Методи Главче, Скопје
Катерина Аневска, Скопје

РЕШАВАЊЕ КОНСТРУКТИВНИ ЗАДАЧИ СО ПОМОШ НА ПИТАГОРОВАТА ТЕОРЕМА

При решавањето на конструктивните задачи имаме четири чекори: анализа, конструкција, доказ и дискусија. Воанализата се претпоставува дека задачата е решена, па се бара врска меѓу зададените елементи и елементите со чија помош може да се направи бараната конструкција. Во конструкцијата се опишува постапката со која се добива бараната фигура. Во следниот чекор се докажува дека фигурата која сме ја конструирале е бараната фигура и во дискусијата се разгледува решливоста на задачата и можниот број решенија во зависност од односот на зададените елемента. Во следните примери ќе покажеме некои чекори на решавање конструктивни задачи во кои се применува Питагоровата теорема.

Пример 1. Дадени се квадрати со должини на страни a и b. Конструирај квадрат чија плоштина е еднаква на збирот на плоштините на дадените квадрати.

Решение. *Анализа*. Нека x е должината на страната на бараниот квадрат. Според условот на задаќата треба да важи равенството $x^2 = a^2 + b^2$, што значи дека страната на бараниот квадрат е еднаква на хипотенузата на правоаголниот триаголникос катети a и b.

Конструкција. Конструираме правоаголен триаголник со катетаи a и b. Над хипотенузата како на д страна конструираме квадрат и тоа е бараниот квадрат.

Доказ. Непосредно следува од анализата и коснтрукцијата.

Дискусија. Бидејќи постои само еден правоаголен триаголник со зададените катети a и b, задачата има единствено решение. ■

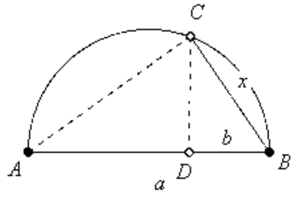
Пример 2. Конструирај геометриска средина на отсечки со должини a и b, $a > b$.

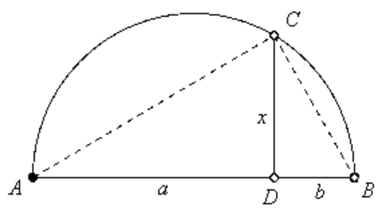
Решение. *Анализа*. Геометриската средина на отсечките a и b е отсечка x за која важи $a : x = x : b$. Според Евклидовата теорема x може да биде:

1) катета на правоаголен триаголник со катета a, а b е нормалната проекција на таа катета на хипотенузата,

2) висина на правоаголен триаголник на кој a и b се нормалните проекции на на хипотенузата.

Конструкција. *Прв начин*: На дадена отсечка AB, $\overline{AB} = a$ како над дијаметар конструираме полукружница. На AB наоѓаме точка D за која важи $\overline{BD} = b$. Сега од точката D конструираме нормала на AB до пресекот со полукружницата и во пресекот ја добиваме точката C. Отсечката $\overline{BC} = \sqrt{ab}$ е бараната геометриска средина (цртеж лево долу)





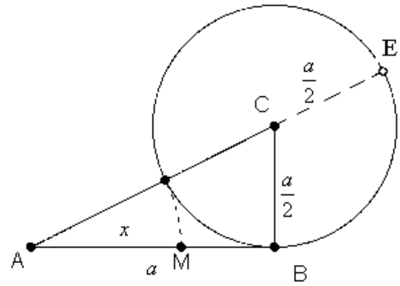
Втор начин. Над отсечката $AB, \overline{AB} = a + b$, како над дијаметар конструираме полукружница. Нека D е точка на AB таква што $\overline{AD} = a$. Во точката D конструираме нормала на AB и во пресекот со полукружницата ја наоѓаме точката C. Отсечката CD е бараната геометриска средина на a и b (цртеж десно)

Доказ. Во двата случаја непосредно следува од анализата и конструкцијата.

Дискусија. Задачата секога има едно и единствено решение.

Пример 3. Отсечка со должина a подели ја по златен пресек.

Решение. Според дефиницијата отсечката $AB, \overline{AB} = a$ е поделена по златен пресек на поголем дел x и помал дел $a - x$ ако важи $a : x = x : (a - x)$.

