Ирена Стојковска,
Природно-математички факултет, Скопје

КОМБИНАТОРНИ ЗАДАЧИ

Едни од најинтересните логички задачи се комбинаторните задачи, за кои треба исклучително добро да се разбере поставениот проблем, а често потребно е и подлабоко да се размисли, најмногу заради нивниот „нематематички“ дел. Комбинаторните задачи може да бидат и многу сложени, со нив се занимавале и се занимаваат многу математичари – научници. Ние тука нема да ги работиме сложените комбинаторни задачи, туку ќе ги поставиме основите на логичкото размислување кое се користи во комбинаториката и пребројувањето. Задачите изложени во овој прилог ги работевме со учениците од IV одделение на Есенската математичка школа 2021.

Задача 1. На колку начини брат и сестра може да си поделат 10 бонбони?

Решение. Прво треба да согледаме дека не е кажано бонбоните да си ги поделат подеднакво, што значи, ќе постојат повеќе начини. Всушност постојат онолку начини, колку што има начини бројот 10 да го запишеме како збир на два ненегативни цели броеви и при тоа 3 + 7 = 10 и 7 + 3 = 10 ќе ги сметаме за различни записи, бидејќи во првиот случај братот добил 3 и сестрата добила 7 бонбони, а во вториот случај братот добил 7 и сестрата добила 3 бонбони. **Систематичниот пристап** при набројување на сите можни начини е најдобар за да не се прескокне некој од начините. Сите можни начини се дадени во табелата, има 11 начини на кои братот и сестрата може да си ги поделат бонбоните.

Број на бонбони	
брат	**сестра**
0	10
1	9
2	8
3	7
4	6
5	5
6	4
7	3
8	2
9	1
10	0

Начините може да ги запишеме и како *подредени парови*, во кои првата компонента ќе означува колку бонбони зел братот, а втората компонента ќе означува колку бонбони зела сестрата. Тогаш, сите 11 начини на поделба на бонбоните се следните: (0, 10), (1, 9), (2, 8), (3, 7), (4, 6), (5, 5), (6, 4), (7, 3), (8, 2), (9, 1) и (10, 0). Да забележиме дека редоследот на броевите во подредените парови е важен, имено (3, 7) и (7, 3) се различни подредени парови.

Напоменуваме дека за да го одредиме бројот на начини, не е неопходно да се испишат сите начини. Може да расудуваме на следниот начин: братот може да земе некоја количина од 0 до 10 бонбони, а остатокот од бонбоните да ги земе сестрата. Постојат 11 различни ненегативни цели броеви од 0 до 10 (заедно со 0 и 10), значи постојат 11 начини за поделба на бонбоните.

Задача 2. Марко, Симон и Павел сакаат да си поделат 6 парички. На колку начини може да ја направат поделбата, така што секој од другарите да добие барем една паричка?

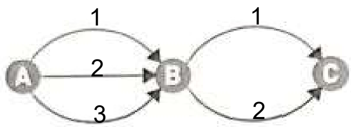
Решение. Ако систематски ги испишеме сите случаи на поделба на 6-те парички, така што секој од другарите да добие најмалку 1 паричка, ќе видиме дека поделбата може да се направи на 10 начини (види ја табелата).

Број на парички		
Марко	**Симон**	**Павел**
1	1	4
1	2	3
1	3	2
1	4	1
2	1	3
2	2	2
2	3	1
3	1	2
3	2	1
4	1	1

Начините може да ги испишеме и како *подредени тројки*, во кои првата компонента ќе означува колку парички зел Марко, втората компонента ќе означува колку парички зел Симон и третата компонента ќе означува колку парички зел Павел. Сите 10 начини на поделба на паричките се: (1, 1, 4), (1, 2, 3), (1, 3, 2), (1, 4, 1), (2, 1, 3), (2, 2, 2), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1) и (4, 1, 1). Наоѓањето на бројот на начини, без да се испишат сите начини е малку потежок комбинаторен проблем и нема да го разгледуваме.

Задача 3. Од градот А до градот В водат 3 пата, од градот В до градот С водат 2 пата. Од градот А до градот С може да се стигне само преку градот B. На колку различни начини може еден патник да стигне од градот A до градот C?

