijednosti x_0 iz (17.2) u (17.3) dobijamo traženi identitet.

4. *Rješenje.* Neka je $\triangle ABX$ takav da je $X\in a$ i neka su MX težišna linija i T težište tog trougla (sl. 17.4). Tada je $MT=\frac{1}{3}MX$. Tačka T je, dakle, slika tačke X pri homotetiji sa središtem M i koeficijentom $k=\frac{1}{3}$. Pošto homotetija preslikava pravu na paralelnu pravu, slijedi da skup težišta svih posmatranih trouglova čini pravu b paralelnu datoj pravoj a.

Primjedba: Ako iz razmatranja isključimo slučaj degeneracije $\triangle ABX$ u duž, tada iz skupa tačaka prave b treba isključiti sliku tačke X, gdje je

$$\{X\}=a\cap AB.$$



Sl. 17.4.

III razred

1. *Rješenje.* Definiciono područje jednačine je $x\neq 0$. Koristeći osobine logaritma, imamo

$$\log 2^2+\log 3^{1+\frac{1}{2x}}-\log(\sqrt[x]{3}+3^3)>\log 1$$

$$\log\frac{2^2\cdot 3^{\frac{2x+1}{2x}}}{\sqrt[x]{3}+3^3}>\log 1 \Rightarrow \frac{2^2\cdot 3^{\frac{2x+1}{2x}}}{\sqrt[x]{3}+3^3}>1.$$

Napomenimo da je baza logaritma 10, tj. veća od 1. Pošto je $\sqrt[x]{3}+3^3>0$, dobijamo ekvivalentnu nejednačinu

$$3^{\frac{1}{x}}-12\cdot 3^{\frac{1}{2x}}+27<0.$$

Uvodeći smjenu $3^{\frac{1}{2x}}=y$ $(y>0)$, dobijamo nejednačinu

$$y^2-12y+27<0$$

čijim rješavanjem dobijamo $3<y<9$.

i) $3<y\Rightarrow$

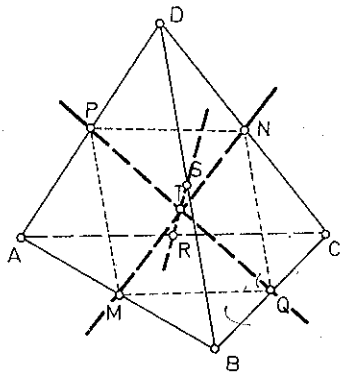
$$\Rightarrow 3<3^{\frac{1}{2x}}\Rightarrow 1<\frac{1}{2x}\Rightarrow 0<x<\frac{1}{2}.$$

ii) $y<9\Rightarrow\frac{1}{2x}<2\Rightarrow x<0$ ili $x>\frac{1}{4}$.

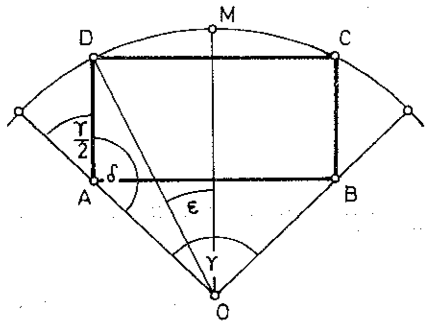
Prema tome, rješenje date nejednačine je interval $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$.

2. *Rješenje.* Neka su M i N središta mimoilaznih ivica AB i CD, a P i Q središta mimoilaznih ivica AD i BC date piramide (sl. 17.5). Tada je MP srednja linija $\triangle ABD$, a NQ srednja linija $\triangle BCD$. Zbog toga je $MP||BD||NQ$. Potpuno analogno se zaključuje da je $MQ||AC||PN$. Iz tih relacija slijedi da je $MPNQ$ paralelogram, a MN i PQ njegove dijagonale koje se sijeku u nekoj tački T. Ako su R i S središta mimoilaznih ivica AC i BD, tada se na isti način kao i gore dokazuje da je $RPSQ$ paralelogram čije se dijagonale PQ i RS sijeku u nekoj tački T_1. Pošto se dijagonale paralelograma polove, zaključujemo da je i T i T_1 središte duži PQ odakle slijedi da je $T\equiv T_1$. Odatle slijedi da se prave MN, PQ i RS sijeku u jednoj tački.

3. *Uputstvo.* Iz uslova $0 \leq 3x^2 - 20x + 32 \leq 1$, $\sin x \geq 0$ dobijamo za definiciono područje prve nejednačine interval $\left[\frac{10-\sqrt{7}}{3}, \frac{8}{3}\right]$. Definiciono područje druge nejednačine je interval $[-1, 1]$ koji dobijemo iz uslova $\cos x \geq 0$, $x^2 \leq 1$. Pošto je presjek ova dva intervala prazan skup, zaključujemo da dati sistem nejednačina nema rješenja.



Sl. 17.5.



Sl. 17.6.

4. *Rješenje.* Neka su oznake kao na sl. 17.6. Tada imamo $DC = 2r \cdot \sin \varepsilon$, $\delta = \pi - \frac{\gamma}{2}$. Na osnovu sinusne teoreme primijenjene na $\triangle DAO$ je

$$\frac{AD}{\sin\left(\frac{\gamma}{2} - \varepsilon\right)} = \frac{r}{\sin\left(\pi - \frac{\gamma}{2}\right)},$$

odnosno

$$AD = \frac{r \sin\left(\frac{\gamma}{2} - \varepsilon\right)}{\sin \frac{\gamma}{2}}.$$

Ako sa P označimo površinu pravougaonika $ABCD$, imaćemo

$$P = DC \cdot AD = \frac{2r^2}{\sin \frac{\gamma}{2}} \sin \varepsilon \cdot \sin\left(\frac{\gamma}{2} - \varepsilon\right),$$

tj.

$$P = \frac{r^2}{\sin \frac{\gamma}{2}}\left(\cos\left(2\varepsilon - \frac{\gamma}{2}\right) - \cos \frac{\gamma}{2}\right).$$

U posljednjem izrazu veličine r i γ su konstantne, pa će površina biti maksimalna ako je $\cos\left(2\varepsilon - \frac{\gamma}{2}\right) = 1$, tj. ako je $\varepsilon = \frac{\gamma}{4}$. Ugao pod kojim se iz središta kružnice vidi ona stranica pravougaonika koja je tetiva kružnog luka je $\measuredangle DOC = 2\varepsilon = \frac{\gamma}{2}$.

IV razred

1. *Rješenje. Analiza.* Pretpostavimo da je zadatak riješen, tj. da je $ABCD$ kvadrat čiji vrhovi A i C leže na datoj pravoj, a vrhovi B i D na datim kružnicama k_1 i k_2 (sl. 17.7). Pošto su dijagonale kvadrata uzajamno normalne i polove se, zaključujemo da su tačke B i D simetrične u odnosu na pravu $AC=a$. Pošto B leži na k_1, njoj simetrična tačka D ležaće na kružnici k_1' koja je simetrična kružnici k_1 u odnosu na pravu a. To znači da je D presječna tačka kružnica k_1' i k_2.

Konstrukcija. Konstruiramo:

i) kružnicu k_1' simetričnu kružnici k_1 u odnosu na pravu a,

ii) tačku B simetričnu presječnoj tački D kružnica k_1' i k_2 u odnosu na pravu a,

iii) presječnu tačku Q pravih a i BD,

iv) tačke A i C na pravoj a sa raznih strana tačke Q tako da je $QA=QC==QD$.

Dokaz. Slijedi direktno iz konstrukcije.

Determinacija. Jasno je da konstrukcija kvadrata $ABCD$ zavisi od konstrukcije tačke D. Zato zadatak može imati dva, jedno, nijedno ili beskonačno mnogo rješenja, što zavisi od toga da li se kružnice k_1' i k_2 sijeku, dodiruju, nemaju zajedničkih tačaka ili se poklapaju.

2. *Rješenje.* Neka je $c=10c_1+c_0$. Tada uslov u zadatku možemo napisati u obliku

(17.4) $$10bc_1+bc_0\leqslant 10a_1+a_0<$$ $$<10bc_1+bc_0+b.$$

Pošto je $0\leqslant c_0\leqslant 9$, to je $bc_0\geqslant 0$ i $bc_0+b\leqslant$ $\leqslant 9b+b=10b$. Zato iz (17.4) slijedi

$$10bc_1\leqslant 10a_1+a_0<10bc_1+10b,$$

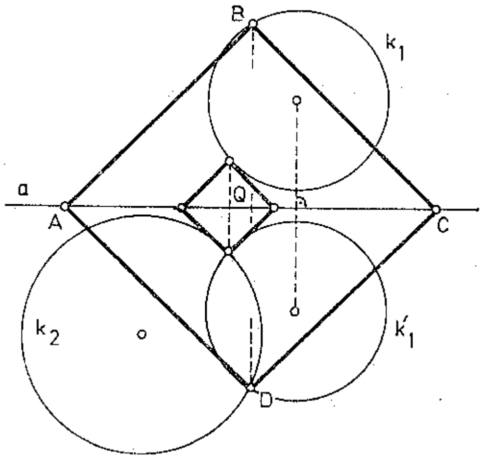
odnosno

(17.5) $$bc_1\leqslant a_1+\frac{a_0}{10}<bc_1+b.$$

Pošto je $0\leqslant\frac{a_0}{10}<1$, iz (17.5) imamo

(17.6) $$bc_1<a_1+1,$$

(17.7) $$a_1<bc_1+b.$$



Sl. 17.7.

Pošto u (17.6) figurišu nenegativni cijeli brojevi, iz te nejednakosti slijedi

(17.8) $$bc_1\leqslant a_1.$$

Sada iz (17.7) i (17.8) dobijamo traženu relaciju.

3. *Rješenje.* Neka je trougao označen kao na sl. 17.8. i neka je $AC=b$, $BC=a$. Po kosinusnoj teoremi je (primijenjenoj na $\triangle ADT$)

$$2\,AT\cdot DT\cdot\cos\varphi=AT^2+DT^2-AD^2,$$

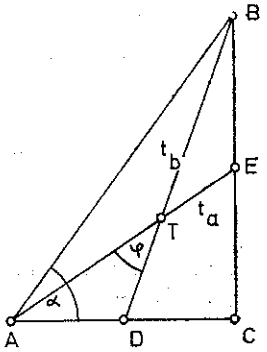
tj.

(17.9) $$\frac{4}{9}\;AE\cdot BD\cdot\cos\;\varphi=\left(\frac{2}{3}AE\right)^2+\left(\frac{1}{3}BD\right)^2-\frac{b^2}{4}.$$

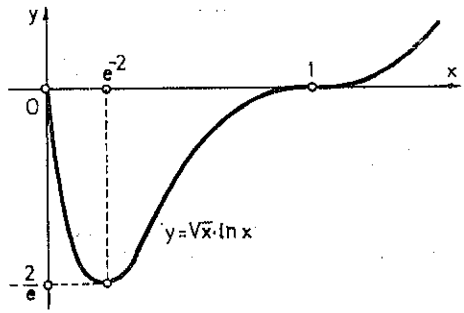
Kako je $AE^2=b^2+\frac{a^2}{4}$, $BD^2=a^2+\frac{b^2}{4}$, iz (17.9) se nakon jednostavnog računa dobija

$$\frac{1}{9}\sqrt{(4b^2+a^2)(4a^2+b^2)}\cdot\cos\varphi=\frac{2}{9}(a^2+b^2),$$

odnosno $\cos\varphi=\frac{2(a^2+b^2)}{\sqrt{(a^2+4b^2)(b^2+4a^2)}}$, odakle se dobija $\sin\varphi=\sqrt{1-\cos^2\varphi}=\frac{3ab}{\sqrt{(a^2+4b^2)(b^2+4a^2)}}$.



Sl. 17.8.



Sl. 17.9.

Iz posljednje dvije jednakosti imamo

$$\text{(17.10)} \qquad \operatorname{tg}\varphi=\frac{3ab}{2c^2},$$

odakle zamjenom $a=c\cdot\sin\alpha$, $b=c\cdot\cos\alpha$ dobijamo $\operatorname{tg}\varphi=\frac{3}{2}\sin\alpha\cdot\cos\alpha$, odnosno $\operatorname{tg}\varphi=\frac{3}{4}\sin 2\alpha$. Maksimalna vrijednost veličine $\operatorname{tg}\varphi$, a samim tim i veličine φ je za $\alpha=\frac{\pi}{4}$, jer je tada $\sin 2\alpha=1$. Dakle, rješenje je jednakokraki pravougli trougao.

4. *Uputstvo.* Za datu funkciju izračunati drugi izvod, pa ga izjednačiti sa nulom. Dobija se jednačina koja za $x=1$ treba da bude identički jednaka 0, što je slučaj za $a=\frac{1}{2}$. Ispitivanjem znaka drugog izvoda u okolini tačke $x=1$ zaista se uvjeravamo da je $x=1$ prevojna tačka funkcije $y=\sqrt{x}\cdot\ln x$. Funkcija $y=\sqrt{x}\cdot\ln x$ je definisana za $x>0$, ima nulu u tački $x=1$ i minimum u tački $(e^{-2}, -2e^{-1})$. Njen grafik je dat na sl. 17.9.

OSAMNAESTO TAKMIČENJE

I razred

1. *Rješenje.* $S=1-\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{1\,974}-\frac{1}{1\,975}\right)+\left(\frac{1}{1\,975}-\frac{1}{1\,976}\right)=$

$$=1-\frac{1}{1\,976}=\frac{1\,975}{1\,976}.$$

2. *Rješenje.* $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2-2xy+y^2+y^2-2yz+z^2+z^2-2zx+x^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2(x^2+y^2+z^2) \geqslant 2(xy+yz+zx) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3(x^2+y^2+z^2) \geqslant x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3(x^2+y^2+z^2) \geqslant (x+y+z)^2.$

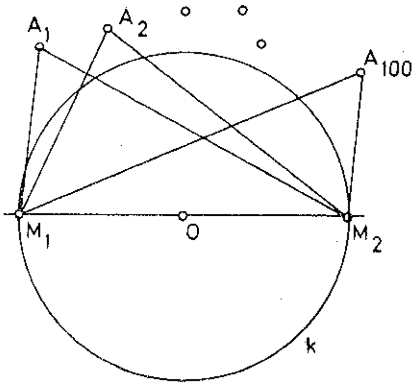
Iz posljednje nejednakosti (koja je tačna, jer je tačna prva nejednakost) i uslova $x+y+z=6$ imamo

$$3(x^2+y^2+z^2) \geqslant 36$$

odakle slijedi tražena nejednakost.

3. *Rješenje.* Prvi takmičar treba da iz kutije sa 976 kuglica uzme 900 kuglica. Na taj način, kada drugi takmičar dođe na red, u obje kutije se nalazi po 76 kuglica. Nakon što drugi takmičar uzme određen broj kuglica iz jedne (i samo jedne) od kutija, prvi takmičar uzima isti broj kuglica, ali iz suprotne kutije. Na taj način, kad god je drugi takmičar na redu, u obje kutije se nalazi isti broj kuglica. Takvom taktikom će prvi takmičar sigurno pobijediti, jer dok god drugi takmičar može iz jedne od kutija uzeti bar jednu kuglicu, to isto može uraditi i prvi takmičar, ali iz preostale kutije. Dakle, ne može se desiti da prvi takmičar ostane bez kuglica prije drugog takmičara.

4. *Rješenje.* Neka je k proizvoljna kružnica poluprečnika 1 i neka su M_1 i M_2 dvije dijametralno suprotne tačke te kružnice (sl. 18.1). Tada, na osnovu nejednakosti trougla, imamo



Sl. 18.1.

$$2=M_1M_2 \leqslant M_1A_1+M_2A_1,$$
$$2=M_1M_2 \leqslant M_1A_2+M_2A_2,$$
$$\cdot$$
$$\cdot$$
$$\cdot$$
$$2=M_1M_2 \leqslant M_1A_{100}+M_2A_{100}.$$

Sabiranjem svih ovih nejednakosti dobijamo

$$(M_1A_1+\ldots+M_1A_{100})+(M_2A_1+\ldots+$$
$$+M_2A_{100}) \geqslant 100 \cdot 2=200.$$

Odatle slijedi da je bar jedan od izraza u zagradama veći ili jednak 100. Prema tome, za jednu od tačaka M_1, M_2 je tačna tvrdnja zadatka.

II razred

1. *Rješenje.* Očigledno je da su $x=0$, $y=0$ cijeli brojevi koji zadovoljavaju datu jednačinu. Dokažimo da data jednačina nema drugih cijelih rješenja. Zaista, ako datu jednačinu kvadriramo, pa zatim sa lijeve strane prebacimo na desnu stranu x i taj postupak ponovimo određen broj puta, dobićemo

$$\sqrt{x+\sqrt{x}}=m, \quad \sqrt{x}=k,$$

gdje su m i k cijeli brojevi. Odavde dobijamo

$$x+\sqrt{x}=m^2, \qquad x=k^2,$$

odnosno

$$k^2+k=m^2 \Rightarrow k(k+1)=m^2.$$

Ako sada pretpostavimo da je $x \neq 0$, tada je $k \neq 0$, pa je $k>0$, zbog posljednje jednakosti. Međutim, $k>0$ nije moguće, jer bismo inače dobili

$$k^2<k(k+1)=m^2<(k+1)^2,$$

odakle bismo, zbog $k>0$, dobili

$$k<mk+1,$$

što nije moguće za cijele brojeve k i m.

2. *Rezultat.*

$$x=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+4p^2}{1-4p^2}},\ \left(p\in\left(0,\ \frac{1}{2}\right)\right),\ \left(\begin{array}{c}\text{Def. područje}\\ x\in[\,p(1+\sqrt{2}),+\infty)\end{array}\right).$$

3. *Rješenje.* Imajući u vidu uslov zadatka, imamo

$$(1+a_1)\ldots(1+a_n)=a_1\left(1+\frac{1}{a_1}\right)a_2\left(1+\frac{1}{a_2}\right)\ldots a_n\left(1+\frac{1}{a_n}\right)=\left(1+\frac{1}{a_1}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{a_n}\right).$$

Takođe je

$$(1+a_i)\left(1+\frac{1}{a_i}\right)=1+1+a_i+\frac{1}{a_i}=2+a_i+\frac{1}{a_i}=2+\frac{a_i^2+1}{a_i}+2-2=2+\frac{(a_i-1)^2}{a_i}+2\geqslant 2+2=4.$$

Posljednja nejednakost slijedi iz uslova da su a_i pozitivni. Sada imamo

$$((1+a_i)\ldots(1+a_n))^2=(1+a_1)\ldots(1+a_n)\left(1+\frac{1}{a_1}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{a_n}\right)=$$

$$=(1+a_1)\left(1+\frac{1}{a_1}\right)\ldots(1+a_n)\left(1+\frac{1}{a_n}\right)\geqslant 4\ldots 4=4^n=2^{2n}=(2^n)^2$$

Dakle,

$$((1+a_1)\ldots(1+a_n))^2\geqslant(2^n)^2,$$

odakle korjenovanjem lijeve i desne strane dobijamo traženu nejednakost, imajući u vidu da su a_i pozitivni brojevi.

4. *Rješenje.* Uzmimo u ravni jednu tačku M i kroz nju povucimo prave paralelne datim pravama. Kako među datim pravama nema međusobno paralelnih, prave povučene kroz tačku M neće imati više zajedničkih tačaka, tj. sve će biti različite. Zato one dijele ugao od 360° na 14 dijelova. Kako je

$$\left(\frac{360}{14}\right)^\circ=25{,}7\ldots^\circ<26^\circ,$$

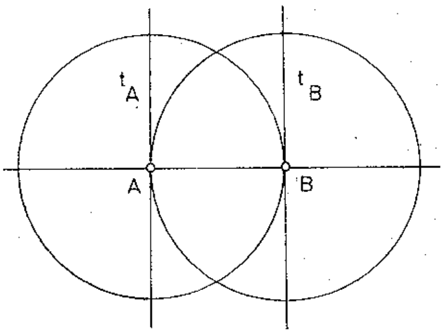
to barem jedan od tih 14 uglova mora biti manji od 26°. Među datim pravama postoje dvije tako da je ugao između njih jednak onom od 14 uglova koji je manji od 26°. Time je dokazana tvrdnja zadatka.

III razred

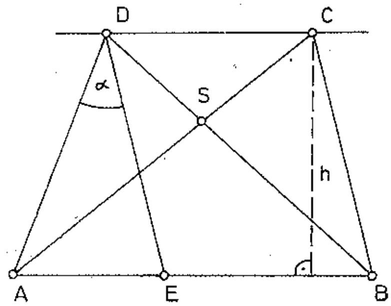
1. *Rješenje:* Kako je dati skup tačaka konačan, to među njima postoje dvije tačke A i B takve da je rastojanje među njima najveće moguće. Zato se tačke datog skupa nalaze unutar ili na krugu $k(A, AB)$ i unutar ili na krugu $k(B, AB)$. Odatle slijedi da se sve date tačke nalaze u oblasti ograničenoj tangentama t_A i t_B povučenim na kružnicu $k(B, AB)$ u tački A, odnosno kružnicu $k(A, AB)$ u tački B (sl. 18.2). Kako je površina bilo kojeg trougla sa vrhovima u A i B i nekoj tački C datog skupa tačaka manja od 1, to za najveću udaljenost h tačaka datog skupa od duži AB vrijedi

$$\frac{AB\cdot h}{2}<1.$$

Odatle slijedi da je $h<\frac{2}{AB}$, pa se sve tačke datog skupa nalaze u pravougaoniku stranica AB i $\frac{4}{AB}$, tj. u pravougaoniku površine 4.



Sl. 18.2.



Sl. 18.3.

2. *Rješenje.* Neka je $ABCD$ dati trapez, pri čemu je $AB=a$, $DC=b$. Neka je E tačka duži AB takva da je $AE=a-b$. Označimo $AD=x$, $BC=ED=y$, $AS=t$, $SC=u$, $DS=v$, $SB=w$, gdje je S presječna tačka dijagonala AC i BD datog trapeza (sl. 18.3). Primjenjujući kosinusnu teoremu na $\triangle AED$, imamo

$$(a-b)^2=x^2+y^2-2xy\cdot\cos\alpha. \tag{18.1}$$

Za površinu $\triangle AED$ imamo

$$P=\frac{(a-b)\,h}{2}=\frac{xy\cdot\sin\alpha}{2},$$

odakle slijedi

$$\sin\alpha=\frac{(a-b)\,h}{xy}.$$

Iz posljednje jednakosti i jednakosti (18.1) dobijamo

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{x^2+y^2-(a-b)^2}{2(a-b)\,h}.$$

Imajući u vidu okomitost dijagonala trapeza, imamo $y^2=u^2+w^2$, $x^2=t^2+v^2$, $b^2=u^2+v^2$, $a^2=$ $=t^2+w^2$, odakle dobijamo

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{a^2+b^2-(a-b)^2}{2(a-b)\,h},$$

odnosno

$$\frac{1}{h}=\operatorname{ctg}\alpha\cdot\frac{2a-2b}{2ab},$$

tj.

$$\frac{1}{h}=\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)\operatorname{ctg}\alpha,$$

što je i trebalo dokazati.

3. *Rješenje.* Pošto je $x_1, \ldots, x_n > 0$, imamo

$$n\left(\log (x_1^{x_1} \ldots x_n^{x_n}) - \log (x_1 \ldots x_n)^{\frac{1}{n}(x_1+\ldots+x_n)}\right) = n\,(x_1 \log x_1 + \ldots + x_n \log x_n) - (x_1 + \ldots +$$
$$+ x_n)(\log x_1 + \ldots + \log x_n) = (x_1 - x_2)(\log x_1 - \log x_2) + \ldots + (x_1 - x_n)(\log x_1 - \log x_n) +$$
$$+ (x_2 - x_3)(\log x_2 - \log x_3) + \ldots + (x_{n-1} - x_n)(\log x_{n-1} - \log x_n) \geqslant 0,$$

pri čemu posljednja nejednakost slijedi iz činjenice $x_i < x_j \Leftrightarrow \log x_i < \log x_j$, pa su izrazi $x_i - x_j$ i $\log x_i - \log x_j$ istovremeno ili negativni ili nenegativni. Zato, zbog $n > 0$, imamo

$$\log (x_1^{x_1} \ldots x_n^{x_n}) \geqslant \log (x_1 \ldots x_n)^{\frac{1}{n}(x_1+\ldots+x_n)},$$

odakle, imajući ponovo u vidu činjenicu da je funkcija $\log x$ monotono rastuća, slijedi tražena nejednakost.

4. *Rješenje.* Ako tačka M ima koordinate (x, y), tada se uslov da je podjednako udaljena od prave $x = -2$ i kružnice $(x-3)^2 + y^2 = 1$ može napisati u obliku

$$x + 3 = \sqrt{(x-3)^2 + y^2},$$

odakle slijedi da tačka M leži na paraboli $p: y^2 = 12x$. Slično, iz uslova da je tačka M jednako udaljena od prave $x = -2$ i od kružnice $(x-3)^2 + (y-b)^2 = 1$, zaključujemo da tačka M mora ležati na paraboli $p_b: (y-b)^2 = 12x$ koja se iz parabole p dobije translacijom duž ose y za dužinu b. Prema tome, tačka M pripada presjeku parabola p i p_b. Odatle slijedi da tačka M opisuje parabolu p kada parametar b prolazi skupom realnih brojeva.

IV razred

1. *Rješenje.* Ako je bar jedan od brojeva a, b jednak nuli ili ako je $a = b$, tada je očigledno da nejednakost vrijedi. Pretpostavimo zato da je $a > 0$ i $b > 0$ i da je $a < b$.

Ako u intervalu (a, b) posmatramo logaritamsku funkciju za bazu veću od 1, tada je za $x \in (a, b)$ grafik te funkcije iznad prave koja spaja tačke $A(a, \log a)$ i $B(b, \log b)$, tj. vrijedi nejednakost

$$\log x > \log a + \frac{\log b - \log a}{b - a}(x - a), \; \forall\, x \in (a, b).$$

Kako je $0 < c < 1$, to je $a - b < (a - b)\,c$, odnosno $a < (a - b)\,c + b$. Kako je, osim toga, $(a - b)\,c + b < < b$, vrijedi sljedeća relacija

$$a < ac + (1 - c)\,b < b,$$

što znači da $ac + (1 - c)\,b$ pripada (a, b), pa vrijedi

$$\log (ac + (1 - c)\,b) > \log a + \frac{\log b - \log a}{b - a}(ac + (1 - c)\,b - a),$$

tj.

$$\log (ac + (1 - c) b) > c \cdot \log a + (1 - c) \log b = \log a^c b^{1-c},$$

odakle slijedi tražena nejednakost, jer je $\log x$ monotono rastuća. Slučaj $b < a$ se potpuno analogno dokazuje.

2. *Uputstvo.* Napisati zapreminu V piramide kao funkciju visine x, tj.

$$V = \frac{x^2 \sqrt{3}}{4}(2r - x),$$

pa, koristeći prvi izvod, ispitati tok funkcije $V = V(x)$. Dobija se sljedeći rezultat: kada x raste od 0 do $\frac{4}{3}r$, zapremina raste od 0 do $\frac{8r^3\sqrt{3}}{27}$ i kada x raste od $\frac{4}{3}r$ do $2r$, zapremina opada do nule.

3. *Rješenje.* Neka je

$$a_k=m^3, \quad d=a_{i+1}-a_i, \qquad i=1,2,\ldots$$

Tada je $a_{k+r}=a_k+rd=m^3+rd$. Dokažimo da postoji cio broj r takav da je m^3+rd kub prirodnog broja, tj. da je $m^3+rd=n^3$, gdje je n prirodan broj. Imamo

$$(m+d)^3=m^3+(3m^2+3md+d^2)\,d.$$

Vidimo sada da je dovoljno staviti $r=3m^2+3md+d^2$, pa ćemo dobiti $n=m+d$. Dalje imamo

$$a_{k+r+s}=a_{k+r}+sd=n^3+sd=(n+d)^3$$

za $s=3n^2+3nd+d^2$. Ako stavimo $p=n+d$, vidimo da je $a_{k+r+s}=p^3$.

Jasno je da se ovaj postupak može neograničeno nastavljati, što znači da dati niz zaista sadrži beskonačno mnogo članova koji su kubovi prirodnih brojeva.

Nađimo sada primjer beskonačnog aritmetičkog niza čiji nijedan član nije kub prirodnog broja. Posmatrajmo niz

$$110,\ 210,\ 310,\ldots,\ 10+100n,\ldots.$$

Svaki član ovog niza se završava samo jednom nulom. Ako bi neki od članova niza bio kub prirodnog broja, tada bi se i taj prirodan broj morao završavati nulom (što je lako provjeriti posmatrajući kubove zadnjih cifara prirodnih brojeva). Međutim, ako se prirodan broj završava nulom, tada se njegov kub mora završavati sa najmanje tri nule, što nije slučaj ni sa jednim članom gornjeg niza.

4. *Rješenje.* Primijenićemo Ojlerovu formu kompleksnog broja:

$$e^{\varphi i}=\cos\varphi+i\cdot\sin\varphi,$$

$$e^{-\varphi i}=\cos\varphi-i\cdot\sin\varphi.$$

Iz ove dvije jednakosti dobijamo

$$\cos\varphi=\frac{e^{\varphi i}+e^{-\varphi i}}{2}.$$

Ako stavimo $\varphi=\frac{2\pi}{11}$, imamo

$$\cos\frac{2\pi}{11}+\cos\frac{4\pi}{11}+\cos\frac{6\pi}{11}+\cos\frac{8\pi}{11}+\cos\frac{10\pi}{11}=\cos\varphi+\cos 2\varphi+\cos 3\varphi+\cos 4\varphi+\cos 5\varphi=$$

$$=\frac{1}{2}(e^{\varphi i}+e^{2\varphi i}+e^{3\varphi i}+e^{4\varphi i}+e^{5\varphi i}+e^{-\varphi i}+e^{-2\varphi i}+e^{-3\varphi i}+e^{-4\varphi i}+e^{-5\varphi i})=$$

$$=\frac{1}{2}\,e^{\varphi i}\cdot\frac{1-e^{5\varphi i}}{1-e^{\varphi i}}+\frac{1}{2}\,e^{-\varphi i}\cdot\frac{1-e^{-5\varphi i}}{1-e^{-\varphi i}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{-(e^{6\varphi i}+e^{-6\varphi i})+(e^{5\varphi i}+e^{-5\varphi i})+(e^{\varphi i}+e^{-\varphi i})-2}{(1-e^{\varphi i})(1-e^{-\varphi i})}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{-2\cos 6\varphi+2\cos 5\varphi+2\cos\varphi-2}{2(1-\cos\varphi)}=\frac{1}{2}\,\frac{\cos 5\varphi-\cos 6\varphi+\cos\varphi-1}{1-\cos\varphi}=$$

$$=\frac{1}{2}\,\frac{2\sin\frac{11\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2}-(1-\cos\varphi)}{1-\cos\varphi}=\frac{1}{2}\,\frac{2\sin\pi\sin\frac{\pi}{11}-\left(1-\cos\frac{2\pi}{11}\right)}{1-\cos\frac{2\pi}{11}}=-\frac{1}{2},$$

što je i trebalo dokazati.

I razred

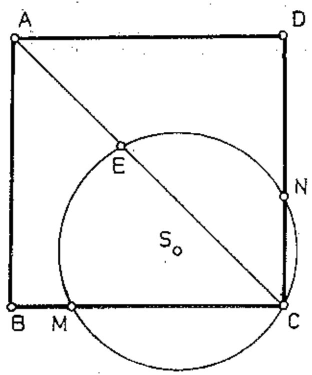
1. *Rezultat.* Ne postoje prirodni brojevi p i q tako da vrijedi jednakost (19.1).

2. *Rješenje. Analiza.* Pretpostavimo da je zadatak riješen, tj. neka je $ABCD$ kvadrat kojemu je jedan vrh u datoj tački A, a stranice BC i CD, koje ne polaze iz tog vrha, leže na pravima koje prolaze tačkom M, odnosno N.

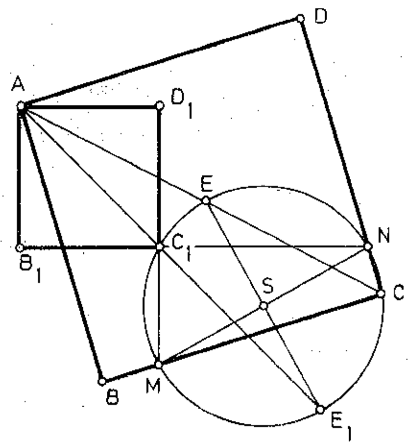
Pošto je $\measuredangle MCN$ pravi ugao, to kružnica konstruirana nad MN kao prečnikom prolazi kroz tačku C. Dijagonala AC polovi $\measuredangle BCD$, pa je

$$\measuredangle MCA\ (= \measuredangle MCE) \cong \measuredangle NCA\ (= \measuredangle NCE)$$

pri čemu je E presječna tačka dijagonale AC i $k(MN)$. Pošto su uglovi $\measuredangle MCE$ i $\measuredangle NCE$ periferijski, to je $ME = NE$ (sl. 19.1).



Sl. 19.1.



Sl. 19.2.

Konstrukcija. Konstruiramo:

i) kružnicu $k(MN)$,

ii) tačku E — središte kružnog luka MN,

iii) tačku C — presječnu tačku prave AE i $k(MN)$,

iv) prave CM i CN,

v) iz tačke A normale na prave CM i CN,

vi) tačke B i D — presječne tačke normala iz *v)* s pravima CM i CN (sl. 19.2).

Dokaz. Treba dokazati da je $ABCD$ kvadrat. Ugao BCD je pravi, jer je $\measuredangle MCN$ pravi ugao (periferijski ugao nad prečnikom). Iz konstrukcija *v)* i *vi)* slijedi da su uglovi ABC i ADC pravi. Jasno je da je i $\measuredangle BAD$ pravi ugao. Dakle, $ABCD$ je pravougaonik.

Iz $\measuredangle BCA\ (= \measuredangle MCE) \cong \measuredangle NCE = \measuredangle DCA$, jer je $\widehat{ME} = \widehat{NE}$; slijedi da dijagonala AC polovi ugao BCD. Dakle, $ABCD$ je kvadrat koji zadovoljava uslove zadatka.

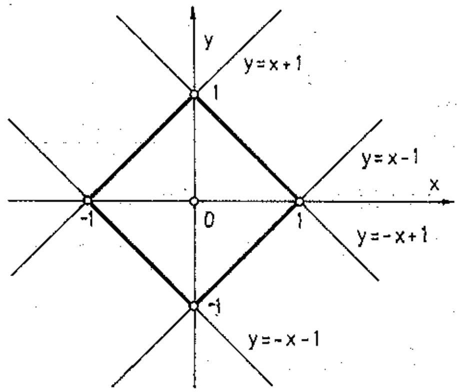
Determinacija. Budući da postoje dva središta E i (E_1) — sredine kružnih lukova $\widehat{MN}$ sa jedne i druge strane prave MN — i pošto je jedini uslov koji tačka E mora zadovoljiti taj da je sredina luka MN, to je jasno da postoje uvijek dva rješenja.

