ОЛИМПИСКИ ЗАДАЧИ ОД ТЕОРИЈА НА БРОЕВИ

Самоил Малчески[1], Даниел Велинов[2]
[1]Меѓународен Славјански Универзитет во Свети Николе
[2]Градежен факултет Скопје, Универзитет „Св. Кирил и Методиј “ во Скопје

Задачите од областа на теоријата на броеви кои се појавуваат на математичките олимпијади се значаен дел во истражувањето на заедничките и занимливи поединечни својства на целите броеви. Овие проблеми често се наоѓаат надвор од конвенционалните аритметички операции, истражувајќи деливост, модуларна аритметика и напредни својства резултати поврзани со простите броеви. Различните видови задачи што се појавуваат на олимпијадите од областа на теоријата на броеви ги поттикнуваат натпреварувачите да развиваат креативни вештини за решавање проблеми и да изградат длабоки познавања за основните принципи од оваа област од математиката.

Овие задачи често бараат од учениците да користат различни техники како манипулации со изрази, индукција и модуларна аритметика, демонстрирајќи ја разнообразноста и елеганцијата на теоријата на броеви. Задачите во теоријата на броеви на олимпијадите често се инспирирани од класични теореми и резултати, предизвикувајќи ги учесниците да применуваат своите знаења на нови и иновативни начини.

Во суштина, со решавање на задачите во областа на теоријата на броеви на олимпијадите, не само што се зголемуваат математичките вештини, туку и се креира длабоко восхитување за елеганцијата и значењето на својствата на целите броеви.

Задача 1. Нека p и $q=4p+1$ се прости броеви и нека $x^2\equiv 2(\mathrm{mod}\, q)$. Да се најде бројот на решенија за x по модул q.

Решение. Очигледно $p\neq 2$, т.е. $p\geq 3$ и $q\geq 13$. Бидејќи $q\equiv 1(\mathrm{mod}\, 4)$, постои цел број a, така што $a^2\equiv -1(\mathrm{mod}\, q)$ (на пример, $a=(\frac{q-1}{2})!$, што лесно следува од теоремата на Вилсон). Нека $b=a+1$. Тогаш $b^2=a^2+1+2a\equiv 2a(\mathrm{mod}\, q)$ и $b^4\equiv 4a^2\equiv -4(\mathrm{mod}\, q)$. Оттука и од теоремата на Ферма $1\equiv b^{q-1}=b^{4p}\equiv(-4)^p\equiv -2^{2p}(\mathrm{mod}\, q)$, т.е. $2^{2p}\equiv -1(\mathrm{mod}\, q)$. Да забележиме дека овој резултат може да се добие и со користење на теоријата на квадратни остатоци.

Бараниот број n го дели $q-1=4p$, но n не го дели $2p$, бидејќи 2^{2p} не е конгруентно со 1 по модул q. Останува $n=4$ или $n=4p$, но $n\neq 4$, 2^4 не е конгруентно со 1 по модул q. Следува $n=4p=q-1$.

Задача 2. За даден природен број n нека a е најголемиот природен број за кој бројот 5^n-3^n е делив со 2^a и нека b е најголемиот природен број таков што $2^b\leq n$. Докажи дека $a\leq b+3$

Решение. За дадениот природен број, нека со $f(n)$ го означиме најголемиот природен број таков што 5^n-3^n е делив со $2^{f(n)}$. Потребно е да докажеме дека $f(n)\leq b+3$.

Најпрво ќе докажеме дека $f(2^n)=n+3$. Доказот ќе го дадеме со помош на принципот на математичка индукција.

За $n=1$, најголемиот степен на бројот 2 кој го дели бројот $5^{2^1}-3^{2^1}=16$, што е всушност 2^4, па $f(2^1)=4$.

Нека претпоставиме дека тврдењето важи за $n=k$.

За $n=k+1$, нека го разгледаме најголемиот степен кој го дели бројот $5^{2^{k+1}}-3^{2^{k+1}}$. Тој број можеме да го запишеме на следниов начин

$$5^{2^{k+1}}-3^{2^{k+1}}=5^{2^k\cdot 2}-3^{2^k\cdot 2}=(5^{2^k}-3^{2^k})(5^{2^k}+3^{2^k}).$$

Од индуктивната претпоставка, најголемиот степен на бројот 2 кој го дели изразот во првата заграда е $f(2^k)=k+3$, додека најголемиот степен на бројот 2 кој го дели изразот во втората заграда е 2^1. Имено, $5\equiv 1(\text{mod}\,4)$, па затоа $5^{2^k}\equiv 1(\text{mod}\,4)$. Од друга страна, $3\equiv -1(\text{mod}\,4)$, па затоа $3^{2^k}\equiv 1(\text{mod}\,4)$. Оттука, $5^{2^k}+3^{2^k}\equiv 2(\text{mod}\,4)$, што значи дека тој број е делив со 2, но не е делив со 4. Следува дека $f(2^{k+1})=f(2^k)+1=k+4$, што и требаше да се докаже.

