

ИГРАНКА СА ПРОЦЕНТИМА

Ратко Тошић, Нови Сад

– Испричајте нам како сте стекли толико богатство.
– Све је врло једноставно. Почео сам тргујући сулундарима. Купим робу
за један динар, продам за два. И цела мудрост је у том једном проценту.
(Из интервјуа једног бизнисмена)

ШТА ЈЕ ПРОЦЕНАТ?

Изучавање сваке теме може се организовати у облику решавања низа типичних задатака различитих нивоа сложености. Тема овог чланка су проценти и њихова примена.

Реч *проценат* долази од латинског *pro centum* – „од сто“, „на сто“ и означава стоти део неког броја. Први пут се појављује у Старом Риму као финансијско-правни термин који показује колико је био дужан да плати дужник повериоцу за право коришћења његовог новца у датом периоду времена. Данас се тај појам користи не само у банкарству. Свуда где се примењује статистика – у економији, физици, хемији, биологији, или друштвеним наукама, појављују се проценти, тако да можемо рећи да живимо у доба процентоманије. Према Марку Твену, постоје три врсте лажи: обична лаж, гнусна лаж и статистика. Такву своју репутацију статистика је стекла највише захваљујући природи процента која пружа огромне могућности манипулисања. Ту чињеницу обилато користе трговци, намерно компликујући текст декларација на разним производима и политичари који оправдавају своје штетне одлуке „креативним“ тумачењем процената. За све то нису криви проценти него чињеница да их већина људи слабо познаје и погрешно примењује. Зато не чуди што често чујемо „компетентне“ изјаве следећег типа:

130% људи не разуме проценте.

Одавно је познато да 20% људи обавља 80% посла. Недавно је једна анкета показала да 80% људи мисли да они спадају у тих 20%.

Према последњим анкетама, 33% испитаних рекло је да у њима не учествује.

У подацима Министарства образовања САД за 2006. годину наводе се следећи подаци о проценту неписмених:

Број становника: 291 милион.

Проценат неписмених: жене - 2%, мушкарци - 3%, укупно - 5%.

Приметимо да је $p\%$ од x једнако $\frac{p}{100}x$.

На пример, 5% од x једнако је $\frac{5}{100}x = 0,05x$, 300% од x једнако је $\frac{300}{100}x = 3x$.

Повећањем x за $p\%$ добија се $x + \frac{p}{100}x = \left(1 + \frac{p}{100}\right)x$.

Смањењем x за $q\%$ добија се $x - \frac{q}{100}x = \left(1 - \frac{q}{100}\right)x$.

ЗАДАЦИ

1. Шта је веће: 18,43% од 6 или 6% од 18,43?

Решење. Како је

$$\frac{18,43}{100} \cdot 6 = \frac{6}{100} \cdot 18,43,$$

важи једнакост.

2. Један бизнисмен каже другом:

- Твоје богатство је само 10% мога богатства. Према томе, моје богатство чини 90% твога богатства.

Да ли та изјава може бити тачна? Колико процената богатства другог бизнисмена чини богатство првог бизнисмена?

Решење. Нека је a богатство првог, а b богатство другог бизнисмена. Тада је $b = 10\%a = \frac{10}{100}a$, одакле је $a = \frac{100}{10}b = \frac{1000}{100}b$. Дакле, богатство првог бизнисмена чини 1000% другог бизнисмена.

3. Како се промени цена неке робе ако се прво повећа за 100%, а затим смањи за 50%?

Решење. Нека је c цена робе на почетку. После повећања за 100% и смањења за 50% нова цена ће бити $(1 - 0,5)(1 + 1) \cdot c = \frac{1}{2} \cdot 2c = c$; дакле, цена ће остати непромењена.

4. Цена кромпира повећана је за 20%. После извесног времена цена је смањена за исти проценат. Да ли је после тога цена кромпира била иста као и пре повећања?

Решење. Ако је пре повећања цена била c , онда је цена после снижења

$$(1 - 0,2)(1 + 0,2)c = 0,8 \cdot 1,2c = 0,96c.$$

Дакле, мања је за 4% него на почетку.

5. Послодавац је смањио плате запосленима за 20%, а затим повећао за исти проценат. Да ли је плата после тога била иста као пре смањења?

А ако је плата прво повећана за 20%, а затим смањена за 20%?