3. *Rezultat.* Traženi skup tačaka je unutrašnjost kvadrata sa tjemenima u tačkama $(-1, 0)$, $(0, -1)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$ uključujući i tačke koje leže na stranicama tog kvadrata (sl. 19.3). Dakle,

$$-1 \leqslant x < 0, \qquad -x-1 \leqslant y \leqslant x+1,$$
$$0 \leqslant x \leqslant 1, \qquad x-1 \leqslant y \leqslant -x+1.$$

4. *Uputstvo.* (19.2) napisati u obliku

$$(ab+ac+bc)(a+b+c)=abc.$$



Sl. 19.3.

II razred

1. *Uputstvo.* Pokazati da je $O_2C \perp OC$ i $O_1C \perp OC$.

2. *Rješenje.* Pri dijeljenju zadanih brojeva sa n kao ostatak može se pojaviti jedan od brojeva $0, 1, 2, \ldots, n-1$. Postoji, dakle, n zadanih brojeva i $n-1$ ostatak. Odatle zaključujemo da postoje bar dva broja, označimo ih sa

$$a+id, \quad a+jd,$$

(uzmimo $i>j$ i očigledno $0 \leqslant j < i \leqslant n-1$), koji pri dijeljenju sa n daju jednake ostatke. Razlika

$$(a+id)-(a+jd)=(i-j)\,d$$

djeljiva je sa n. Stavimo

$$k=i-j.$$

Očigledno je

$$k \in \{1, 2, \ldots, n-1\} \tag{19.4}$$

i, prema prethodnom, $k \cdot d$ je djeljivo sa n.

Pretpostavimo, suprotno tvrdnji zadatka, da su d i n relativno prosti. Uz ovo i činjenicu da je $k \cdot d$ djeljivo sa n slijedi da je k djeljivo sa n, što je nemoguće zbog (19.4). Dakle, d i n nisu relativno prosti.

3. *Rezultat.* Ako AM označimo sa x, onda je

$$i)\ P_{\max}=\frac{3\sqrt{3}}{28}a^2 \qquad \text{za } x=\frac{2a}{7}.$$

ii) Četvorougao $MNPQ$ će se svesti na trougao za $x=\frac{2}{3}a$.

4. *Rezultat.* *i)* $k=-3$.

III razred

1. *Uputstvo.* $k^{n+4}-k^n=k^n(k^4-1)=k^n(k-1)(k+1)(k^2+1)$

$$120=2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 5.$$

3. *Rješenje.* $\frac{\sin^{n+2}x}{\cos^n x}+\frac{\cos^{n+2}x}{\sin^n x}-1=\frac{\sin^2 x\cdot\sin^n x}{\cos^n x}+\frac{\cos^n x\cdot\cos^2 x}{\sin^n x}-\sin^2 x-\cos^2 x=$

$$=\sin^2 x\cdot(\mathrm{tg}^n x-1)+\cos^2 x\cdot(\mathrm{ctg}^n x-1)=\frac{\mathrm{tg}^2 x}{1+\mathrm{tg}^2 x}(\mathrm{tg}^n x-1)+\frac{1}{1+\mathrm{tg}^2 x}\cdot\frac{1-\mathrm{tg}^n x}{\mathrm{tg}^n x}=$$

$$=\frac{\mathrm{tg}^n x-1}{(1+\mathrm{tg}^2 x)\mathrm{tg}^n x}\cdot(\mathrm{tg}^{n+2}x-1).$$

Stavimo

$$\frac{\mathrm{tg}^n x-1}{\mathrm{tg}^n x(1+\mathrm{tg}^2 x)}\cdot(\mathrm{tg}^{n+2}x-1)\geqslant 0 \tag{19.5}$$

pretpostavljajući da je (19.5) tačno.

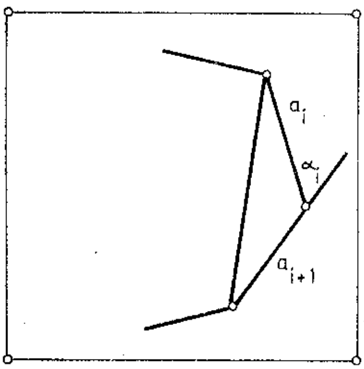
Ako je to tačno, pošto je $\mathrm{tg}^n x\ (1+\mathrm{tg}^2 x)>0$ za $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, mora biti

$$(\mathrm{tg}^n x-1)\ (\mathrm{tg}^{n+2}x-1)\geqslant 0. \tag{19.6}$$

Za $x=\frac{\pi}{4}$ vrijedi znak jednakosti.

Za $0<x<\frac{\pi}{4}$ je $\mathrm{tg}\, x<1$, $\mathrm{tg}^n x<1$, $\mathrm{tg}^{n+2}x<1$, pa u (19.6), odnosno u (19.5) vrijedi znak $>$.

Za $\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{2}$ je $\mathrm{tg}\, x>1$, $\mathrm{tg}^n x>1$, $\mathrm{tg}^{n+2}x>1$, pa u (19.6), odnosno u (19.5) vrijedi znak $>$.



Sl. 19.4.

4. *Rješenje.* Označimo sa $a_1, a_2, \ldots, a_n$ dužine stranica našeg mnogougla, a sa $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ veličine njegovih vanjskih uglova (sl. 19.4). Obilježimo sa S_i površinu i-tog trokuta (čije su stranice a_i i a_{i+1}) $i=1, 2, \ldots, n-1$.

Neka je S_n površina trokuta čije su stranice a_n i a_1. Tada je

$$2S_i=a_i\cdot a_{i+1}\sin\alpha_i,$$

$$2S_n=a_n\cdot a_1\sin\alpha_n.$$

Neka je S najmanja među površinama tih trouglova. Tada je $2S\leqslant a_i\cdot a_{i+1}\ \sin\alpha_i$, a otuda

$$(2S)^n\leqslant\prod_{i=1}^{n}a_i^2\prod_{i=1}^{n}\sin\alpha_i<\prod_{i=1}^{n}a_i^2\qquad\left(\prod_{i=1}^{n}a_i=a_1\cdot\ldots\cdot a_n\right),$$

tj.

$$2S<\left(\prod_{i=1}^{n}a_i^2\right)^{\frac{1}{n}}.$$

No,

$$\left(\prod_{i=1}^{n}a_i\right)^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a_1\cdot\ldots\cdot a_n}\leqslant\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i}{n},$$

pa, prema tome,

$$2S<\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i}{n}\right)^2.$$

Neka su p_i i q_i dužine projekcije i-te stranice mnogougla na horizontalnu i vertikalnu stranicu kvadrata. Tada je

$$a_i \leqslant p_i + q_i,$$

tj.

$$\sum_i a_i \leqslant \sum_i p_i + \sum_i q_i \leqslant 4.$$

Prema tome,

$$2S \leqslant \left(\frac{4}{n}\right)^2,$$

tj.

$$S \leqslant \frac{8}{n^2}.$$

IV razred

1. *Uputstvo.* Primjenom matematičke indukcije dokazati

(19.7) $$5 \mid A_n \cdot B_n$$

(19.8) $$5 \mid (A_n - B_n) \qquad (\forall n \in N).$$

2. *Rezultat.* $x_1 = (-1)\dfrac{k\pi}{6} + k\pi, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

$$x_2 = \frac{2\pi}{3} + 2n\pi, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

3. *Uputstvo.* Koristiti odnos aritmetičke i geometrijske sredine.

4. Zadatak je riješen u knjizi „Zbirka zadataka iz matematike sa rješenjima (sa republičkih takmičenja u Bosni i Hercegovini i prijemnih ispita na Prirodno-matematičkom fakultetu u Sarajevu)" u dijelu „Zadaci predlagani za takmičenje", pod brojem 62.

DVADESETO TAKMIČENJE

I razred

2. *Uputstvo.* Razmotriti slučajeve

i) $A \prec D \prec B$,

ii) $D \prec A \prec B$,

iii) $D = A$.

U sva tri slučaja je $\measuredangle\,(MN, AC) = \dfrac{\alpha}{2}$, gdje smo sa α označili $\measuredangle\, BAC$ trougla ABC.

3. *Uputstvo.* Dokazati da je $p^2 - 1$ djeljivo brojem 12.

4. *Rješenje. Analiza.* Neka je trougao ABC traženi trougao, A_1, B_1, C_1 neka su centri kvadrata konstruiranih nad stranicama trougla tako da unutarnje oblasti četiri posmatrane figure nemaju zajedničkih tačaka. Označimo sa A_0, B_0 i C_0 središta stranica BC, CA i AB (sl. 20.1). Dokažimo da su trouglovi $A_1B_0A_0$ i $B_0C_1C_0$ kongruentni.

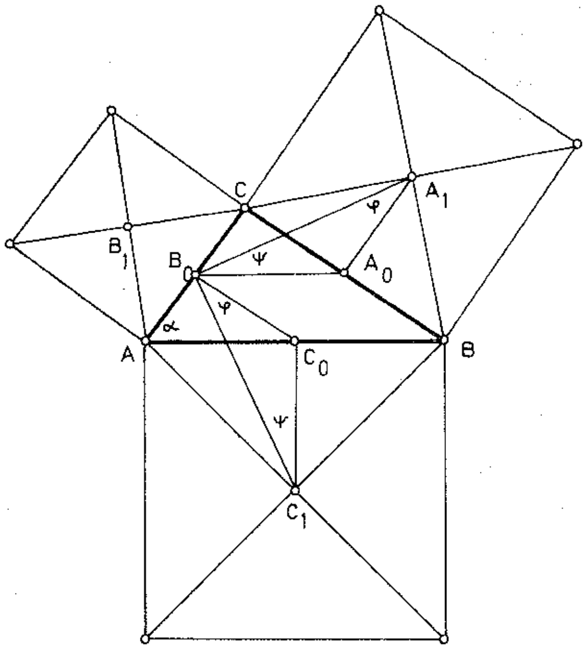
Zaista

$$A_1A_0=\frac{BC}{2}=B_0C_0$$

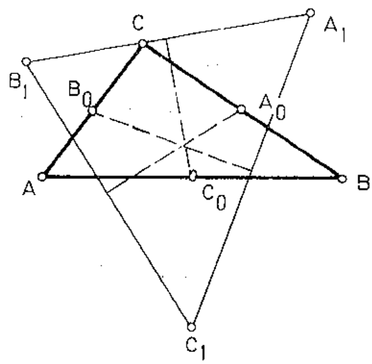
$$C_1C_0=\frac{AB}{2}=A_0B_0$$

$$\sphericalangle A_1A_0B_0=90^\circ+\sphericalangle CA_0B_0=90^\circ+\beta,$$

$$\sphericalangle B_0C_0C_1=90^\circ+\sphericalangle B_0C_0A=90^\circ+\beta.$$



Sl. 20.1.



Sl. 20.2.

U trouglu $B_0C_1C_0$ je $\varphi+\psi=180^\circ-\sphericalangle B_0C_0C_1=180^\circ-(90^\circ+\beta)=90^\circ-\beta$.

Pošto je $\sphericalangle C_0B_0A_0=\beta$, to je

$$\sphericalangle C_1B_0A_1=\varphi+C_0B_0A_0+\psi=90^\circ-\beta+\beta=90^\circ.$$

Dakle, trougao $A_1B_0C_1$ je jednakokrako pravougli trougao s pravim uglom u vrhu B_0. Prema tome, središte B_0 stranice AC traženog trougla može se konstruirati.

Analogno se konstruiraju i središta C_0 i A_0.

Konstrukcija. Konstruiramo:

i) jednakokrako pravougle trouglove $C_1A_1B_0$, $A_1B_1C_0$ i $B_1C_1A_0$ sa hipotenuzama A_1C_1, A_1B_1 i B_1C_1 redom tako da su B_0 i B_1 sa iste strane prave A_1C_1, C_0 i C_1 sa iste strane prave A_1B_1 i A_0 i A_1 sa iste strane prave B_1C_1,

ii) $C_0\in AB\,||\,A_0B_0$, $A_0\in BC\,||\,B_0C_0$, $B_0\in AC\,||\,A_0C_0$ (sl. 20.2.).

Dokaz. Slijedi neposredno iz analize, jer su po konstrukciji A_0, B_0 i C_0 središta stranica BC, CA i AB.

Determinacija. Tačke A_0, B_0 i C_0 su jednoznačno određene konstrukcijom ako tačke A_1, B_1 i C_1 nisu kolinearne (sl. 20.2).

II razred

1. *Rješenje. Analiza.* Neka je $ABCD$ dati trapez i neka je $PQRS$ kvadrat koji ispunjava uslove zadatka. Budući da su uglovi SPQ i SRQ pravi, to će vrhovi P i R pripadati kružnicama konstruiranim nad AB i CD kao prečnicima. Dijagonala PR siječe kružnicu $k(AB)$ u tački K.

Pošto je $\sphericalangle APR\cong\sphericalangle BPR$, to je i $AK=BK$ (sl. 20.3.) Analogno zaključujemo da je $\widehat{DL}=\widehat{CL}$, gdje je L tačka u kojoj dijagonala PR siječe kružnicu $k(DC)$. Drugim riječima, dijagonala PR prolazi kroz sredine K i L lukova kružnica $k(AB)$ i $k(CD)$.

Konstrukcija. Konstruiramo:

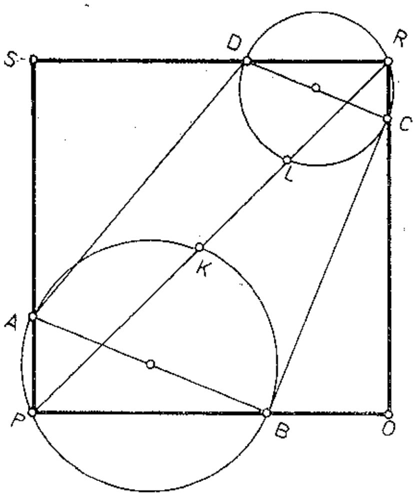
i) kružnice $k_1(AB)$ i $k_2(CD)$,

ii) središta K i L lukova kružnica k_1 i k_2,

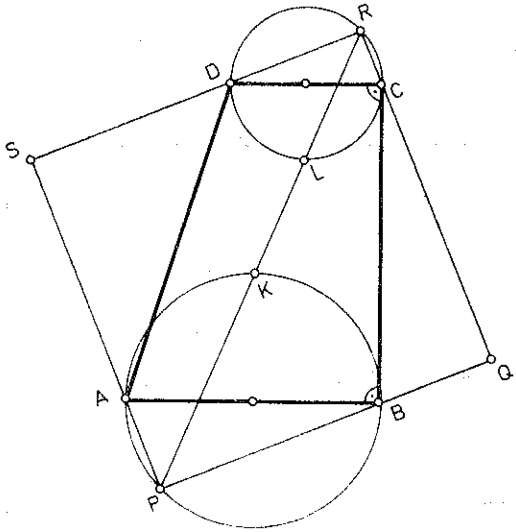
iii) presječne tačke P i R prave KL sa kružnicama k_1 i k_2,

iv) polupravе PA, PB, RC i RD,

v) tačke $Q \in PB \cap RC$, $S \in PA \cap RD$ (sl. 20.4).



Sl. 20.3.



Sl. 20.4.

Dokaz. Po konstrukciji, vrhovi A, B, C i D leže na stranicama četvorougla $PQRS$. Također, po konstrukciji su uglovi u vrhovima P i R pravi i dijagonala PR polovi te uglove. Dakle, $PQRS$ je kvadrat.

Determinacija. Zadatak će imati rješenje kad tačke P i R leže van datog trapeza i kada nijedna od polupravih PQ, PS, RQ i RS ne siječe trapez.

i) Neka je $BC > \frac{AB+DC}{2}$. Tada je $LM > KM$ ($KM \| AB$) (sl. 20.4), tj.

$$BC - \frac{AB+DC}{2} > \frac{AB}{2} - \frac{DC}{2} \quad \text{tj. } BC > AB.$$

U ovom slučaju je, zbog $LM > KM$, $\varphi = \sphericalangle MKL > \frac{\pi}{4}$, pa prava KL siječe lukove $\overset{\frown}{APB}$ i $\overset{\frown}{DRC}$, tj. P i R su van trapeza $ABCD$. Osim toga je

$$\sphericalangle RDC = \sphericalangle RLC < \frac{\pi}{4}, \sphericalangle DAB > \frac{\pi}{4} \text{ (zbog } BC > AB),$$

pa poluprava RS ne siječe trapez.

Za ostale poluprave je jasno jer nijedan od preostalih uglova trapeza nije manji od $\frac{\pi}{2}$.
U ovom slučaju imamo jedinstveno rješenje.

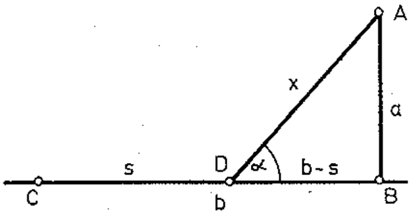
ii) Neka je $BC=\frac{AB+DC}{2}$. U ovom slučaju je KL zajednička tangenta kružnica k_1 i k_2, pa je $P\equiv K$, $R\equiv L$, tj. P i R su unutar trapeza i zadatak nema rješenje.

2. *Rješenje.* $b-s=\sqrt{x^2-a^2}\Rightarrow s=b-\sqrt{x^2-a^2}$ (sl. 20.5).

Ako je cijena prevoza rijekom k, onda je cijena prevoza drumom $2k$ po toni na km.

Ukupna cijena je onda

$$ks+2kx.$$



Sl. 20.5.

Zadatak se svodi na određivanje minimuma funkcije

$$y=s+2x$$

$$y=b-\sqrt{x^2-a^2}+2x$$

$$\sqrt{x^2-a^2}=(b-y)+2x. \tag{20.2}$$

Budući da je $x\geqslant a$, $b<y$, $x>0$, (20.2) je ekvivalentna sa

$$x^2-a^2=(b-y)^2+4\,(b-y)\,x+4x^2,$$

tj. sa

$$3x^2-4\,(y-b)\,x+(y-b)^2+a^2=0. \tag{20.3}$$

Jednačina (20.3) mora imati realna rješenja, tj. mora biti

$$D=4\,(y-b)^2-3\,(y-b)^2-3a^2\geqslant 0$$

$$(y-b)^2\geqslant 3a^2,$$

tj.

$$y-b\geqslant a\sqrt{3}. \tag{20.4}$$

Dakle, $y_{\min}=a\sqrt{3}+b$. Tada iz (20.3) slijedi $x=\frac{2a}{\sqrt{3}}$.

Dalje imamo

$$\sin\alpha=\frac{a}{x}=\frac{a}{\frac{2a}{\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ tj.} \qquad \alpha=60°.$$

Drugim riječima, ako je $b>\frac{x}{2}$, tj. $b>\frac{a}{\sqrt{3}}$, treba put provesti pod uglom od 60°.

Ako je $b\leqslant\frac{a}{\sqrt{3}}$, tada transport treba obavljati samo drumom.

4. *Uputstvo.* Koristiti

$$\left.\begin{array}{l}\alpha_i<\alpha_j\\ \alpha_i\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\end{array}\right\}\quad\Rightarrow\quad\begin{array}{l}\sin\alpha_i<\sin\alpha_j\\ \cos\alpha_i>\cos\alpha_j.\end{array}$$

III razred

1. *Rješenje.* $A=37a15b$.

Broj A je djeljiv sa 45, pa je djeljiv i sa 9 i sa 5. Kako je djeljiv sa 5, to krajnja cifra b mora biti 0 ili 5. Kako je A djeljiv sa 9, to mora biti

$$3+7+a+1+5+b=9q \qquad (q \in N).$$

i) $b=0$ $\qquad 3+7+a+1+5=9q, \quad$ tj. $\quad a=9q-25,$

odakle dobijamo da je $a=2$.

ii) $b=5$

$$3+7+a+5+15=9q, \quad \text{tj.} \quad a=9q-30,$$

odakle dobijamo $a=6$.

Za $b=0$ i $a=2$ je $A=372\,150$, te $372\,150:45=8\,270$.

```
121
 315
==00
```

Ne dolazi u obzir jer u broju 8 270 druga cifra nije 3 nego 2.

Za $b=5$ i $a=6$ je $A=376\,155$, te $376\,155:45=8\,359$

```
161
 265
  405
  ==0
```

i dolazi u obzir.

Dakle, $b=5$, $a=6$ i broj je 376 155.

2. *Rješenje*

(20.5) $$|x|+|y|=1$$

(20.6) $$x^2+y^2=a.$$

Prema (20.5) ne može biti $x=y=0$, pa iz (20.6) slijedi

(20.7) $$a>0.$$

Kvadriranjem (20.5) dobijamo

$$x^2+y^2+2\,|x|\cdot|y|=1,$$

odakle, s obzirom na (20.6), slijedi

$$2|x|\cdot|y|=1-a.$$

Iz posljednje jednačine slijedi da mora biti $1-a\geqslant 0$, tj. $a\leqslant 1$, odakle, s obzirom na (20.7), dobijamo

(20.8) $$0<a\leqslant 1.$$

Imamo, dakle, sistem

$$|x|+|y|=1$$

$$|x|\cdot|y|=\frac{1-a}{2}$$

čija ćemo rješenja naći iz jednačine

$$z^2-z+\frac{1-a}{2}=0, \qquad |x|=z_1\geqslant 0, \quad |y|=z_2\geqslant 0.$$

Uslov za realna rješenja je $D=2a-1\geqslant 0$, tj. $a\geqslant\frac{1}{2}$, odale, s obzirom na (20.8) dobijamo

(20.9) $$\frac{1}{2}\leqslant a\leqslant 1.$$

Pod uslovom (20.9) je

(20.10) $$z_{1,2}=\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{2a-1}).$$

Uz uslov (20.9) je $z_1\geqslant 0$, $z_2\geqslant 0$.

i) $a<\frac{1}{2}$, zadatak nema rješenje, kružnica je unutar kvadrata.

ii) $a=\frac{1}{2}$. Iz (20.10) slijedi $z_1=z_2=\frac{1}{2}$ tj. $|x|=|y|=\frac{1}{2}$.

Zadatak ima četiri rješenja $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$, kružnica dira kvadrat.

iii) $\frac{1}{2}<a<1$. Zadatak ima rješenje

$\left(\frac{1}{2}(1+\sqrt{2a-1}), \frac{1}{2}(1-\sqrt{2a-1})\right)$, kružnica siječe sve stranice kvadrata u po dvije tačke (sl. 20.6).

iv) $a=1$. $z_1=0$, $z_2=1$. Zadatak ima četiri rješenja: $(1,0)$, $(-1,0)$, $(0,1)$, $(0,-1)$, kružnica prolazi vrhovima kvadrata.

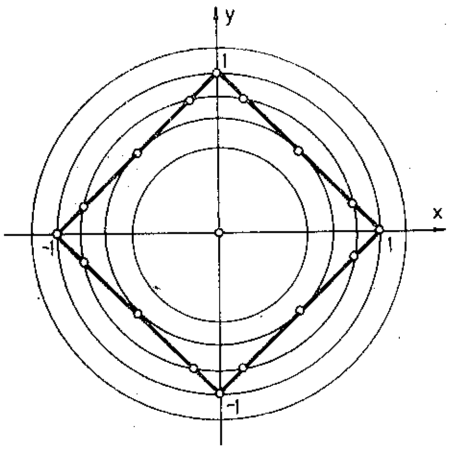
v) $a>1$, zadatak nema rješenje, kvadrat je unutar kružnice (sl. 20.6).

3. *Rezultat.* $k=4$ ili $k<0$.

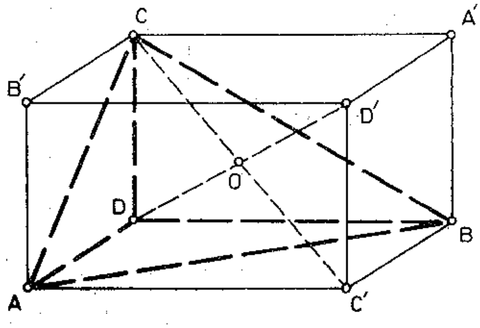
4. *Uputstvo.* Koristiti matematičku indukciju.

IV razred

1. *Rješenje.* *i)* Konstruirajmo pravougli paralelepiped sa ivicama $DA=a$, $DB=b$, $DC=c$. Njegove dijagonale AA', BB', CC', DD' su tada dijametri sfere opisane oko $DABC$. Označimo sa p, q i r rastojanje vrhova A, B i D od dijametra CC' (sl. 20.7).



Sl. 20.6.



Sl. 20.7.

Trouglovi CAC', CBC', CDC' su pravougli i vrijedi $p\cdot 2R=AC'\cdot AC=DB\cdot AC=b\sqrt{a^2+c^2}$ i analogno

$$q\cdot 2R=a\sqrt{b^2+c^2},$$

$$r\cdot 2R=c\sqrt{a^2+b^2}.$$

Očigledno je da je kvadrat svake od veličina $b\sqrt{a^2+c^2}$, $c\sqrt{a^2+b^2}$, $a\sqrt{b^2+c^2}$ manji od sume kvadrata drugih dviju veličina i, znači, manji od kvadrata suma tih veličina.

Slijedi da trokut sa stranama p, q, r postoji.

ii) Površinu toga trougla izračunaćemo ovako:

$$s=\sqrt{\frac{p+q+r}{2}\left(\frac{p+q+r}{2}-p\right)\left(\frac{p+q+r}{2}-q\right)\left(\frac{p+q+r}{2}-r\right)}.$$

Jednostavnim računanjem se pokaže da vrijedi

$$16s^2=\frac{a^2b^2c^2}{4R^2}(a^2+b^2+c^2).$$

Ali,

$$CC'^2=CD^2+DC'^2=c^2+(a^2+b^2) \quad \text{tj.} \quad 4R^2=a^2+b^2+c^2,$$

pa je

$$16s^2=\frac{a^2b^2c^2}{4R^4}\cdot 4R^2=\frac{a^2b^2c^2}{R^2} \quad \text{tj.} \quad s=\frac{abc}{4R}.$$

2. *Uputstvo*. *i*) Primijeniti matematičku indukciju.

ii) $\frac{1}{8}$.

3. *Uputstvo*. Pokazati da je niz $x_1, x_3, \ldots, x_{2n+1}, \ldots$ opadajući, a niz $x_2, x_4, \ldots, x_{2n}, \ldots$ rastući.

4. *Rješenje*. Neka je $AB=l$ dužina brvna. Tada je

$$l=AC+CB=\frac{a}{\sin\alpha}+\frac{b}{\cos\alpha}$$

pri čemu je α ugao nagiba ka zidu kanala i jasno je da je

$$0<\alpha<\frac{\pi}{2}.$$

Najmanja vrijednost l je najveća dužina brvna koje, plutajući iz jednog kanala u drugi, može preći a da se ne zaglavi (sl. 20.8).

$$l^2=\frac{a^2\cos^2\alpha+2ab\sin\alpha\cdot\cos\alpha+b^2\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}=\frac{(a+b\operatorname{tg}\alpha)^2(1+\operatorname{tg}^2\alpha)}{\operatorname{tg}^2\alpha}.$$

Stavimo

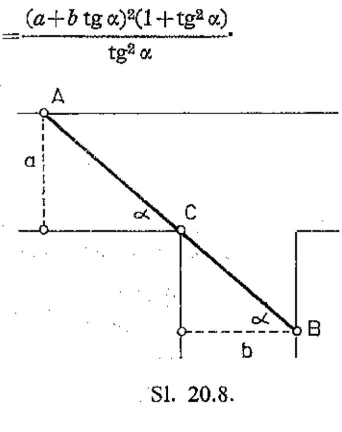
$$\operatorname{tg}\alpha=x, \qquad 0<x<+\infty.$$

Tada imamo

$$f(x)=\frac{(a+bx)^2(1+x^2)}{x^2},$$

$$f'(x)=2b^2x+2ab-\frac{2ab}{x^2}-\frac{2a^2}{x^3},$$

$$f'(x)=0 \text{ za } (bx+a)\left(b-\frac{a}{x^3}\right)=0.$$



Sl. 20.8.

Pošto je $0<x<+\infty$, $a>0$, $b>0$, to je $bx+a>0$, pa je

$$f'(x)=0 \quad \text{za} \quad x=\sqrt[3]{\frac{a}{b}}.$$

$f'(x)>0$ za $x>\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$, $f'(x)<0$ za $x<\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$, pa funkcija $f(x)$ opada na $\left(0, \sqrt[3]{\frac{a}{b}}\right)$ i raste na $\left[\sqrt[3]{\frac{a}{b}}, +\infty\right)$, a zbog toga l^2, pa i l ima najmanju vrijednost za $x=\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$, tj. $\operatorname{tg}\alpha=\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$ odakle je

$$\sin\alpha=\frac{\sqrt[3]{\frac{a}{b}}}{\sqrt{1+\left(\sqrt[3]{\frac{a}{b}}\right)^2}} \quad \text{i} \quad l_{\min}=\frac{a}{\sin\alpha}+\frac{b}{\cos\alpha}=\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$$

DVADESETPRVO TAKMIČENJE

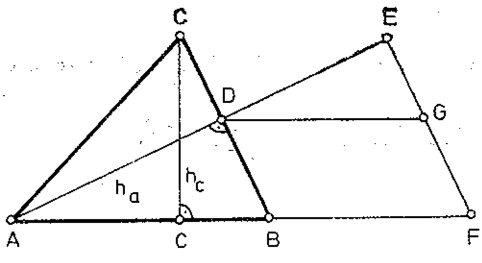
I razred

1. *Rješenje. Analiza.* Pretpostavimo da je ABC trokut koji zadovoljava uslove zadatka. Na polupravoj AD, pri čemu je $h_a=AD$, uzmimo tačku E tako da je $A\prec D\prec E$ i $DE=h_c$. Isto tako na polupravoj AB, pri čemu je $AB=c$, uzmimo tačku F tako da je $BF=a$. Označimo sa G presječnu tačku prave, koja prolazi kroz D, a paralelna je sa AF, sa EF (sl. 21.1). Tada je

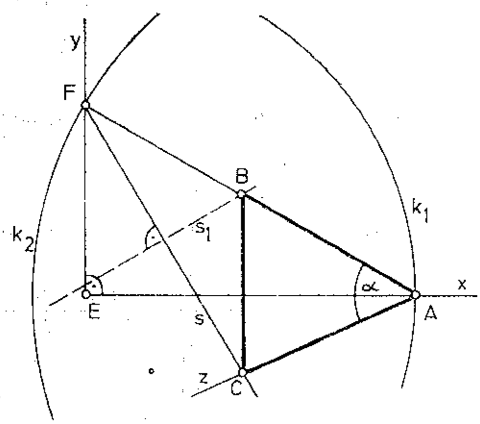
$$DG=BF=a, \quad \sphericalangle EDG\cong\sphericalangle BCC'$$

pri čemu je $CC'=h_c$, jer su to kutovi s normalnim kracima. Iz prethodnog je jasno da je $\triangle BCC'\cong\triangle EDG$, a odatle je

$$\sphericalangle DEG\cong\sphericalangle CC'B=90°.$$



Sl. 21.1.



Sl. 21.2.

Iz $EF\perp DE$ slijedi da je $EF\,||\,BC$, a odatle je $\sphericalangle BCF\cong\sphericalangle CFE$. Pošto je $BF=BC$, to je i $\sphericalangle BFC\cong\cong\sphericalangle BCF$, što sa prethodnim daje $\sphericalangle BFC\cong\sphericalangle CFE$.

Konstrukcija. Konstruiramo:

i) $\sphericalangle xEy=90°$,

ii) kružnicu $k_1(E, h_a+h_c)$,

iii) tačku $A\in k_1\cap Ex$,

iv) kružnicu $k_2(A, a+c)$,

v) tačku $F \in k_2 \cap Ey$,

vi) simetralu s ugla AFE,

vii) $\measuredangle FAz \cong \alpha$,

viii) tačku $C \in s \cap Az$,

ix) simetralu s_1 duži CF,

x) tačku $B \in s_1 \cap AF$ (sl. 21.2).

Dokaz. Slijedi neposredno iz analize i konstrukcije.

Determinacija. Zadatak ima jedinstveno rješenje pod uslovom da je $a+c>h_a+h_c$ i $\alpha<180°-\measuredangle AFC$.

2. *Uputstvo.* (21.1) pomnožiti sa $1=\frac{1}{a-1}(a^{2°}-1)$.

3. *Uputstvo.* Stranicu AB uzeti za prečnik i konstruirati kružnicu $k(AB)$.

II razred

1. *i) Uputstvo.* Iskoristiti sličnost $\triangle BMC$ i $\triangle DNC$.

ii) Rezultat. $q \geqslant 4$.

iii) Rezultat. $a=3$, $b=\frac{3}{2}$.

2. *Rezultat.* Za $1-\sqrt{8} \leqslant a \leqslant 1+\sqrt{8}$ i $x^2+4x+a \neq 0$ razlomak može uzeti sve vrijednosti.

3. *Rješenje. i)* Neka je O centar kružnice opisane oko trougla ABC. Treba dokazati da je $\measuredangle C_1CO=90°$. Označimo $\measuredangle BCO$ sa β, a $\measuredangle ABC$ sa α. Budući da je trougao ACO jednakokrak, to je $\measuredangle ACO \cong \measuredangle CAO$, tj.

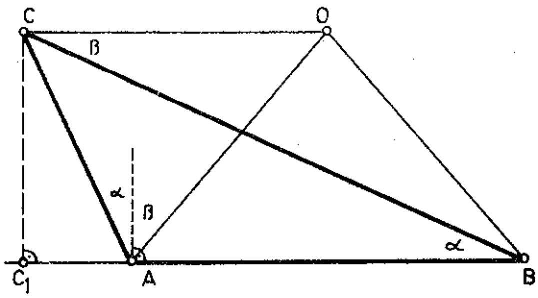
$$\beta+90°-2\alpha=\alpha+\varepsilon \quad \text{(sl. 21.3)}.$$

Dakle,

$$\text{(21.2)} \qquad \beta-\varepsilon=3\alpha-90°.$$

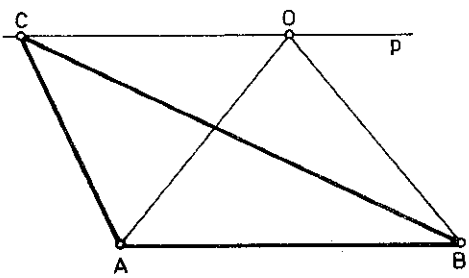
Na isti način, jer je $\triangle ABO$ jednakokrak, zaključujemo da je

$$\text{(21.3)} \qquad \beta+\varepsilon=90°-\alpha.$$



Sl. 21.3.

Iz (21.2) i (21.3) slijedi da je $\beta=\alpha$, $\varepsilon=90°-2\alpha$.