Нека сега $n=2^m\cdot k$, за некој ненегативен цел број m и непарен природен број k. Очигледно, $2^m\leq n$, па $m\leq b$. Сега, имаме

$$5^n-3^n=5^{2^m\cdot k}-3^{2^m\cdot k}=(5^{2^m}-3^{2^m})\cdot\sum_{i=0}^{k-1}(5^{2^m})^i(3^{2^m})^{k-1-i}.$$

Секој од множетелите во сумата на десната страна е непарен, па целата сума е непарна бидејќи е сума од непарен број непарни членови. Па, најголемиот степен на бројот 2 кој го дели целиот производ е еднаква на најголемиот степен кој ја дели првата заграда. Заклучуваме дека $f(n) = f(2^m)$. Сега имаме

$$f(n) = f(2^m) = m + 3 \leq b + 3,$$

што и требаше да се докаже.

Задача 3. Докажи дека не постои бесконечна низа од прости броеви $p_0, p_1, p_2, \ldots$ така што за секој природен број k важи

$$p_k = 2p_{k-1} + 1 \qquad \text{или} \qquad p_k = 2p_{k-1} - 1.$$

Решение. Нека претпоставиме дека таква низа постои.

Означуваме $p = p_0$. Со проверка лесно се покажува дека p мора да биде поголем од 3. Па, мора да важи $p \equiv 1 (\bmod 3)$ или $p \equiv 2 (\bmod 3)$.

Претпоставуваме $p \equiv 1 (\bmod 3)$. Тогаш $2p + 1$ е делив со 3, па мора да важи $p_1 = 2p - 1$ и $p_1 \equiv 1 (\bmod 3)$. Индуктивно заклучуваме дека $p_k \equiv 1 (\bmod 3)$, $p_{\kappa+1} = 2p_k - 1$, односно

$$\begin{aligned} p_k &= 2p_{k-1} - 1 = 2(2p_{k-2} - 1) - 1 = \ldots \\ &= 2^k p - 1 - 2 - \ldots - 2^{k-1} \\ &= 2^k p - (2^k - 1), k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Бидејќи $p > 3$, од малата теорема на Ферма имаме $2^{p-1} \equiv 1 \ (\bmod\ 3)$, т.е. $p \mid 2^{p-1} - 1$, па p_{p-1} е делив со p, што е контрадикција.

Во случај кога $p \equiv 2 (\bmod 3)$ аналогно мора да важи $p_{k+1} = 2p_k + 1$, т.е. $p_k = 2^k p + (2^k - 1)$, па повторно заклучуваме дека p_{p-1} е делив со p, што е контрадикција.

Конечно, заклучуваме дека таква низа на постои.

Задача 4. Докажи дека не постои прост број p и природни броеви a и n ($n \geq 2$), така што важи

$$2^p + 3^p = a^n.$$

Решение. Ако $p = 2$, тогаш $2^p + 3^p = 13$, па имаме $n = 1$, што е во спротивност со условите на задачата.

Нека претпоставиме дека $p>2$ и нека $2^p+3^p=a^n$, за некој природен број $n>1$. Бидејќи p е непарен број, тогаш

$$a^n=2^p+3^p=(2+3)(2^{p-1}-2^{p-2}\cdot 3+...-2\cdot 3^{p-2}+3^{p-1}),$$

па a е делив со 5. Па, бројот на десната страна е делив со 5^n. Бидејќи $n>1$, тој број е делив (барем) со 25, па заклучуваме дека изразот во втората заграда на десната страна мора да биде делив со 5.

Имајќи предвид дека $3\equiv -2(\bmod 5)$, имаме

$$\begin{aligned}2^{p-1}-2^{p-2}\cdot 3+...-2\cdot 3^{p-2}+3^{p-1} &\equiv 2^{p-1}+2^{p-2}\cdot 2+...+2\cdot 2^{p-1}+2^{p-1}\\ &\equiv p\cdot 2^{p-1}(\bmod 5).\end{aligned}$$

Следува дека p е делив со 5, а бидејќи p е прост број, ни останува можноста $p=5$. Но,

$$2^5+3^5=275=5^2\cdot 11,$$

што не е број од обликот a^n, за $n>1$.