Упутство. Задатак је потпуно аналоган претходном. У оба случаја плата је мања за 4% него на почетку.

6. Послодавац је смањio плате запосленима за 25%. После протеста синдиката, послодавац је пристао да повећа плате за 30%. Синдикалци су ту одлуку прихватили са одушевљењем и прославили као велику победу у борби за права радника. За колико процената ће плате запослених бити веће него пре смањења?

Решење. Нека је a плата пре смањења. После смањења за 25% и повећања за 30%, плата ће бити $1,3 \cdot 0,75a = 0,975a$, дакле, неће бити већа него мања за 2,5 %.

7. Једна страница правоугаоника смањена је за 20%, а друга повећана за 20%. За колико се променила површина правоугаоника?

Решење. Нека су a и b дужине страница тог правоугаоника. Његова површина је ab . Површина новог правоугаоника је $1,2a \cdot 0,8b = 0,96ab$. Дакле, површина се смањила за 4%.

Читалац треба да уочи сличност овог задатка са претходна два.

8. Перина плата је за 20% мања од Јоцине. За колико је процената Јоцина плата већа од Перине?

Решење. Нека је a Перина, а b Јоцина плата. Тада је $a = 0,8b$, одакле је $b = \frac{a}{0,8} = 1,25a$, што значи да је Јоцина плата за 25% већа од Перине.

9. Цене су смањене за 20%. За колико се процената више робе може купити за плату која је остала непромењена?

Решење. Нека је c цена робе и r количина робе која се може купити за плату p . Тада је $p = cr$. Нова цена је $0,8c$, па се за износ cr може купити количина $\frac{cr}{0,8c} = 1,25r$.

Дакле, за исту плату се може купити за 25% више робе него пре појефтињења.

10. Због светске економске кризе цене су скочиле за 25%. За колико се процената мање робе може купити за исту плату?

Решење. Ако је пре кризе цена била c динара по јединици робе, b јединица робе се плаћало cb динара. После повећања цена је била $1,25c$, а по тој цени за cb динара могло се купити $cb : 1,25c = 0,8b$ јединица робе, тј. 80% од количине која се могла купити пре кризе. Дакле, куповна моћ је пала за 20%.

11. У једном тржном центру цене су смањили за 10%, а затим још једном за 10%. У другом су цене одмах снижили за 20%. Шта је повољније за купца?

Решење. Како је $0,9 \cdot 0,9 = 0,81$, у првом случају после два узастопна смањења, цена ће бити за 19% мања, па је за купца повољније једнократно смањење за 20%.

12. У једном тржном центру цене су повећали за 20%, а затим још једном за 30%. У другом су цене одмах повећали за 50%. Шта је повољније за купца?

Решење. Нека је c цена на почетку. После поскупљења, цена у првом тржном центру је $1,2 \cdot 1,3c = 1,56c$, а у другом $1,5c$. Дакле, цене су сада мање у другом тржном центру.

13. У једном тржном центру цене су повећали за 40%, а затим још једном за 40%. У другом су цене одмах повећали за 90%. Где су после тога повољније цене за купце?

Решење. У другом тржном центру, где је нова цена $1,9c$, док је у првом цена $1,96c$.

14. Компанија „Светла будућност“ је за две године смањила производњу за 51%, при томе сваке године за исти проценат. За колико?

Решење. Нека је p тражени проценат. Тада је $(1 - p)^2 = 0,49$, одакле је $1 - p = 0,7$, тј. $p = 0,3$. Сваке године производња се смањивала за 30%.

15. У посуди је било 20 литара алкохола. Један део су одлили и долили исту количину воде. Затим су промешали течност, одлили исту количину као и први пут и додали исту количину воде. После тога у посуди је било три пута више алкохола него воде. Коју су количину течности доливали оба пута?

Упутство. Аналогно претходном задатку.

16. Шта се више исплати:

(а) штедети у банци уз годишњу камату од 6%; (б) полугодишњу камату од 3%;

(в) тромесечну камату од 1,5%; (г) месечну камату од $\frac{1}{2}\%$?

Решење. Упоредимо прво штедње под (а) и (б). У првом случају, штедиша за уложу суму K , на крају године добија износ $1,06K$. У другом случају, ако после 6 месеци поново стави на штедњу добијену суму, на крају године ће добити $1,03^2 \cdot K = 1,0609 \cdot K$. Дакле, више се исплати начин штедње (б).