Sl. 21.4.

Dakle,

$$\measuredangle C_1CO=\alpha+90°-2\alpha+\alpha=90°, \text{ tj. } OC\perp CC_1 \text{ i}$$

$$R=OC=OA=OB.$$

ii) Konstruiramo:

i') jednakokraki trougao ABO u kome je zadana stranica AB i kraci $AO=BO=R$,

ii') pravu $p: O\in p$ i $p \| AB$,

iii') na pravoj p duž $OC=R$ (sl. 21.4).

4. *Uputstvo.* Upotrijebiti nejednakosti

$$\frac{2k-1}{2k}<\frac{2k}{2k+1} \quad \text{i} \quad \frac{2k-1}{2k}>\frac{2k-2}{2k-1}.$$

III razred

1. *Uputstvo.* $a^n-2a+1=0$ pa $a^n-a-(a-1)=0$ itd.

2. *Rješenje.* i_1) Ako je a paran, b neparan (ili obrnuto), tada je

$$a^2+b^2=2n+1 \qquad (n \in N).$$

Stavimo

$$c=n, \quad d=n+1.$$

Tada je

$$d^2-c^2=(d+c)(d-c)=2n+1=a^2+b^2.$$

i_2) Ako su a i b oba parni brojevi, tada je

$$a^2+b^2=4n \qquad (n \in N).$$

Stavimo

$$d=n+1, \qquad c=n-1.$$

Tada je

$$d^2-c^2=2n\cdot 2=a^2+b^2.$$

ii) Neka je $a\cdot b$ neparan broj, tj.

$$ab=2k+1 \qquad (k \in N).$$

Tada su a i b oba neparni, ali je

$$a+b=2l \qquad (l \in N).$$

Dalje je

$$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=4l^2-4k-2,$$

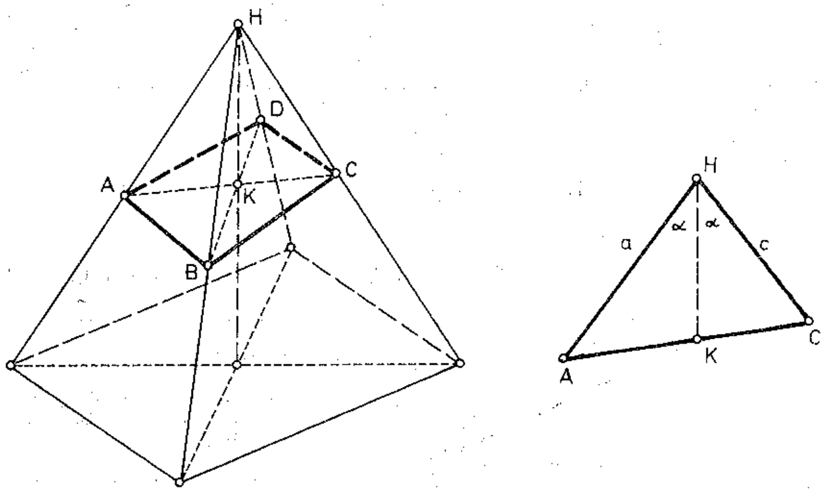
tj. a^2+b^2 je djeljiv sa 2, ali nije djeljiv sa 4. Zbog toga je

$$a^2+b^2\neq d^2-c^2$$

za sve prirodne brojeve c i d.

Naime, ako su c i d oba parni (ili oba neparni), tada je d^2-c^2 djeljivo sa 4. Ako je jedan paran, a drugi neparan, onda d^2-c^2 nije djeljiv sa 2.

4. *Rješenje.* Označimo sa α ugao koji obrazuje visina piramide sa njenim bočnim ivicama, sa H vrh piramide i sa K presjek visine i ravni (sl. 21.5).



Sl. 21.5.

Tada je

$$P_{\triangle ACH}=P_{\triangle AKH}+P_{\triangle KCH},$$

tj. (21.4) $$\frac{ac}{2}\sin 2\alpha=\frac{al}{2}\sin\alpha+\frac{cl}{2}\sin\alpha$$

pri čemu je $l=KH$.

Iz (21.4) slijedi

$$2ac\cos\alpha=al+cl,$$

odnosno

(21.5) $$\frac{2\cos\alpha}{l}=\frac{1}{c}+\frac{1}{a}.$$

Analogno, iz trougla BDH dobijamo

(21.6) $$\frac{2\cos\alpha}{l}=\frac{1}{b}+\frac{1}{d}.$$

Iz (21.5) i (21.6) slijedi da je

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{1}{b}+\frac{1}{d}.$$

IV razred

1. *Uputstvo.* Realnost korijena zadate jednačine ovisi o izrazu

$$D=8\sin^2\alpha\cdot(3-4\sin^2\alpha),$$

dok predznak korijena ovisi o izrazima

$$S=\frac{2}{\sin\alpha}$$

$$P=\frac{4\sin^2\alpha-1}{2\sin^2\alpha}.$$

Rezultat. i) Za $0<\alpha<\frac{\pi}{6}$ je $D>0$, pa su rješenja x_1, x_2 realna, $P<0$, $S>0$ pa je $x_1<0<$ $<x_2$, $|x_1|<x_2$.

ii) Za $\frac{\pi}{6}<\alpha<\frac{\pi}{3}$ je $D>0$, pa su rješenja x_1, x_2 realna, $P>0$, $S>0$, pa je $0<x_1<x_2$.

iii) Za $\frac{\pi}{3}<\alpha<\frac{2}{3}$ je $D<0$, pa su rješenja x_1, x_2 kompleksna. Ako je $x_1=\alpha+i\beta$, tada je $x_2=\alpha-i\beta$, $S=x_1+x_2=2\alpha$. Budući da je za $\frac{\pi}{3}<\alpha<\frac{2}{3}\pi$, $S>0$, to kompleksna rješenja imaju pozitivan realan dio.

iv) $\frac{2}{3}\pi<\alpha<\frac{6}{5}\pi$, isto kao u slučaju *ii)*.

v) $\frac{5}{6}\pi<\alpha<\pi$, isto kao u slučaju *i)*.

vi) Za $\alpha=0$ jednačina je nemoguća.

vii) Za $\alpha=\frac{\pi}{6}$, $D>0$, $S>0$, $P=0$, $x_1=0$, $x_2>0$.

viii) Za $\alpha=\frac{\pi}{3}$, $D=0$, $S>0$, $P>0$, $x_1=x_2>0$.

ix) Za $\alpha=\frac{2}{3}\pi$, isto kao u slučaju *viii)*.

x) $\alpha=\frac{5}{6}\pi$, isto kao u slučaju *vii)*.

xi) Za $\alpha=\pi$, jednačina je nemoguća.

2. *Rješenje.* Po uslovu zadatka je

$$2s=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

gdje su a, b, c cijeli brojevi i $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$. Označimo sa

$$x=s-a, \quad y=s-b, \quad z=s-c.$$

Tada je

$$\sqrt{xyz(x+y+z)}=2(x+y+z). \tag{21.7}$$

Iz $s>a$, $s>b$, $s>c$ slijedi $x>0$, $y>0$ i $z>0$, pa iz (21.7), nakon kvadriranja, dobijamo

$$xyz=4(x+y+z). \tag{21.8}$$

Ovdje su x, y i z ili cijeli pozitivni brojevi ili polovine cijelih neparnih brojeva. No, drugi slučaj je nemoguć, jer je tada u (21.8) na lijevoj strani razlomak, a na desnoj cio broj. Dakle, x, y i z su cijeli.

Neka je $x \geqslant y \geqslant z$. Iz (21.8) dobijamo

$$x=\frac{4y+4z}{yz-4}.$$

Odavde, s obzirom na postavljene uslove i uslove zadatka, dobijamo

$$z^4-8z^2+16 \leqslant 16+4z^2, \quad \text{tj.} \quad z^4 \leqslant 12z^2 \quad \text{tj.} \quad z \leqslant 3.$$

i) $z=1$ je $y \leqslant \frac{4+\sqrt{16+4}}{1}$, $\quad x=\frac{4y+4}{y-4}$,

$z=1, \quad y=5, \quad x=24$

$z=1, \quad y=8, \quad x=9;$

ii) $z=2, \quad y \leqslant \frac{4+\sqrt{16+16}}{2}, \quad x=\frac{4y+8}{2y-4}$

$z=2, \quad y=3, \quad x=10$

$z=2, \quad y=4, \quad x=6:$

iii) $z=3, \quad y \leqslant \frac{4+\sqrt{16+36}}{3}, \quad x=\frac{4y+4z}{yz-4}$,

$z=3, \quad y=3, \quad x=\frac{12+12}{9-4}=\frac{24}{5}$ nije cio broj.

Rezultat.

a	6	7	9	5	6
b	25	15	10	12	8
c	29	20	17	13	10

3. *Rješenje.* Označimo onu dijagonalu posmatranog mnogokuta koja je najbliža tački M sa AB. Ako je $M \in AB$, onda je

$$\sphericalangle AMB=180°.$$

Ako M ne pripada AB, to, pošto M leži unutar mnogougla, slijedi da postoji vrh C, susjedan vrhu B, tako da C i M leže sa iste strane prave AB. Jasno je da je

$$\sphericalangle BAC=\frac{1}{2n}\cdot 360^\circ=\frac{180^\circ}{n}.$$

Pošto je AB dijagonala najbliža tački M, to M nije više udaljena od AB nego od AC, pa M leži između dijagonale AB i bisektrise AK ugla BAC (može biti i na AK). To znači

$$\sphericalangle MAB\leqslant \sphericalangle KAB=\frac{180^\circ}{2n}$$

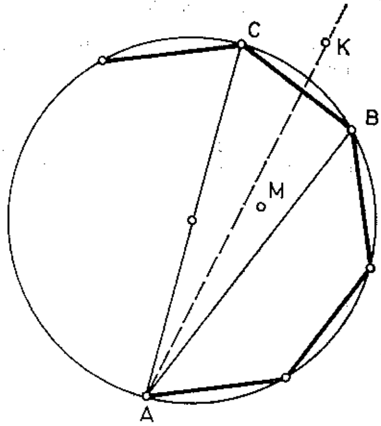
i, analogno,

$$\sphericalangle MBA\leqslant\frac{180^\circ}{2n}.$$

Dakle, $\sphericalangle AMB<180^\circ$ i

$$\sphericalangle AMB=180^\circ-\sphericalangle MAB-\sphericalangle MBA\geqslant$$

$$\geqslant 180^\circ-\frac{180^\circ}{n}=180^\circ\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right).$$



Sl. 21.6.

4. Označimo sa M veći od brojeva $|a_1|$ i $|b_1|$, a sa m veći od brojeva $|p_1|+|q_1|$ i $|p_2|+|q_2|$. Lako se pokazuje da je

$$|a_n|\leqslant M\cdot m^{n-1},\quad |b_n|\leqslant M\cdot m^{n-1}.$$

Pošto je $0<m<1$, to je

$$\lim a_n=0 \quad \text{i} \quad \lim b_n=0.$$

DVADESETDRUGO TAKMIČENJE

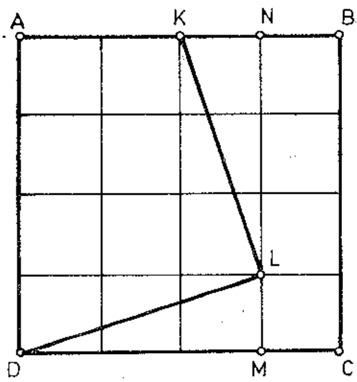
I razred

1. *Rješenje.* Pošto je $0<a<1$, lako se provjerava da je $(1-a)\,a\leqslant\frac{1}{4}$. Slično $(1-b)\,b\leqslant \frac{1}{4}$ i $(1-c)\,c\leqslant\frac{1}{4}$.

No, tada je

$$[(1-a)\cdot b]\,[(1-b)\cdot c]\,[(1-c)\cdot a]\leqslant\left(\frac{1}{4}\right)^3,$$

pa očigledno proizvodi u srednjim zagradama ne mogu biti svi veći od $\frac{1}{4}$, jer bi, u protivnom, cjelokupni proizvod bio veći od $\left(\frac{1}{4}\right)^3$.



Sl. 22.1.

2. *Rješenje.* Položimo kvadrat na kariranu hartiju sa stranicom polja jednakom $\frac{1}{4}$ strane kvadrata, i to na način kako je to pokazano na slici (sl. 22.1). Tačke K i L tada padaju u čvorne tačke rešetke. Koristeći činjenicu da su trouglovi KNL i DLM kongruentni, pa, prema tome,

$$\sphericalangle LDM=\sphericalangle KLN;$$

dakle,

$$\sphericalangle DLM + \sphericalangle KLN = 90^\circ;$$

jasno je da je $\sphericalangle DLK = 90^\circ$.

3. *Rješenje.* Pošto je $q>0$, nejednakost (22.1), nakon množenja sa q, prelazi u ekvivalentnu nejednakost:

(22.7) $$|q\sqrt{2}-p| > \frac{1}{3q}\,.$$

Posmatrajmo izraz $2q^2-p^2$. S obzirom da je $2q^2-p^2 \neq 0$ (jer bi inače bilo $\sqrt{2}=\frac{p}{q}$, što je nemoguće), jasno je da vrijedi

(22.8) $$|q\sqrt{2}-p| \geqslant \frac{1}{q\sqrt{2}+p}\,.$$

Pošto je

$$\frac{1}{q\sqrt{2}+p} > \frac{1}{3q} \Leftrightarrow 3-\sqrt{2} > \frac{p}{q}\,.$$

nejednakost (22.7), pa, prema tome, i njoj ekvivalentna nejednakost (22.1), vrijedi za sve p i q za koje je $3-\sqrt{2}>\frac{p}{q}$.

Ako je, međutim, $3-\sqrt{2} \leqslant \frac{p}{q}$, tada je $\frac{p}{q} > 3-\sqrt{2} > 1{,}56$, pa je za $q>1$:

$$\left|\sqrt{2}-\frac{p}{q}\right| > 0{,}1 > \frac{1}{3q^2}\,,$$

dok je za $q=1$

$$\left|\sqrt{2}-\frac{p}{q}\right| > 0{,}4 > \frac{1}{3q^2}\,.$$

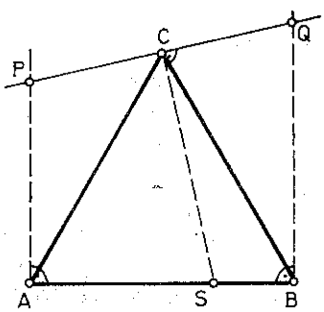
Time je dokazano da nejednakost (22.1) vrijedi za sve prirodne brojeve p i q.

4. *Rješenje.* Neka su $a_1, a_2, \ldots, a_{12}$ međusobno različiti dvocifreni brojevi. Pošto ih je 12, postoje dva kod kojih se pri dijeljenju sa 11 dobijaju jednaki ostaci, pa je njihova razlika prirodan broj djeljiv sa 11 manji od 100; dakle, dvocifren broj kome su obje cifre jednake.

II razred

1. *Rješenje.* Jasno je da se, polazeći od (22.2), dobija

$$x-y=\frac{z-x}{yz}\,,\quad y-z=\frac{z-x}{xz}\,,\quad z-x=\frac{x-y}{xy}\,.$$



Sl. 22.2.

Iz prve dvije relacije je

$x-y=\frac{y-z}{xyz^2}$, odnosno na osnovu treće $x-y=\frac{x-y}{(xyz)^2}$,

odakle se neposredno zaključuje da je $x=y=z$ ili $(xyz)^2=1$.

2. *Rješenje.* *i*) Pošto je CS simetrala duži PQ, jasno je da je $PS=QS$. Prema tome:

1° $\triangle PQS$ je jednakokraki.

Pošto je

$$\sphericalangle PAS = \sphericalangle PCS = 90^\circ,$$

četvorougao $ASCP$ je tetivni, pa je zbog toga:

$$2^\circ\ \sphericalangle CPS = \sphericalangle CAS = 60^\circ.$$

Iz 1° i 2° slijedi da je $\Delta\, PQS$ jednakostranični trougao, što je i trebalo dokazati.

ii) Pošto je

$$\frac{PQ^2}{AB^2}=\frac{P_1}{P_0}=\frac{4}{3},\quad \text{to je } CP=\frac{PQ}{2}:1=AB:\sqrt{3}.$$

Kako je $AB:\sqrt{3}\geqslant\frac{1}{2}$, tražena tačka P postoji

3. *Rješenje.* Trocifrenih brojeva (od 100 do 999) ima ukupno 900. Dakle, parova (ne obavezno različitih) trocifrenih brojeva ima ukupno

$$\frac{900\cdot 899}{2}+900=405\,450.$$

Prema tome, šestocifrenih brojeva, koji se mogu predstaviti u obliku proizvoda dva trocifrena broja, nema više od 405 450. Pošto šestocifrenih brojeva ima ukupno 900 000, više od pola ih se ne može predstaviti u obliku proizvoda dva trocifrena broja.

4. *Rješenje.*

1	2		9	10
11	12		19	20
91	92		99	100

A

1	2		9	10
1	2		9	10
1	2		9	10

B

0	0		0	0
10	10		10	10
90	90		90	90

C

Tablica A je jednaka zbiru tablica B i C, a takođe će i tablica A' koja se dobije iz tablice A transformacijom iz zadatka biti jednaka zbiru analogno dobijenih tablica B' i C'. Pošto je zbir elemenata svake kolone tablice B' jednak nuli, a zbir elemenata svakog retka tablice C' takođe nula, jasno je da će zbir elemenata tablice A' biti jednak nuli.

III razred

1. *Uputstvo i rezultat.* Jednačina (22.3) ima rješenje, u skupu realnih brojeva, pod uslovom da $x\in(-\infty,-1]\cup[9,+\infty)$, a rješava se smjenom $2^x=v$, $\left(\sqrt{\sqrt{x^2-8x+7}-\sqrt{x^2-8x-9}}\right)^x=u$. Tako se dolazi do rješenja $x_1=-1$ i $x_2=9$.

2. *Rješenje.* Iz trokutova CBB_1 i CAA_1 se primjenom Pitagorine teoreme mogu odrediti kvadrati težišnih linija:

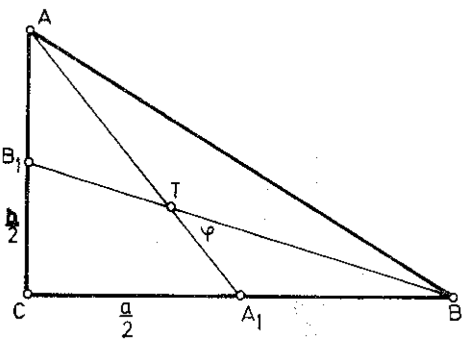
$$t_a=AA_1 \text{ i } t_b=BB_1.$$

Iz tako dobivenih relacija se (eliminacijom katete b) dobija

$$(*)\qquad a^2=\frac{16t_b^2-4t_a^2}{15}$$

Ako sada primijenimo kosinusnu teoremu na trougao A_1TB, dobićemo

$$\cos\varphi=\frac{TA_1^2+TB^2-A_1B^2}{2TA_1TB}.$$



Sl. 22.3

Uzimajući u obzir relaciju (*) i osobinu težišta, nakon sređivanja dobija se

$$\cos\varphi=\frac{2}{5}\,\frac{t_a^2+t_b^2}{t_a t_b}\geqslant\frac{4}{5}.$$

3. *Rješenje*. Primijetimo da se pri ovakvoj proceduri očuva zbir kvadrata brojeva. Naime, ako pređemo sa zadana tri broja a, b, c, na opisani način, na trojku $\frac{a+b}{\sqrt{2}}$, $\frac{a-b}{\sqrt{2}}$, c, očigledno će vrijediti

$$\left(\frac{a+b}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{a-b}{\sqrt{2}}\right)^2+c^2=a^2+b^2+c^2.$$

Kako je za datu trojku suma kvadrata jednaka

$$2^2+(\sqrt{2})^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=6{,}5,$$

a za željenu

$$1^2+(\sqrt{2})^2+(1+\sqrt{2})^2=6+2\sqrt{2}>6{,}5,$$

jasno je da se trojka $2,\ \sqrt{2},\ \frac{1}{\sqrt{2}}$ na opisani način ne može prevesti u trojku $1,\ \sqrt{2},\ 1+\sqrt{2}$.

4. *Rješenje*. Neka je na turniru sudjelovalo n ekipa. Tada je odigrano ukupno $\frac{n(n-1)}{2}$ utakmica, a pošto svaka utakmica donosi dva boda, to je osvojeno ukupno $n(n-1)$ bodova. Pošto broj osvojenih bodova nije manji od $7+5+3$, vrijedi

(22.9) $$n(n-1)\geqslant 15;\quad \text{dakle,}\quad n\geqslant 5.$$

S druge strane nijedna od preostalih $n-3$ ekipe sudionice turnira nije osvojila više od tri boda, pa je ukupno, na turniru, osvojeno najviše $15+3(n-3)$ bodova, odakle slijedi

(22.10) $$n(n-1)\leqslant 3n+6,\quad \text{tj.}\quad n\leqslant 5.$$

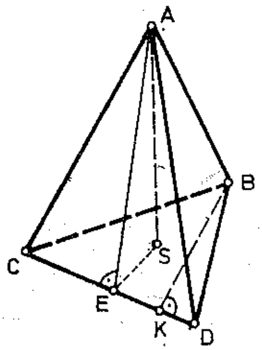
Iz (22.9) i (22.10) slijedi $n=5$.

IV razred

1. *Rezultat*. Jednačina (22.4), zbog $k<0$, nema rješenja.

2. *Rješenje*. Neka je AB najveći brid tetraedra i neka je $CD=a<1$. Tada u trouglovima ACD i BCD nijedna stranica nije veća od 1, pa visine AE i BK nisu veće od $\sqrt{1-\frac{a^2}{4}}$, što je slučaj i sa visinom tetraedra. Naime,

$$AS\leqslant AE\leqslant\sqrt{1-\frac{a^2}{4}}.$$



Sl. 22.4.

Dakle, zapremina tetraedra je:

$$V=\frac{1}{3}\,P_{\triangle BCD}\,AS\leqslant\frac{1}{24}\,a\,(4-a^2).$$

Pošto funkcija

$$y=f(a)=a\,(4-a^2)\quad 0\leqslant a\leqslant 1,$$

zbog

$$f(a_2)-f(a_1)=(a_2-a_1)\,[4-(a_1^2+a_1a_2+a_2^2)]\geqslant 0,$$
$$0\leqslant a_1\leqslant a_2\leqslant 1,$$

monotono raste na $[0,1]$, tj.

dostiže maksimalnu vrijednost $y=3$, za $a=1$, jasno je da je

$$V\leqslant\frac{1}{8}.$$

3. *Rezultat.* Nejednakost (22.5) je zadovoljena za svako $x\in[\pi/4,\ 7\pi/4]$.

4. *Rješenje.* Posmatrajmo niz definisan sa

$$a_0^2=2,\quad a_n=a_{n-1}^2-n\quad \text{za}\quad n\geqslant 1. \tag{22.11}$$

Lako se, pomoću matematičke indukcije, pokazuje da za sve brojeve a_n, definisane sa (22.11), vrijedi $a_n>n$, za svako $n\geqslant 0$.

Pošto je, prema (22.11),

$$a_n=(\ldots(((a_0^2-1)^2-2)^2-3)^2-\ldots-(n-1))^2-n>0$$

jasno je da je

$$2=a_0>\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\ldots+\sqrt{n}}}}.$$

DVADESETTREĆE TAKMIČENJE

I razred

1. *Rješenje.* Jasno je da za svako a, b i c vrijedi

$$(a-b)^2\geqslant 0,\quad (b-c)^2\geqslant 0,\quad (c-a)^2\geqslant 0. \tag{23.15}$$

Pošto su a, b i c stranice trougla, sigurno je zbir bilo koje dvije stranice veći od treće, pa, prema tome, vrijedi

$$a+b-c>0,\quad b+c-a>0,\quad c+a-b>0. \tag{23.16}$$

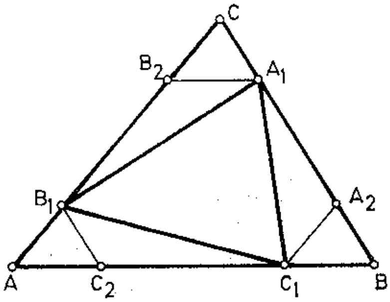
Ako pomnožimo prvu s prvom, drugu s drugom i treću s trećom nejednakosti iz relacija (23.15) i (23.16), pa saberemo, nakon sređivanja dobićemo (23.1).

2. *Rješenje.* Povucimo kroz tačke A_1, B_1 i C_1 prave paralelne sa AB, BC i AC respektivno. Za trouglove $B_1C_2C_1$, $C_1A_2A_1$ i $A_1B_2B_1$ vrijedi:

$$B_1C_1<B_1C_2+C_2C_1,$$

$$C_1A_1<C_1A_2+A_2A_1 \quad \text{i}$$

$$A_1B_1<A_1B_2+B_2B_1.$$



Sl. 23.1.

Sabiranjem posljednjih nejednakosti dolazimo do zaključka da je:

$$O_{\triangle B_1C_1A_1}<O_{\bigcirc B_1B_2A_1A_2C_1C_2}. \tag{23.17}$$

Očigledno su trouglovi AC_2B_1, C_1BA_2 i A_1CB_2 slični trouglu ABC, pa, prema tome, i međusobno. Pošto je, u skladu s (23.2),

$$A_1C=(1-\lambda)\,BC,\ B_1A=(1-\lambda)\,CA\quad \text{i}\quad C_1B=(1-\lambda)\,AB,$$

zaključujemo da su trouglovi AC_2B_1, C_1BA_2 i A_1CB_2 čak i podudarni. No, tada je:

$$A_1B_2=C_2A,\quad B_1C_2=A_2B,\quad C_1A_2=B_2C,$$

što nas, zajedno sa (23.2), dovodi do relacije

$$O_{\bigcirc B_1B_2A_1A_2C_1C_2}=\lambda O_{\triangle ABC}. \tag{23.18}$$

Relacije (23.17) i (23.18) nas dovode do zaključka da je

$$O_{\Delta A_1B_1C_1} \leqslant \lambda O_{\Delta ABC},$$

što je i trebalo dokazati.

3. *Rješenje.* Jednačina (23.3) se, uz pretpostavke

(23.19) $$x^2 \geqslant 1 \quad \text{i} \quad x^2 \geqslant p,$$

(23.20) $$x \geqslant 0,$$

i dodatni uslov

(23.21) $$x^2 \leqslant \frac{p+4}{4}$$

svodi na jednačinu

(23.22) $$8x^2(2-p)=(4-p)^2,$$

koja je za $p \geqslant 2$, očigledno, nemoguća. Dakle, ostaje da se ispita slučaj kada je $p<2$. Budući da je tada

$$x^2=\frac{(4-p)^2}{8(2-p)},$$

preostaje još da se provjeri da li su ispunjeni uslovi (23.19)—(23.21). Lako se vidi da su uslovi (23.19) uvijek zadovoljeni, dok se uslov (23.21) svodi na $0 \leqslant p \leqslant \frac{4}{3}$, pa je, zbog (23.20), rješenje

$$x=\frac{4-p}{2\sqrt{2(2-p)}}, \quad \text{za} \quad 0 \leqslant p \leqslant \frac{4}{3}.$$

4. *Rješenje.* Uzmimo dvije tačke A i B čije je rastojanje veće od 1. (Ako takve dvije tačke ne postoje, tada se svih 25 tačaka može pokriti krugom radijusa 1.) U tom slučaju, za svaku tačku X, od preostale 23 tačke, vrijedi

$$AX<1 \quad \text{ili} \quad BX<1.$$

Prema tome, postoji najmanje 12 tačaka, koje se nalaze na udaljenosti manjoj od 1; recimo, od tačke A, pa krug radijusa 1 sa centrom u tački A sadrži barem 13, od datih 25, tačaka.

II razred

1. *Rješenje. i)* Imajući u vidu da je $x^2+x+1>0$ $(\forall x \in R)$, nejednačina koja se pojavljuje u (23.5), kad se $f(x)$ zamijeni odgovarajućim polinomom iz (23.4), prelazi u sistem dvije nejednačine

(23.23) $$\begin{cases} 4x^2+(a+4)x+4>0 \\ 2x^2+(2-a)x+2>0. \end{cases}$$

Da bi svaka od ovih nejednačina bila zadovoljena za $\forall x \in R$, potrebno je i dovoljno da pripadne diskriminante budu negativne. Imajući to u vidu, nejednačine (23.23) će biti zadovoljene za $\forall x \in R$ ako $a \in (-2,4)$. Dakle, (23.5), tačno je ako $a \in (-2,4)$.

ii) Pošto se skup A iz (23.6) može napisati u obliku

$$A=\{0\} \cup [2, +\infty),$$

a skup

$$B=(-2,4),$$

to je

$$A \cap B=\{0\} \cup [2,4).$$

iii) Napišimo relaciju (23.7) u razvijenom obliku:

(23.24) $$y=\begin{cases} x^2+(a+1)x+1 & \text{za} \quad x^2+(a+1)x+1 \geqslant 0 \\ -[x^2+(a+1)x+1] & \text{za} \quad x^2+(a+1)x+1<0. \end{cases}$$

Jasno je da je:

$$x^2+(a+1)\,x+1\geqslant 0:$$

1° za $\forall x\in R$ ako je $-3\leqslant a\leqslant 1$ i

2° ako je $a<-3$ ili $a>1$, a $x\leqslant x_1$ ili $x\geqslant x_2$, dok je

$$x^2+(a+1)\,x+1<0:$$

1°′ ako je $a<-3$ ili $a>1$, a $x_1<x<x_2$, pri čemu je

$$x_1=\frac{a+1-\sqrt{a^2+2a-3}}{2},\quad x_2=\frac{a+1+\sqrt{a^2+2a-3}}{2}.$$

Očigledno sve krive prolaze tačkom $M\,(0,1)$.

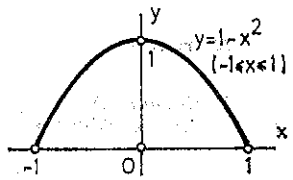
iv) Za $-3\leqslant a\leqslant 1$ graf funkcije $y=|f(x)|$ predstavlja parabolu $y=x^2+(a+1)\,x+1$ s tjemenom u tački

$$T\left(-\frac{a+1}{2},\ \frac{4-(a+1)^2}{4}\right).$$

Lako se pokazuje da je geometrijsko mjesto tjemena parabola kriva

$$y=1-x^2,\quad -1\leqslant x\leqslant 1.$$

Grafički je geometrijsko mjesto tjemena parabola prikazano na slici 23.2.



Sl. 23.2.

v) Grafik funkcije $y=f(x)$ je parabola koju svaka prava $x=b$, paralelna sa osom y, siječe tačno u jednoj tački $T\,(b, f\,(b))$.

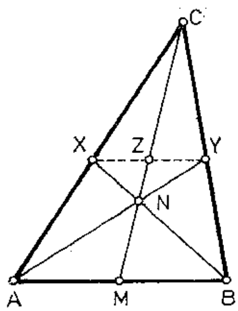
Prema tome, preslikavanje $f\colon R\to R$ je jednoznačno.

S obzirom da svaka prava $y=c$, koja je paralelna sa osom x, siječe parabolu u dvjema tačkama ako je $c\in\left(\frac{4-(a+1)^2}{4},\ +\infty\right)$, u jednoj (dvostrukoj) tački ako je $c=\frac{4-(a+1)^2}{4}$, a inače je ne siječe, posmatrano preslikavanje f preslikava R na $\left[\frac{4-(a+1)^2}{4},\ +\infty\right)$ i nije bijektivno preslikavanje skupa R na skup $\left[\frac{4-(a+1)^2}{4},\ +\infty\right)$.

2. *Rješenje.* Jasno je da je

$$AM:MB=1:1 \tag{23.25}$$

i da je, zbog sličnosti trouglova: $\triangle AMC\sim\triangle XZC$, kao i $\triangle MBC\sim\triangle ZYC$,



Sl. 23.3.

$$AM:XZ=CM:CZ=BM:YZ. \tag{23.26}$$

Na osnovu (23.25) i (23.26) dolazimo do zaključka da je $XZ=YZ$. Pretpostavimo sada da $N\in AY\cap CM$.

Tada iz $\triangle AMN\sim\triangle YZN$ slijedi

$$MN:NZ=AM:YZ. \tag{23.27}$$

Neka je $N'\in BX\cap CM$. Tada iz $\triangle BMN'\sim\triangle XZN'$ slijedi

$$MN':N'Z=BM:XZ. \tag{23.28}$$

Iz (23.27) i (23.28) i prvog dijela slijedi $MN:NZ=MN':N'Z$, tj. $N\equiv N'$.

3. *Rješenje.* Dokažimo da se primjenom, konačan broj puta, opisane operacije može postići da jedan od 34 datih brojeva $a_1, a_2, \ldots, a_{34}$, recimo a_1, bude uvećan za 1 više od ostalih.

Primjenjujući datu operaciju na brojeve $a_1, a_2, \ldots, a_{23}$, dobićemo:

$$a_1+1,\ a_2+1, \ldots, a_{23}+1,\ a_{24},\ a_{25}, \ldots, a_{34}.$$

Ako, zatim, primijenimo ovu operaciju na $a_{24}, \ldots, a_{34}, a_1+1,\ a_2+1, \ldots, a_{12}+1$, dobićemo:

$$a_1+2,\ a_2+2, \ldots, a_{12}+2,\ a_{13}+2, \ldots, a_{34}+2.$$

Primjenjujući u narednom koraku ovu operaciju na $a_{13}+1, \ldots, a_{34}+1,\ a_1+2$, dobićemo

$$a_1+3,\ a_2+2, \ldots, a_{34}+2.$$

Dakle, broj a_1 se uvećao za 1 više od ostalih brojeva. Jasno je da se na ovaj način može postići da svi brojevi budu jednaki.

4. *Rezultat.* Vidi zadatak 4. za II raz. na strani 44.

III razred

1. *Rezultat.* Ako je $a>0$, izraz (23.8) je realan za sve tačke (x, y) koje pripadaju prvom i trećem kvadrantu uključujući i koordinatne ose, ali koje ne leže na familiji hiperbola

$$y_0\, x=\frac{\pi}{2} \quad \text{i} \quad y_k\, x=\frac{\pi}{2}+(2k+1)\pi \qquad (k=0, 1, \ldots).$$

Ako je $a=0$, izraz (23.8) je realan za sve tačke (x, y) koje leže u prvom ili trećem kvadrantu, uključujući i tačke na x-osi.