Задача 5. Најди ги сите парови (p,q) прости броеви за кои бројот

$$p^{q+1}+q^{p+1}$$

е полн квадрат.

Решение. За $p=q=2$, имаме $p^{q++1}+q^{p+1}=2^3+2^3=16$, па $(2,2)$ е еден пар кој е решение на задачата.

Нека претпоставиме дека барем еден од броевите p и q е непарен и без губење на општоста, нека тоа е p. Нека $p^{q+1}+q^{p+1}=x^2$, каде $x\in\mathbb{N}$. Па, $p+1$ е парен па може да се запише како

$$p^{q+1}=(x-q^{\frac{p+1}{2}})(x+q^{\frac{p+1}{2}}).$$

Нека со d го означиме најголемиот заеднички делител на множителите на десната страна. Ако $d>1$, па тогаш d мора да биде степен од p и d е воедно и делител на $2x$. Лесно се гледа дека тогаш $p\,|\,q$, па $p=q$. Сега добиваме дека $2p^{p+1}=x^2$ што не е можно.

Па, $d=1$, $x-q^{\frac{p+1}{2}}=1$, $x+q^{\frac{p+1}{2}}=p^{q+1}$ и

$$2q^{\frac{p+1}{2}}=p^{q+1}-1.$$

Горната равенка не може да важи за непарни броеви q, бидејќи $2q^{\frac{p+1}{2}} \equiv 2 \pmod 4$ и $p^{q+1} - 1 \equiv 0 \pmod 4$. Заклучуваме дека $q = 2$ и

$$2^{\frac{p+3}{2}} = p^3 - 1 = (p-1)(p^2 + p + 1).$$

Бидејќи $\mathrm{NZD}(p-1, p^2 + p + 1) = 1$ добиваме дека $p - 1 = 1$, што е контрадикција со претпоставката дека p е непарен.

Задача 6. Нека n е непарен природен број поголем од 3. Нека го означиме со k, најмалиот природен број таков што $kn+1$ е полн квадрат и нека означиме со l најмалиот природен број таков што $l \cdot \mathrm{n}$ е полн квадрат. Докажи дека бројот n е прост ако и само ако важи $k > \frac{1}{4}n$ и $l > \frac{1}{4}n$.

Решение. Директна насока. Ако $n = p$ е прост, тогаш и $l = p$, па $l > \frac{n}{4}$. За k важи: $kp = (y-1)(y+1)$, па $y - 1 = k_1$, $y + 1 = k_2 p$ или $y - 1 = k_1 p$, $y + 1 = k_2$. Во секој случај, со собирање на овие две равенства добиваме $2y > p$. Ако би важело $4k \le p$, (односно $4k < p$, бидејќи p е прост) тогаш би имале $y^2 = kp + 1 < \frac{p^2}{4} + 1$, односно $p^2 < 4y^2 < p^2 + 4$. Ова не е можно бидејќи помеѓу p^2 и $p^2 + 4$ нема полни квадрати.

Обратна насока. Ќе докажеме дека не е можно да важи $4l > n$ и $4k > n$ и да n не е прост. Нека претпоставиме спротивно, нека тоа важи за некој сложен природен број n. Оние прости множители кои имаат парни степени ги ставаме под x, па имаме:

$$n = x^2 \cdot p_1{}^2 \cdot \ldots \cdot p_s{}^{a_s}.$$

Тогаш $l = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_s$.

Имаме

$$4p_1 \cdot \ldots \cdot p_s = 4l > n = x^2 \cdot p_1{}^{a_1} \cdot \ldots \cdot p_s{}^{a_s} \ge x^2 p_1 \cdot \ldots \cdot p_s,$$

па затоа $x^2 < 4$, од каде $x = 1$.

Ако некој $a_i > 1$, тогаш $a_i \ge 3$ (бидејќи сите парни степени се ставени во x). Тогаш важи

$$4p_1 \cdot \ldots \cdot p_s = 4l > n = p_1{}^{a_1} \cdot \ldots \cdot p_s{}^{a_s} \ge p_i{}^2 \cdot p_1 \cdot \ldots \cdot p_s,$$

т.е. $p_i^2 < 4$, што не е можно. Затоа $n = p_1 \cdot ... \cdot p_s$.

Нека со y го означиме најмалиот природен број поголем од 1 така што $y^2 - 1$ е деливо со n (таков сигурно постои бидејќи $(n+1)^2 - 1$ е деливо со n). Очигледно, $kn + 1 = y^2$, и лесно се гледа дека $k > \frac{n}{4}$ што е еквивалентно со $2y > n$.