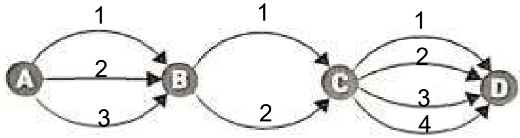
Решение. Градовите и сите можни патишта ќе ги претставиме на дијаграм, така што градовите ќе бидат кругчиња, а патиштата ќе бидат насочени (не мора прави) линии, при што од A до B ќе има три насочени линии означени со 1, 2 и 3, а од B до C ќе има две насочени линии означени со 1 и 2. Сите можни патишта од A до C преку B се: (1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 1) и (3, 2), каде првата компонента е патот од A до B, а втората компонента е патот од B до C. Има вкупно 6 начини да се стигне од A до C.



До овој број може да дојдеме и без да ги набројуваме сите можни начини. Имено, треба да го најдеме бројот на сите подредени парови, чија прва компонента прима 3 различни вредности: 1, 2 или 3, и за секоја од тие вредности, втората компонента прима 2 различни вредности: 1 или 2, па вкупниот број на такви подредени парови е $3 \cdot 2 = 6$, односно на 6 различни начини може да се стигне од A до C.

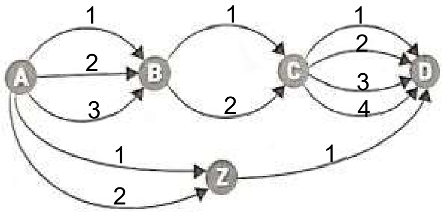
Задача 4. Од градот A до градот B водат 3 пата, од градот B до градот C водат 2 пата и од градот C до градот D водат 4 пата. Од градот A до градот D може да се стигне само преку градовите B и C. На колку различни начини може еден патник да стигне од градот A до градот D?

Решение. Треба да го најдеме бројот на сите подредени тројки, така што првата компонента прима 3 различни вредности: 1, 2 или 3, втората компонента прима 2 различни вредности: 1 или 2 и третата компонента прима 4 различни вредности: 1, 2, 3 или 4. Бројот на ваквите подредени тројки е $3 \cdot 2 \cdot 4 = 24$, т.е. постојат 24 начини да се стигне од градот A до градот D. За вежба, испишете ги сите подредени тројки за патиштата од A до D преку B и C.



Задача 5. Од градот A до градот B водат 3 пата, од градот B до градот C водат 2 пата и од градот C до градот D водат 4 пата. Од градот A до градот Z водат 2 пата, а од градот Z до градот D води 1 пат. Од градот A до градот D може да се стигне или преку градовите B и C или преку градот Z. На колку различни начини може еден патник да стигне од градот A до градот D?

Решение. Од градот A до градот D може да се стигне преку градовите B и C на 24 начини, додека од градот A до градот D преку градот Z, може да се стигне на 2 начина: (1,1) и (2, 1). Вкупниот број начини да се стигне од A до D е 24 + 2 = 26 начини.



Задача 6. Во својот куфер за зимување, Иван спакувал 2 пара чевли, 2 пара панталони и 6 блузи. На колку различни начини може тој да се облече, ако едно облекување се состои од пар чевли, пар панталони и блуза?

Решение. Едно облекување е подредена тројка, со прва компонента парот чевли: Ч1 или Ч2, втора компонента парот панталони: П1 или П2 и трета компонента блузата: Б1, Б2, Б3, Б4, Б5 или Б6. Бројот на различни начини на кои Иван може да се облече е $2 \cdot 2 \cdot 6 = 24$ начини, затоа што за секој пар од двата пара чевли, може да одбере некој од двата пара панталони, а за секој избор на чевли и панталони, може да одбере некоја од шесте блузи. За вежба, испишете ги сите начини на облекувања како подредени тројки.

Задача 7. Колку има непарни двоцифрени броеви? А колку има непарни двоцифрени броеви со различни цифри?