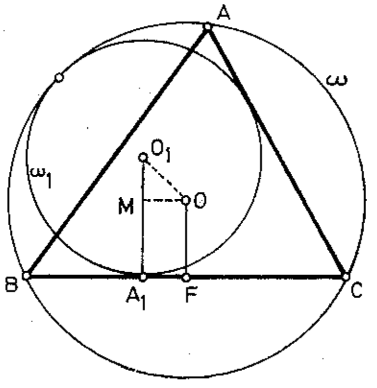
2. *Rješenje.* Neka su O i O_1 centri kružnica ω i ω_1 radijusa R i r respektivno a $\sphericalangle BAC<90°$. Povucimo iz O i O_1 normale na BC i označimo sa F i A_1 podnožja tih normala, respektivno. Zatim spustimo normalu iz O na O_1A_1 i njeno nožište označimo sa M. Tada je

$$OO_1=R-r,$$

$$O_1M=r-R\cos\hat{A},$$

$$OM=CA_1-R\sin\hat{A},$$

$$r=CA_1 \operatorname{tg}\frac{\hat{C}}{2}.$$



Sl. 23.4.

Primjenom Pitagorine teoreme na trougao OO_1M, nakon jednostavnog računanja, dobijamo

$$(*)\ CA_1=\frac{2R\sin\hat{A}\,2R\sin\hat{B}}{4R\cos\frac{\hat{A}}{2}\cos\frac{\hat{B}}{2}\cos\frac{\hat{C}}{2}}$$

Uzimajući u obzir da je

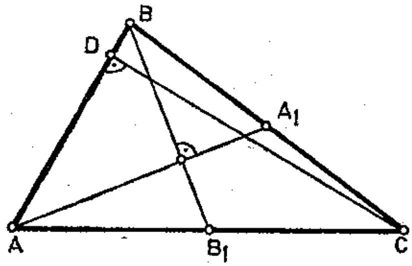
$$2R\sin\hat{A}=a, \quad 2R\sin\hat{B}=b \text{ i}$$

$$4\cos\frac{\hat{A}}{2}\cos\frac{\hat{B}}{2}\cos\frac{\hat{C}}{2}=\sin\hat{A}+\sin\hat{B}\sin\hat{C},$$

(*) prelazi u

$$CA_1=\frac{ab}{\frac{1}{2}(a+b+c)}.$$

3. *Rješenje.* Neka je $AB=c$, $BC=a$ i $CA=b$. Težišnice AA_1 i BB_1 su okomite ako i samo ako je


Sl. 23.5.

(23.29) $$\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{BB_1}=0.$$

Sa slike se vidi da je

$$\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \quad \text{i} \quad \overrightarrow{BB_1}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}.$$

Uvrštavanjem ovako određenih vektora $\overrightarrow{AA_1}$ i $\overrightarrow{BB_1}$ u (23.29) dobićemo

$$2cb\cos\hat{A}+ab\cos\hat{C}+2ac\cos\hat{B}=4c^2.$$

Ako posljednju relaciju podijelimo sa $2S$ (gdje je S površina trokuta ABC), uzimajući u obzir da je

$$2S=bc\sin\hat{A}=ab\sin\hat{C}=ac\sin\hat{B}=ch_c,$$

dobićemo

(23.30) $$2\operatorname{ctg}\hat{A}+\operatorname{ctg}\hat{C}+2\operatorname{ctg}\hat{B}=\frac{4c}{h_c},$$

kao potreban i dovoljan uslov za okomitost težišnica AA_1 i BB_1. S druge strane, posmatrajući pravougle trokutove ACD i BCD, lako se vidi da je $c=h_c(\operatorname{ctg}\hat{A}+\operatorname{ctg}\hat{B})$, što pokazuje da je (23.30) ekvivalentno sa (23.9). Time je pokazano da su težišnice AA_1 i BB_1 okomite ako i samo ako vrijedi (23.9).

4. *Rješenje.* Neka su dati brojevi $x_1, x_2, \ldots, x_{99}$.

Pretpostavimo da je $x_1\neq x_2$ i posmatrajmo brojeve:

$S_1=x_1$, $S_2=x_2$, $S_3=x_1+x_2$, $S_4=x_1+x_2+x_3$, $S_5=x_1+x_2+x_3+x_4, \ldots, S_{100}=x_1+x_2+\ldots+x_{99}$.

Pošto, po pretpostavci, nijedan od brojeva $S_1, S_2, \ldots, S_{100}$ nije djeljiv brojem 100, postoje dva koja daju jednake ostatke pri dijeljenju brojem 100. Jasno je da ta dva broja ne mogu biti S_1 i S_2. Pretpostavimo da su to S_k i S_j i da je $k>j$. Tada je razlika S_k-S_j djeljiva brojem 100. S druge strane, pošto je S_k-S_j u stvari zbir nekoliko brojeva x_i, došli smo do kontradikcije. Dakle, $x_1=x_2$ i, analogno, $x_1=x_3=x_4=\ldots=x_{99}$.

IV razred

1. *Rješenje.* Neka sistem (23.10) ima za sve cijele brojeve m i n cjelobrojna rješenja i neka je

$$D=ad-bc,\ D_x=md-nb,\ D_y=na-mc.$$

Ako je $D=0$, da bi sistem imao rješenje, mora biti i $D_x=0$. Pretpostavljajući da je $a\neq 0$, jer svi koeficijenti a, b, c, d ne mogu biti istovremeno jednaki nuli, i uvodeći oznaku $k=\frac{c}{a}$, dobićemo $c=ka$, $d=kb$, $n=km$. Dakle, sistem (23.10) bi imao cjelobrojna rješenja samo za $n=km$, što zadatak ne pretpostavlja, pa, prema tome, mora biti $D\neq 0$.

Zbog $D\neq 0$, sistem (23.10) ima jedinstveno rješenje

(23.31) $$x=\frac{D_x}{D} \qquad y=\frac{D_y}{D}.$$

Prema (23.31), paru brojeva

1^0 $m=1$, $n=0$ odgovara rješenje $x_1=\frac{d}{D}$, $y_1=-\frac{c}{D}$,

2^0 $m=0$, $n=1$ odgovara rješenje $x_2=-\frac{b}{D}$, $y_2=\frac{a}{D}$.

Kako su x_1, x_2, y_1, y_2 cijeli brojevi, to je i

$$x_1y_2-x_2y_1=\frac{ad}{D^2}-\frac{bc}{D^2}=\frac{D}{D^2}=\frac{1}{D}$$

cio broj. Da bi istovremeno D i $\frac{1}{D}$ bili cijeli brojevi, mora biti $D=\pm 1$. Obrnuto, neka je $D=\pm 1$. Tada za svaki par m, n cijelih brojeva sistem (23.10) ima jedinstveno rješenje:

$$x=\pm D_x,\ y=\pm D_y,$$

koje je očito cjelobrojno, jer su

$$D_x=md-nb,\ D_y=na-mc$$

cijeli brojevi.

2. *Rješenje.* Kvadriranjem relacije (23.11), nakon sređivanja, dobijamo

$$f(x+a)-[f(x+a)]^2=\left[f(x)-\frac{1}{2}\right]^2,$$

odakle se, nakon uporedivanja sa (23.11) zaključuje da je

$$f(x+2a)=\frac{1}{2}+\left|f(x)-\frac{1}{2}\right|=f(x),$$

jer je, očigledno, $f(x+a)>\frac{1}{2}$ za svaku vrijednost x, pa je i $f(x)>\frac{1}{2}$. Dakle,

$$f(x+2a)=f(x)\ (\forall\ x\in R),$$

pa je funkcija f periodična s periodom $b=2a$.

3. *Rješenje.* Ako jednačinu koja se dobije iz (23.12) kvadriranjem riješimo po a_n, dobićemo

$$a_n=5a_{n+1}\pm\sqrt{24a_{n+1}^2+1}.$$

Pošto je $a_{n+1}>a_n$, to je

(23.32) $$a_n=5a_{n+1}-\sqrt{24a_{n+1}^2+1}.$$

S obzirom da je, prema (23.12),

(23.33) $$a_{n+2}=5a_{n+1}+\sqrt{24a_{n+1}^2+1},$$

sabiranjem relacija (23.32) i (23.33) dobijamo

(23.34) $$a_{n+2}+a_n=10a_{n+1}.$$

Iz relacije (23.34) je očito, kad se uzme u obzir da je $a_0=0$ i $a_1=1$, da su članovi niza $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ prirodni brojevi.

4. *Rješenje.* Neka je $\varphi=\frac{2\pi}{n+1}$. Tada je

$$1+\cos k\varphi+\cos 2k\varphi+\ldots+\cos nk\varphi=0,$$

jer je, za $z=\cos\varphi+i\sin\varphi=e^{i\varphi}$,

$$1+z^k+z^{2k}+\ldots+z^{nk}=0,\quad k=1,\ 2,\ldots.$$

Uvrštavanjem u nejednakost (23.13) redom

$$x=\varphi,\ x=2\varphi,\ldots,\ x=n\varphi,$$

dobićemo n nejednakosti. Ako ih saberemo, dobićemo

$$n-a_1-a_2-\ldots-a_n\geqslant 0,$$

odakle se neposredno vidi da vrijedi (23.14).

I razred

1. *Rješenje.* Ako sa $19xy$ označimo godinu rođenja, a sa $198b$ $(b \geqslant 2)$ traženu godinu, tada imamo

$$198b - 19xy = 1 + 9 + x + y,$$

što se svodi na

$$70 + b = 11x + 2y, \quad (b \geqslant 2).$$

Pošto je $0 \leqslant y \leqslant 9$, lako se vidi da minimalna vrijednost za x mora biti veća od 5, jer za $b=2$ imamo $72 = 11x + 2y$, pa za $x=5$ desna strana ne bi mogla dostići lijevu stranu čak ni za $y=9$. Takođe je jasno da mora biti $x < 9$. Nakon toga se jednostavno provjerava da su 1985. i 1996. jedine godine za koje ne vrijedi tvrdnja.

2. *Rješenje.* Pretpostavimo da tvrdnja ne vrijedi. Neka $5 \in A$. Tada

$5 \in A,\ 4 \in A \Rightarrow 5 \in A,\ 4 \in A,\ 1 \in B,\ 9 \in B \Rightarrow$
$\Rightarrow 5 \in A,\ 4 \in A,\ 1 \in B,\ 8 \in A \Rightarrow$
$\Rightarrow 4 \in A,\ 1 \in B,\ 3 \in B \Rightarrow 4 \in A,\ 2 \in A \Rightarrow 6 \in B,$
dakle, $3,\ 6,\ 9 \in B$;

$5 \in A,\ 4 \in B,\ 6 \in A \Rightarrow 5 \in A,\ 4 \in B,\ 1 \in B \Rightarrow$
$\Rightarrow 5 \in A,\ 3 \in A,\ 1 \in B \Rightarrow 8 \in B,\ 1 \in B \Rightarrow$
$\Rightarrow 9 \in A$, dakle, $3,\ 6,\ 9 \in A$;

$5 \in A,\ 4 \in B,\ 6 \in B \Rightarrow 5 \in A,\ 4 \in B,\ 2 \in A \Rightarrow$
$\Rightarrow 5 \in A,\ 3 \in B,\ 4 \in B \Rightarrow$
$\Rightarrow 5 \in A,\ 1 \in A,\ 7 \in A,\ 4 \in B \Rightarrow$
$\Rightarrow 5 \in A,\ 8 \in B,\ 4 \in B \Rightarrow 5 \in A,\ 4 \in A \Rightarrow$
$\Rightarrow 9 \in B$, dakle, $3,\ 6,\ 9 \in B$.

Prema tome, u svakom slučaju vrijedi tvrdnja zadatka.

Primjer $\{1, 2, 4, 8\}$ i $\{3, 5, 6, 7\}$ pokazuje da tvrdnja zadatka ne vrijedi za skup $\{1, 2, \ldots, 8\}$.

3. *Rezultat.* Proizvoljan trougao se ne može razrezati na dva podudarna trougla. To je moguće ako i samo ako je trougao jednakokraki.

4. *Uputstvo.* Dokaz se izvodi tako što se najprije razlomak $\frac{m}{n}$ napiše u obliku m sabiraka, tj.

$$\frac{m}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n},$$

a zatim prvi sabirak $\frac{1}{n}$ ostavimo, drugi sabirak $\frac{1}{n}$ rastavimo na $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}$, treći sabirak $\frac{1}{n}$ rastavimo kao i drugi, pa na svaki od sabiraka $\frac{1}{n+1}$ i $\frac{1}{n(n+1)}$ u njemu primijenimo isti proces rastavljanja itd.

II razred

1. *Rješenje.* Neka je $z = a + ib$. Tada je, zbog $|z| = 2$, $a^2 + b^2 = 4$, pa je $\left|z - \frac{1}{z}\right|^2 = b^2 + \frac{9}{4}$. Prema tome,

$$\min\left\{\left|z - \frac{1}{z}\right|\right\} = \frac{3}{2},$$

a postiže se za $b=0$. Odavde slijedi $a = \pm 2$; dakle, izraz (24.1) postiže najmanju vrijednost $\frac{3}{2}$ za $z = \pm 2$.

2. *Rješenje.* 1° Za brojeve 1 000, 2 000, 3 000, . . ., 9 000, je odnos broja prema zbiru njegovih cifara jednak 1 000.

2° Neka je $\overline{abcd}$ proizvoljan četvorocifren broj, različit od brojeva iz 1°, napisan u dekadnom sistemu; a, b, c, d su respektivno cifre hiljada, stotina, desetica i jedinica.

Zbir cifara takvog broja, očigledno, nije manji od $a+1$, jer je bar jedna od cifara b, c ili d različita od nule. Istovremeno je sam broj očigledno manji od

$$\overline{(a+1)\,000}=1\,000\,(a+1).$$

Otuda slijedi

$$\frac{\overline{abcd}}{a+b+c+d}<\frac{\overline{(a+1)\,000}}{a+1}=\frac{1\,000\,(a+1)}{a+1}=1\,000.$$

Prema tome, najveći odnos četvorocifrenog broja prema zbroju njegovih cifara jednak je 1 000, a dostiže se samo za brojeve 1 000, 2 000, 3 000, . . ., 9 000.

3. *Rješenje.* Očigledno vrijedi

$$(b_i-a_i)^2\geqslant 0 \quad (i=1,\ 2, \ldots, n).$$

Ova nejednakost je ekvivalentna sa

$$\frac{b_i^2}{a_i}\geqslant 2b_i-a_i \quad (i=1,\ 2, \ldots, n).$$

Sabirajući n ovakvih nejednakosti koje se dobiju za $i=1, \ldots, n$, ako se uzme u obzir pretpostavka zadatka (24.2), dobićemo (24.3).

4. *Rješenje.* Oko svake tačke opišimo krug poluprečnika $\frac{m}{2}$. Jasno je da se oni ne presijecaju i da je njihova ukupna površina jednaka $n\left(\frac{m}{2}\right)^2\pi$. Opišimo krug poluprečnika $\left(1+\frac{m}{2}\right)$ oko jedne od tih tačaka. Ovaj krug sadrži sve prethodne krugove, a površina mu je jednaka $\left(1+\frac{m}{2}\right)^2\pi$. Jasno je da vrijedi

$$n\left(\frac{m}{2}\right)^2\pi<\left(1+\frac{m}{2}\right)^2\pi$$

odakle se neposredno dobija (24.4).

III razred

1. *Rješenje.* Neka je na turniru sudjelovalo n ekipa. Tada je odigrano ukupno $n\,(n-1)/2$ utakmica, pa kako nosi svaka utakmica 2 boda, to je osvojeno ukupno $n\,(n-1)$ bodova. Kako broj osvojenih bodova nije manji od $7+5+3$ vrijedi $n\,(n-1)\geqslant 15$. Odavde dobijamo $n\geqslant 5$. S druge strane nijedna od preostalih $n-3$ ekipe sudionice turnira nije osvojila više od 3 boda, pa je ukupno na turniru osvojeno najviše $15+3\,(n-3)$ bodova, odakle slijedi $n\,(n-1)\leqslant 3n+6$, odnosno $n\leqslant 5$. Dakle, $n=5$.

2. *Rješenje.* Pošto je

$$t_a^2=\frac{1}{4}\,(2b^2+2c^2-a^2) \quad \text{i}$$

$$t_b^2=\frac{1}{4}\,(2a^2+2c^2-b^2),$$

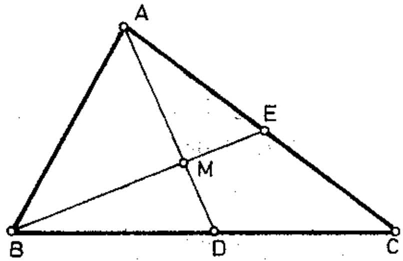
primjenjujući Pitagorinu teoremu na $\triangle ABM$ i uzimajući u obzir da je $AM=\frac{2}{3}t_a$ i $BM=\frac{2}{3}t_b$ (vidi sliku) dobićemo

$$c^2=\frac{1}{5}(a^2+b^2). \tag{24.9}$$

Ovaj uslov je ekvivalentan sa $t_a \perp t_b$. Primjenom kosinusne teoreme na $\triangle ABC$ dobićemo

$$\cos\hat{C}=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}. \tag{24.10}$$

Na osnovu relacija (24.9) i (24.10) dolazimo do zaključka da je



Sl. 24.1.

$$\cos\hat{C}=\frac{4}{5}\,\frac{a^2+b^2}{2ab}\left(\geqslant\frac{4}{5}\right) \tag{24.11}$$

ako i samo ako je $t_a \perp t_b$.

S druge strane, $\cos\hat{C}$ može se proizvoljno približiti vrijednosti 1. Neka je $\frac{4}{5}\leqslant k\leqslant 1$. Dokažimo da se stranice a i b trougla ABC mogu odrediti tako da za $\cos\hat{C}=k$, vrijedi

$$\frac{4}{5}\,\frac{a^2+b^2}{2ab}=k. \tag{24.12}$$

Relacija (24.12) ekvivalentna je sa

$$\frac{a}{b}=\frac{5}{4}k\pm\sqrt{\left(\frac{5}{4}k\right)^2-1}. \tag{24.13}$$

Trougao čije stranice a i b zadovoljavaju uslov (24.13), a zaklapaju ugao čiji je kosinus jednak k, zadovoljava uslove zadatka.

3. *Rješenje. i*) Koristeći identitet

$$\cos\alpha-\cos\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

i činjenicu da je $|\sin\alpha|\leqslant|\alpha|$, dobijamo

$$|x_2-x_3|=|\cos x_1-\cos x_2|\leqslant 2\frac{|x_2-x_1|}{2}=|x_1-x_2|.$$

Dakle, $|x_1-x_2|\geqslant|x_2-x_3|$.

Nastavljajući ovako dalje, dobijamo

$$|x_1-x_2|\geqslant|x_2-x_3|\geqslant\ldots\geqslant|x_n-x_1|\geqslant|x_1-x_2|,$$

što povlači

$$|x_1-x_2|=|x_2-x_3|=\ldots=|x_n-x_1| \text{ dakle, } x_1=x_2=\ldots=x_n,$$

u slučaju $n>2$.

Ako je $n=2$, tada

$$|x_1-x_2|=|\cos x_1-\cos x_2|\leqslant 2\left|\sin\frac{x_1+x_2}{2}\right|\left|\sin\frac{x_1-x_2}{2}\right|\leqslant|x_1-x_2|;$$

dakle:

1° $x_1=x_2$,

2° $\left|\sin\frac{x_1+x_2}{2}\right|=1$,

$$\left|\sin\frac{x_1-x_2}{2}\right|=\frac{|x_1-x_2|}{2}\neq 0.$$

Drugi slučaj otpada, jer jednačina $\sin x = \pm x$ ima jedinstveno rješenje $x=0$. To znači $x_1 = x_2$ i u slučaju $n=2$. Prema tome, sistem *i)* se svodi na jednu jednačinu $\cos x = x$ čije je rješenje $x \approx 1$.

ii) Postupajući na isti način kao u *i)*, ali polazeći od identiteta

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2},$$

zaključujemo da je sistem *ii)* ekvivalentan sa jednačinom $\sin x = x$ čije je rješenje $x=0$.

Primjedba. Sistem *ii)* se mogao rješavati polazeći od nejednakosti

$$|\sin x| \leq |x| \qquad x \in R.$$

4. *Rješenje.* Sve podskupove skupa X možemo grupisati u parove $(A, X \setminus A)$, $A \subset X$. Ovakvih parova ima tačno 2^{n-1}, a familija $\mathcal{F}$ može sadržati najviše jedan član svakog para, tj. familija $\mathcal{F}$ nema više od 2^{n-1} članova. Ako za familiju $\mathcal{F}$ uzmemo familiju koja sadrži sve podskupove skupa X koji sadrže neki fiksan element $x \in X$, tada ta familija zadovoljava uslov zadatka i ima tačno 2^{n-1} elemenata. Dakle, familija $\mathcal{F}$ može imati najviše 2^{n-1} elemenata i taj broj može biti dostignut.

IV razred

1. *Rješenje.* Relacija (24.5) se svodi na

$$99\,(c-a) + 10\,(d-b) = 3 \cdot 99. \tag{24.14}$$

Odavde slijedi da $10\,(d-b)$ mora biti djeljivo sa 99, što povlači $d=b$. Tada, na osnovu relacija (24.14) i (24.6), zaključujemo da je $c=a+3$, a $b=2\,(10-a)$. Pošto $b \in \{0, 1, \ldots, 9\}$, jasno je da mora biti $10-a \leq 4$, tj. $a \geq 6$. Istovremeno je, zbog $c=a+3$, $a \leq 6$, što zajedno s prethodnom nejednakošću povlači $a=6$. No, tada je $c=9$, $b=8$, $d=8$, pa je traženi broj 6 898.

2. *Rješenje.* *i)* Prema Vietovim formulama je

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0, \tag{24.15}$$

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = -p \quad \text{i} \tag{24.16}$$

$$x_1x_2x_3 = -q. \tag{24.17}$$

Ako kvadriramo (24.15) i uzmemo u obzir (24.16), dobićemo

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 2p,$$

pa je očigledno $p > 0$. Time je *i)* dokazano.

ii) Kad je i $q > 0$, dva korijena jednačine (24.7) su pozitivna, dok je jedan negativan. Označimo ih sa r, s, $-(r+s)$, pretpostavljajući pri tom da je $0 < r < s$, i uvrstimo u relacije (24.16) i (24.17). Dobićemo

$$p = r^2 + s^2 + rs \geq 3r^2 \quad \text{i}$$

$$q = rs\,(r+s) \geq 2r^3,$$

odakle slijedi

$$r \leq \sqrt{\frac{p}{3}}, \quad r \leq \sqrt[3]{\frac{q}{2}}.$$

Dakle, $r \leq \min\left(\sqrt{\dfrac{p}{3}}, \ \sqrt[3]{\dfrac{q}{2}}\right)$.

3. *Uputstvo.* Ako visinu tetraedra $ABCD$, povučenu iz tačke A, označimo sa AH_1, tada ravan π_A sadrži pravu AH, a pošto, po pretpostavci, sadrži i tačke A i A', ona je određena tačkama A, H_1 i A'. Prava koja prolazi tačkom A, a paralelna je sa AH_1, očito leži u ravni π_A. Pošto ona sadrži centar O sfere opisane oko tetraedra $ABCD$, jasno je da i tačka O leži u ravni π_A. Analogno bi se zaključilo da $O \in \pi_B$, $O \in \pi_C$ i $O \in \pi_D$.

4. *Rješenje.* Pretpostavimo da su $A_1, A_2, \ldots, A_k$ podskupovi skupa X koji su u posebnom položaju. Različitih presjeka oblika $A_1^{p_1}\cap A_2^{p_2}\cap \ldots \cap A_k^{p_k}$ ($p_i=+1$ ili $p_i=-1$, $i=1, 2, \ldots, k$), ima 2^k. Svi su oni međusobno disjunktni, jer ako su

$$A_1^{p_1}\cap A_2^{p_2}\cap \ldots \cap A_k^{p_k} \quad \text{i} \quad A_1^{p_1'}\cap A_2^{p_2'}\cap \ldots \cap A_k^{p_k'}$$

dva presjeka, tada je za bar jedno i $p_i \neq p_i'$, pa se u jednom od presjeka nalazi A_i, a u drugom $X\setminus A_i$, odakle slijedi da je

$$(A_1^{p_1}\cap A^{p_2}\cap \ldots \cap A_k^{p_k})\cap(A_1^{p_1'}\cap A_2^{p_2'}\cap \ldots \cap A_k^{p_k'})=\varnothing$$

Prema tome, zbog

$$X\supseteq \bigcap_{p_i=\pm 1} (A_1^{p_1}\cap A_2^{p_2}\cap \ldots \cap A_k^{p_k}), \text{ vrijedi } 2^n\geqslant 2^k, \text{ tj. } n\geqslant k.$$

Dakle, skup koji ima 2^n elemenata ima najviše n podskupova koji se nalaze u posebnom položaju.

DVADESETPETO TAKMIČENJE

I razred

1. *Rješenje.* Ako je

$$x>\frac{1}{2}, \tag{25.9}$$

tada se jednačina (25.1) svodi na

$$1-x+|1-x|=1$$

koja nas za $x\geqslant 1$ dovodi do protivrječnosti, a za $x<1$ do rješenja $x=\frac{1}{2}$, koje otpada zbog (25.9). Za

$$x<\frac{1}{2}, \tag{25.10}$$

jednačina (25.1) prelazi u

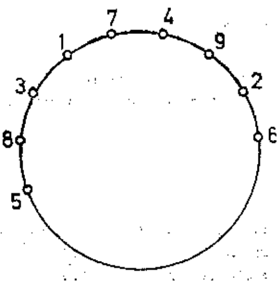
$$|x|+x=1,$$

koja nas za $x<0$ dovodi do protivrječja, a za $x\geqslant 0$ do rješenja $x=\frac{1}{2}$, koje otpada zbog uslova (25.10).

Konačno za

$$x=\frac{1}{2} \tag{25.11}$$

jednačina (25.1) očigledno se svodi na identitet; dakle, ona je zadovoljena za $x=\frac{1}{2}$.

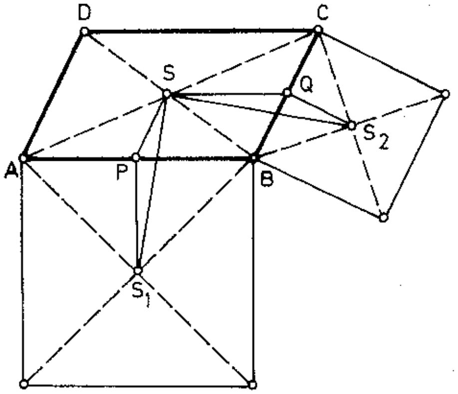


Sl. 25.1.

2. *Rješenje.* Susjedni broj broja 1 ne može biti nijedan od brojeva: 2, 4, 5, 6, 8, 9, pa su mu susjedni brojevi 3 i 7. Susjedni brojevi broja 4 mogu biti jedino 7 i 9 čime nastavljamo nadopunjavanje kružnice navedenim brojevima. Dalje, susjedni brojevi broja 2 ne mogu biti jedino 6 i 9. Susjedni brojevi broja 8 jedino mogu biti 3, 5 i 9, a kako je 9 već uzet u obzir, to mora biti 8 pored 3. Ostaje da se provjeri da ovaj raspored zadovoljava uslove zadatka.

3. *Rješenje.* Najviše 4 broja mogu biti negativna, a njihov zbir mora biti, po apsolutnoj vrijednosti, manji od svakog preostalog broja. Odatle slijedi da je zbir ta 4 broja i preostalih 13 brojeva pozitivan.

4. *Rješenje.*



Sl. 25.2.

i) Pošto je

$$SQ=PB=PS_1,$$

$$SP=QB=QS_2 \text{ i}$$

$$\measuredangle SPS_1=\measuredangle SQS_2,$$

jasno je da vrijedi

(*) $$\triangle SPS_1 \cong \triangle S_2QS.$$

Analogno bi se dokazalo da su i preostala dva trougla kongruentna, kako međusobno tako i sa upravo posmatranim.

ii) Zbog podudarnosti trouglova SPS_1 i SQS_2, slijedi specijalno $SS_1=$ $=SS_2$.

Osim toga, takođe na osnovu (*), je

$$\measuredangle S_1SS_2=\measuredangle PSQ-\measuredangle PSS_1-\measuredangle QSS_2=\measuredangle PSQ-\measuredangle PSS_1-\measuredangle PS_1S=\measuredangle PSQ-(\pi-\measuredangle SPS_1)=$$

$$=\measuredangle ADC-\left(\pi-\left(\frac{\pi}{2}+\measuredangle DAB\right)\right)=\measuredangle ADC+\measuredangle DAB-\frac{\pi}{2}=\pi-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}.$$

Dakle, $SS_1 \perp SS_2$.
Analogno se dokazuje za svaki preostali par kvadrata odakle slijedi traženi rezultat.

II razred

1. *Rezultat. i*) Da bi za funkcije $F(x)$ i $f(x)$ iz (25.3) vrijedila relacija (25.4), mora biti: $A=5$, $B=4$, $p=-1$ i $q=-2$.

ii) Polazeći od činjenice da su A, B, p i q određeni tako da vrijedi (25.4), jasno je da se $F(x)$ može napisati pomoću $f(x)$, tj.

$$F(x)=[f(x)]^2-f(x)-2=(f(x)+1)(f(x)-2),$$

pa je riješiti nejednačinu $F(x)<0$ isto što i riješiti dvostruku nejednačinu $-1<f(x)<2$. Tako se dobija

$$x\in\left(\frac{1-\sqrt{17}}{2},\ \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2},\ \frac{1+\sqrt{17}}{2}\right).$$

2. *Rješenje.* Neka su x i y traženi brojevi, a „a" i „b" cifre trocifrenog, odnosno dvocifrenog broja. Tada imamo

(25.12) $$x\cdot y=111\cdot a \quad \text{i} \quad x+y=11\cdot b.$$

Pošto su x i y najviše dvocifreni brojevi onda je $x=37$ ili $x=74$. Neka je $x=37$. Tada se za $y=3a$, $a\in N$ iz druge od relacija (25.12) dobija

$$a=\frac{11b-37}{3},\quad 4\leqslant b\leqslant 9.$$

Jednostavno se provjerava da se jedino za $b=5$ i $b=8$ dobijaju vrijednosti $a\in N$, i to $a=6$ i $a=17$, respektivno. Pošto par (37, 51) ne zadovoljava uslov $37\cdot 51=111\cdot a$, treba odbaciti i $b=8$, tako da ostaje samo mogućnost $b=5$, kojoj odgovara $y=18$ i rješenje (37, 18) za koje su ispunjeni i preostali uslovi.

Na isti način, uzimajući $x=74$, dobijamo

$$a=\frac{11b-74}{3}, \quad 7\leqslant b\leqslant 9,$$

što je moguće samo za $b=7$. Tako se dobija još jedno rješenje (74, 3).

3. *Rješenje.* Stavimo u jednu grupu brojeve u čijem zapisu ima paran broj jedinica, a u drugu grupu brojeve čiji zapis ima neparan broj jedinica. Ako su

$$A=\overline{a_1\,a_2\ldots a_{10}} \quad \text{i} \quad B=\overline{b_1\,b_2\ldots b_{10}}$$

dva broja iz iste grupe, a međusobno različita, oni se moraju razlikovati bar na jednom mjestu desetičnog zapisa. Otuda u sumi ta dva broja mora biti bar jedna trojka. S druge strane, brojevi A i B u desetičnom zapisu imaju „po parnosti" isti broj jedinica, što znači da postoji bar još jedno mjesto na kojem se brojevi A i B razlikuju. Dakle, sume dva broja iz iste grupe moraju imati najmanje dvije trojke u svom desetičnom zapisu.

4. *Rješenje. Analiza.* Pretpostavimo da je zadatak riješen i da je A_1 centralno simetrična tačka tačke A u odnosu na P. Tada iz činjenice da je

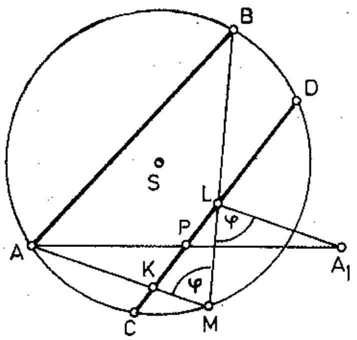
$$AP=PA_1 \text{ i } KP=PL$$

zaključujemo da je četvorougao AKA_1L paralelogram; dakle, $LA_1||AK$, odnosno $LA_1||AM$, što povlači

$$\sphericalangle MLA_1=\sphericalangle AML=\sphericalangle ACB=\varphi,$$

pa je

$$\sphericalangle BLA_1=\pi-\varphi.$$



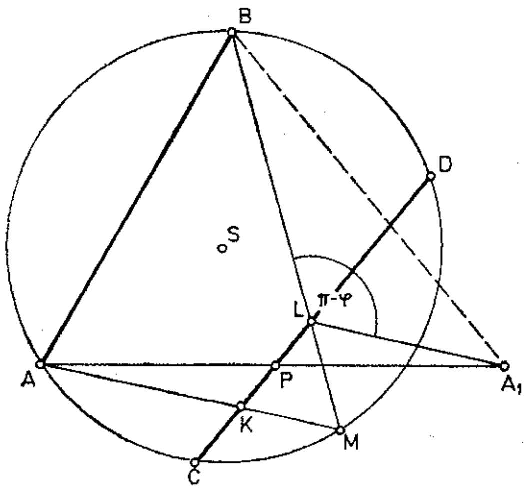
Sl. 25.3.

Tačka L leži na presjeku tetive CD i skupa tačaka iz kojih se duž A_1B vidi pod uglom $\pi-\varphi$.

Skup tačaka iz kojih se duž A_1B vidi pod uglom $\pi-\varphi$ uzima se sa strane sa koje je i tačka P.

Konstrukcija. Konstruišemo:

i) tačku A_1,
ii) skup tačaka iz kojih se duž A_1B vidi pod uglom $\pi-\varphi=\pi-\sphericalangle ACB$,
iii) tačku L koja leži u presjeku skupa iz *ii)* i tetive CD,
iv) tačku K koja je simetrična tački L u odnosu na P (sl. 25.4).



Sl. 25.4.

Dokaz. Treba dokazati da se pravci AK i BL sijeku u tački M na kružnici. AKA_1L je paralelogram, jer je $KP=PL$ i $AP=PA_1$, pa je $\sphericalangle AML=\sphericalangle MLA_1=\pi-(\pi-\varphi)=\varphi=\sphericalangle ACB$; dakle, tačka M pripada kružnici.

Diskusija. Zadatak ima uvijek jedinstveno rješenje.

III razred

1. *Rješenje.* Pretpostavimo, prvo, da dužina treće stranice nije ograničena nikakvim uslovima. Površina trougla čije su stranice a i b, a njima zahvaćeni ugao α data je sa $P=\frac{ab}{2}\sin\alpha$. Ako su a i b date sa $1<a\leqslant 2\leqslant b\leqslant 5$, tada će proizvod $ab\sin\alpha$ biti maksimalan za $a=2$, $b=5$, $\alpha=90°$. Otuda slijedi da će najveću površinu imati pravougli trougao sa katetama 2 i 5. Treća stranica ovog trougla $c=\sqrt{29}$ zadovoljava uslov $5<c<6$.