Нека сега означиме $n = pr$, каде $p = p_i$, за некој i, а r е производ од сите p_j, за $j \neq i$. Од претпоставката дека n е сложен следува дека $r > 1$.

Нека T е број таков што $T \equiv 1 (\bmod r)$, $T \equiv -1 (\bmod p)$, $0 \leq T < n$. Од Кинеската теорема за остатоци следува дека постои единствен таков број. Да го разгледаме бројот $S = n - T$. Важи $S \equiv -1 (\bmod r)$, $S \equiv 1 (\bmod p)$ и $T^2 \equiv S^2 \equiv 1 (\bmod n)$. Па T и S се кандидати за y. А еден од нив е помал од $\frac{n}{2}$. Затоа, $k < \frac{n}{4}$, што е контрадикција.

Задача 7. Нека a, b, c се различни природни броеви и нека r, s, t се природни броеви така што важи

$$ab + 1 = r^2, \qquad ac + 1 = s^2, \qquad bc + 1 = t^2.$$

Докажи дека не може сите три дропки $\frac{rs}{t}$, $\frac{rt}{s}$, $\frac{st}{r}$ да бидат природни броеви.

Решение. Нека претпоставиме спротивно, т.е. дека сите сите три дропки $\frac{rs}{t}$, $\frac{rt}{s}$, $\frac{st}{r}$ се природни броеви. Да забележиме дека без губење на општоста можеме да претпоставиме дека $a < b < c$. Бидејќи $\frac{rs}{t}$ е природен број, и $\frac{r^2 s^2}{t^2}$ е природен број, односно

$$\frac{r^2 s^2}{t^2} = \frac{a^2 bc + ab + ac + 1}{bc + 1} = a^2 + \frac{ab + ac + 1 - a^2}{bc + 1}$$

е исто така природен број. Од $a < b < c$ следува

$$ab + ac + 1 - a^2 > ac + 1 = s^2 > 0.$$

Со ова заклучуваме дека броителот и именителот на горната дропка се позитивни, па мора да важи

$$ab + ac + 1 - a^2 \geq bc + 1,$$

од каде следува

$$(b - a)(c - a) \leq 0,$$

што е контрадикција.

Задача 8. Докажи дека за секој природен број $n \geq 2$ постојат природни броеви $a_1, a_2, ..., a_n$ така што за сите $1 \leq i < j \leq n$, $\frac{a_j + a_i}{a_j - a_i}$ е природен број.

Решение. Тврдењето ќе го докажеме со помош на математичка индукција по n. За множеството $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ од природни броеви ќе велиме дека е добро ако го задоволува условот на задачата.

За $n = 2$, множеството $\{1, 2\}$ очигледно е добро. Нека претпоставиме дека за некој природен број $n \geq 2$, постои добро множество $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$. Нека a е најмалиот заеднички содржател на множеството

$$\{a_1, a_2, ..., a_n\} \cup \{a_j - a_i : 1 \leq i < j \leq n\}.$$

Тврдиме дека множеството $\{a, a + a_1, a + a_2, ..., a + a_n\}$, кое има $n + 1$ елементи, е исто така добро. Да забележиме дека, за секој $i \in \{1, 2, ..., n\}$,

$$\frac{(a+a_i)+a}{(a+a_i)-a} = \frac{2a+a_i}{a_i} = 2\frac{a}{a_i} + 1,$$

што е природен број, бидејќи бројот a по својата дефиниција е делив со a_i.

Исто така, за сите $1 \leq i < j \leq n$,

$$\frac{(a+a_j)+(a+a_i)}{(a+a_j)-(a+a_i)} = \frac{2a+(a_j+a_i)}{a_j - a_i} = 2\frac{a}{a_j - a_i} + \frac{a_j + a_i}{a_j - a_i},$$

што повторно е природен број.

Задача 9. Одреди ги сите природни броеви $n \geq 2$ за кои важи:

За било кои цели броеви $a_1, a_2, ..., a_n$, чиј збир не е делив со n, постои $i \in \{1, 2, ..., n\}$ така што ниту еден од n-те броеви

$$a_i, \ \ a_i + a_{i+1}, ..., a_i + a_{i+1} + ... + a_{i+n-1}$$

не е делив со n, при што за $i > n$ дефинираме $a_i = a_{i-n}$.

Решение. Бараните броеви се прости броеви. Нека n е сложен број, т.е. $n = ab$, каде $a \geq 2$ и $b \geq 2$ се природни броеви. Нека ја разгледаме низата

$$0, b, b, ..., b,$$

во која бројот b се појавува $ab - 1$ пати. Збирот на сите броеви во таа низа е $ab^2 - b$, што не е делив со $n = ab$. Но, да забележиме дека, од било кое место да појдеме, збирот на a (односно $a+1$, ако го сметаме и бројот 0) последователни броеви во таа низа ќе биде еднакви на ab, т.е. ќе биде делив со $n=ab$.