Решение. За да одговориме на првото прашање, најнапред треба да увидиме дека на местото од единици (Е) може да се запишат цифрите 1, 3, 5, 7 или 9, а на местото на десетки (Д) било која цифра од 1 до 9. Значи, имаме вкупно $9 \cdot 5 = 45$ непарни двоцфрени броеви. Друг начин да се дојде до овој број е прво да се воочи дека има 90 двоцифрени броеви, од кои половина се парни, а половина т.е. 90 : 2 = 45 се непарни.

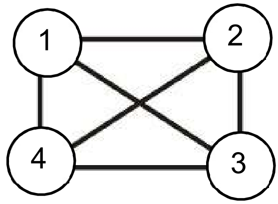
За да одредиме колку има непарни двоцифрени бреви со различни цифри, може да размислуваме на следниот начин: На местото од единици (Е) може да се запишат цифрите 1, 3, 5, 7 или 9, а на местото на десетки (Д) било која цифра од 1 до 9 која е различна од цифрата на единици (Е), што значи дека за секоја цифра на единици има 8 кандидати за цифра на десетки (Д). Значи, имаме вкупно 5 · 8 = 40 непарни двоцифрени броеви со различни цифри. До истиот број може да дојдеме и на следниот начин: Меѓу непарните двоцифрени броеви, има 5 броеви со исти цифри: 11, 33, 55, 77 и 99, па непарни двоцифрени броеви со различни цифри има 45 – 5 = 40.

Задача 8. Колку има петцифрени броеви кои почнуваат на цифрата 2 и завршуваат на цифрата 7? А колку од нив се со различни цифри?

Решение. Всушност, треба да најдеме на колку начини може да се пополнат местата на десетки (Д), стотки (С) и илјади (И). Секое од тие места може да се пополни со некоја од цифрите од 0 до 9, значи на 10 начини, па вкупниот број начини е 10 · 10 · 10 = 1000, односно има 1000 петцифрени броеви кои почнуваат на цифрата 2 и завршуваат на цифрата 7.

За да најдеме колку од нив се со различни цифри, може да расудуваме на следниот начин: местото на илјади (И) може да го пополниме со некоја од цифрите 0 до 9 различна од 2 и 7, значи 8 можности, местото на стотки (С) може да го пополниме со некоја од цифрите 0 до 9 различна од 2 и 7 и различна од цифрата на илјади (И), значи 7 можности и местото на десетки (Д) може да го пополниме со некоја од цифрите 0 до 9 различна од 2 и 7 и различна од цифрата на илјади (И) и цифрата на стотки (С), значи 6 можности. Па, вкупно има 8 · 7 · 6 = 336 петцифрени броеви со различни цифри кои почнуваат на цифрата 2 и завршуваат на цифрата 7.

Задача 9. Четири пријатели се договориле да излезат на вечера во новиот ресторан во градот. Кога пристигнале на договореното место, секој со секого се поздравил по еднаш. Колку вкупно поздравувања се случиле?



Решение. Ќе ги означиме пријателите со 1, 2, 3 и 4. Средбата на пријателите може да прикажеме на дијаграм (наречен *граф*), каде пријателите се прикажани со крукчиња (наречени *јазли* на графот), а поздравувањата се линии кои ги поврзуваат крукчињата (наречени *ребра* на графот). Секои две крукчиња се поврзани со една линија, има вкупно 6 поврзувачки линии, односно се случиле вкупно 6 поздравувања.

Овие 6 поздравувања може и да ги наброиме. Со {1, 2} означуваме дека се случило поздравување меѓу пријателите 1 и 2. Тогаш, сите 6 поздравувања се: {1, 2}, {1, 3}, {1, 4}, {2, 3}, {2, 4} и {3, 4}, односно тоа се сите двоелементни подмножества од множеството од четири елементи {1, 2, 3, 4}. Во множествата не е важен редоследот на елементите, односно {2, 1} = {1, 2}, важен е само составот т.е. кои елементи припаѓаат на тоа множество.

Вкупниот број на поздравувања може да го најдеме и на следниот начин: Човекот со број 1 се поздравил со пријателите 2, 3 и 4, значи се направени 3 поздравувања, човекот со број 2 се поздравил уште со пријателите 3 и 4, значи уште 2 поздравувања и човекот со број 3 се поздравил уште со пријателот 4, значи уште 1 поздравување. Тогаш, вкупниот број на поздравувања е 3 + 2 + 1 = 6.