2. *Uputstvo.* Vidi zatatak 2. za III razred na strani 70.

3. *Rješenje.* Relacija (25.6) je ekvivalentna sa

$$(100x+10y+z)(x+y+z)=2^3\,5^3. \tag{25.13}$$

Za $x+y+z=2^m\cdot 5^n$, $100x+10y+z=2^{3-m}\cdot 5^{3-n}$ $(0\leqslant m\leqslant 3,\ 0\leqslant n\leqslant 3)$ oduzimanjem dobijamo

$$9(11x+y)=2^{3-m}\,5^n\,(5^{3-2n}-2^{2m-3}). \tag{25.14}$$

Uz pretpostavku $3-m\leqslant m$ imamo $n<3-n$, tj. $0<3-2n$ i $2m-3\geqslant 0$, pa je $5^{3-2n}-2^{2m-3}$ cio broj. Izraz na lijevoj strani jednakosti (25.14) je djeljiv brojem 9, pa je brojem 9 djeljiv i izraz $5^{3-2n}-$ -2^{2m-3}, tj. $5^{3-2n}\geqslant 9+2^{2m-3}$ ili $3-2n\geqslant 2$, tj. $n\leqslant\frac{1}{2}$, što zajedno sa $0\leqslant n\leqslant 3$ povlači $n=0$. Tada relacija (25.14) prelazi u

$$9(11x+y)=2^{3-m}\,(5^3-2^{2m-3}). \tag{25.15}$$

Za $5^3-2^{2m-3}=9k$ imamo $9(14-k)=2^{2m-3}+1$. Izraz na lijevoj strani je djeljiv brojem 9, pa je i izraz na desnoj strani takođe djeljiv brojem 9. Iz $0\leqslant m\leqslant 3$ i $2m-3\geqslant 0$ slijedi $0\leqslant 2m-3\leqslant 3$, tj. $1\leqslant 2^{2m-3}\leqslant 2^3$; dakle, $2\leqslant 2^{2m-3}+1\leqslant 9$. Otuda je $k=13$, $m=3$; dakle, $x=1$, $y=2$, $z=5$. Slučajevi $3-m>m$, $n\geqslant 3-n$ i $3-m>m$, $3-n>n$ lako se isključuju.

4. *Rješenje.* Neka takmičar A pripada grupi takmičara koji imaju najviše pobjeda. Dokažimo da takmičar A ispunjava zahtjev zadatka. Pretpostavimo da to nije tačno. Tada postoji takmičar B, koji nije identičan sa A, takav da nije pobijeđen od A, niti od bilo kojeg takmičara koji je pobijeđen od A. Budući da se svaki takmičar bori sa svakim i nijedna borba se ne završava neriješeno, slijedi da je B pobijedio sve one učesnike koje je pobijedio A, a takođe i samog A. Na taj način takmičar B ima jednu pobjedu više nego A, a to protivrječi činjenici da takmičar A pripada grupi takmičara sa najviše pobjeda. Ovim je tvrdnja dokazana. (Zadatak se može lijepo ilustrovati na primjeru od 5 takmičara.)

IV razred

1. *Rješenje.* Ako stavimo $\operatorname{tg}\alpha=0{,}2$, tada je $\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{5}{12}$ i slično $\operatorname{tg}4\alpha=\frac{120}{119}$. Dakle, $\operatorname{tg}4\alpha>1$, pa pošto je $\operatorname{tg}x$ rastuća funkcija u intervalu $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, to vrijedi $4\alpha>45°$ ili $\alpha>$ $>\frac{45°}{4}>11°$, pa je odatle, stvarno, $\operatorname{tg}11°<0{,}2$.

2. *Rješenje.* Mogu se povući dvije ravni normalne na zadanu generatrisu konusa (CA na slici 25.5) koje diraju upisanu kuglu. Njihove tačke dodira (N i N_1) leže na dijametru NN_1 koji je paralelan sa CA. Prvo posmatrajmo ravan koja dodiruje kuglu u tački N. Četvorougao $ODNK$ (K je tačka dodira generatrise CA sa kuglom) je kvadrat, tako da je $DK=ON=r$. Po pretpostavci zadatka, je $CD=d$. Prema tome, $CK=d+r$.

Iz trougla KOC imamo $CO=\sqrt{(d+r)^2+r^2}$.
Prema tome,

$$CF=OF+OC=r+\sqrt{(d+r)^2+r^2}.$$

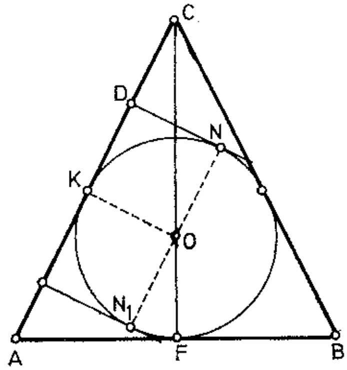
Iz sličnosti trouglova AFC i KOC nalazimo

$$AF:CF=OK:KC,$$

odakle je

$$AF=\frac{OK\cdot CF}{KC}=\frac{r\,[r+\sqrt{(d+r)^2+r^2}]}{d+r} \quad \text{i}$$

$$V=\frac{\pi r^2[r+\sqrt{(d+r)^2+r^2}]^3}{3\,(d+r)^2}.$$



Sl. 25.5

Zaključivanje je analogno ako se uzme ravan koja dira kuglu u tački N_1.

3. *Rješenje*. Svakom broju $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ možemo pridružiti 5 „susjednih", tj. 5 različitih brojeva koji se od datog broja razlikuju u tačno jednom mjestu. Ako svakom od 6 datih brojeva pridružimo njegovih 5 „susjednih", imaćemo, skupa sa datih 6, ukupno 36 (ne obavezno međusobno različitih) brojeva. Kako ima tačno 32 petocifrena broja koji se mogu napisati pomoću cifara 1 i 2, među ovih 36 brojeva postoje bar dva jednaka. Drugim riječima, među datih 6 brojeva postoje brojevi $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ i $\overline{b_1b_2b_3b_4b_5}$ koji imaju isti „susjedni" broj i, u tom slučaju, razlikuju se u najviše dva mjesta ili se broj $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ podudara sa „susjednim" brojem broja $\overline{b_1b_2b_3b_4b_5}$, a u tom slučaju se brojevi $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ i $\overline{b_1b_2b_3b_4b_5}$ razlikuju u ne više od jednog mjesta.

4. *Rješenje*. *i*) Zbog $a_2=2$ i stroge monotonosti niza, vrijedi $a_3\geqslant 3$; dakle, $a_3=3+p$, $p\geqslant 0$. Dokažimo da je $p=0$. Pošto je, ako se ima u vidu (25.8),

$$a_6=a_2\cdot a_3=2\cdot(3+p)=6+2p,$$

to je

$$a_5\leqslant 5+2p.$$

Dalje je

$$a_{10}=a_2\cdot a_5\leqslant 2\cdot(5+2p)=10+4p,$$

tako da je

$$a_9\leqslant 9+4p.$$

Analogno je

$$a_{18}=a_2\cdot a_9\leqslant 2\cdot(9+4p)=18+8p \quad \text{i} \quad a_{15}\leqslant 15+8p,$$

kao i

$$a_{15}=a_3\cdot a_5\geqslant(3+p)\,(5+p)=15+8p+p^2.$$

Dakle,

$$15+8p+p^2\leqslant 15+8p,$$

što povlači $p=0$, pa je $a_3=3$.

Time je *i*) dokazano.

ii) Ako pretpostavimo da je tvrdnja tačna za neke $k\geqslant 3$, tada je tačna i za sve $i\leqslant(k-1)\,k$. Zaista, kako je $a_{k-1}\leqslant(k-1)$ i $a_k=k$, a $(k-1)$ i k uzajamno prosti, to je $a_{(k-1)\,k}=a_{k-1}\cdot a_k=(k-1)\,k$, pa kako je niz $a_1, a_2, \ldots$ strogo rastući, to je $a_i=i$ za sve $i\leqslant(k-1)\cdot k$. Dakle, na osnovu indukcije vrijedi $a_i=i$ $(i\in N)$.

DRUGI DIO

ZADACI PREDLAGANI ZA TAKMIČENJA IZ MATEMATIKE

1. Ako je α luk prvog kvadranta, dokazati da je

i) $\alpha - \sin\alpha \leqslant \dfrac{\alpha^3}{4}$,

ii) $1 - \dfrac{\alpha^2}{2} \leqslant \cos\alpha \leqslant 1 - \dfrac{\alpha^2}{2} + \dfrac{\alpha^4}{16}$.

2. Tupougli trougao čiji su oštri uglovi α i β i najmanja visina h obrće se oko strane b. Naći površinu obrtnog tijela.

3. Dokazati da je uslov

$$ACF + 2BDE - CD^2 - AE^2 - FB^2 = 0$$

potreban i dovoljan da se izraz

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F$$

(drugog stepena po x i y) može razložiti u proizvod dva linearna faktora po x i y.

4. Neka je

$$u_n = 1 + \frac{3n}{1+2n}\, i$$

opšti član jednog niza kompleksnih brojeva. Naći

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| .$$

5. Suma recipročnih vrijednosti tri cijela pozitivna broja jednaka je jedinici. Koji su to brojevi?

6. Naći realne korijene jednačine

$$\sqrt{x^2 - p} + 2\sqrt{x^2 - 1} = x$$

pri čemu je p realan parametar.

7. Spojiti proizvoljnu tačku X kružnice sa vrhovima A, B i C u tu kružnicu upisanog jednakostraničnog trougla. Dokazati da je najveće od triju rastojanja XA, XB, XC jednako zbiru druga dva.

8. Članovi nekog rastućeg geometrijskog niza su prirodni brojevi. Dokazati da:

i) logaritmi tih članova čine rastući aritmetički niz,

ii) je količnik između zbira kvadrata neparnog broja prvih n članova geometrijskog niza i zbira n prvih stepena tih članova prirodan broj.

9. Naći sve polinome $P(x)$ za koje je tačna jednakost

$$xP(x-1) \equiv (x-26)\,P(x).$$

10. Naći sve polinome $P(x)$ za koje je

$$P(x^2-2x) = P^2(x-2).$$

11. Za niz $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ vrijedi

$$a_0=0, \quad a_{n+1}=5a_n+\sqrt{24a_n^2+1}, \quad n=0,\ 1,\ 2, \ldots$$

Dokazati da su svi članovi niza prirodni brojevi.

12. Dokazati nejednakost

$$\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\ldots+\sqrt{n}}}}<2$$

za svaki prirodan broj n.

13. Neka su $a_1, a_2, \ldots, a_n$ realni brojevi, takvi da za svako x vrijedi

$$1+a_1\cos x+a_2\cos 2x+\ldots+a_n\cos nx \geqslant 0.$$

Dokazati da je $a_1+a_2+\ldots+a_n \leqslant n$.

14. Na papiru je napisano nekoliko nula, jedinica i dvojki. Izbrišimo dvije različite cifre i umjesto njih napišimo treću (2 umjesto 0 i 1 itd.). Neka nam je nakon uzastopnog ponavljanja gornjeg postupka na papiru ostala samo jedna cifra. Dokazati: ako smo brisali i dopisivali cifre nekim drugim redom i ako je na papiru ostala samo jedna cifra, tada je ona jednaka onoj koja je ostala u prethodnom postupku.

15. Dokazati da ako za pozitivne brojeve x, y vrijedi $x^2+y^2=8$, tada je $x+y \leqslant 4$.

16. Dokazati jednakost

$$\sin\alpha+\sin(\alpha+h)+\ldots+\sin(\alpha+(n-1)h)=\frac{\sin\left(\alpha+\dfrac{n-1}{2}h\right)\sin\dfrac{nh}{2}}{\sin\dfrac{h}{2}}.$$

17. Naći sve vrijednosti parametra α tako da jednačina

$$\cos\alpha\cdot\log_a^2 x-2\,\mathrm{tg}\,\alpha\cdot\log_a x+\frac{1-4\cos^2\alpha}{\cos^3\alpha}=0, \quad 0<a<1$$

ima rješenja u intervalu (0,1).

18. Dokazati da je za neparno n broj n^3+3n^2-n-3 djeljiv brojem 48.

19. Naći realna rješenja nejednačine

$$\sqrt{3-x}-\sqrt{x+1}>\frac{1}{2}.$$

20. Dat je trinom

$$f(x)=x^2-mx+2m-3,$$

gdje je m realan broj. Izraziti minimalnu vrijednost trinoma kao funkciju parametra m i ispitati tu funkciju.

Riješiti jednačinu $f(x)=0$ i diskutovati njena rješenja.

UPUTSTVA, RJEŠENJA, REZULTATI

1. *i) Rješenje.* Neka je α ugao u prvom kvadrantu trigonometrijske kružnice. Njegovi kraci sijeku kružnicu u tačkama A i B. Označimo sa C presječnu tačku kraka OB i normale podignute u tački A na pravu OA (sl. 1). Tada je

$$P_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}\sin\alpha,$$

$$P_{\triangle AOC}=\frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha.$$

Ako površinu

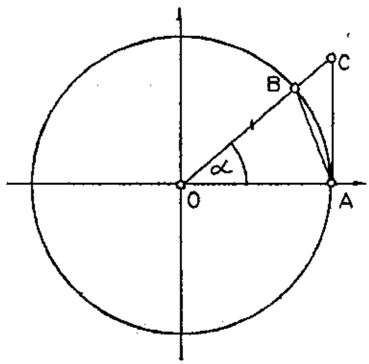
$\triangle OAB$ označimo sa P', vrijedi $P'=\frac{1}{2}\alpha$.

Pošto je

$$P_{\triangle AOB}<P'<P_{\triangle AOC},$$

to je

$$\sin\alpha<\alpha<\operatorname{tg}\alpha,\quad 0\leqslant\alpha<\frac{\pi}{2}.$$



Sl. 1.

Iz

$$\sin\alpha=2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\left(1-\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)\text{ i }\sin\frac{\alpha}{2}\leqslant\frac{\alpha}{2}\text{ tj. }\sin^2\frac{\alpha}{2}\leqslant\frac{\alpha^2}{4},\text{ tj. }1-\sin^2\frac{\alpha}{2}\geqslant1-\frac{\alpha^2}{4}\text{ slijedi}$$

$$\sin\alpha\geqslant2\,\frac{\alpha}{2}\left(1-\frac{\alpha^2}{4}\right),\text{ tj. }\sin\alpha\geqslant\alpha-\frac{\alpha^3}{4},\text{ tj. }\alpha-\sin\alpha\leqslant\frac{\alpha^3}{4}.$$

ii) Iz

$$\cos\alpha=1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}\text{ i }\sin^2\frac{\alpha}{2}\leqslant\frac{\alpha^2}{4}\text{ slijedi }\cos\alpha\geqslant1-\frac{\alpha^2}{2}.$$

Prema već dokazanom je $\sin\frac{\alpha}{2}\geqslant\frac{\alpha}{2}-\frac{\alpha^3}{32}$, pa je

$$2\sin^2\frac{\alpha}{2}\geqslant2\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\alpha^3}{32}\right)^2=\frac{\alpha^2}{2}-\frac{\alpha^4}{16}+\frac{\alpha^6}{512}\geqslant\frac{\alpha^2}{2}-\frac{\alpha^4}{16},\text{ tj. }\cos\alpha\leqslant1-\frac{\alpha^2}{2}+\frac{\alpha^4}{16}.$$

2. *Rezultat.* $S=\dfrac{\pi h^2\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin^2\beta}\cdot2\sin\left(\alpha+\dfrac{\beta}{2}\right)\cos\dfrac{\beta}{2}.$

3. *Uputstvo.* U jednom smjeru dati izraz napisati kao proizvod dva linearna faktora po x i y, tj.

$$Ax^2+2Bxy+2Dx+2Ey+F\equiv(px+qy+r)(ax+by+c),$$

pa odrediti A, $2B$, C, $2D$, $2E$, F.

U drugom smjeru iskoristiti činjenicu da je dati izraz drugog stepena po x i y.

4. *Rješenje.* Koristeći činjenicu da je za $z=x+iy$ $(x, y \in R)$ $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$, kao i činjenicu da je modul količnika jednak količniku modula, lako se pokazuje da je

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2n+3}\cdot\frac{\sqrt{13n^2+30n+18}}{\sqrt{13n^2+4n+1}}=1.$$

5. *Rješenje.* Neka su x, y i z cijeli pozitivni brojevi takvi da je

$$(1) \qquad \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1.$$

Jasno je da svi ti brojevi ne mogu istovremeno biti veći od 4. Ako je $x\leqslant y\leqslant z$, za x ostaju samo dvije mogućnosti $x=2$ i $x=3$ (jer $x>1$).
Kad je $x=2$, dobijamo

$$(y-2)(z-2)=4.$$

Budući da su y i z cijeli brojevi veći od 1, to mogu nastupiti sljedeći slučajevi:

$$y-2=2,\ z-2=2,\ \text{tj. } y=4,\ z=4;$$

$$y-2=1,\ z-2=4,\ \text{tj. } y=3,\ z=6.$$

Za $x=3$, na analogan način pokazuje se da je

$$2y-3=3,\ 2z-3=3,\ \text{tj. } y=3,\ z=3.$$

6. *Rezultat.* Za $0\leqslant p\leqslant \frac{3}{4}$ je $x=\frac{4-p}{\sqrt{8(2-p)}}$.

7. *Uputstvo.* Ako za najveće rastojanje uzmemo XA, uzeti na BC tačku D tako da je $\measuredangle CXD\cong\measuredangle AXB$.

9. *Uputstvo i rezultat.* Na osnovu uslova u zadatku doći do jednakosti

$$P(x)=P_n(x)=x(x-1)(x-2)(x-3)\ldots(x-25)P_{n-26}(x).$$

Iskoristiti ovu i zadanu jednakost.
Data jednakost je tačna ako je $P(x)$ polinom stepena 26.

10. *Rješenje.* Smjenom $Q(x+1)=P(x)$ data jednakost se svodi na

$$Q(x^2)=Q^2(x).$$

Ako je $Q(x)=x^nR(x)$, $R(0)\neq 0$, tada imamo $R(x^2)=R^2(x)$. Ako $R(x)$ nije konstanta, tada postoji k takvo da je

$$R(x)=a_mx^m+a_{m-1}x^{m-1}+\ldots+a_kx^k+a_0,\quad a_m,\ a_k\neq 0.$$

Odatle slijedi

$$R(x^2)=a_mx^{2m}+a_{m-1}x^{2(m-1)}+\ldots+a_kx^{2k}+a_0$$

$$R^2(x)=a_0^2+2a_0a_kx^k+x^{k+1}S(x).$$

Izjednačavanjem posljednja dva polinoma dobijamo

$$a_0^2=a_0,\ 2a_0a_k=0,$$

pa kako je $a_0\neq 0$, jer je $R(0)\neq 0$, zaključujemo da je $a_0=1$ i $a_k=0$. Međutim, $a_k=0$ je u kontradikciji sa pretpostavkom da $a_k\neq 0$, odakle slijedi da je $R(x)$ konstanta, tj. $R(x)=a_0=1$, pa je $Q(x)=x^n$, odnosno $P(x)=(x+1)^n$.

11. *Rješenje* Iz

$$a_{n+1}-5a_n=\sqrt{24a_n^2+1}$$

kvadriranjem dobijamo

$$a_n^2-10a_{n+1}a_n+a_{n+1}^2-1=0.$$

Rješavajući posljednju jednačinu kao kvadratnu jednačinu po a_n, imamo

$$a_n=5a_{n+1}\pm\sqrt{24a^2_{n+1}+1}.$$

Kako je $a_{n+1}>a_n$, to je

$$a_n=5a_{n+1}-\sqrt{24a_{n+1}^2+1},\quad a_{n+2}=5a_{n+1}+\sqrt{24a_{n+1}^2+1},$$

odakle sabiranjem dobijamo $a_{n+2}+a_n=10a_{n+1}$. Iz $a_0=0$ slijedi $a_1=1$, pa iz posljednje jednakosti slijedi da su svi članovi datog niza prirodni brojevi.

12. *Rješenje.* Posmatrajmo niz definisan sa

$$a_0=2,\ a_n=a_{n-1}^2-n,\quad n=1,\ 2,\ldots$$

Za sve brojeve a_n vrijedi $a_n>n$. Zaista, tvrdnja je tačna za a_1, a_2, a_3. Pretpostavimo da je $a_k>k$ za neko $k\geqslant 3$. Tada imamo

$$a_{k+1}=a_k^2-(k+1)>k^2-k-1>k+1,$$

pa na osnovu principa matematičke indukcije slijedi da je $a_n>n$ za sve n. Sada iz definicije gornjeg niza imamo

$$a_n=a_{n-1}^2-n=(a_{n-2}^2-(n-1))^2-n=(((a_0^2-1)^2-2)^2-\ldots-(n-1))^2-n>0$$

odakle uzastopnim korjenovanjem dobijamo

$$2=a_0>\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\ldots+\sqrt{n}}}},$$

što je i trebalo dokazati.

13. *Rješenje.* Posmatrajmo binomnu jednačinu $z^{n+1}-1=0$, koju možemo napisati u obliku $(z-1)(z^n+z^{n-1}+\ldots+1)=0$. Kao što znamo, sva rješenja ove jednačine su data sa

$$z_k=\cos\frac{2k\pi}{n+1}+i\sin\frac{2k\pi}{n+1},\quad k=0,\ 1,\ldots,n.$$

Za $k=0$ je $z_0=1$. Za $k=1,\ldots,n$ imamo

$$z_k^n+z_k^{n-1}+\ldots+1=0.$$

Ako stavimo $\varphi=\dfrac{2\pi}{n+1}$, tada iz posljednje jednakosti imamo

$$Re\,(z_k^n+z_k^{n-1}+\ldots+1)=1+\cos k\varphi+\ldots+\cos nk\varphi=0.$$

Uvrstimo sada u datu nejednakost redom $x=\varphi$, $x=2\varphi,\ldots,$ $x=n\varphi$. Sabiranjem n tako dobijenih nejednakosti i uzimajući u obzir da iz posljednje jednakosti slijedi

$$\cos k\varphi+\cos 2k\varphi+\ldots+\cos nk\varphi=-1,\quad k=1,\ 2,\ldots,n,$$

imaćemo

$$n-a_1-a_2-\ldots-a_n\geqslant 0$$

odakle slijedi tražena nejednakost.

14. *Rješenje.* Označimo sa x, y, z redom broj nula, jedinica i dvojki napisanih na papiru. Izvršivši jedanput operaciju opisanu u zadatku, vidimo da se svaki od brojeva x, y, z izmijenio za 1; dakle, izmijenila se parnost svakog od brojeva x, y, z. Ako je nakon izvjesnog broja naznačenih operacija na papiru ostala samo jedna cifra, to znači da su dva od brojeva x, y, z jednaka nuli, a treći jednak jedinici. To znači da od samog početka dva od brojeva x, y, z imaju istu parnost a treći različitu. Prema tome, koja će cifra ostati na kraju, zavisi samo od toga koji od brojeva x, y, z ima različitu parnost od preostala dva.

15. *Rješenje.* $(x-y)^2\geqslant 0\Leftrightarrow x^2+y^2\geqslant 2xy\Leftrightarrow 2\,(x^2+y^2)\geqslant 2xy+x^2+y^2\Leftrightarrow 2\,(x^2+y^2)\geqslant(x+y)^2.$

Odatle slijedi

$$(x+y)^2\leqslant 2\,(x^2+y^2)=16\ \text{ tj. }\ x+y\leqslant 4.$$

16. *Rješenje.* Za svako k vrijedi jednakost

$$\sin(\alpha+kh)\cdot\sin\frac{h}{2}=\frac{1}{2}\left(\cos\left(\alpha+\frac{2k-1}{2}\cdot h\right)-\cos\left(\alpha+\frac{2k+1}{2}\cdot h\right)\right).$$

Tako za

$$k=0 \text{ je } \sin\alpha=\frac{1}{2}\left(\cos\left(\alpha-\frac{h}{2}\right)-\cos\left(\alpha+\frac{h}{2}\right)\right)\cdot\frac{1}{\sin\frac{h}{2}}$$

$$k=1 \text{ je } \sin(\alpha+h)=\frac{1}{2}\left(\cos\left(\alpha+\frac{h}{2}\right)-\cos\left(\alpha+\frac{3}{2}h\right)\right)\frac{1}{\sin\frac{h}{2}},$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$k=n-1 \text{ je } \sin(\alpha+(n-1)h)=\frac{1}{2}\left(\cos\left(\alpha+\frac{2n-3}{2}h\right)-\cos\left(\alpha+\frac{2n-1}{2}h\right)\right)\frac{1}{\sin\frac{h}{2}}.$$

Sabirajući sve ove jednakosti, dobijamo

$$\sin\alpha+\ldots+\sin(\alpha+(n-1)h)=\frac{\cos\left(\alpha-\frac{h}{2}\right)-\cos\left(\alpha+\frac{2n-1}{2}h\right)}{2\sin\frac{h}{2}}=\frac{\sin\left(\alpha+\frac{n-1}{2}h\right)\sin\frac{nh}{2}}{\sin\frac{h}{2}}.$$

17. *Uputstvo.* Datu jednačinu riješiti kao kvadratnu jednačinu po $\log_a x$. Dobije se

$$\log_a x=\frac{\operatorname{tg}\alpha\pm\sqrt{3}}{\cos\alpha}, \quad \text{tj.} \quad x=a^{\frac{\operatorname{tg}\alpha\pm\sqrt{3}}{\cos\alpha}}.$$

Iz uslova $x\in(0,1)$ i $0<a<1$ slijedi

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha\pm\sqrt{3}}{\cos\alpha}>0,$$

odakle dobijamo rješenje $-\frac{\pi}{3}+2k\pi<\alpha<\frac{2\pi}{3}+2k\pi$ ili $\frac{\pi}{3}+2k\pi<\alpha<\frac{4\pi}{3}+2k\pi$.

18. *Rješenje.* $n^3+3n^2-n-3=n(n^2-1)+3(n^2-1)=(n-1)(n+1)(n+3)$. Pošto je, po pretpostavci, $n=2k+1$, posljednji izraz možemo napisati u obliku $2k(2k+2)(2k+4)$, odnosno u obliku $8k(k+1)(k+2)$. Kako je proizvod tri uzastopna prirodna broja djeljiv sa $2\cdot 3=6$, slijedi da je posljednji izraz djeljiv sa $8\cdot 6=48$.

19. *Rezultat.* $-1\leqslant x<1-\frac{\sqrt{31}}{8}$.

20. *Rezultat.* Za $x=\frac{m}{2}$ je $y_{min}=-\frac{m^2}{4}+2m-3$. Pri tome je $y_{min}=0$ za $m_1=2$ i $m_2=6$ i, osim toga, $(y_{min})_{max}=1$ za $m=4$. Za kvadratnu jednačinu $f(x)=0$ je $D=m^2-8m+12$. Zato funkcija $f(x)$ ima:

i) dvije realne nule za $m<2$ ili $m>6$,
ii) jednu dvostruku nulu za $m=2$ ili $m=6$,
iii) kompleksne nule za $2<m<6$.

TREĆI DIO

ZADACI SA KVALIFIKACIONIH ISPITA IZ MATEMATIKE

1974. godina
PRVI ROK

ODSJEK ZA MATEMATIKU

1. Za koje realne vrijednosti parametra m jednačina

$$(m+2)x^2-2mx+m-1=0$$

ima imaginarne korijene?

2. Riješiti sistem jednačina

$$|x+y|=5$$
$$|x\cdot y|=6.$$

3. Riješiti jednačinu

$$\operatorname{ctg} x-\operatorname{tg} x=\sin x+\cos x.$$

4. Zadane su duži a, b, c. Konstruisati duž

$$x=\frac{a^2b}{c^2}.$$

DRUGI ROK

ODSJEK ZA MATEMATIKU

1. Riješiti jednačinu

$$\sin^2 2x+\sin^2 x=\frac{3}{2}.$$

2. Konstruisati paralelogram ako su zadani osnova, visina i dijagonala.

3. Riješiti jednačinu

$$\log 10+\frac{1}{3}\log\left(271+3^{\sqrt{2x}}\right)=2.$$

4. Riješiti sistem

$$64^{2x}+62^{2y}=12$$

$$64^{x+y}=4\sqrt{2}.$$

1975. godina
PRVI ROK

ODSJEK ZA MATEMATIKU

1. Presjeći pravilni tetraedar ravninom tako da presjek bude kvadrat (dokaz). Koliko ima takvih presjeka?

2. Zadan je jedan korijen $x_1=-2$ jednačine

$$x^6+x^5-2x^4-x^2-x+2=0.$$

Naći ostale.

3. Ako jedan ugao (γ) trougla iznosi $45°$, postoji relacija

$$a^2+b^2-c^2=4P,$$

gdje P znači površinu trougla. Dokazati.

4. Naći (približno) brzinu (kilometara na čas) kojom rotira Beograd oko Zemljine ose, a zatim dužinu (približno) jednog stepena na njegovom uporedniku. Geografska širina Beograda je $\varphi=44°47'$, a poluprečnik Zemlje $R\approx 6\,370$ km.

5. Naći korijene jednačine

$$\log x-(\log\sqrt[6]{x})^{-1}=1$$

ako se kao logaritamska baza uzme:

a) 10; b) $\frac{1}{2}$.

DRUGI ROK

ODSJEK ZA MATEMATIKU

1. Uprostiti izraz

$$\sqrt{\frac{(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}+1}{2}}+\sqrt{\frac{(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}-1}{2}}$$

ako je $x=2k^{\frac{1}{2}}(1+k)^{-1}$ i $k>1$.

2. Riješiti sistem jednačina

$$\log_4 x - \log_2 y = 0, \quad x^2 - 5y^2 + 4 = 0.$$

Formula za prelaz sa osnove a na osnovu b glasi: $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$.

3. Riješiti jednačinu

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x = \frac{4}{3} \sin 2x.$$

4. Razlomak ima oblik $\dfrac{p}{p^2-1}$ pri čemu je $p \in N$, $p \neq 1$. Ako se brojnik i nazivnik ovog razlomka povećaju za 2, razlomak će biti veći od $\dfrac{1}{3}$, a ako se umanje za 3, razlomak će biti manji od $\dfrac{1}{10}$, ali ipak pozitivan. Naći vrijednost ovog razlomka.

5. U pravilan oktaedar upisan je uspravni valjak tako da mu je osa na dijagonali oktaedra i da mu osnove diraju strane oktaedra. Ako je ivica oktaedra a, odrediti onaj valjak koji ima najveći omotač.

TREĆI ROK

ODSJEK ZA MATEMATIKU

1. Dati su polinomi

$$A = x^3 + x^2 - 9x - 9 \quad \text{i} \quad B = (x-2)^2 - (x-4)^2.$$

a) Uprostiti razlomak $f(x) = \dfrac{A}{B}$ i odrediti nula tačke funkcije $f(x)$.

b) Pokazati da funkcija $f(x)$ ima vrijednost u cijelim brojevima za sve neparne vrijednosti od x.

2. Odrediti sve četvorocifrene pozitivne cijele brojeve djeljive brojem 45 kad je razlika kvadrata cifre stotica i cifre desetica jednaka 24.

3. Dokazati da

$$\log_b x = \frac{1}{2}(\log_a x + \log_c x) \Rightarrow \log_b \sqrt{ac} = \log_b a \cdot \log_b c,$$

pri čemu su a, b, c i x pozitivni i različiti od jedan.

4. Konstruisati i izračunati rastojanje između dvije mimoilazne ivice pravilnog tetraedra ako je dužina jedne ivice jednaka jedan. Konstrukciju dokazati.

1977. godina

Kvalifikacioni ispit nije održan, a na prijemnom ispitu za upis na ODSJEK ZA FIZIKU dati su ovi zadaci:

1. Odrediti predznak funkcije $f(x)=2x^2-11x+5$.

2. Data je duž AB. Konstruisati geometrijsko mjesto tačaka iz kojih se ta duž vidi pod uglom α.

3. Dokazati jednakost $\cos 80°+\cos 40°-\cos 20°=0$.

1979. godina

PRVI ROK

ODSJEK ZA MATEMATIKU

Grupa „A“

1. Riješiti logaritamsku jednačinu

$$\frac{1}{2}\log(2x+5)+\frac{1}{2}\log(2x-4)=\log 2x.$$

2. Naći one vrijednosti x koje istovremeno zadovoljavaju nejednačine

$$15x-2>2x+\frac{1}{3}$$

$$2(x-4)<\frac{1}{2}(3x-14).$$

3. Riješiti jednačinu

$$2\sin^2 x+\sqrt{3}\sin x\cdot\cos x+\cos^2 x=1.$$

4. Oko kružnice poluprečnika $r=2$ cm opisan je jednakokraki trapez čija je površina 20 cm^2. Naći strane trapeza.

5. Odrediti one vrijednosti parametra m za koje jednačina

$$(m-1)x^2+2(m-4)\cdot x+m-2=0$$

ima konjugovano-kompleksna rješenja.

6. Data je visina $h=6$ cm i površine bočnih strana $P_1=54$ cm^2, $P_2=60$ cm^2 i $P_3=102$ cm^2 uspravne trostrane prizme. Izračunajte njenu površinu i zapreminu.

Grupa „B"

1. Riješiti logaritamsku jednačinu

$$\log(x-9)+2\log\sqrt{2x-1}=2.$$

2. Naći one vrijednosti x koje istovremeno zadovoljavaju nejednačine

$$4-x<2x+3$$
$$6-x<8-2x.$$

3. Riješiti jednačinu

$$\sin^2x+\cos^2x+\operatorname{tg}^2x+\operatorname{ctg}^2x=3.$$

4. Oko kružnice poluprečnika $r=8$ cm opisan je jednakokraki trapez čiji je krak $b=20$ cm. Naći površinu i paralelne strane.

5. Za koje vrijednosti parametra p jednačina

$$(1-2p)x^2-4x-6=0$$

ima konjugovano-kompleksna rješenja?

6. Baza uspravne piramide je trougao čije su stranice $a=20$ cm, $b=24$ cm, $c=36$ cm. Odrediti zapreminu piramide ako je njena visina $H=12$ cm.

DRUGI ROK

ODSJEK ZA MATEMATIKU

1. Riješiti logaritamsku jednačinu

$$\log x+\log(x-3)=2\log(6-x).$$

2. Riješiti nejednačinu

$$4x+6>8-2x>6-x.$$

3. Riješiti trigonometrijsku jednačinu

$$3\sin^4x-4\sin^2x\cdot\cos^2x+\cos^4x=0.$$

4. Da li je moguć trougao s ovim stranicama:

a) $a=5,\quad b=8,\quad c=7,$

b) $a=10,\quad b=4,\quad c=5,$

c) $a=12,\quad b=8,\quad c=4?$

5. Koliki mora biti koeficijent k da bi rješenja x_1 i x_2 jednačine

$$x^2+kx+12=0$$

zadovoljavala relaciju

$$x_1-x_2=1?$$

6. Osnova uspravne piramide je pravougaonik s dijagonalama jednakim b i uglom α među dijagonalama. Svaka od bočnih ivica obrazuje sa osnovom ugao β. Naći zapreminu piramide.