Слично доказујемо да је од четири предложена начина најповољнија варијанта (г).

17. Кад су Перицу избацили из једне школе, он је прешао у другу, после чега се у одељењу у које је дошао проценат дечака са 50% повећао на 52%. Колико је девојчица у том одељењу?

Решење. Ако је x број девојчица у одељењу, онда се после Перичиног доласка укупан број ученика повећао са $2x$ на $2x + 1$. Проценат девојчица је сада 48%, тј. $x = 0,48 \cdot (2x + 1)$, одакле је $x = 12$.

18. У парку су расли борови и брезе, при чему су борови чинили 99% свих стабала. Кад је градска управа одлучила да посече изванредан број стабала, еколози су се побунили. Експерти градске управе су их умирили изјављујући да ће сећи само борове и да ће и после сече борови чинити 98% стабала. Који је проценат од укупног броја стабала у парку посечен?

Решење. Нека је x укупан број стабала на почетку, y укупан број стабала после сече и b број бреза. Тада је $b = 0,01x = 0,02y$, одакле је $y = \frac{x}{2}$. Дакле, на крају је број стабала само половина броја на почетку, тј. посечено је 50% од укупног броја стабала.

19. У складишту је смештено 100 килограма јагода са садржајем воде од 99%. Током складиштења садржај воде се смањио на 98%. Колико је килограма јагода после тога било у складишту?

Решење. Садржај суве материје је 1%, тј. 1 килограм. После сушења, 1 килограм суве материје чини два процента, што значи да укупна маса после сушења износи 50 килограма.

Нађи и друго решење, по аналогiji са претходним задатком.

20. Перина плата је повећана за p процената, а Јоцина смањена за q процената. После тога је Пера имао плату као раније Јоца, а Јоца као раније Пера.

(а) Одреди q ако је познато p .

(б) Одреди p ако је познато q .

Решење. (а) Нека је на почетку Перина плата a , а Јоцина b . Имамо:

$$(1 + p)a = b,$$

$$(1 - q)b = a.$$

Множењем добијамо да је $b = (1 + p)(1 - q)b$, тј. $(1 + p)(1 - q) = 1$. Одавде добијамо да

$$\text{је } q = \frac{p}{1+p}. \quad (\text{б}) \quad p = \frac{q}{1-q}.$$

21. Природни сок садржи 80% воде. Да би се добио концентрисан сок, треба одстранити 75% воде. Колики је проценат воде у концентрисаном соку?

Решење. Сок садржи 80 делова воде и 20 делова плода. Кад се садржај воде смањи за 75% остаје 25% воде, па је после тога у мешавини $0,25 \cdot 80 = 20$ делова воде. Дакле, концентрисан сок садржи 20 делова воде и 20 делова плода, тј. садржај воде је сада 50%.

22. Пера је имао 10% више новца него Јоца. Пера је потрошио 11% свог новца, а Јоца 2% свог. Ко је после тога имао више пара?

Решење. Нека је Јоца имао a евра. Тада је Пера имао $1,1a$ евра. После трошења Јоци је остало $0,98a$ евра, а Пери $0,89 \cdot 1,1a = 0,979a$ евра. Дакле, на крају је више новца имао Јоца.

23. Прешавши половину пута, чамац је повећао брзину за 25% и зато је стигао на циљ пола сата раније. Колико времена се кретао чамац?

Решење. Означимо са s дужину половине пута, са v брзину чамца на првој половини пута и t време у сатима за које је чамац прешао прву половину пута. Тада

је $s = vt = 1,25v \cdot \left(t - \frac{1}{2}\right)$, одакле је $0,25vt = 0,625v$, тј. $0,25t = 0,625$, $t = 2,5$ сати. Дакле, прву половину пута чамац је прешао за 2,5 сати, а другу за 2 сата. Чамац се кретао 4,5 сати.

24. Милашин и Радашин су поделили зараду од продаје сулундара. Милашин размишља: „Да сам узео 40% више новца, Радашинов део би се смањио за 60%.“ За колико би се смањио Радашинов део да је Милашин узео за 50% више?

Решење. Ако је Милашин узео x , а Радашин y евра, по услову задатка је $0,4x = 0,6y$, одакле добијамо да је $0,5x = 0,75y$. Дакле, да је Милашинов део повећан за 50%, Радашинов би се смањио за 75%.