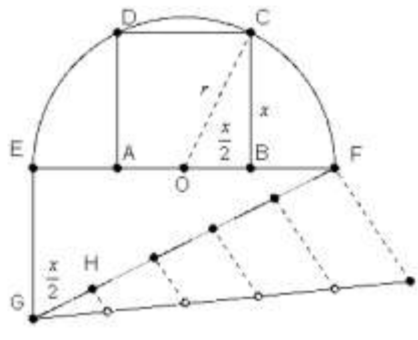


Конструкција. Во точката B на дадената отсечка конструираме нормала на AB. На оваа нормала наоѓаме точка C таква што $\overline{BC} = \frac{a}{2}$. Конструираме кружница со радиус $\frac{a}{2}$ и центар C. Оваа кружница ја сече отсечката AC во точката D за која важи $\overline{AD} = x$. Тачката M на отсечката AB ја определуваме така што $\overline{AM} = \overline{AD}$ (цртеж десно).

Доказ. Според Питагоровата теорема добиваме $\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2$, односно $(x + \frac{a}{2})^2 - (\frac{a}{2})^2 = a^2$, па затоа $x^2 + ax = a^2$. Од последното равенство следува $x^2 = a^2 - ax$, односно $x^2 = a(a - x)$, па затоа $a : x = x : (a - x)$. Да забележиме дека x изразено преку a е

$$x = \overline{AC} - \overline{CD} = \sqrt{a^2 + (\tfrac{a}{2})^2} - \tfrac{a}{2} = \tfrac{a}{2}(\sqrt{5} - 1)\ . \blacksquare$$

Пример 4. Во дадена полукружница со радиус r впиши квадрат.



Решение. Нека дадената полукружница k има центар O и радиус r и нека во неа е впишан бараниот квадрат $ABCD$ (цртеж десно). Нека страната на тој квадрат е x. Имаме $\overline{OA} = \overline{OB} = \frac{x}{2}$ и од Питагоровата теорема следува $r^2 = x^2 + (\frac{x}{2})^2$, па затоа $\frac{x}{2} = \frac{r\sqrt{5}}{5}$.

Конструкција. Треба да ја конструираме отсечката $\frac{x}{2}$. Прво ја конструираме отсечката $x_1 = \sqrt{(2r)^2 + r^2}$ така што на дијаметарот на полукружницата во точката E конструираме нормала и на неа определуваме точка G таква што $\overline{EG} = r$. Хипотенузата FG е еднаква на отсечката x_1. Ја делиме отсечката FG на пет еднакви делова и добиваме $\overline{GH} = \frac{x}{2} = \frac{1}{5}\overline{GF} = \frac{r\sqrt{5}}{5}$. Сега GF ја нанесуваме од точката O на отсечката EF од двете страни на O и така ги добиваме точките A и

B. Нормалите од A и B на EF ја сечат полукружницата во D и C. Квадратот $ABCD$ е бараниот квадрат.

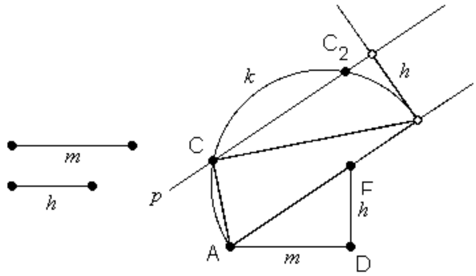
Доказ. Триаголникот EFG по конструкција е правоаголен, па од Питагоровата теорема следува $\overline{FG} = r\sqrt{5}$. Исто така, по коснтрукција $\overline{GH} = \frac{1}{5}\overline{GF}$, т.е. $\frac{x}{2} = \frac{r\sqrt{5}}{5}$. На крајот $\overline{AB} = 2\frac{x}{2} = x$ е нормална и еднаква на $\overline{BC}$. ■

Пример 5. Конструирај правоаголен триаголник ако се дадени висината h која соодветствува на хипотенузата и разликата на катетите m.

Решение. *Анализа*. Ќе ја определиме должината c на хипотенузата на триаголникот ABC. Го квадрираме равенството $a-b=m$ и добиваме $a^2-2ab+b^2=m^2$. Но, $ab=ch$ и $a^2+b^2=c^2$, па затоа $c^2-2ch+h^2=h^2+m^2$, од каде добиваме $(c-h)^2=m^2+h^2$, т.е. $c=h+\sqrt{h^2+m^2}$.