1980. godina
PRVI ROK

ODSJEK ZA MATEMATIKU

Grupa „A"

1. Dokazati da je $a^4+b^4 \geqslant \frac{1}{8}$ ako je $a+b=1$.

2. Riješiti jednačinu

$$\log_2(9-2^x)=3-x.$$

3. Data je jednačina $x^2+px+q=0$. Naći kvadratnu jednačinu čiji su korijeni

$$y_1=x_1^2+x_2^2 \quad \text{i} \quad y_2=x_1^3+x_2^3.$$

4. Riješiti jednačinu

$$\sqrt{2\sqrt{7}+\sqrt{x}}-\sqrt{2\sqrt{7}-\sqrt{x}}=\sqrt[4]{28}.$$

5. Riješiti jednačinu $\sin^3 x \cdot \cos x - \sin x \cdot \cos^3 x = \frac{1}{4}$.

6. Naći definiciono područje izraza

$$f(x)=\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}.$$

Grupa „B"

1. Dokazati da je $x^2+y^2 \geqslant \frac{1}{20}$ ako je $2x+4y=1$.

2. Riješiti jednačinu

$$x^{\frac{7+\log x}{4}}=10^{1+\log x}$$

3. Neka su x_1 i x_2 korijeni jednačine

$$ax^2+bx+c=0 \quad (ac\neq 0).$$

Ne rješavajući jednačinu, izraziti vrijednost

$$\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2} \quad \text{i} \quad x_1^4+x_1^2\cdot x_2^2+x_2^4$$

preko njenih koeficijenata.

4. Riješiti jednačinu

$$x^2+11+\sqrt{x^2+11}=42.$$

5. Riješiti jednačinu

$$\frac{1-\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x}=1+\sin 2x.$$

6. Naći definiciono područje izraza

$$f(x)=\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}.$$

DRUGI ROK

ODSJEK ZA MATEMATIKU

Grupa „A"

1. Dokazati da je

$$a(a+b)(a+c)=abc$$

ako je $a+b+c=0$.

2. Riješiti jednačinu

$$\sqrt{22-x}-\sqrt{10-x}=2.$$

3. Za korijene x_1 i x_2 kvadratne jednačine

$$x^2+p\cdot x+12=0$$

vrijedi $x_1-x_2=1$. Naći koeficijent p.

4. Riješiti jednačinu

$$\log_2(x+14)+\log_2(x+2)=6.$$

5. Riješiti jednačinu

$$\frac{1-\cos 2x}{2\sin x}=\frac{\sin 2x}{1+\cos 2x}.$$

Grupa „B"

1. Dokazati da je

$$b(a+b)(b+c)=abc$$

ako je $a+b+c=0$.

2. Riješiti jednačinu

$$\sqrt{2x+1}+\sqrt{x-3}=2\sqrt{x}.$$

3. Za korijene x_1 i x_2 jednačine

$$x^2-3ax+a^2=0$$

vrijedi $x_1^2+x_2^2=1,75$. Naći a.

4. Riješiti jednačinu

$$\frac{\log(35-x^3)}{\log(5-x)}=3.$$

5. Riješiti jednačinu

$$5\cos 2x=4\sin x.$$

1982. godina

PRVI ROK*

ODSJEK ZA MATEMATIKU I FIZIKU

1. Naći vrijednost izraza $(a+1)^{-1}+(b+1)^{-1}$ za $a=(2+\sqrt{3})^{-1}$ i $b=(2-\sqrt{3})^{-1}$.

2. Jednačini $4x-y-2=0$ u koordinatnom sistemu odgovara prava p. Neka se odredi jednačina prave q koja je simetrična pravoj p u odnosu na simetralu I i III kvadranta.

3. Treba odrediti skup

$$\{x\in R: x^2>2\}\cap\{x\in R: |x-2|<|x+3|\}.$$

4. Riješiti jednačinu

$$5^{\log x}-3^{\log x-1}=3^{1+\log x}-5^{-1+\log x}.$$

5. Neka se riješi trigonometrijska jednačina

$$\frac{\sin x}{1+\cos x}=2-\frac{\cos x}{\sin x}.$$

ODSJEK ZA HEMIJU

1. Riješiti trigonometrijsku jednačinu

$$\left\{(\sin x)^2-\frac{1}{4}\right\}(\sin x+2)=0.$$

2. Riješiti sistem: $x\cdot y=2^{2\sqrt{2}}$

$$\log_2 x\cdot\log_2 y=1.$$

---

*) Održan je samo kvalifikacioni ispit, jer kandidata za prijemni i dopunski ispit nije bilo.

3. Za trougao ABC sa koordinatama vrhova $A(0, 0)$, $B(4, 0)$, $C(2, 3)$ odrediti koordinate ortocentra.

4. U trouglu ABC tačke D, E, F su redom na stranama BC, CA, AB tako da je $BD=\frac{1}{5}BC$, $CE=\frac{1}{5}CA$, $AF=\frac{1}{5}AB$. Naći površinu trougla DEF ako je površina trougla ABC jednaka P.

5. Prije 10 godina otac je bio 3 puta stariji od sina, a kroz 10 godina sin će imati onoliko godina koliko je imao otac prije 26 godina. Prije koliko godina je otac bio 4 puta stariji od sina?

ODSJEK ZA GEOGRAFIJU

1. Odrediti broj m tako da parabola $y=4mx^2+3x+6$ nema zajedničkih tačaka sa osom x.

2. Naći uglove α, β i γ trougla ako znamo dužine stranica: $a=\sqrt{6}$, $b=2\sqrt{3}$, $c=3-\sqrt{3}$.

3. Kako se odnose (površine) zapremine triju lopti od kojih je jedna upisana u kocku (dodiruje strane kocke), druga dodiruje ivice kocke, a treća je opisana oko kocke (prolazi vrhovima kocke)?

DRUGI ROK

ODSJEK ZA MATEMATIKU I FIZIKU

1. Duž koja spaja središta krakova trapeza paralelna je osnovicama trapeza, a njena dužina jednaka je aritmetičkoj sredini dužina tih osnovica. Dokazati.

2. Riješiti jednačinu

$$\sqrt{a+x}-\sqrt[3]{a+x}=0.$$

3. U jednačini

$$5x^2-kx+1=0$$

treba odrediti parametar k tako da razlika rješenja te jednačine bude jednaka 1.

4. Odrediti sve realne brojeve x za koje vrijedi jednakost

$$\sin x+\cos x=\frac{1}{\sin x}.$$

5. Jednačini

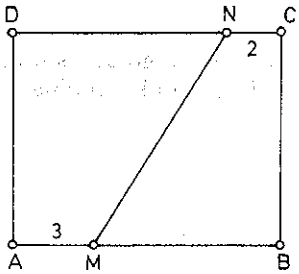
$$x-2y-6=0$$

odgovara u koordinatnom sistemu prava p. Treba odrediti jednačinu prave $q=s_y(p)$, gdje s_y označava osno simetrično preslikavanje ravni u odnosu na osu y.

ODSJEK ZA HEMIJU

1. Riješiti nejednačinu

$$\sin 2x - 2\sin x < 0.$$



2. Riješiti sistem jednačina

$$\log x - \log y = 2$$

$$\log x \cdot \log y = 3.$$

3. Odrediti koordinate centra kružnice opisane oko trougla čiji su vrhovi $A(4,0)$, $B(0,3)$ i $C(5,5)$.

4. U pravougaoniku $ABCD$ je $a=10$, $b=8$ i date su tačke M i N kao na slici. Odrediti odnos površina likova $AMND$ i $MBCN$.

ODSJEK ZA GEOGRAFIJU

1. Za koje vrijednosti broja m jednačina

$$x^2 + 4x - 3m = 0$$

ima oba rješenja negativna?

2. Romb ima stranicu dužine 17 cm, a dužina jedne dijagonale veća je od dužine druge za 14 cm. Kolike su dužine dijagonala romba?

3. Stranice trougla ABC iznose $a=13$, $b=14$, $c=15$ cm, a nagibni ugao njegove ravnine prema ravni π iznosi $60°$. Izračunaj površinu projekcije $A'B'C'$ tog trougla na ravan π ako se zna da stranica a trougla ABC leži u ravni π.

TREĆI ROK

ODSJEK ZA MATEMATIKU I FIZIKU

1. Za koje vrijednosti realnog parametra m će rješenja jednačine

$$m^2x^2 - 2m^2x + m^2 - 2 = 0$$

biti pozitivna?

2. Riješiti trigonometrijsku jednačinu

$$(1+\cos 2x)(2+\cos 2x) = 0.$$

3. Date su tačke $A(2,-7)$, $B(-3,4)$ i $C(1,y)$. Odrediti y tako da prava AB prolazi kroz tačku C.

4. Riješiti jednačinu

$$3^x - 5 + 6 \cdot 3^{-x} = 0.$$

5. Srednja duž trougla (duž čiji su krajevi središta dviju stranica trougla) jednaka je polovini odgovarajuće strane. Dokazati to pomoću vektora ili na drugi način.

ODSJEK ZA HEMIJU

1. Riješiti nejednačinu

$$\log \frac{x+1}{x-1} < \frac{1}{2}.$$

2. Riješiti jednačinu

$$\sin \frac{x-1}{x+1} = \frac{1}{2}.$$

3. Riješiti nejednačinu

$$\frac{1-x^2}{1+x^2} \cdot \frac{x^2-4}{x^2+4} < 0.$$

4. Vrhovi pravouglog trougla ABC su $A(0, 0)$, $B(-1, 2)$, a centar kruga opisanog oko trougla ABC je $S(1, a)$. Odrediti koordinate vrha C.

ČETVRTI ROK

ODSJEK ZA MATEMATIKU I FIZIKU

1. Riješiti jednačinu

$$\log_{16} x + \log_4 x + \log_2 x = 7.$$

2. Odrediti koeficijente kvadratne jednačine

$$x^2 + px + q = 0$$

tako da njeni korijeni budu jednaki p i q.

3. Riješiti jednačinu

$$5 \sqrt[4]{y+8} + 4 \sqrt{y+8} = 26.$$

Uputstvo! Uvesti smjenu.

4. Riješiti trigonometrijsku jednačinu

$$\left\{(\cos x)^2 - \frac{1}{4}\right\} \cdot (3 + \cos x) = 0.$$

5. Kako glasi skup zajedničkih rješenja jednačina

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$(x-1)^2 + y^2 = 1?$$

ODSJEK ZA HEMIJU

1. Na pravoj $x+y-3=0$ naći tačku koja je najbliža kružnici $x^2+y^2=1$.

2. Riješiti logaritamsku nejednačinu

$$\left(\log \frac{x}{2}\right)^{-1} < \frac{1}{2}.$$

3. Riješiti trigonometrijsku nejednačinu

$$\cos^2 x - \sin^2 x < \frac{1}{2}.$$

4. U istostranični trougao stranice a upisati kvadrat tako da su mu vrhovi na stranama trougla. Naći površinu kvadrata.

1983. godina

PRVI ROK

ODSJEK ZA MATEMATIKU I FIZIKU

1. Dat je (konveksni) četvorokut $ABCD$. Ako su tačke P i Q središta stranica AB i CD, tada važi jednakost

$$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=2\cdot\overrightarrow{PQ}.$$

Dokazati.

2. Jednačini $2x-3y+6=0$ odgovara (u koordinatnom sistemu) prava p, a treba odrediti jednačinu prave q koja je simetrična pravoj p u odnosu na koordinatni početak O.

3. U sistemu jednačina

$$2x-3y=1 \wedge 3x-my=-1$$

treba odrediti parametar m tako da koordinate x i y presječne tačke odgovarajućih pravih budu pozitivne.

4. Odrediti i prikazati grafički u koordinatnom sistemu jednačinu skupa svih tačaka ravni kojima odgovaraju kompleksni brojevi $z=x+iy$ za koje je $|z|=9$ ($|z|$ je modul, tj. apsolutna vrijednost kompleksnog broja z).

5. Formulama

$$f(x)=2x^2 \quad \text{i} \quad g(x)=2x^2+\frac{3}{2}x-6$$

određene su funkcije na skupu R realnih brojeva.

a) Da li su te funkcije parne ili neparne?

b) Odrediti vektor $\overrightarrow{OT}$ translacije koja prvu parabolu preslikava na drugu (tačka O je koordinatni početak).

6. Data je funkcija

$$f(x)=\frac{\operatorname{tg} x+\sin x}{\operatorname{ctg} x+\cos x}.$$

a) Odrediti skup D (domenu) svih vrijednosti $x \in R$ za koje je funkcija f definisana.

b) Dokazati da je $f(x)>0$ za sve vrijednosti $x \in D$.

ODSJEK ZA HEMIJU

1. Izračunati:

$$\sqrt[6]{\frac{a^2}{b}} : \sqrt[4]{\frac{a}{b}}.$$

2. Izračunati: $A=\dfrac{4+2i}{4-2i}$, $B=i^{24}$.

3. Odrediti vrijednosti parametra m za koje sljedeća funkcija ima realne različite nule:

$$f(x)=(3m+1)x^2-2x+2m-1.$$

4. Odrediti dužine stranica trougla $A'B'C'$ ako je njegov obim 270 mm, a sličan je trouglu ABC kod koga je stranica $BC=5$ cm, $CA=6$ cm, $AB=7$ cm.

5. Odredite bez upotrebe tablica osnovne elemente trougla ako je: $a=2\sqrt{2}$, $\alpha=45°$, $\beta=120°$.

ODSJEK ZA GEOGRAFIJU

1. Neka roba poskupi za 5%. Za koliko procenata treba da pojeftini da bi se vratila na prvobitnu cijenu?

2. Za koju vrijednost m funkcija

$$y=(m-3)x^2+2(m-1)x+m$$

ima realne i različite nule?

3. U trouglu zadana je stranica $a=2\sqrt{2}$ i uglovi $\alpha=45°$, $\beta=120°$. Naći ostale dvije stranice trougla.

4. Zadane su tačke A, B, C. Neka su tačke P, Q sredine duži AC, BC. Pokazati da je

$$\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{PQ}.$$

DRUGI ROK

ODSJEK ZA MATEMATIKU

1. Dokazati da je dužina duži koja spaja središta dijagonala trapeza jednaka polovini razlike dužina paralelnih stranica trapeza.

2. Treba odrediti parametre a i b jednačine

$$y=ax+b$$

tako da ta jednačina predstavlja pravu na kojoj leži težišnica trougla

$$[A(1,2),\ B(7,4),\ C(3,10)]$$

koja polazi iz tjemena A.

3. U pravilnu četvorostranu piramidu osnovne ivice 8 cm i visine 4 cm upisana je kocka tako da joj je jedna strana u ravni osnove piramide, a četiri tjemena kocke su na bočnim ivicama piramide. Izračunaj dužinu ivice kocke.

4. Jednačina

$$y=kx^2+(k-2)x+3$$

za razne vrijednosti parametra k predstavlja skup parabola, a treba odrediti parametar k tako da se dobije parabola čije tjeme ima apscisu $x=-2$.

5. Izračunaj $\sin(2\alpha-\beta)$ ako je $\sin\alpha=\frac{1}{3}$, $\sin\beta=\frac{1}{2}$, $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$, $\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

ODSJEK ZA FIZIKU

1. a) Nađite sve x za koje je $x^2-x-6>0$.

b) Izračunajte sljedeći izraz:

$$\log_{(2^{-1})}(2^3)+\log_{(2^2)}(2^{-3})+\log_2\sqrt{2}+\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right).$$

2. Prije pet godina otac je bio pet puta stariji od sina, a kroz tri godine biće tri puta stariji od njega. Koliko je godina ocu, a koliko sinu?

3. Neka je f funkcija čije su vrijednosti date formulom $f(x)=x^2-6x+\frac{21}{2}$.

Za koje x ova funkcija poprima minimalnu vrijednost? Objasnite odgovor!

4. Nađite jednačinu kružnice radijusa 2 koja dodiruje kružnicu $(x-1)^2+(y-2)^2=3^2$ upravo u jednoj tački i čiji centar leži na pravoj $(x-1)+(y-2)=0$.

ODSJEK ZA HEMIJU

1. Izvrši sljedeće dijeljenje

$$\sqrt[6]{\frac{a^2}{b}}:\sqrt[4]{\frac{a}{b}}$$ (vidi zadatak 1., hemija, I rok, 1983. godine).

2. Odredi vrijednosti parametra m za koje sljedeća funkcija ima realne i različite nule

$$f(x)=(m-3)\,x^2+2\,(m-1)\,x+m.$$ (Vidi zadatak 2., geografija, I rok, 1983. godine.)

3. Izračunati

$$\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{16},\quad \log\sqrt{\frac{1}{6}},\quad \log\frac{1}{4}.$$

4. Treba dokazati istinitost ove jednakosti

$$(\sin x+\cos x)^2=1+\sin 2x.$$

5. Poprečni presjek (profil) nasipa željezničke pruge je jednakokraki trapez. Kut između kraka i osnovice trapeza je 75°, dužina kraka je 6 m, a kraća osnovica je duga 5,5 m. Izračunaj donju širinu nasipa i visinu nasipa.

ODSJEK ZA GEOGRAFIJU

1. Konstruisati trougao ABC ako su dati ugao kod vrha A ($\measuredangle A$), visine BB' i CC'.

2. Konstruisati tangente zadane kružnice K koje prolaze kroz zadanu tačku A van kružnice.

3. Ispitajte da li je tačna jednakost

$$1+\frac{1}{i}=\frac{2i}{i-1},$$

gdje je $i=\sqrt{-1}$.

4. Može li funkcija

$$y=-x^2+2mx-m^2-4$$

imati ijednu pozitivnu vrijednost.

TREĆI ROK

ODSJEK ZA MATEMATIKU

1. Jednačina $x^2+y^2=4$ predstavlja kružnicu. Treba odrediti jednačinu prave koja dira tu kružnicu i koja pozitivne dijelove osa x i y siječe u tačkama jednako udaljenim od ishodišta koordinatnog sistema.

2. Pravokutni trokut kateta 6 cm i 8 cm rotira oko hipotenuze. Naći zapreminu nastalog tijela.

3. Kada se u oštrougli trougao upiše pravougaonik najveće moguće površine (jedna stranica pravougaonika je na stranici trougla), njegova površina je dva puta manja od površine trougla. Dokazati.

4. Treba u realnom području riješiti jednačinu

$$\log(x+2)=1-\log(x-1).$$

5. Naći sva rješenja jednačine

$$\sin^4 x+\cos^4 x=\frac{3}{4}.$$

ODSJEK ZA FIZIKU

1. Riješiti jednačine

a) $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+2}=3$; b) $\sin x-\cos x=1$.

2. Za koje vrijednosti parametra m jednačina

$$(m-2)\,x^2+mx-\frac{1}{4}=0$$

a) nema realnih nula, b) ima dvije jednake nule.

3. Riješiti jednačine

a) $9^x-3^{x+1}+2=0$, b) $(\log x)^2+\log x^4+\log 1\,000=0$.

4. Naći minimalnu vrijednost i nule funkcije

$$y=x^2-5x+6,$$

a zatim nacrtati njen grafik.

ODSJEK ZA GEOGRAFIJU

1. Zadane su dvije duži čije su dužine a, b. Konstruisati duž čija je dužina ab.

2. Konstruisati trougao ABC ako su dati visina AA', $\measuredangle B$ i zbir stranica $BC+CA$.

3. Naći skup svih vrijednosti funkcije

$$y=x^2-\frac{8}{3}x+1.$$

4. Izračunati $\sin 3\alpha$ ako je $\sin\alpha=\frac{1}{4}$.

UPUTSTVA, RJEŠENJA, REZULTATI

1974. GODINA
PRVI ROK

ODSJEK ZA MATEMATIKU

1. *Rješenje.* $D=b^2-4ac=4m^2-4\,(m+2)\,(m-1)=4\,(-m+2).$

$D<0 \Rightarrow -m+2<0 \Rightarrow m>2.$

Dakle, jednačina

$(m+2)\,x^2-2mx+m-1=0$

ima imaginarne korijene za vrijednosti parametra $m>2$.

2. *Uputstvo.* Definiciono područje za $\forall x, y \in R$.

Sistemi: $\begin{matrix} x+y=5 \\ x\cdot y=6 \end{matrix}$; $\begin{matrix} x+y=5 \\ x\cdot y=-6 \end{matrix}$; $\begin{matrix} x+y=-5 \\ x\cdot y=6 \end{matrix}$; $\begin{matrix} x+y=-5 \\ x\cdot y=-6 \end{matrix}$

daju rješenja zadanog sistema: (2, 3), (3, 2), (6, −1), (−1, 6), (−2, −3), (−3, −2), (−6, 1), (1, −6).

3. *Rješenje.* Definiciono područje:

$$(1)\qquad \left.\begin{matrix} \sin x\neq 0 \Rightarrow x\neq k\cdot\pi=2k\cdot\dfrac{\pi}{2} \\[2ex] \cos x\neq 0 \Rightarrow x\neq (2k+1)\cdot\dfrac{\pi}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow x\neq k\cdot\frac{2}{\pi}$$

$$\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{\sin x}{\cos x}=\sin x+\cos x \xRightarrow{(1)}$$

$\cos^2 x-\sin^2 x=\sin x\ \cos x\,(\sin x+\cos x)$

$(\cos x-\sin x-\sin x\ \cos x)\,(\sin x+\cos x)=0.$

I $\quad \sin x+\cos x=0 \Rightarrow \operatorname{tg} x=-1 \Rightarrow x=-\dfrac{\pi}{4}+k\cdot\pi$

$\quad k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3, \ldots$

II $\quad \cos x-\sin x=\sin x\ \cos x.$

III $(\cos x - \sin x)^2 = \sin^2 x \cos^2 x / \cdot 4,$

$\sin^2 2x + 4 \cdot \sin 2x - 4 = 0,$

(*) $\sin 2x = t, \ |t| \leqslant 1,$

$t_{1,2} = -2 \pm \sqrt{8}$ odakle, zbog (*), slijedi $t = -2 + \sqrt{8}$, pa je $\sin 2x = -2 + \sqrt{8}.$

Tako su sva rješenja jednačine III izražena formulom:

$$x = k \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}(-1)^k \cdot \arcsin(-2 + \sqrt{8}), \quad k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$$

Kako je III$\Leftrightarrow$II samo za one vrijednosti x za koje II ima smisla (sgn $(\cos x - \sin x) =$ sgn $(\sin x \cdot \cos x) \wedge |\cos x - \sin x| \leqslant 1)$, tj. za $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right)$, to su sva rješenja zadane jednačine izražena formulama:

$$x = \frac{1}{2} \arcsin(-2 + \sqrt{8}) + k\pi, \quad k = 0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \ldots,$$

$$x = -\frac{1}{2} \arcsin(-2 + \sqrt{8}) + (2k+1) \cdot \frac{\pi}{2}, \quad k = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots,$$

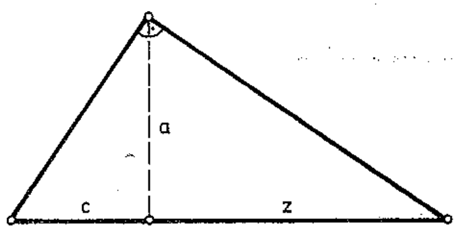
$$x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

ili formulama:

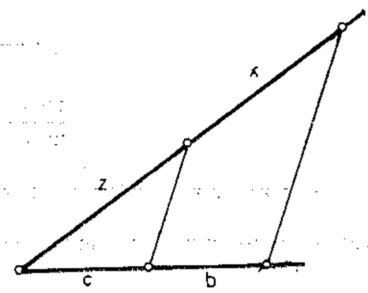
$$x = k \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \cdot (-1)^k \cdot \arcsin(-2 + \sqrt{8}), \ k = 0, -1, 3, \pm 4, -5, 7, \pm 8, \ldots,$$

$$x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

4. Najprije konstruišemo odsječak $z = \frac{a^2}{c}$, gdje je a srednja proporcionala između c i z. Kako je visina h pravouglog trougla srednja geometrijska proporcionala između odsječaka p i q na koje ona dijeli hipotenuzu, to se z može dobiti konstrukcijom pravouglog trougla sa visinom $h = a$ i odsječkom $p = c$. Jasno je tada da drugi odsječak predstavlja upravo traženu duž z (sl. 74.1).



Sl. 74.1.



Sl. 74.2.

Sada konstruišemo $x = \frac{bz}{c}$ kao četvrtu proporcionalu (sl. 74.2).

DRUGI ROK

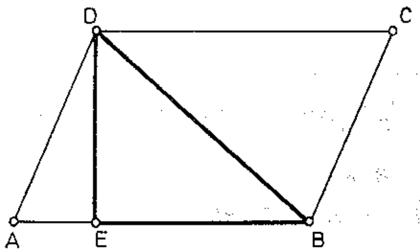
ODSJEK ZA MATEMATIKU

1. *Rezultat.* $x=\frac{\pi}{4}+k\cdot\frac{\pi}{2}$, $x=\pm\frac{\pi}{3}+k\cdot\pi$, $k=0, \pm1, \pm2, \ldots$.

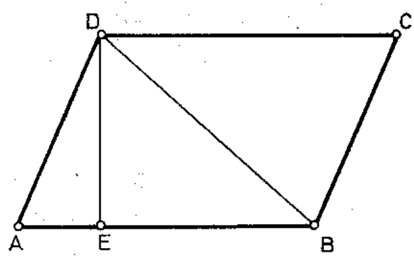
2. *Rješenje.*

Analiza. Neka je $ABCD$ paralelogram u kome su strana AB, dijagonala BD i visina DE kongruentne datim dužima a, d i h respektivno (sl. 74.3).

Trougao BDE se može konstruisati jer je to pravougli trougao u kome su poznate hipotenuza i jedna kateta. Dalje, A leži na BE tako da je $AB=a$. Tačku C dobijemo kao presječnu tačku pravih p i q, pri čemu $B \in p$, $p \| AD$, $D \in q$, $q \| AB$.



Sl. 74.3.



Sl. 74.4.

Konstrukcija.

1. Pravougli $\triangle BED$ sa: $\measuredangle BED=90°$, $DE=h$ i $BD=d$.
2. A na BE tako da je $BA=a$.
3. Prave p i q : $B \in p$, $p \| AD$; $D \in q$, $q \| AB$.
4. $\{C\}=p \cap q$ (sl. 74.4).

Dokaz. Pošto je $DE \perp AB$, $AB \simeq a$, $DE \simeq h$, $BD \simeq d$, to dobijena figura posjeduje zadane elemente. Kako je $BC \| AD$, $AB \| DC$, to je $ABCD$ paralelogram.

Determinacija. Jasno je da je paralelogram $ABCD$ moguće konstruisati ako je moguće konstruisati trougao BDE. To je moguće za $h<d$.

3. *Rezultat.* $x=18$.

4. *Uputstvo.* Uvođenjem smjene $64^x=u$, $64^y=v$ dobiva se $u=2\sqrt{2}$, $v=2$ ili $u=2$, $v=2\sqrt{2}$. Slijedi rezultat:

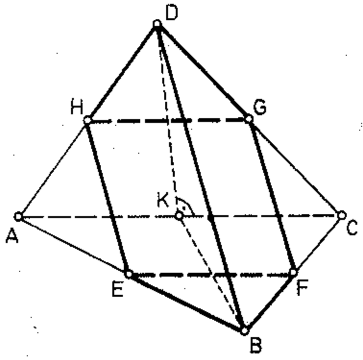
$$\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{6}\right), \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{4}\right).$$

1975. GODINA

PRVI ROK

ODSJEK ZA MATEMATIKU

1. *Rješenje*. Neka je $ABCD$ pravilni tetraedar u kome su E, F, G, H središta ivica AB, BC, CD i AD (sl. 75.1). Tada



Sl. 75.1.

$$\left\{EF \| AC,\ EF=\frac{1}{2}\ AC,\ GH \| AC,\ GH=\frac{1}{2}\ AC\right\} \Rightarrow$$

$$\{EF=GH \text{ i } EF \| GH\} \Rightarrow EFGH \text{ paralelogram.}$$

Dalje

$$\left\{EH \| BD \| FG,\ EH=\frac{1}{2}\ BD=FG\right\} \Rightarrow EH=FG=\frac{1}{2}\ BD.$$

Iz $\left\{\{AC=BD \text{ i } EF=GH=\frac{1}{2}AC,\ EH=FG=\frac{1}{2}\ BD\right\}$

slijedi da je

(1) $EF=GH=EH=FG.$

Neka su BK i DK visine trouglova ABC i ACD spuštene na ivicu AC. Tada

$$\{BK \perp AC,\ DK \perp AC\} \Rightarrow AC \perp (BDK),$$

$$\{AC \perp (BDK),\ EF \| AC\} \Rightarrow EF \perp (BDK) \Rightarrow EF \perp BD.$$

$$\{EH \| BD,\ EF \perp BD\} \Rightarrow EF \perp EH.$$

Iz (1) i $EF \perp EH$ slijedi da je $EFGH$ kvadrat. Jasno je da imamo tri ovakva presjeka.

2. *Rezultat*. $x_1=-2$, $x_2=1$, $x_3=1$, $x_4=-1$, $x_{5,6}=\pm i$.

3. *Rješenje*. Po kosinusnoj teoremi je $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$. Dalje,

$$P=\frac{1}{2}\ ab\sin\gamma=\frac{1}{2}ab\cos\gamma, \text{ jer je } \gamma=45°.$$

Tada je

$$ab\cos\gamma=2P \text{ i } -2\ ab\cdot\cos\gamma=-4P,$$

tj.

$$c^2=a^2+b^2-4P.$$

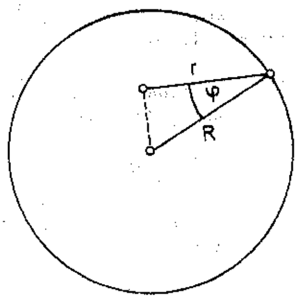
4. *Rješenje* (sl. 75.2).

$$c=\frac{s}{t}=\frac{2r\pi}{24}=\frac{\pi}{12}R\cdot\cos\varphi\approx\frac{3{,}14}{12}\cdot 6\,370\cdot\cos 45°\approx$$

$$\approx\frac{3{,}14}{12}\cdot 6\,370\cdot\frac{1{,}41}{2}\approx\frac{3}{12}\cdot 6\,370\cdot\frac{1{,}5}{2}\approx\frac{1}{8}\ (6\,370\cdot 1{,}5)\approx$$

$$\approx 1\,200;\ c\approx 1\,200 \text{ km/h}.$$

Dužina $\varphi°$ je $\dfrac{R\pi\cos\varphi}{180}\approx\dfrac{1\,200}{15}\approx 80$ km.



Sl. 75.2.

5. *Rezultat*. a) $x_1=1\,000$, $x_2=\dfrac{1}{100}=0{,}01$;

b) $x_1=\dfrac{1}{8}$, $x_2=4$.

ODSJEK ZA MATEMATIKU

1. *Uputstvo.* Budući da je $k>1$, to je izraz

$x=2k^{\frac{1}{2}}(1+k)^{-1}>0.$

Tada je $1-x^2=\dfrac{(k-1)^2}{(k+1)^2}>0$, dok je $1-\sqrt{1-x^2}=\dfrac{2}{k+1}>0.$

Dakle, pod datim uslovima dati izraz je definisan i vrijedi

$$\sqrt{\frac{(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}+1}{2}}+\sqrt{\frac{(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}-1}{2}}=\frac{\sqrt{k}+1}{\sqrt{k}-1}.$$

2. *Rezultat.* (1,1) i (4,2).

3. *Uputstvo.* Trigonometrijskim transformacijama dobiti kvadratnu jednačinu po nepoznatoj $\cos 2x$, pa uvesti novu nepoznatu $\cos 2x=t$. Daljim rješavanjem dolazi se do rezultata:

$$x=\pm\frac{\pi}{3}+k\pi,\ k=0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots$$

4. *Rješenje.* Budući da je $p\neq 1$ i $p\in N$, to je dati razlomak definisan. Dalje je

(1) $$\frac{p+2}{p^2+1}>\frac{1}{3},$$

(2) $$0<\frac{p-3}{p^2-4}<\frac{1}{10},\ p\neq 2.$$

Iz (1) dobijemo

$$\frac{3p+6-p^2-1}{3\,(p^2+1)}>0,\quad \text{tj.}\quad \frac{p^2-3p-5}{3\,(p^2+1)}<0.$$

Pošto je $p^2+1>0$ za $\forall p$, to mora biti

$$p^2-3p-5<0.$$

Iz $p^2-3p-5=0$ slijedi $p=\dfrac{3\pm\sqrt{29}}{2}$, pa je $p^2-3p-5<0$, za

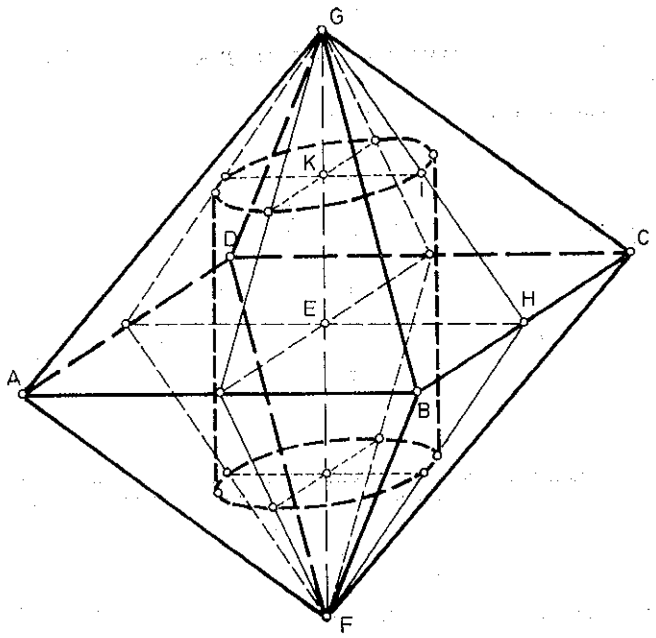
(3) $$\frac{3-\sqrt{29}}{2}<p<\frac{3+\sqrt{29}}{2}.$$

No, zbog $p>0$ iz (3) slijedi

(4) $$0<p<\frac{3+\sqrt{29}}{2}.$$

Kako je $\dfrac{3+\sqrt{29}}{2}$ između 4 i 5, a p prirodan broj različit od 1 i od 2 to iz (4) slijedi da p može imati vrijednost 3 i 4. No, za $p=3$, nejednakost (2) nije zadovoljena jer izraz $\dfrac{p-3}{p^2-4}$ ima vrijednost nula. Za $p=4$ izraz $\dfrac{p-3}{p^2-4}$ ima vrijednost $\dfrac{1}{12}$, pa je (2) zadovoljeno. Isto tako zadovoljeno je i (1), jer za $p=4$ imamo $\dfrac{p+2}{p^2+1}=\dfrac{6}{17}>\dfrac{1}{3}$. Dakle, $p=4$ i razlomak glasi $\dfrac{4}{15}$.