25. Једне године број становника села повећао се за n , а следеће године за 300 становника. При томе је повећање прве године износила 300%, а следеће $n\%$. Колико је становника било у селу на крају друге године?

Решење. Нека је x број становника на почетку. После прве године било их је $x + n = x + \frac{300}{100}x = 4x$, одакле је $n = 3x$. После друге године број становника у селу је већ $4x$

$+ 300 = 4x + \frac{n}{100} \cdot 4x$, одакле је $300 = \frac{4nx}{100}$. Како је $n = 3x$, то је $300 = \frac{12x^2}{100}$, $4x^2 = 10000$, $x = 50$. Значи да је сада у селу $4x + 300 = 500$ становника.

26. Који је најмањи број чланова математичке секције ако је познато да у тој секцији девојчица има мање од 50%, а више од 40%?

Решење. Означимо са n укупан број чланова секције, а са m број девојчица. Треба наћи најмањи природан број n за који постоји природан број m такав да је $\frac{2}{5} < \frac{m}{n} < \frac{1}{2}$. Проверавајући вредност за n од 2 до 7, налазимо да ту неједнакост задовољава само број $\frac{3}{7}$. Дакле, тражени број је 7.

27. Марина је члан секције за астрономију у којој су више од 93% чланови дечаци. Који је најмањи могући број чланова те секције?

Решење. Означимо са n укупан број чланова секције, а са m број девојчица. Треба наћи најмањи природан број n за који постоји природан број m такав да је $\frac{m}{n} < \frac{7}{100}$, тј. $7n > 100m$. За $m = 1$, такав број је $n = 15$. Дакле, секција има најмање 15 чланова.

28. Два саобраћајца заустављају колону аутобуса. Један од њих одређује проценат препуњених аутобуса, а други проценат путника који се возе у препуњеним

аутобусима. Који је проценат већи? Аутобус се сматра препуњеним ако у њему има више од 50 путника.

Решење. Нека је p број препуњених, а n број непрепуњених аутобуса у колони. Означимо број путника у препуњеним аутобусима са a , а број осталих путника са b .

Тада је $a > 50p$, $b \leq 50n$, тј. $\frac{a}{p} > 50$, $\frac{b}{n} \leq 50$, одакле је $\frac{a}{p} > \frac{b}{n}$. Из те неједнакости

слиди: $\frac{b}{a} < \frac{n}{p}$, $\frac{a+b}{a} < \frac{n+p}{p}$, одакле је $\frac{a}{a+b} \cdot 100\% > \frac{p}{n+p} \cdot 100\%$. У последњој

неједнакости, на левој страни је проценат путника који се возе у препуњеним аутобусима, а на десној страни проценат препуњених аутобуса. Дакле, већи је проценат путника у препуњеним аутобусима од процента препуњених аутобуса.

- 29.** Пера је ушао у забавни парк са 100 евра у џепу и почео да се забавља гађањем из ваздушне пушке. После сваког поготка његов новац се повећавао за 10%, а после сваког промашаја се смањивао за 10%. Да ли је после неколико хитаца он могао имати 80 евра и 19 центи?

Упутство. $8019 = 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 11$.

Решење. Повећање за 10% значи множење са 1,1; смањење за 10% значи множење са 0,9. Разлажући 8019 на факторе, добијамо да се 8019 може представити у облику $9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 11$. Дакле, после 4 гађања у којима је имао три промашаја и један погодак, Пера ће имати 80 евра и 19 центи.

- 30.** Мама је дала Васи новац за куповину 30 оловки. Десило се да је у трговинском центру била у току рекламна акција: у замену за купон о куповини 20 оловки, на излазу враћају 25% уплаћене суме, а за купон о куповини 5 оловки враћају 10% уплаћене суме. Колико највише оловки може да купи Васа за суму коју је добио за куповину 30 оловки?

Решење. Приметимо да је 25% од цене 20 оловки једнако цени 5 оловки, а 10% од цене 5 оловки је половина цене једне оловке. За добијање максималног попушта Васа треба да поступи овако:

1. Све док је могуће купује 20 оловки и одмах трчи да мења купон на излазу.
2. Ако недостаје новац за 20 оловки, али доста је за 5 оловки, он купује 5 оловки и одмах мења купон на излазу.
3. После тога купује појединачне оловке.