Конструкција. Прво конструираме правоаголен ADF чии катети се $\overline{AD}=m$ и $\overline{DF}=h$ (цртеж десно). Значи, $\overline{AF}=\sqrt{h^2+m^2}$. Потоа на полуправата AF определуваме точка B таква што

$$\overline{AB}=h+\sqrt{h^2+m^2}=c.$$



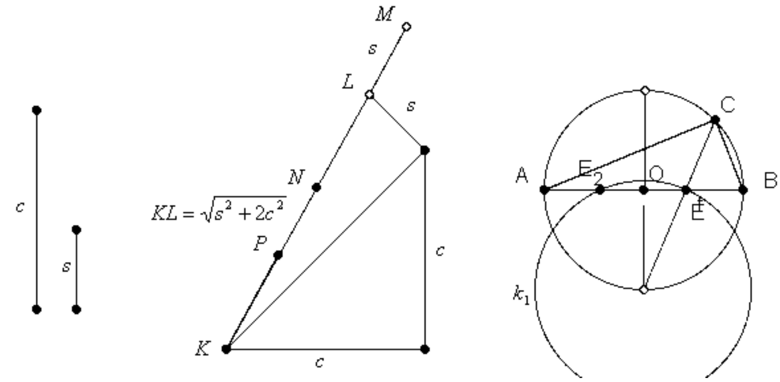
Над AB како над дијаметар конструираме полукружница k. Најпосле паралелно со AB на растојание h конструираме права p на онаа страна на AB на која е k. Имаме $p\cap k=\{C,C_2\}$. Решение на задачата се триаголниците ABC и ABC_2.

Доказ. Непосредно следува од анализата и конструкцијата.

Дискусија. Задачата има решение ако $h\le\frac{c}{2}$, т.е. $h\le\frac{h+\sqrt{h^2+m^2}}{2}$, што значи $\frac{h}{2}\le\frac{\sqrt{h^2+m^2}}{2}$. Условот е исполнет, па затоа задачата има решеиние за произволни h и m. Решението е единствено бидејќи триаголниците ABC и ABC_2 се складни. ■

Пример 6. Конструирај правоаголен триаголник ако му се познати должините на хипотенузата c и на симетралата на правиот агол s.

Решение. *Анализа*. Нека претпоставиме дека задачата е решена, т.е. дека е конструиран бараниот триаголник ABC. Нека кружницата $k(O,\frac{c}{2})$ е опишана околу $\triangle ABC$ и нека E и F се точките во кои симетралата на правиот агол ги сече хипотенузата и лакот AB (види цртеж). Земаме $\overline{FC}=x$. Триаголниците EOF и DCF се слични, па затоа $x:c=\frac{c}{2}:(x-s)$, односно $2x^2-2sx-c^2=0$. Последната равенка е еквивалентна со равенката $x^2-sx-\frac{c^2}{2}=0$, т.е. со равенката $(x-\frac{s}{2})^2-\frac{s^2+2c^2}{4}=0$, чие решение е $x=\frac{s+\sqrt{s^2+2c^2}}{2}$.



Конструкција. Користејќи ја Питагоровата теорема прво ја конструираме отсечката $\overline{KN}=x$, а потоа отсечката $\overline{KP}=x-s$ (види цртеж). Над дијаметарот AB ја конструираме опишаната кружница k. ВО центарот O на дијаметарот конструираме нормала која опишаната кружница ја сече во точките D и F.Сега ја конструираме кружницата $k_1(F,x-s)$ која дијаметарот AB го сече во точките E и E_2. Правата FE по вторпат ја сече кружницата k во точката C, со што $\triangle ABC$ е конструиран. Правата FE_2 по вторпат ја сече кружницата k во точка C_2 па добиваме решение $\triangle ABC_2$ кој е складен со $\triangle ABC$.

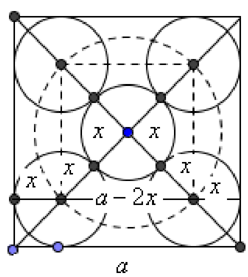
Доказ. По конструкција $\triangle ABC$ е правоаголен и $\overline{AB}=c$. Полуправата CF го полови лакот AB па затоа е симетрала на правиот агол. Исто така важи $\overline{CE}=\overline{CF}-\overline{FE}=x-(x-s)=s$.