5. *Rješenje* (sl.75.3).



Sl. 75.3.

$$EH=\frac{AB}{2}=\frac{a}{2},\ GH=\frac{a\sqrt{3}}{2},\quad EG^2=GH^2-EH^2=\frac{3a^2}{4}-\frac{a^2}{4}=\frac{a^2}{2},\quad EG=\frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Iz sličnosti trouglova EHG i KIG slijedi

$$GE:HE=(GE-KE):KI.$$

Označimo $KE=y$ i $KI=x$. Imamo $\frac{a\sqrt{2}}{2}:\frac{a}{2}=\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}-y\right):x;\quad y=\frac{\sqrt{2}}{2}(a-2x)$

$$M=2\pi x\cdot 2y=4\pi xy=4\pi x\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}(a-2x)=2\sqrt{2}\,\pi\,(ax-2x^2).$$

$$F(x)=-2x^2+ax=-2\left(x^2-\frac{a}{2}x\right)=-2\left\{\left(x-\frac{a}{4}\right)^2-\frac{a^2}{16}\right\}=-2\left(x-\frac{a}{4}\right)^2+\frac{a^2}{8}.$$

$F(x)$ ima maksimalnu vrijednost za $x=\frac{a}{4},\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(a-\frac{a}{2}\right)=\frac{a\sqrt{2}}{4}.$

$$M_{\max}=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi a^2.$$

Rezultat: $M_{\max}=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi a^2$ za $x=\frac{a}{4},\ y=\frac{a\sqrt{2}}{4}.$

TREĆI ROK

ODSJEK ZA MATEMATIKU

1. *Rješenje.* Izraz $f(x)$ je definisan za $x \neq 3$.

a) $f(x)=\frac{A}{B}=\frac{(x+1)(x-3)(x+3)}{4(x-3)}=\frac{1}{4}(x+1)(x+3).$

$f(x)=0;\ x=-1,\ x=-3.$

b) Za $x=2y+1,\ y \in Z \setminus \{1\}$ vrijedi

$f(x)=f(2y+1)$, tj.

$f(2y+1)=\frac{1}{4}(2y+2)(2y+4)=(y+1)(y+2) \in Z.$

2. *Rezultat.* 6 750, 3 510, 1 755, 7 515.

3. *Rješenje.*

$$\log_b x=\frac{1}{2}(\log_a x+\log_c x)=\frac{1}{2}\left(\frac{\log_b x}{\log_b a}+\frac{\log_b x}{\log_b c}\right)$$

Zbog $x \neq 1$ i $\log_b b=1$ slijedi

$$1=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\log_b a}+\frac{1}{\log_b c}\right),$$

tj.

$$2(\log_b a)\cdot(\log_b c)=\log_b c+\log_b a.$$

Odavde je

$$\frac{1}{2}\log_b(ac)=(\log_b a)\cdot(\log_b c),$$

što je i trebalo dokazati.

4. *Rješenje* (sl. 75.4). Uzmimo mimoilazne ivice AD i BC. Neka je M sredina od BC a N sredina od AD. Tada su AM i DM visine jednakostraničnih trouglova ABC i BCD. Dakle, $AM=DM=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Tako je MN visina jednakokrakog trougla AMD i zato je

(1) $MN \perp AD$.

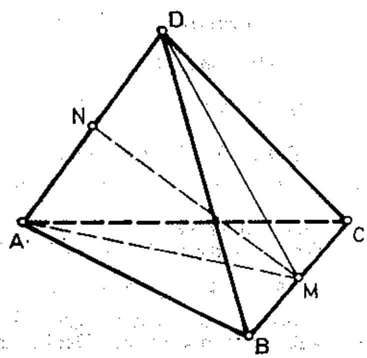
Dalje, iz $(AM \perp BC,\ DM \perp BC) \Rightarrow BC \perp (AMD)$, pa

(2) $MN \perp BC$.

Iz (1) i (2) slijedi da je MN rastojanje ivica BC i AD.

Tada je

$$MN^2=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}.\quad \text{Dakle, } MN=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$



Sl. 75.4.

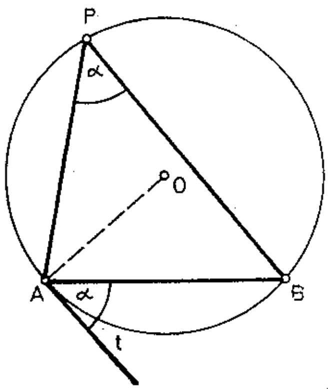
1. *Rezultat.*

$$f(x)>0 \text{ za } x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup (5, +\infty),$$

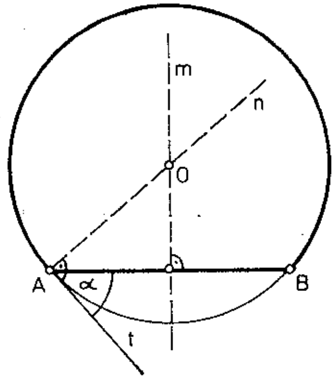
$$f(x)<0 \text{ za } x \in \left(\frac{1}{2}, 5\right).$$

2. *Rješenje.*

Analiza. Pretpostavimo da je periferijski ugao APB, upisan u luk APB, jednak datom uglu α. Tada je i granični periferijski ugao tAB jednak α (sl. 77.1).



Sl. 77.1.



Sl. 77.2.

Konstrukcija.

1. Duž AB.
2. Iz A poluprava t tako da je $\measuredangle\,(t, \overline{AB})=\alpha$.
3. U A normala n na t.
4. Simetrala m duži AB.
5. $\{0\} \in m \cap n$.
6. $K(O, OA)$ (sl. 77.2).

Dokaz. Da je zaista bilo koji $\measuredangle\, APB$ upisan u taj luk, kongruentan datom uglu α izlazi iz toga što je $\measuredangle\, APB$ jednak graničnom uglu $(t, \overline{AB})$, koji je po konstrukciji jednak α.

Determinacija. Pošto polupravu t možemo povući i s druge strane prave AB, to imamo, kao rješenje zadatka, još jedan luk simetričan luku APB prema pravoj AB.

Ako je ugao α pravi, tetiva AB je dijametar kružnice i oba luka čine jednu kružnicu.

Jasno je da za tupi ugao α luk, koji ne leži u graničnom uglu i koji je rješenje zadatka, je manji od polukružnice. Dakle, uslov za α je $0°<\alpha<180°$.

3. *Uputstvo.* Dokaz se provodi primjenom adicione teoreme.

1979. GODINA

PRVI ROK

ODSJEK ZA MATEMATIKU

Grupa „A“

1. *Rezultat.* $x=10.$

2. *Rezultat.* $\frac{7}{39}<x<2.$

3. *Rezultat.* $x=k\pi,\ x=-\frac{\pi}{3}+k\pi,\ k=0, \pm1, \pm2, \ldots$

4. *Rješenje.* $P=\frac{1}{2}(a+c)\cdot h=\frac{1}{2}(a+c)\cdot 2r=(a+c)\cdot r.$

Prema uslovu zadatka je $20=(a+c)\cdot 2,$

(1) $a+c=10.$

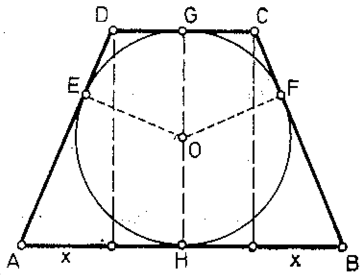
Također je

$$AD=AE+ED=AH+DG=\frac{1}{2}\,(a+c)=\frac{1}{2}\cdot 10=5$$

i

$$AB=2x+CD, \text{ tj. } a-c=2x.$$

No, $x^2=AD^2-4^2=25-16=9$, tj. $x=3$ (sl. 79.1.).



Sl. 79.1.

Sada je

$a+c=10.$

$a-c=6$, tj. $a=8$, $c=2$, pa je $b=5$.

5. *Rezultat.* $m>\frac{14}{5}.$

6. *Rezultat.* $P=288\ \text{cm}^2$, $V=216\ \text{cm}^3$.

Grupa „B“

1. *Rezultat.* $x=13.$

2. *Rezultat.* $\frac{1}{3}<x<2.$

3. *Rezultat.* $x=\frac{\pi}{4}\,(2k+1),\ k=0, \pm1, \pm2, \ldots$

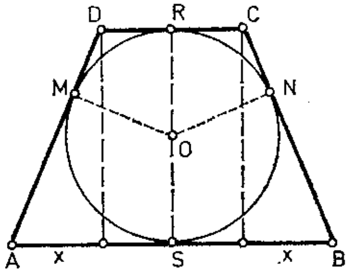
4. *Rješenje.*

$$P=\frac{1}{2}h\,(AB+DC)=\frac{1}{2}\,(AB+DC)\cdot 16=8(AB+DC)=8(AS+SB+DR+RC)=$$

$$=8\,(AM+BN+DM+CN)=8\,(2AM+2DM)=16\,(AM+DM)=16\cdot AD=16\cdot 20=320.$$

$$P=320 \text{ i } AB+DC=40.$$

Dalje je $AB=2x+CD$, tj. $2x=AB-CD$.



Sl. 79.2.

$x^2=AD^2-h^2=400-256=144$, tj. $x=12$.

$$\left.\begin{array}{l} AB+DC=40 \\ AB-DC=24 \end{array}\right\} \Rightarrow AB=32,\ DC=8 \text{ (sl. 79.2).}$$

5. *Rezultat.* $p>\frac{5}{6}$.

6. *Rezultat.* $V=640\sqrt{2}\ \text{cm}^3$.

DRUGI ROK

ODSJEK ZA MATEMATIKU

1. *Rezultat.* $x=4$.

2. *Rezultat.* $\frac{1}{3}<x<2$.

3. *Uputstvo.* Transformisati datu jednačinu tako da njena lijeva strana bude funkcija od $\sin^2 x$, pa uvesti smjenu $\sin^2 x=t$.

Rezultat. $x=\left(\pm\frac{1}{6}+k\right)\pi,\ x=\left(\pm\frac{1}{4}+k\right)\pi,\ k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

4. *Rješenje.* a) $|b-c|<a<b+c \Rightarrow |8-7|<5<7+8,\ 1<5<15$.

Jeste!

b) $|4-5|<10<4+5$. Nije!

c) $|8-4|<12<8+4$. Nije!

5. *Rezultat.* $k=\pm 7$.

6. *Rješenje.* Visina EO prolazi kroz centar O opisane kružnice oko osnove, tj. kroz presječnu tačku dijagonala.

Tada je

$$P_{\text{osnove}}=\frac{d_1 d_2}{2}\cdot\sin\alpha=\frac{b^2}{2}\cdot\sin\alpha.$$

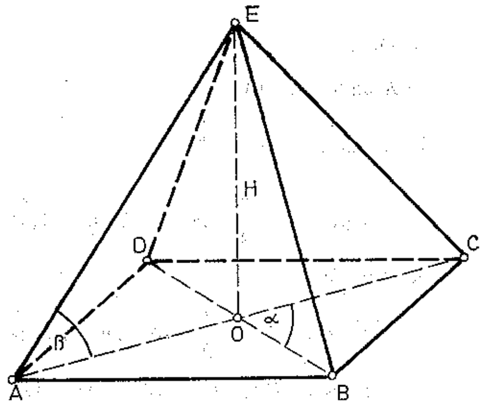
Iz $OE \perp AC \Rightarrow \measuredangle EAO=\beta$.

Iz $\triangle AOE$ je

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{OE}{OA}=\frac{H}{\frac{b}{2}} \Rightarrow H=\frac{b}{2}\operatorname{tg}\beta.$$

$$V=\frac{1}{3}P_{\text{osn.}}\cdot H=\frac{1}{3}\cdot\frac{b^2}{2}\sin\alpha\cdot\frac{b}{2}\operatorname{tg}\beta=$$

$$=\frac{b^3}{12}\sin\alpha\operatorname{tg}\beta \text{ (sl. 79.3.).}$$



Sl. 79.3.

1980. GODINA

PRVI ROK

ODSJEK ZA MATEMATIKU

Grupa „A"

1. *Rješenje.* $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=1-2ab$, $a^4+b^4=(1-2ab)^2-2a^2b^2$.

Pošto je $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geqslant ab$, to je $\left(\frac{1}{2}\right)^2 \geqslant ab$, tj. $ab \leqslant \frac{1}{4}$, tj. $2ab \leqslant \frac{1}{2}$. Tako je

$$a^4+b^4 \geqslant \frac{1}{4}-\frac{1}{8}=\frac{1}{8}.$$

2. *Rezultat.* $x=0$, $x=3$.

3. *Rezultat.* $y^2+(p^3-p^2-3pq+2q)\,y+p\,(p^2-2q)\,(-p^2+3q)=0$.

4. *Rješenje.* Definiciono područje: $x \geqslant 0$ i $2\sqrt{7}-\sqrt{x} \geqslant 0$, tj.

(*) $$0 \leqslant x \leqslant 28.$$

Pošto je $\sqrt{2\sqrt{7}+\sqrt{x}} > \sqrt{2\sqrt{7}-\sqrt{x}}$, pod uslovom (*), data jednačina je ekvivalentna sa

$$2\sqrt{7}+\sqrt{x}-2\sqrt{28-x}+2\sqrt{7}-\sqrt{x}=\sqrt{28} \Leftrightarrow$$

$$2\sqrt{28-x}=4\sqrt{7}-\sqrt{28} \Leftrightarrow$$

$$2\sqrt{28-x}=4\sqrt{7}-2\sqrt{7},$$

$$2\sqrt{28-x}=2\sqrt{7},$$

odakle, zbog (*), slijedi $x=21$.

5. *Rezultat.* $x=-\frac{\pi}{8}+k\cdot\frac{\pi}{2}$, $\quad k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

6. *Rezultat.* $|x| \geqslant 1$.

Grupa „B"

1. *Rješenje.* Iz $2x+4y=1$ slijedi $x=\frac{1-4y}{2}$, pa

$$\left(\frac{1-4y}{2}\right)^2+y^2 \geqslant \frac{1}{20} \Leftrightarrow$$

$$1-8y+16y^2+4y^2 \geqslant \frac{1}{5} \Leftrightarrow$$

$$100y^2-40y+4 \geqslant 0$$

$$(10y-2)^2 \geqslant 0.$$

2. *Rezultat.* $x=0{,}0001$ i $x=10$.

3. *Rezultat.* $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}=\frac{b^2-2ac}{c^2}$, $x_1^4+x_1^2\cdot x_2^2+x_2^4=\frac{1}{a^4}(b^2-ac)(b^2-3ac)$.

4. *Rezultat.* $x=\pm 5$.

5. *Rezultat.* $x=k\pi$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

6. *Rezultat.* $x \geqslant 1$.

DRUGI ROK

ODSJEK ZA MATEMATIKU

Grupa „A"

1. *Rješenje.* $a(a+b)(a+c)=a(a^2+ab+ac+bc)=a[a\underbrace{(a+b+c)}_{=0}+bc]=abc$.

2. *Rezultat.* $x=6$.

3. *Rezultat.* $p=-(x_1+x_2)=\pm 7$.

4. *Rezultat.* $x=2$.

5. *Rješenje.* Definiciono područje: $\sin x \neq 0$ i $\cos 2x \neq -1$ tj. $x \neq k\pi$, $2x \neq \pi+2k\pi$, $k=0$, $\pm 1, \pm 2, \ldots$

Pod uslovima $x \neq k\pi$, $x \neq \frac{\pi}{2}(2k+1)$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
posljednja jednačina je ekvivalentna sa

$$1+\cos 2x-\cos 2x-\cos^2 2x-2\sin x\, 2\sin x \cos x=0$$

$$\sin^2 2x-4\sin^2 x\cdot \cos x=0$$

$$4\sin^2 x\cdot \cos^2 x-4\sin^2 x\cdot \cos x=0$$

$$4\sin^2 x\cdot \cos x(\cos x-1)=0.$$

Pošto je $x \neq k\pi$, $x \neq \frac{\pi}{2}(2k+1)$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, to je $\cos x=1$, tj. $x=2k\pi$, što je obuhvaćeno u $x=k\pi$, pa jednačina nema rješenja.

Grupa „B"

1. *Rješenje.* $b(a+b)(b+c)=b(ab+b^2+ac+bc)=b[b\underbrace{(a+b+c)}_{=0}+ac]=abc$.

2. *Rezultat.* $x=4$.

3. *Rezultat.* $a=\pm\frac{1}{2}$.

4. *Rješenje.* Definiciono područje $5-x>0$, $35-x^3>0$, i $5-x \neq 1$, tj. $x<5$, $x^3<35$, $x \neq 4$, dakle $x^3<35$, $x \neq 4$. Za sve x iz definicionog područja data jednačina je ekvivalentna sa jednačinom:

$$\log(35-x^3)=3\log(5-x)$$

$$35-x^3=(5-x)^3$$

$$35-x^3=125-75x+15x^2-x^3$$

$$15x^2-75x+90=0$$
$$x^2-5x+6=0$$
$$x_1=2,\ x_2=3$$

i zadovoljen je uslov $x^3<35$.

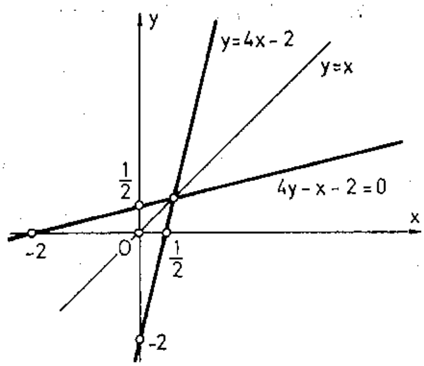
5. *Uputstvo.* Izraziti sve preko funkcije $\sin x$ pa uvesti smjenu $\sin x=t$. Slijedi $x=$ $=\arcsin\frac{-2\pm\sqrt{54}}{10}+2k\pi,\ k=0,\pm1,\ldots$

1982. GODINA
PRVI ROK

ODSJEK ZA MATEMATIKU I FIZIKU

1. *Rezultat.* $(a+1)^{-1}+(b+1)^{-1}=\frac{1}{6}(3+\sqrt{3})+\frac{1}{6}(3-\sqrt{3})=1.$

2. *Rješenje.* Ako tačka $A(x,y)$ pripada pravoj p, onda će tačka koja mora pripadati pravoj q, a simetrična je tački $A(x,y)$ u odnosu na pravu $y=x$ imati koordinate $A'(y,x)$. Prema tome, jednačina prave q je $4y-x-2=0$ (sl. 82.1).



Sl. 82.1.

3. *Rješenje.*

$$|x-2|=\begin{cases}x-2, & x\geqslant 2\\ 2-x, & x<2\end{cases};\quad |x+3|=\begin{cases}x+3, & x\geqslant -3\\ -x-3, & x<-3\end{cases}.$$

a) $x<-3$

$|x-2|=2-x,\ |x+3|=-x-3$, pa je

$2-x<-x-3$, što je nemoguće.

b) $-3\leqslant x<2$

$|x-2|=2-x,\ |x+3|=x+3$, pa je

$2-x<x+3$, tj. $x>-\frac{1}{2}$.

c) $x\geqslant 2$

$|x-2|=x-2,\ |x+3|=x+3$, pa je

$x-2<x+3$, što je tačno za sve $x\in R$.

Dakle,

$$\{x:|x-2|<|x+3|\}=\left\{x:x>-\frac{1}{2}\right\}.$$

Pošto je

$$\{x:x^2>2\}=\{x:x>\sqrt{2}\vee x<-\sqrt{2}\},$$

to je

$$\{x:x^2>2\}\cap\{x:|x-2|<|x+3|\}=(\sqrt{2},+\infty).$$

4. *Uputstvo.* Uvesti smjenu $\log x=u$, pa dobiti $u=2$, odakle slijedi $x=100$.

5. *Rješenje.* Definiciono područje je

$$\sin x\neq 0 \text{ i } 1+\cos x\neq 0, \text{ tj. } x\neq k\pi,\ k=0,\pm1,\pm2,\ldots$$

Pod ovim uslovima iz zadane jednačine dobivamo

$$\sin^2 x=(1+\cos x)(2 \sin x-\cos x),$$

$$\sin^2 x+\cos^2 x=2 \sin x+2 \sin x \cos x-\cos x,$$

$$(2 \sin x-1)+\cos x(2 \sin x-1)=0,$$

$$(2 \sin x-1)(1+\cos x)=0.$$

Pošto mora biti $1+\cos x \neq 0$, slijedi

$$2 \sin x-1=0,$$

$$\sin x=\frac{1}{2}, \quad x=(-1)^k \frac{\pi}{6}+k\pi, \quad k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

ODSJEK ZA HEMIJU

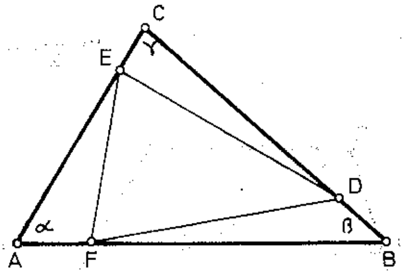
1. *Rezultat.* $x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$; $x=\frac{11\pi}{6}+2k\pi$, $x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$, $x=\frac{7\pi}{6}+2k\pi$.

2. *Rješenje.* Definiciono područje: $x>0$, $y>0$.

$$\begin{array}{l} \log_2 (xy)=\log_2 (2^{2\sqrt{2}}) \\ \log_2 x \cdot \log_2 y=1 \\ \hline \log_2 x+\log_2 y=\log_2 (2^{2\sqrt{2}}) \\ \log_2 x \cdot \log_2 y=1 \\ \hline \log_2 x=u, \ \log_2 y=v \\ u+v=2\sqrt{2} \\ u \cdot v=1 \\ \hline u=\sqrt{2}+1 \\ v=\sqrt{2}-1 \end{array}$$

I	II
$\log_2 x=\sqrt{2}+1,$	$\log_2 y=\sqrt{2}-1,$
$\log_2 x-\log_2 2=\sqrt{2},$	$\log_2 y+\log_2 2=\sqrt{2}.$
$\log_2 \frac{x}{2}=\sqrt{2},$	$\log_2 2y=\sqrt{2}$
$\frac{x}{2}=2^{\sqrt{2}},$	$2y=2^{\sqrt{2}}$
$x=2^{\sqrt{2}+1},$	$y=2^{\sqrt{2}-1}.$

3. *Rezultat.* $O\left(2, \frac{4}{3}\right)$.



Sl. 82.2.

4. *Rješenje.* $P_1 = P_{\triangle AFE} =$

$$= \frac{1}{2} AF \cdot AE \sin\alpha = \frac{\frac{1}{5} AB \cdot \frac{4}{5} \cdot AC \cdot \sin\alpha}{2} =$$

$$= \frac{4}{50} AB \cdot AC \sin\alpha = \frac{4}{25} P.$$

$$P_2 = P_{\triangle BDF} = \frac{1}{2} BD \cdot BF \cdot \sin\beta = \frac{\frac{1}{5} BC \cdot \frac{4}{5} BA \cdot \sin\beta}{2} = \frac{4}{25} P.$$

$$P_3 = P_{\triangle CED} = \frac{1}{2} CE \cdot CD \cdot \sin\gamma = \frac{\frac{1}{5} CA \cdot \frac{4}{5} CB \cdot \sin\gamma}{2} = \frac{4}{25} P.$$

$$P_{\triangle DEF} = P - P_1 - P_2 - P_3 = P - 3 \cdot \frac{4}{25} P = P - \frac{12}{25} P = \frac{13}{25} P \text{ (sl. 82.2.)}.$$

5. *Rezultat.* Otac je bio stariji od sina četiri puta upravo prije 16 godina.

ODSJEK ZA GEOGRAFIJU

1. *Rezultat.* $m > \frac{3}{32}$.

2. *Rezultat.* $\alpha = 30°$, $\beta = 45°$, $\gamma = 105°$.

3. *Rezultat.* $P_1 : P_2 : P_3 = 1 : 2 : 3$ i $V_1 : V_2 : V_3 = 1 : 2\sqrt{2} : 3\sqrt{3}$.

DRUGI ROK

ODSJEK ZA MATEMATIKU I FIZIKU

1. *Rješenje.*

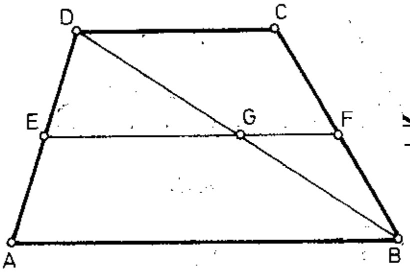
U trouglovima ABD i CDB duži EG i GF su srednje duži pa vrijedi

$$EG \| AB \| CD, \; EG = \frac{1}{2} AB,$$

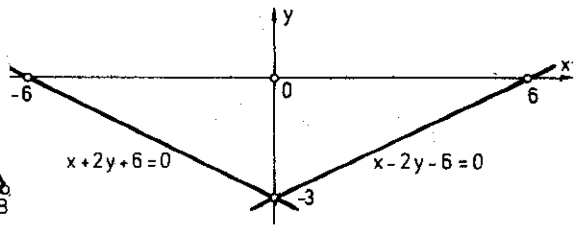
$$GF \| DC \| AB, \; GF = \frac{1}{2} CD.$$

Dakle, $EF \| AB \| CD$ i

$$EF = EG + GF = \frac{1}{2} AB + \frac{1}{2} CD = \frac{1}{2}(AB + CD) \text{ (sl. 82.3).}$$



Sl. 82.3.



Sl. 82.4.

2. *Rezultat.* $x = -a$ ili $x = 1 - a$.

3. *Rezultat.* $k = \pm 3\sqrt{5}$.

4. *Rezultat.* $x_1 = \frac{\pi}{2} + k\pi$,

$x_2 = \frac{\pi}{4} + k\pi$,

pri čemu je $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

5. *Rješenje.*

Prema uslovima zadatka, tražena prava prolazi kroz tačke $(0, -3)$ i $(-6, 0)$ i ima jednačinu $x + 2y + 6 = 0$ (sl. 82.4). Uvrsti koordinate ove dvije tačke u jednačinu $y = kx + n$.

ODSJEK ZA HEMIJU

1. *Rezultat.* $2k\pi < x < \pi + 2k\pi$.

2. *Rezultat.* a) $x = 10^3, y = 10$; $x = 10^{-1}, y = 10^{-3}$.

3. *Rezultat.* $0\left(\frac{137}{46}, \frac{129}{46}\right)$.

4. *Rezultat.* $P_{AMND} : P_{MBCN} = 11 : 9$.

ODSJEK ZA GEOGRAFIJU

1. *Rješenje.* Da bi data jednačina imala realna rješenja (koja u ovom slučaju mogu biti i jednaka), mora biti $D \geqslant 0$, tj. $16 + 12m \geqslant 0$, odnosno

(1) $$m \geqslant -\frac{4}{3}.$$

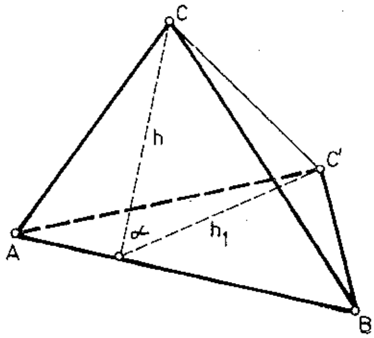
Pošto je uslov $x_1+x_2<0$ ispunjen, mora biti još $x_1 \cdot x_2>0$; dakle,

(2) $$m<0.$$

Iz (1) i (2) slijedi $-\frac{4}{3} \leqslant m<0$.

2. *Rezultat.* $d_1=16$ cm, $d_2=30$ cm.

3. *Rješenje.*



Sl. 82.5.

$$P_{\triangle ABC}=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$s=\frac{a+b+c}{2}=\frac{14+13+15}{2}=21$$

$P_{\triangle ABC}=84$.

$P_{ABC}=\frac{15 \cdot h}{2}$, tj. $84=\frac{15 \cdot h}{2}$,

odakle je $h=\frac{56}{5}$.

Tako je $h_1=\frac{56}{5} \cdot \cos 60°=\frac{28}{5}$,

dok je $P_{\triangle ABC'}=\frac{15}{2} \cdot \frac{28}{5}=42$ (sl. 82.5).

TREĆI ROK

ODSJEK ZA MATEMATIKU I FIZIKU

1. *Rezultat.* $m \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$.

2. *Rezultat.* $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

3. *Rezultat.* $y=-\frac{24}{5}$.

4. *Rezultat.* $x=1$, $x=\log_3 2$.

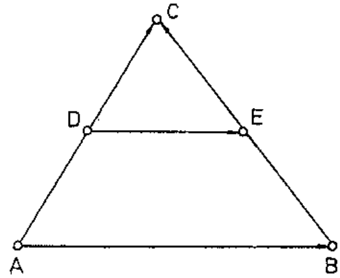
5. *Rješenje* (sl. 82.6). Neka je $\triangle ABC$ zadan vektorima $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$.

Tada je

$$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CE}, \text{ tj. } \overrightarrow{DE}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}).$$

Dakle,

$$\overrightarrow{DE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.$$



Sl. 82.6.

1. *Rješenje.* Definiciono područje: $\dfrac{x+1}{x-1}>0$, tj. $x>1$, $x<-1$. Pod ovim uslovima data jednačina je ekvivalentna sa

$$\frac{x+1}{x-1}<10^{\frac{1}{2}},\ \text{odakle je}$$

$$(x+1)^2<10\,(x-1)^2$$

$$x^2+2x+1<10x^2-20x+10$$

$$9x^2-22x+9>0$$

$$9x^2-22x+9=0$$

$$x_{1,2}=\frac{22\pm\sqrt{484-324}}{18},$$

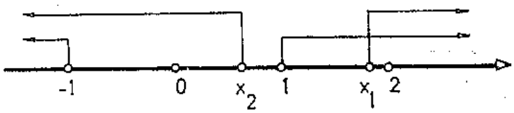
$$x_{1,2}=\frac{22\pm\sqrt{160}}{18}$$

$$x_{1,2}=\frac{22\pm4\sqrt{10}}{18}=\frac{11\pm2\sqrt{10}}{9}$$

$$9x^2-22x+9>0\ \text{za}\ x>\frac{11+2\sqrt{10}}{9},\ x<\frac{11-2\sqrt{10}}{9}.$$

S obzirom na definiciono područje, rješenja su

$$x>\frac{11+2\sqrt{10}}{9},\ x<-1\ \text{(sl. 82.7)}.$$



Sl. 82.7.

2. *Rješenje.* Definiciono područje $x\neq-1$.

$$\frac{x-1}{x+1}=(-1)^m\cdot\frac{\pi}{6}+m\pi,\ m=0,\pm1,\pm2,\ldots$$

a) $m=2k$, $k=0,\pm1,\pm2,\pm3,\ldots$

$$\frac{x-1}{x+1}=\frac{\pi}{6}+2k\pi$$

$$x=-\frac{\dfrac{\pi}{6}+1+2k\pi}{\dfrac{\pi}{6}+2k\pi-1}.$$

b) $m=2k+1$, $k=0,\pm1,\pm2,\pm3,\ldots$

$$\frac{x-1}{x+1}=-\frac{\pi}{6}+(2k+1)\pi$$

$$\frac{x-1}{x+1}=-\frac{\pi}{6}+\pi+2k\pi$$

$$x=-\frac{\dfrac{5\pi}{6}+2k\pi+1}{\dfrac{5\pi}{6}+2k\pi-1}.$$

U oba slučaja je zadovoljen uslov $x\neq-1$.

3. *Rješenje.* Pošto je $x^2+1>0$ i $x^2+4>0$,

data jednačina je ekvivalentna sa

$$(1-x^2)(x^2-4)<0,$$

$$(1-x)(1+x)(x-2)(x+2)<0.$$

		-2		-1		1		2	
$x+2$	$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$
$x+1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$
$1-x$	$+$		$+$		$+$	0	$-$		$-$
$x-2$	$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$-$		$+$		$-$		$+$		$-$

Sl. 82.8.

Dakle, $x \in (-\infty, -2) \cup (-1, 1) \cup (2, +\infty)$ (sl. 82.8).

4. *Rješenje.* Pošto je centar S kruga opisanog oko trougla u središtu hipotenuze, to je jasno da AB nije hipotenuza tog trougla.

i) Ako je $A(0, 0)$ jedna krajnja tačka hipotenuze, tada za koordinate tačke $C(x, y)$ imamo:

$$1=\frac{0+x}{2} \Rightarrow x=2$$

$$a=\frac{0+y}{2} \Rightarrow y=2a, \text{ tj. } C(2, 2a).$$

ii) Ako je $B(-1, 2)$ jedna krajnja tačka hipotenuze, tada za koordinate tačke $C(x, y)$ imamo:

$$1=\frac{-1+x}{2} \Rightarrow x=3$$

$$a=\frac{2+y}{2} \Rightarrow y=2a-2, \text{ tj. } C(3, 2a-2).$$

Pošto je $AS=BS=CS$, vrijedi

$$\sqrt{1+a^2}=\sqrt{4+(a-2)^2}, \text{ tj. } 1+a^2=4+a^2-4a+4$$

$$4a=7, \text{ tj. } a=\frac{7}{4}.$$

Dakle, $C\left(3, \frac{3}{2}\right)$ i $C\left(2, \frac{7}{2}\right)$.

ODSJEK ZA MATEMATIKU I FIZIKU

1. *Uputstvo.* $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$. *Rezultat:* $x=16$.

2. *Rezultat.*

$$1^\circ \quad q\neq 0 \Rightarrow p=1 \text{ i } q=-2.$$

$$2^\circ \quad q=0 \Rightarrow p=-p, \text{ tj. } p=0.$$

3. *Rezultat.* $y=8$.

4. *Rezultat.*

$$1^\circ \quad x=\frac{\pi}{3}+2k\pi, \quad x=\frac{5\pi}{3}+2k\pi,$$

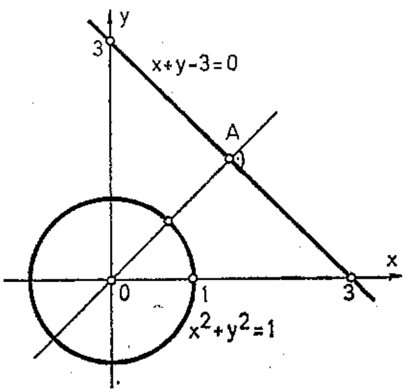
$$2^\circ \quad x=\frac{2\pi}{3}+2k\pi, \quad x=\frac{4\pi}{3}+2k\pi,$$

$$k=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$$

5. *Rezultat.* Skup zajedničkih rješenja je $\left\{\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}$.