Нека $n=p$ е прост број. Нека претпоставиме спротивно, т.е да постојат цели броеви $a_1,a_2,...,a_p$, чиј збир не е делив со p така што за секој $i\in\{1,...,p\}$ постои $j\in\{i+1,...,i+p-1\}$ така што бројот $a_i+a_{i+1}+...+a_{j-1}$ е делив со p. Сите операции над индексите ги вршиме така што имаме во предвид дека $a_i=a_{i-p}$, за $i>p$.

Нека ги замислиме сите броеви $a_1,a_2,...,a_p$ како темиња на граф во кој две темиња се поврзани со насочен раб (ребро) $a_i\to a_j$ доколку збирот $a_i+a_{i+1}+...+a_{j-1}$ е делива со p. Според претпоставката дека секое теме има барем еден излезен раб, и бидејќи имаме конечно многу темиња, заклучуваме дека графот има циклус.

Нека го разгледаме циклусот и нека ги разгледаме сите суми кои одговараат на рабовите на тој циклус. Да забележиме дека секој од броевите $a_1,a_2,...,a_p$ во тие суми се појавува еднакво многу пати и нека го означиме тој број на повторувања со k. Исто така, во тој циклус имаме највеќе p рабови, а за секој раб сумата која одговара има највеќе $p-1$ членови, затао што сумата на сите броеви во почетната низа не е делива со p. Па, затоа, $k\le p-1$. Но, секоја од тие суми по должината на рабовите е делива со p, па сумата на сите броеви е делива со p, односно

$$p\,|\,k(a_1+a_2+...+a_p).$$

Ова е контрадикција бидејќи од $k<p$ важи p не е делител на k и p не е делител на $a_1+a_2+...+a_p$.

Задача 10. Нека m и n се природни броеви такви што $m>n$. Нека означиме

$$x_k=\tfrac{m+k}{n+k},$$

за $k=1,2,...,n+1$. Ако сите броеви $x_1,x_2,...,x_{n+1}$ се природни броеви, докажи дека бројот $x_1x_2\cdot...\cdot x_{n+1}-1$ е делив со некој непарен прост број.

Решение. Нека препоставиме дека $x_1,x_2,...,x_{n+1}$ се природни броеви. Дефинираме

$$a_k = x_k - 1 = \frac{m+k}{n+k} - 1 = \frac{m-n}{n+k} > 0,$$

за $k = 1, 2, ..., n+1$, кои се исто така природни броеви.

Нека $P = x_1 x_2 \cdot ... \cdot x_{n+1} - 1$. Треба да докажеме дека P е делив со некој непарен прост број, т.е. P не е степен на 2. За да го докажеме ова, ќе разгледаме со кои степени на 2 се деливи броевите a_k.

Нека 2^d е најголемиот степен на 2 кој го дели $m-n$, а 2^c е најголемиот степен на 2, кој не е поголем од $2n+1$. Тогаш $2n+1 \le 2^{c+1} - 1$, па затоа $n+1 \le 2^c$. Можеме да заклучиме дека 2^c е еден од броевите $n+1, n+2, ..., 2n+1$ и тоа е единствениот содржател на 2^c, кој се појавува помеѓу тие броеви. Нека l е таков што $n + l = 2^c$. Бидејќи $\frac{m-n}{n+l}$ е природен број, следува $d \ge c$. Оттука, 2^{d-c+1} не е делител на $a_l = \frac{m-n}{n+l}$, Но,

$$2^{d-c+1} \mid a_k \text{ за сите } k \in \{1, 2, ..., n+1\} \setminus \{l\}.$$

Сметајќи по модул 2^{d-c+1}, добиваме

$$P = (a_1 + 1)(a_2 + 1) \cdot ... \cdot (a_{n+1} + 1) - 1 \equiv (a_l + 1) \cdot 1^n - a \equiv a_l (\text{mod}\, 2^{d-c+1}),$$

при што a_l не е конгруентно со 0, по модул 2^{d-c+1}. Следува, 2^{d-c+1} не е делител на P.

Од друга страна, за секој $k \in \{1, 2, ..., n+1\} \setminus \{l\}$, важи $2^{d-c+1} \mid a_k$, Па,

$$P \ge a_k \ge 2^{d-c+1},$$

и следува дека P не може да биде степен со основа 2.