Поступајући тако, Васа прво купује 20 оловки, добија на излазу новац за 5 оловки. Затим купује три пута по 5 оловки и на излазу добија новац вредности 1,5 оловки. За тај новац купује још једну оловку и још му остаје пара за једна мањи сладолед. Дакле, Васа може да купи 36 оловки.

- 31.** Наћи најмањи природан број већи од 1 који не може да се добије тако што се неки природан број повећа за цео број процената од 1% до 100%.

Решење. 211. Бројеви од 101 до 200 добијају се кад број 100 повећамо редом за број процената од 1 до 100. Бројеви од 51 до 100 добијају се када се број 50 повећа

редом за паран број процената од 1 до 100. Бројеви од 26 до 50 добијају се кад редом повећавамо број 25 за број процената дељив са 4 (од 1 до 100). Бројеви од 21 до 25 добијају се повећањем броја 20 за 5, 10, 15, 20, 25 процената редом. Бројеви од 11 до 20 добијају се кад број 10 повећамо редом за број процената дељив са 10 (од 1 до 100). Бројеви од 6 до 10 се добијају кад се број 5 повећа за број процената дељив са 20 (од 1 до 100). Број 5 се добија повећањем броја 4 за 25%, број 4 повећањем броја 2 за 100%, број 3 повећањем броја 2 за 50%, број 2 повећањем броја 1 за 100%. Бројеви 202, 204, 206, 208, 210 се добијају повећањем броја 200 за 1, 2, 3, 4 и 5 процента редом. Број 201 се добија повећањем броја 134 за 50%, број 203 повећањем броја 145 за 40%, број 205 повећањем броја 164 за 25%, број 207 повећањем броја 180 за 15%, број 209 повећањем броја 190 за 10%. Неки од бројева од 2 до 210 могу се добити и на више начина.

Претпоставимо да се 211 може добити повећањем неког природног броја m за n процената, где је n природан број, $1 \leq n \leq 100$. Тада је $m \cdot \frac{100+n}{100} = 211$, тј. $m(100+n) = 211 \cdot 100$, што је немогуће, јер је 211 прост број, а број на левој страни је производ два броја већа од 1 и мања од 211 (не садржи прост фактор 211).

32. На рукометном турниру свака екипа је против сваке одиграла по једну утакмицу. При томе 20% од укупног броја екипа није добило ниједну утакмицу. Колико је екипа учествовало на турниру?

Решење. Није могуће да постоје две екипе које нису добиле ниједну утакмицу (нека од њих је победила у међусобном сусрету). Значи да је једна екипа представљала 20% од укупног броја екипа, па је тај број 5.

Задаци за самостални рад

1. Антонијеви кораци су за 20% краћи од корака његовог старијег брата Илије, али он за исто време прави 20% више корака него Илија. Ко је од њих двојице бржи?
2. При смрзавању вода повећа своју запремину за $\frac{1}{11}$. За који део своје запремине се смањи лед кад при топљењу поново пређе у воду?
3. Тркачи A , B и C такмичили су се у трци на 100 метара. У тренутку када је A прошао кроз циљ, B је био 10 метара иза њега. Кад је B пролазио кроз циљ, C је био 10 метара иза њега. Колико је C изостајао иза A кад је A пролазио кроз циљ?
4. Из 22 килограма свежих печурки сушењем се добија 2,5 килограма сувих печурки које садрже 12% воде. Одреди проценат воде у свежим печуркама.
5. Један пензионер је сваког дана куповао један хлеб и литар млека. Када су цене порасле за 20%, могао је да купи за исти износ само пола хлеба и литар млека.

Да ли ће за исте паре моћи да купи литар млека ако цене још једном порасту за 20%?

6. Перина плата је повећана за p процената, а Јоцина смањена за q процената, после чега су они имали једнаке плате.
(а) Познато је p . Одреди q .
(б) Познато је q . Одреди p .
7. У току године цена сулундара је повећана два пута по 50%. Пред Нову годину су се сулундари на распродаји продавали у пола цене. За колико су се продавали сулундари пред Нову годину, ако је на почетку године цена била 80 динара?
8. Утврди тачност следећег тврђења:
У овој реченици 70% цифара су дељиве са 2, 60% су дељиве са 3, а 40% су дељиве и са 2 и са 3.

**Статијата прв пат е објавена во списанието Математички
лист на ДМ на Србија**