ODSJEK ZA HEMIJU

1. *Rješenje* (sl. 82.9). Najbliža tačka prave $x+y-3=0$ kružnici $x^2+y^2=1$ je presječna tačka te prave i prave koja prolazi kroz centar kružnice, a normalna je na pravu $x+y-3=0$. Jednačina te prave glasi $y=x$. Dakle, $y=3-x$ i $y=x$, tj. $3-x=x$, $2x=3$, $x=\frac{3}{2}$ i $y=\frac{3}{2}$. Tražena tačka je $A\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$.



Sl. 82.9.

2. *Rezultat.* $x>200$ i $0<x<2$.

3. *Rješenje.* Definiciono područje: $\forall x$.

$$1-\sin^2 x-\sin^2 x<\frac{1}{2}, \text{ tj.}$$

$$-2\sin^2 x<-\frac{1}{2}$$

$$\sin^2 x>\frac{1}{4}$$

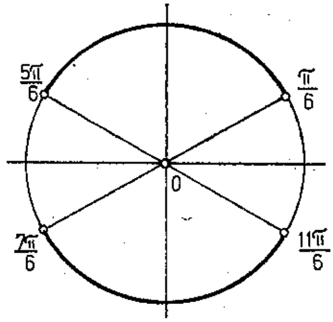
$$\sin x>\frac{1}{2} \vee \sin x<-\frac{1}{2}.$$

1° $\sin x > \frac{1}{2}$, tj. $\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$,

$k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$

2° $\sin x < -\frac{1}{2}$, tj. $-\pi + \frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < -\frac{\pi}{6} +$

$+2k\pi$, $k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$, (sl. 82.10).



Sl. 82.10.

4. *Rezultat.*

$$P = \frac{3a^2}{4 + 2\sqrt{3}}.$$

1983. GODINA
PRVI ROK

ODSJEK ZA MATEMATIKU I FIZIKU

1. *Rješenje* (sl. 83.1). $\overrightarrow{PQ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$,

$$2\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC},$$

No, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}$ i $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$. Slijedi

$$2\,\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}.$$

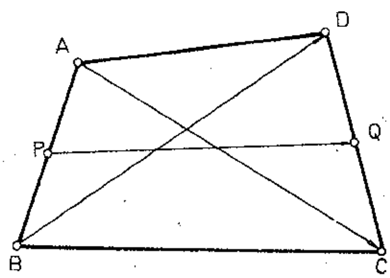
2. *Rezultat.* Prava q ima jednačinu: $3y - 2x + 6 = 0$.

3. *Rezultat.* $m > \frac{9}{2}$.

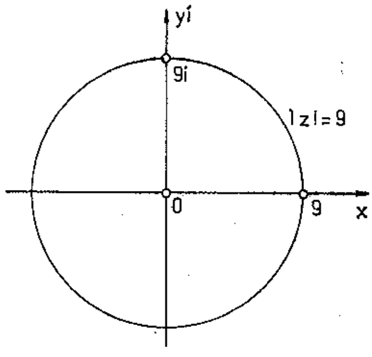
4. *Rješenje.* $z = x + iy$

$$|z| = 9, \text{ tj. } \sqrt{x^2 + y^2} = 9, \text{ tj. } x^2 + y^2 = 81.$$

Skup traženih tačaka je kružnica s centrom u koordinatnom početku i radijusom 9. Grafički: sl. 83.2.



Sl. 83.1.



Sl. 83.2.

5. *Rješenje.* a) $f(-x)=2(-x)^2=2x^2$, $f(x)$ je parna funkcija;

$$g(-x)=2(-x)^2+\frac{3}{2}(-x)-6=2x^2-\frac{3}{2}x-6,$$

$g(x)$ nije ni parna ni neparna funkcija.

b) Funkciju $g(x)$ svešćemo na kanonski oblik i iz tog oblika pročitati koordinate njenog tjemena:

$$g(x)=2\left(x^2+\frac{3}{4}x-3\right)=2\left[\left(x+\frac{3}{8}\right)^2-\frac{9}{64}-3\right]=2\left(x+\frac{3}{8}\right)^2-\frac{201}{32}.$$

$T\left(-\frac{3}{8}, -\frac{201}{32}\right)$, tj. $\overrightarrow{OT}=\left\{-\frac{3}{8}, -\frac{201}{32}\right\}$. Vektor $\overrightarrow{OT}$ preslikava prvu parabolu na drugu.

6. *Rješenje.* a) Definiciono područje $\cos x\neq 0$, $\sin x\neq 0$ i $\operatorname{ctg} x+\cos x\neq 0$. Dakle, $\cos x\neq 0$, $\sin x\neq 0$, tj. $x\neq\frac{\pi}{2}(2k+1)$, $x\neq k\pi=2k\cdot\frac{\pi}{2}$. Prema tome, $x\neq k\cdot\frac{\pi}{2}$.

b) $$\frac{\operatorname{tg} x+\sin x}{\operatorname{ctg} x+\cos x}=\frac{\dfrac{\sin x}{\cos x}+\sin x}{\dfrac{\cos x}{\sin x}+\cos x}=\frac{\dfrac{\sin x(1+\cos x)}{\cos x}}{\dfrac{\cos x(1+\sin x)}{\sin x}}=\frac{\sin^2 x(1+\cos x)}{\cos^2 x(1+\sin x)}>0 \text{ za } x\in \text{D. p.}$$

ODSJEK ZA HEMIJU

1. *Rezultat.* $\sqrt[12]{ab}$.

2. *Rezultat.* $A=\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i$, $B=1$.

3. *Rezultat.* $-\frac{1}{2}<m<\frac{2}{3}$.

4. *Rezultat.* $a_1=7{,}5$ cm, $b_1=9$ cm, $c_1=10{,}5$ cm.

5. *Rezultat.* $b=2\sqrt{3}$, $c=\sqrt{6}-\sqrt{2}$, $\gamma=15°$.

ODSJEK ZA GEOGRAFIJU

1. *Rješenje.*

$$\begin{array}{ll} \downarrow 105 & 100\% \uparrow \\ \ 5 & x\% \downarrow \end{array}$$

$$x=\frac{500}{105}=\frac{100}{21}=4{,}857.$$

Treba da pojeftini za 4,857%.

2. *Rezultat.* $m>-1$.

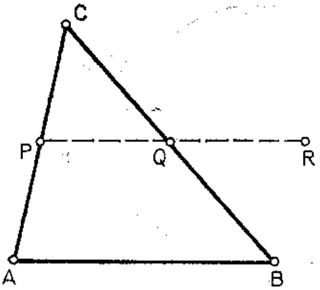
3. *Rezultat.* Isti kao zadatak 5. u Odsjeku za hemiju.

4. *Rješenje:* (sl. 83.3). $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}$,

$$\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{PC},\ \overrightarrow{CB}=2\overrightarrow{CQ}.$$

Dakle,

$$\overrightarrow{AB}=2(\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{CQ})=2\cdot\overrightarrow{PQ}.$$



Sl. 83.3.

ODSJEK ZA MATEMATIKU

1. *Rješenje:* (sl. 83.4).

$$FH=\frac{1}{2}CD, \qquad GF=\frac{1}{2}AB,$$

$$GH=GF-HF=\frac{1}{2}(AB-CD).$$

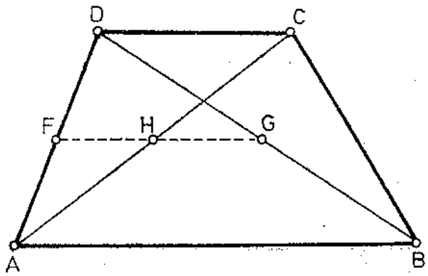
2. *Rezultat.* Prava p ima jednačinu

$$5x-4y+3=0.$$

3. *Rezultat.* Ivica kocke $x=\frac{8}{3}$.

4. *Rezultat.* $k=-\frac{2}{3}$.

5. *Rezultat.* $\sin(2\alpha-\beta)=\frac{-4\sqrt{6}-7}{18}$.



Sl. 83.4.

ODSJEK ZA FIZIKU

1. *Rezultat.* a) $-\infty<x<-2$ i $3<x<+\infty$.

b) $-4+\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

2. *Rezultat.* Ocu je 45, a sinu 13 godina.

3. *Rješenje.* $f(x)=x^2-6x+\frac{21}{2}=(x-3)^2-9+\frac{21}{2}=(x-3)^2+\frac{21-18}{2}=(x-3)^2+\frac{3}{2}$.

Za $x=3$ $[f(x)]_{min}=\frac{3}{2}$, jer je izraz $(x-3)^2+\frac{3}{2}$ najmanji za $(x-3)^2=0$, tj. za $x=3$.

4. *Rezultat.*

I K_1: $\left(x-1-\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(y-2+\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2=4$,

K_2: $\left(x-1+\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(y-2-\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2=4$;

II K_1: $\left(x-1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(y-2+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=4$,

K_2: $\left(x-1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(y-2-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=4$.

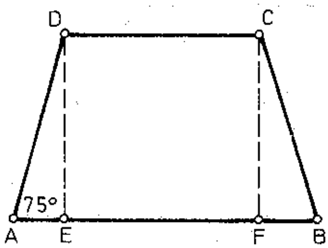
1. *Rezultat.* $\sqrt[12]{cb}$.

2. *Rezultat.* $m > -1$.

3. *Rezultat.* $4, \ -\frac{1}{2}\log 6, \ -\log 4$.

4. *Rješenje.* $(\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x = (\sin^2 x + \cos^2 x) + \sin 2x = 1 + \sin 2x$.

5. *Rješenje:* (sl. 83.5). $AE = FB$,



Sl. 83.5.

$$2AE + DC = AB,$$

$$\sin 75° = \frac{DE}{6}, \quad DE = 6 \cdot \sin 75° = 6 \sin(45° + 30°) =$$

$$= 6\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}\right) = 6 \cdot \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

$$DE = \frac{3\sqrt{2}(1 + \sqrt{3})}{2} \text{ m}.$$

$$AE = 6 \cdot \cos 75° = \frac{3(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{2}, \quad AB = [3\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1) + 5{,}5] \text{ m}.$$

ODSJEK ZA GEOGRAFIJU

1. *Rješenje:* (sl. 83). *Analiza.* Pretpostavimo da je zadatak riješen. Neka je ABC trougao u kome je $\sphericalangle BAC$ kongruentan datom uglu α, visina CC' kongruentna h_c i visina BB' kongruentna h_b. Trougao $AC'C$ je pravougli u kome su poznati jedan oštar ugao i jedna kateta i taj se trougao može konstruisati. Jedno geometrijsko mjesto vrhova B je prava AC', a drugo prava $p \parallel AB'$ i na odstojanju od ove za h_b, tako da je C' između AB' i p (sl. 83.6).

Konstrukcija.

1. Pravougli trougao $AC'C$ sa:

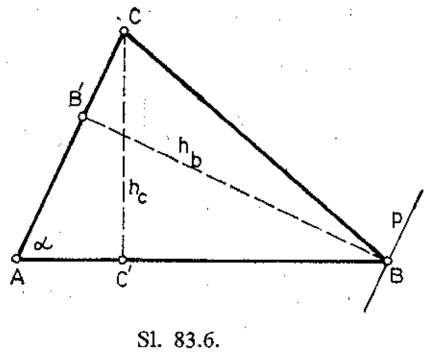
   $\sphericalangle AC'C = 90°$, $\sphericalangle CAC' \cong \alpha$ i $CC' \cong h_c$.

2. Prava $p \parallel AC$ i na odstojanju od ove za h_b.

3. $\{B\} = p \cap AC'$.

Dokaz: Iz konstrukcije 1. slijedi da trougao ABC ima $\sphericalangle CAB \cong \alpha$, $CC' \perp AB$ i $CC' \cong h_c$. Iz konstrukcija 2. i 3. slijedi da je BB' visina na AC i $BB' \cong h_b$.

Determinacija. Pod datim uslovima zadatak uvijek ima jedno rješenje.



Sl. 83.6.

2. *Rješenje. Analiza.* Pretpostavimo da je zadatak riješen. Neka su t_1 i t_2 tangente povučene iz zadane tačke A na kružnicu K i neka su T_1 i T_2 dodirne tačke tih tangenata sa kružnicom. Ako je O centar zadane kružnice, onda su trouglovi AOT_1 i AOT_2 pravougli, pa je geometrijsko mjesto tačaka T_1 i T_2 kružnica čiji je centar u središtu duži AO, a radijus $\frac{AO}{2}$ (sl. 83.7).

Konstrukcija.

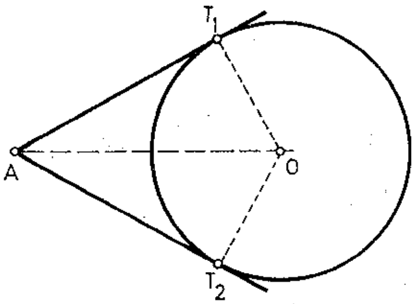
1. Tačka $S \in AO: AS \cong SO$,

2. $k_1\left(S,\ AS=\frac{AO}{2}\right)$,

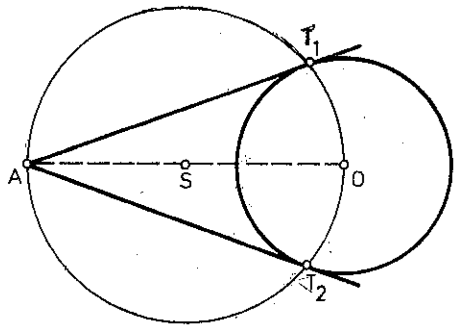
3. $\{T\}=k \cap k_1$,

4. Prava AT (sl. 83.8).

Dokaz. Iz konstrukcija 1, 2. i 3. slijedi da je ugao ATO pravi, pa je $AT \perp OT$, tj. prava AT je tangenta date kružnice.



Sl. 83.7.



Sl. 83.8.

Determinacija. U slučaju kad se kružnice k_1 i k sijeku, a to je ispunjeno za $AO>r$, zadatak ima dva rješenja (posmatrani slučaj). U slučaju kad se kružnice k_1 i k dodiruju, a to je ispunjeno za $AO \cong r$, zadatak ima jedno rješenje.

3. *Rezultat.* Jeste, jer je $1+\frac{1}{i}=\frac{1-i}{1}\cdot\frac{i-1}{i-1}=\frac{2i}{i-1}$.

4. *Rješenje.* $D=4\,m^2+4\,(-m^2-4)=4\,m^2-4\,m^2-16=-16$.

Funkcija ne može imati nijednu pozitivnu vrijednost, jer je zbog $a=-1<0$ i $D=-16<0$ negativna za svako x.

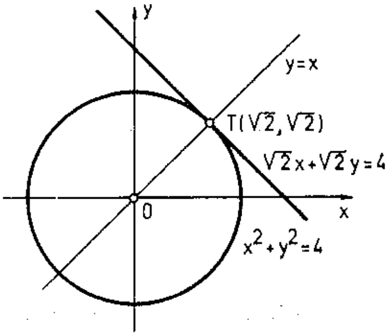
TREĆI ROK

ODSJEK ZA MATEMATIKU

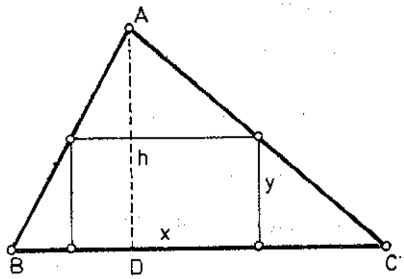
1. *Rješenje.* Tražena prava je, prema uslovu zadatka, tangenta povučena na datu kružnicu u presječnoj tački kružnice $x^2+y^2=4$ i prave $y=x$.

$$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2=4 \\ y=x \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y=x \\ 2x^2=4 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x=\sqrt{2} \\ y=\sqrt{2}. \end{array}$$

Jednačina tangente u tački $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ na kružnicu $x^2+y^2=4$ glasi: $\sqrt{2}\,x+\sqrt{2}\,y=4$ (sl. 83.9).



Sl. 83.9.



Sl. 83.10.

2. *Rezultat.* $V=76{,}8\pi$ cm^3.

3. *Rješenje:* (sl. 83.10). $a:h=x:(h-y)$,

$$P=x\cdot y=y\cdot\frac{a(h-y)}{h}=\frac{yah}{h}-\frac{ay^2}{h}=\frac{1}{h}\left\{-ay^2+ahy\right\}=\frac{a}{h}\left\{-y^2+yh\right\}=\frac{a}{h}\left\{-\left(y-\frac{h}{2}\right)^2+\frac{h^2}{4}\right\}.$$

$$P_\Delta=\frac{a\cdot h}{2},\qquad P_{max}=\frac{a\cdot h}{4},\qquad \text{za } y=\frac{h}{2}.$$

$$P_\square=x\cdot y,\qquad P_\Delta=\frac{a\cdot h}{2},\ \text{tj.}\qquad P_\square=\frac{P_\Delta}{2}.$$

4. *Rezultat.* $x=3$.

5. *Rezultat.* $x=\frac{45^\circ}{2}+k\cdot 180^\circ$, $x=\frac{135^\circ}{2}+k\cdot 180^\circ$,

$$x=-\frac{45^\circ}{2}+k\cdot 180^\circ,\ x=\frac{225^\circ}{2}+k\cdot 180^\circ$$

ili $2x=(2k+1)\cdot\frac{\pi}{4}$,

$$x=(2k+1)\cdot\frac{\pi}{8}.$$

ODSJEK ZA FIZIKU

1. *Rezultat.* a) $x=2$;

b) $x=90^\circ+2k\cdot 180^\circ$, $x=180^\circ+2k\cdot 180^\circ$.

2. *Rezultat.* a) $-2<m<1$, b) $m=-2$ i $m=1$.

3. *Rezultat.* a) $x_1=0$; $x_2=\log_3 2$;

b) $x_1=10^{-3}$, $x_2=10^{-1}$.

4. *Rješenje.* $y=x^2-5x+6=\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{25}{4}+6=\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{1}{4}.$

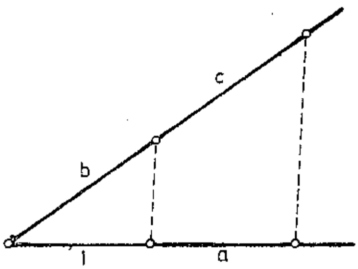
$$y_{\min}=-\frac{1}{4}\ \text{ za }\ x=\frac{5}{2}.$$

$$x^2-5x+6=0$$

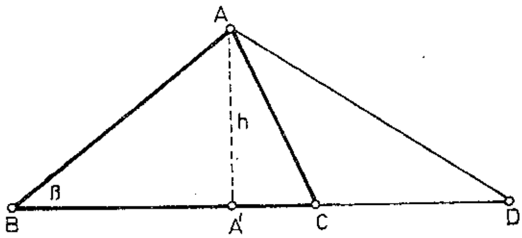
$$x=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{2}=\frac{5\pm1}{2},\ \text{tj. } x_1=2,\ x_2=3.$$

ODSJEK ZA GEOGRAFIJU

1. *Rješenje:* (sl. 83.11).



Sl. 83.11.



Sl. 83.12.

2. *Rješenje. Analiza:* Pretpostavimo da je zadatak riješen. Neka je ABC trougao u kome je $\sphericalangle ABC$ kongruentan datom uglu β, visina AA' kongruentna datoj duži h i $BC+CA$ kongruentno datoj duži d. Produžimo BC preko C do D tako da je $BD=d$ (sl. 83.12). Konstrukcija je sada jasna.

Konstrukcija: (sl. 83.13).

1. Duž $BD\cong d$.

2. $\sphericalangle XBD\cong\beta$.

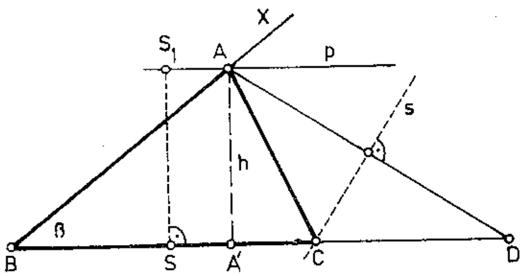
3. Na BD normala u proizvoljnoj tački S i duž $SS_1\cong h$.

4. Prava $p: S_1\in p$, $p\parallel BD$.

5. $\{A\}=BX\cap p$.

6. Simetrala s duži AD.

7. $\{C\}=s\cap BD$.



Sl. 83.13.

Dokaz. Iz konstrukcije 2. slijedi da trougao ABC ima $\sphericalangle ABC\cong\beta$. Iz konstrukcija 3, 4, 5. slijedi da je visina $AA'\cong h$. Iz konstrukcija 1, 6. i 7. slijedi $BC+CA=BC+CD=d$.

Determinacija. Zadatak uvijek ima rješenje za $0°<\beta<180°$.

3. *Rezultat.* $-\frac{7}{9}<y<+\infty$.

4. *Rezultat.* $\sin 3\alpha=\frac{11}{16}$.

ČETVRTI DIO

ZADACI ZA SAMOSTALNI RAD

I razred

1. Prirodan broj n ima neparan broj djelilaca ako i samo ako je potpun kvadrat. Dokazati.

2. Dokazati da devetocifren broj u čijem zapisu učestvuju sve cifre osim nule i kome je zadnja cifra 5 ne može biti potpun kvadrat.

3. Poznate su dvije stranice a i b trougla. Kakva treba da bude treća stranica c da bi najveći ugao trougla imao najmanju vrijednost?

4. Dokazati da vrijedi nejednakost

$$\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}}+\sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}}<2\sqrt[3]{3}.$$

5. Ako su A i B skupovi sa $A\triangle B$ definišemo skup svih elemenata koji pripadaju A ili B, ali ne pripadaju A i B, tj.

$$A\triangle B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A).$$

Dokazati da vrijedi

i) $A\triangle(B\triangle C)=(A\triangle B)\triangle C,$

ii) $A\cap(B\triangle C)=(A\cap B)\triangle(A\cap C).$

6. Riješiti sistem

$$|3x+2y+1|\leqslant 1$$
$$x+y\geqslant -1$$
$$|y|\leqslant 2$$

i grafički predstaviti rješenje.

7. Dokazati da je za svaki cio neparan broj razlika kuba tog broja i samog tog broja djeljiva sa 24.

8. Neka su a i b racionalni brojevi. Ako je $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ racionalan broj, tada su $\sqrt{a}$ i $\sqrt{b}$ također racionalni brojevi. Dokazati.

9. Naći sve parove realnih brojeva x i y za koje vrijedi

$$x+\sqrt{x^2+1}=y+\sqrt{y^2+1}.$$

10. Mogu li se vezati 1 983 telefona tako da je svaki od njih vezan sa tačno 11 drugih (a 1 982 telefona)?

11. Odrediti sve trocifrene brojeve n koji pri diobi brojem 11 daju ostatak jednak zbiru cifara broja n.

12. Ako figura ima osu simetrije i jedinstven centar simetrije, tada centar simetrije pripada osi simetrije. Dokazati.

13. U konveksnom četvorouglu $ABCD$ povučene su dijagonale. Dokazati da je četvorougao sa vrhovima u težištima trouglova ABC, ABD, ACD, BCD sličan datom.

14. Naći dva dvocifrena broja koji imaju sljedeće osobine: ako većem traženom broju dopišemo desno nulu i zatim manji broj, a manjem dopišemo desno veći broj i zatim nulu, tada od tako obrazovanih brojeva prvi dijelimo drugim i dobijamo količnik 2 i ostatak 590. Osim toga, poznato je da je suma čiji su sabirci udvostručen veći i utrostručen manji traženi broj jednaka 72.

15. Ekspert na sudu hoće da dokaže da je od 14 moneta 7 neispravnih (on zna koje su). Sud zna da su sve neispravne monete jednake težine, a također i ispravne i da su neispravne lakše od ispravnih. Ekspert želi da sa tri mjerenja na vagi bez tegova dokaže sudu koje su monete neispravne. Može li on to učiniti?

16. Naći sve brojeve kojima se može skratiti razlomak $\dfrac{8k+7}{5k+6}$ za cijele k.

17. Na stranice AB i CB trougla ABC nanose se jednaki odsječci AD i CE koji su proizvoljne dužine. Naći skup sredina odsječaka DE.

II razred

1. Naći sva cjelobrojna rješenja jednačine

$$x^2-xy+y^2=x+y.$$

2. Riješiti po x jednačinu

$$f(x-1)+f(2-x)=1,$$

gdje je f funkcija definisana sa

$$f(x+1)=\begin{cases} |x+1|, & x\leqslant -\dfrac{1}{2} \\ -x, & x>\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

3. Dokazati implikaciju

$$(\forall a, b\in R)\; a+b=1 \Rightarrow a^4+b^4\geqslant\frac{1}{8}.$$

4. Na nekoj skupštini od n ljudi za svako troje ljudi vrijedi: ili se sva trojica međusobno poznaju ili se samo dvojica od njih poznaju. Dokazati da ako među učesnicima skupštine postoje dva koja se ne poznaju, onda postoji učesnik koji ima više neznanaca nego znanaca.

5. Dokazati da broj n^2+n+1 nije djeljiv brojem 59 ni za jedno n.

6. Dokazati da postoji samo jedna trojka realnih brojeva x, y i z koja zadovoljava jednačinu

$$(1-x)^2+(x-y)^2+(y-z)^2+z^2=\frac{1}{4}.$$

7. Neka su a, b i c racionalni brojevi. Ako je $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$ racionalan broj, tada su $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$ također racionalni brojevi. Dokazati.

8. Data je kvadratna jednačina

$$ax^2+bx+c=0 \qquad (b^2-4ac\geqslant 0).$$

Izraziti proizvod

$$P=(x_1-kx_2)(x_2-kx_1)$$

kao funkciju koeficijenata a, b i c. Odatle izvesti uslov za koeficijente tako da odnos korijena bude k. Pokazati da se uz taj uslov rješenja date jednačine mogu izraziti kao racionalne funkcije od a, b i k, osim za $b=0$.

9. Dokazati da za svaki prirodan broj $n\geqslant 2$ vrijedi

$$n(\sqrt[n]{n+1}-1)<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}<n\left(1-\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)+1.$$

10. Među devet musketara neki su se posvađali i izazvali na dvoboj. Dokazati da ili postoje trojica od kojih su svaka dva posvađana ili postoje četvorica od kojih nikoja dva nisu posvađana. Važi li tvrdnja za 8 musketara?

11. Riješiti jednačinu

$$x=a-b(a-bx^2)^2, \quad a \text{ i } b \text{ realni brojevi.}$$

12. Dokazati da jednačina

$$3^a+1=5^b+7^c$$

nema cjelobrojnih nenegativnih rješenja po a, b i c, osim za $a=b=c=0$.

13. Ako je $\dfrac{-2+2^n}{n}$ cio broj, tada je i $\dfrac{2^{2^n}-2}{2^n-1}$ cio broj.

14. Neka su x i y pozitivni brojevi, S najmanji među brojevima x, $y+\dfrac{1}{x}$, $\dfrac{1}{y}$. Naći najveće moguće značenje S. Za koje x i y se ono postiže?

15. Iz središta M osnovice AC jednakokrakog trougla ABC spuštena je normala MH na stranicu BC. Tačka P je središte duži MH. Dokazati da je AH normalno na BP.

16. Dokazati da se izraz

$$f(t)=4t^4+16t^3+24t^2+16t+5$$

može rastaviti na faktore.

III razred

1. Pravougaonik $a \times b$ $(a,\ b \in N)$ može se razbiti na pravougaonike $l \times d$ $(d \in N)$ ako i samo ako je bar jedan od brojeva a, b djeljiv sa d. Dokazati.

2. Konstruirati pravougli trougao kad su dati hipotenuza c i bisektrisa s jednog oštrog ugla.

3. Dokazati da je proizvod dva primitivna polinoma primitivan polinom.

4. Data je kružnica i tangenta t na nju u tački M. Iz svake tačke A prave g koja je paralelna sa t i ne presijeca kružnicu povlače se tangente na kružnicu koje presijecaju pravu t u tačkama X i Y. Dokazati da vrijednost proizvoda $XM \cdot YM$ ne zavisi od položaja tačke A.

5. U tablici $m \times n$ dozvoljeno je svim brojevima jedne vrste ili jedne kolone promijeniti znak. Dokazati da sa nekoliko takvih operacija možemo postići da je suma brojeva proizvoljne vrste ili kolone nenegativna.

6. Dato je n racionalnih brojeva $a, b, \ldots, t$. Ako je $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\ldots+\sqrt{t}$ racionalan broj, tada su $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \ldots, \sqrt{t}$ također racionalni brojevi. Dokazati.

7. Neka su $a_1, a_2, \ldots, a_n$ realni brojevi. Broj a_k zovemo m-liderom ako za neko p važi

$$a_k+a_{k+1}+\ldots+a_{k+p-1} \geqslant 0, \quad 1 \leqslant p \leqslant m.$$

Dokazati da je suma svih m-lidera nenegativna.

8. Dokazati da ne postoji poliedar koji ima 7 ivica.

9. U prostoru su data dva trougla ABC i DEF koji leže u raznim ravninama. Naći geometrijsko mjesto tačaka M za koje su zapremine tetraedara $MABC$ i $MDEF$ jednake.

10. Dokazati da se izraz $x^{200}y^{200}+1$ ne može predstaviti u obliku proizvoda polinoma samo po x i polinoma samo po y.

11. Neka je p prost, a m i n prirodni brojevi. Ako

$$(p^m-1) \mid (n-1),$$

dokazati da tada

$$p \mid (2^n-2).$$

12. Dokazati da za sve realne $x>2$ vrijedi $5^x>3^x+4^x$.

13. Dokazati da je $\cos 1^\circ$ iracionalan broj.

14. Ako su α, β, γ uglovi trougla, dokazati da je

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma \leqslant \frac{3}{2}.$$

15. Ako su t_a i t_b težišnice, a S površina trougla, tada je $t_a \cdot t_b \geqslant \frac{3}{2} S$.

16. Riješiti jednačinu

$$x+\sqrt{3+\sqrt{x}}=3.$$

IV razred

1. Jednačina

$$x^4+ax^3+bx+c=0$$

ima četiri različita realna korijena. Dokažite da je $ab<0$.

2. Nekoliko podudarnih kvadrata jednakih strana prekrivaju figuru površine P. Dokazati da možemo izdvojiti nekoliko kvadrata koji se ne sijeku i koji prekrivaju površinu $\geqslant \frac{P}{4}$.

3. Dokazati da postoji beskonačno mnogo prirodnih brojeva n takvih da ako

$$p \mid n^2+3, \ p \text{ prost broj,}$$

tada postoji k, $k<n$ takav da

$$p \mid k^2+3.$$

4. Neka je dat sistem dvije jednačine s dvije nepoznate

$$(*) \qquad \begin{aligned} a_1x+b_1y+c_1&=0\\ a_2x+b_2y+c_2&=0, \end{aligned}$$

pri čemu je $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$. Napišimo sistem u obliku

$$\begin{aligned} x&=(a_1+1)x+b_1y+c_1\\ y&=a_2x+(b_2+1)y+c_2 \end{aligned}$$

i posmatrajmo dva niza x_n i y_n čiji su prvi članovi proizvoljni i koji zadovoljavaju uslov

$$\begin{aligned} x_{n+1}&=(a_1+1)x_n+b_1y_n+c_1\\ y_{n+1}&=a_2x_n+(b_2+1)y_n+c_2. \end{aligned}$$

Dokazati da ako

$$|a_1+1|+|b_1|<1$$

$$|a_2|+|b_2+1|<1,$$

oba niza konvergiraju ka rješenju $x=x_0$, $y=y_0$ sistema (*).

5. Neka je f neprekidna funkcija koja preslikava $[a, b]$ na $[a, b]$. Dokazati da postoji $c\in[a, b]$ tako da vrijedi $f(c)=c$.

6. Naći sve nizove $a_0, a_1, a_2, \ldots$ pozitivnih brojeva tako da važi

$$(\forall n) \quad a_n-a_{n+1}=a_{n+2}.$$

Pri tome je $a_0=1$.

7. Ako je $t>0$, tada red $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin^2 kt}{k^2}$ konvergira ka vrijednosti manjoj od $3t$. Dokazati.

8. Ako svaka strana prostornog četvorougla dodiruje sferu S, onda sva četiri dirališta leže u jednoj ravni. Dokazati.

9. Pretpostavimo da puž puzi po stolu konstantnom brzinom i da se svakih petnaest minuta okrene za 90°, a u intervalima između okretanja kreće se po pravoj. Dokazati da se on može vratiti u početnu tačku samo poslije cijelog broja sati.

10. Neka je f neprekidna realna funkcija realne promjenljive koja zadovoljava uslov

$$f(f(f(x)))=x$$

za bar jedno realno x. Dokazati da postoji realan broj a takav da je $f(a)=a$.

11. Neka je $P(x)$ polinom stepena n i

$$P(m)=\frac{m}{m+1} \quad \text{za } m=0, 1, \ldots, n.$$

Naći $P(n+1)$.

12. Riješiti po x jednačinu

$$\log_a x=\frac{x}{a}.$$

13. Osnova piramide je jednakokraki trougao s bočnom stranom a i uglom α na osnovi ($\alpha>45°$). Bočne ivice piramide su nagnute prema ravni osnove pod uglom β. Naći površinu presjeka te piramide sa ravni koja prolazi kroz visinu piramide i vrh jednog od uglova.

14. Neka su α, β, γ uglovi trougla ABC i D tačka na strani AB.

i) Odrediti maksimum funkcije

$$f(\varphi)=\sin\varphi\sin(\gamma-\varphi) \quad \left(0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\gamma}{2}\right).$$

ii) Ako je

$$0<\sin\alpha\sin\beta\leqslant\max(f(\nu)),$$

dokazati da postoji tačka D na AB za koju je CD srednja geometrijska proporcionala duži AD i BD, i obrnuto.

15. Na šahovskom turniru gdje je svaki učesnik igrao sa ostalim učesnicima bodovi koje su osvojili takmičari sačinjavaju aritmetički niz. Koliko je bodova osvojio prvoplasirani ako je posljednji osvojio 2,5 boda?

16. Izračunati broj koeficijenata različitih od nule u razvijenom obliku izraza

$$(1+x^2+x^5)^{20}.$$

S A D R Ž A J

U izdanju Zavoda za udžbenike i nastavna sredstva, Sarajevo objavljene su i ove zbirke zadataka iz matematike namijenjene učenicima srednjeg usmjerenog obrazovanja:

S. Prešić, B. Alimpić: Zbirka zadataka iz matematike za I razred,

J. Katić: Zbirka zadataka iz matematike za I razred,

S. Mintaković: Zbirka zadataka iz matematike za I razred,

S. Mintaković: Zbirka zadataka iz matematike za III razred,

R. Živković: Zbirka zadataka iz matematike za II razred,

M. Šnajder, S. Tomić: Metodička zbirka zadataka iz matematike,

S. Mintaković: Zbirka zadataka iz infinitezimalnog računa,

S. Mintaković, Ć. Ćurić: Zbirka zadataka/Logika, skupovi, relacije/