Дискусија. Кружницата k_1 го сече дијаметарот AB во точките E и E_2, кои се симетрични во однос на O ако $\overline{FE}=\frac{\sqrt{s^2+2c^2}-s}{2}\geq\frac{c}{2}$, односно $c\geq 2s$. Ако последниот услов е исполнет, тогаѓ задачата има единствено решени (Зошто?). ■

Пример 7. Во квадрат со страна a впиши пет еднакви кружници така што четири од нив допираат по две страни на квадрато, а петтата ги допира преостанатите четири кружници.

Решение. *Анализа*. Центрите на кружниците мора да припаѓаат на дијагоналите на квадратот (Зошто?). Нека нивниот радису е еднаков на x. Центрите на трите долни кружници формираат рамнокрак правоаголен триаголник со должина на катета $2x$ и хипотенуза $a-2x$. Сега, од Питагоровата теорема следува

$$(2x)^2+(2x)^2=(a-2x)^2 \text{, т.е. } 4x^2+4ax-a^2=0.$$



Од последната равенка добиваме $(2x+a)^2=2a^2$, односно $x=\frac{a\sqrt{2}-a}{2}$.

Конструкцијата и доказот непосредно следуваат од анализата. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

Задачата има едно и единствено решение. ■

ЗАДАЧИ ЗА САМОСТОЈНА РАБОТА

Во претходните разгледувања се осврнавме на некои примени на Питагоровата теорема при решавање на конструктивни задачи. Изборот на разгледаните примери е направен се со цел да се пополни јазот кој се јавува меѓу нивото на знаењата со кои учениците се стекнуваат во основното образование и потребното ниво на знаења и умеења за успешно продолжување на средното образование. Имајќи го претход кааото на читателот му препорачуваме самостојно да се обиде да ги реши следниве задачи.

Задача 1. Конструирај квадрат чија плоштина е еднаква на плоштината на даден правоаголник.

Задача 2. Конструирај правоаголен триаголник за кој се дадени проекциите p и q на катетите врз хипотенузата.

Задача 3. Конструија правоаголен триаголник за кој се дадени хипотенузата и радиусот на впишаната кружница.

Задача 4. Конструирај правоаголен триаголник за кој е дадена едната катета и проекцијата на другата катета врз хипотенузата.

Задача 5. Конструирај квадрат чија плоштина е еднаква на разликата на плоштината на даден квадра и даден правоаголник.

Упатство. Нека a е должината на страната на дадеиот квадрат, а b,c се должините на страните на дадениот правоаголник. Должината на страната на бараниот квадрат е $x=\sqrt{a^2-bc}=\sqrt{a^2-\sqrt{bc}^2}$. Според тоа, прво треба да се конструира геометриската средина на отсечките b и c, а потоа втората катета на правоаголниот триаголник со хипотенуза a и катета $\sqrt{bc}$. Јасно, задачата има единствено решение ако и само ако $a>\sqrt{bc}$.

Задача 6. Нека a и b се должини на дадени отсечки. Конструирај отсечка со должина $x=\sqrt[4]{a^4-b^4}$.

Упатство. Имаме: $x=\sqrt[4]{a^4-b^4}=\sqrt[4]{(a^2-b^2)(a^2+b^2)}=\sqrt{\sqrt{a^2-b^2}\cdot\sqrt{a^2+b^2}}$.

Според тоа, прво ги коструираме отсечките со должини $\sqrt{a^2-b^2}$ и $\sqrt{a^2+b^2}$, а потоа нивната геометриска среднıа, со што ја добиваме бараната отсечка.

Задача 7. Конструирај квадрат чија плоштина е еднаква на плштината на даден рамностран триаголник.

Задача 8. Конструирај квадрат чија плоштина е еднаква на збирот на плоштините на два дадени правоаголника.

Задача 9. Конструирај рамностран триаголник чија плоштина е еднаква на разликата на плоштините на два рамнострани триаголника.

Задача 10. Конструирај правилен: а) десетаголник, б) петаголник.

Задача 12. Нека се дадени отсечки со должини a,b,c . Конструирај отсечка со должина $x=\frac{a\sqrt{ab+c^2}}{b+c}$.

Задача 13. Конструирај квадрат со плоштина еднаква на плоштината на даден триаголник.

Задача 14. Даден е триаголник ABC . Околу темињата на триаголникот ABC опиши кружници кои две по две надворешно се допираат.