Задача 10. Во фудбалската прва лига играат 10 клубови. Колку вкупно натпревари ќе се одиграат, ако секој клуб игра со секого по 4 пати?

Решение. Клубовите и одиграните натпревари може да ги претставиме на граф и да ги изброиме ребрата (клубовите ќе бидат јазли на графот, а натпреварите ќе бидат ребра), но може да расудуваме и на следниот начин, за да прво го изброиме бројот на натпревари со различен состав: првиот клуб одиграл по еден натпревар со останатите 9 клуба, значи 9 натпревари, вториот клуб одиграл по еден натпревар со останатите 8 клуба, значи 8 натпревари итн. Вкупно натпревари со различен состав се

9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 45 натпревари. Бидејќи такви натпревари биле одиграни по 4 пати, затоа биле одиграни вкупно 45 · 4 = 180 натпревари.

Задача 11. Колку домина има во еден класичен комплет домина за играње (едно домино се состои од две полиња, секое поле има од 0, 1, 2, 3, 4, 5 или 6 точки)?

Решение. Да ги изброиме прво домината кои имаат различен број точки на двете половини, такви домина има 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 21. Потоа, има уште 7 домина кои имаат две исти полиња. Значи, еден класичен комлет домина има вкупно 21 + 7 = 28 домина.

Задачи за самостојна работа

1. На колку начини може 4 другари да поделат 10 колачиња, така што секој од нив да земе барем по 2 колачиња? Наведи ги сите начини. Работи систематски.

2. Во својот куфер за летување, Теодора спакувала 4 пара чевли, 2 здолништа, 5 блузи и 3 фустани. На колку различни начини може таа да одбере да се облече, ако едно облекување се состои од пар чевли, здолниште и блуза или пак од пар чевли и фустан?

3. Колку има парни трицифрени броеви кои почнуваат на цифрата 4? Колку од тие броеви се со цифри кои не се повторуваат?

4. На еден тениски турнир се пријавиле 8 тенисери. Колку партии биле одиграни на тенискиот турнир, ако секој тенисер играл со секого по еднаш?

Извори:

[1] И. Стојковска, *Логички задачи*, Предавања за учениците од IV одделение, Есенска математичка школа 2021, СММ, 2021.

[2] A. Burago, *Mathematical Circle Diaries, Year 1*, MSRI, AMS, 2010.

Решенија на задачите за самостојна работа од ИГРИ И СТРАТЕГИИ (на крајот од списанието)

1. Постојат 10 начини, тоа се: (2, 2, 2, 4), (2, 2, 3, 3), (2, 2, 4, 2), (2, 3, 2, 3), (2, 3, 3, 2), (2, 4, 2, 2), (3, 2, 2, 3), (3, 2, 3, 2), (3, 3, 2, 2) и (4, 2, 2, 2).

2. Теодора може да облече пар чевли, здолниште и блуза на $4 \cdot 2 \cdot 5 = 40$ различни налини, а пар чевли и фустан може да облече на $4 \cdot 3 = 12$ начини. Значи, Теодора може да се облече на $40 + 12 = 52$ различни начини.

3. На местото на единици (Е) може да биде некоја од 5-те цифри 0, 2, 4, 6 или 8, а на местото на десетки (Д) може да биде било која од 10-те цифри од 0 до 9. Значи, вкупно има $5 \cdot 10 = 50$ трицифрени парни броеви кои почнуваат на цифрата 4.

Ако сакаме да најдеме колку од нив се со цифри кои не се повторуваат, да забележиме дека на местото на единици (Е) може да биде некоја од 4-те цифри 0, 2, 6 или 8, а на местото на десетки (Д) може да биде некоја од цифрите од 0 до 9, различна од 4 и од цифрата на единици (Е), значи 8 можности. Тогаш, има вкупно $4 \cdot 8 = 32$ парни трицифрени броеви кои почнуваат на цифрата 4 во кои сите цифри се различни.

4. На турнирот биле одиграни вкупно $7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 28$ партии.

Статијата прв пат е објавена во списанието НУМЕРУС кое го издава Сојузот на математичарите на Македонија