

## Primjena Cauchy–Schwartz–Buniakowsky-jeve nejednakosti u geometriji

ILIJA ILIŠEVIĆ\*

**Sažetak.** U radu je obrađena Cauchy–Schwartz–Buniakowsky-jeva nejednakost. Spomenuta nejednakost primijenjena je na rješavanje različitih zadataka namijenjenih učenicima srednjih škola.

**Ključne riječi:** nejednakosti, Cauchy–Schwartz–Buniakowsky-jeva nejednakost

**Abstract.** The article deals with the Cauchy–Schwartz–Buniakowsky inequality. The mentioned inequality is applied to solving various tasks designed for high-school pupils.

**Key words:** inequalities, Cauchy–Schwartz–Buniakowsky inequality

Nejednakost o kojoj će biti riječi zove se Cauchyjeva<sup>1</sup> ili Cauchy–Schwartzova<sup>2</sup> ili Cauchy–Buniakowsky<sup>3</sup> ili Cauchy–Schwartz–Buniakowsky-jeva nejednakost. Usvojiti ćemo posljednji naziv (kraće, CSB-nejednakost). Izreći ćemo ovu nejednakost, dokazati je i primijeniti na nekoliko geometrijskih zadataka.

**Teorem [CSB-nejednakost].** Neka su  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  i  $(b_1, b_2, \dots, b_n)$  dvije  $n$ -torke realnih brojeva. Tada vrijedi

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right). \quad (1)$$

Pri tome jednakost u (1) vrijedi ako i samo ako su  $n$ -torke razmjerne, tj. ako i samo ako je  $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$ .

**Dokaz.** Promotrimo kvadratnu funkciju  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definiranu formulom

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=1}^n (a_k x + b_k)^2 \\ &= (a_1 x + b_1)^2 + (a_2 x + b_2)^2 + \dots + (a_n x + b_n)^2 \\ &= (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)x^2 + 2(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)x \\ &\quad + (b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \\ &= \left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right)x^2 + 2\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k\right)x + \left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right). \end{aligned} \quad (2)$$

\*III. gimnazija, Kamila Firingera 14, HR-31000 Osijek

<sup>1</sup>A. L. Cauchy (1789–1857), francuski matematičar

<sup>2</sup>H. A. Schwartz (1843–1921), njemački matematičar

<sup>3</sup>V. J. Buniakowsky (1804–1889), ukrajinski matematičar

Kako je ova funkcija nenegativna ( $f(x) \geq 0$  za svaki  $x \in \mathbb{R}$ ), njena diskriminanta  $D$  ne može biti pozitivna, tj.

$$D = 4\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k\right)^2 - 4 \cdot \left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right) \leq 0,$$

odakle slijedi tražena nejednakost (1).

Iz (2) zaključujemo da jednakost u (1) vrijedi ako i samo ako postoji realan broj  $m$  takav da je  $b_k = ma_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , tj. ako su  $n$ -torke  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  i  $(b_1, b_2, \dots, b_n)$  razmjerne.  $\square$

Riješimo sada nekoliko zadataka.

**Zadatak 1.** Neka su  $a, b$  duljine kateta, a  $c$  duljina hipotenuze pravokutnog trokuta. Dokažite da vrijedi nejednakost

$$ab + bc + ca < 2c^2.$$

*Rješenje.* Prema CSB-nejednakosti je

$$\begin{aligned} & (ab + bc + ca)^2 \\ & \leq (a^2 + b^2 + c^2)(b^2 + c^2 + a^2) \\ & = (a^2 + b^2 + c^2)^2 = (c^2 + c^2)^2 = (2c^2)^2, \end{aligned}$$

odakle slijedi  $ab + bc + ca \leq 2c^2$ . Primijetimo da u prethodnoj nejednakosti ne može stajati znak jednakosti jer trojke  $(a, b, c)$  i  $(b, c, a)$  nisu razmjerne. Naime, kada bi one bile razmjerne, postojao bi neki realan broj  $m$  takav da je

$$a = mb, \quad b = mc, \quad c = ma.$$

Tada bismo imali

$$c^2 = m^2 a^2 = m^2 (m^2 b^2) = m^4 b^2 = m^4 (m^2 c^2) = m^6 c^2,$$

odakle bi slijedilo  $m = 1$ , a onda  $c = a$ , što bi bilo u suprotnosti s Pitagorinim poučkom. Dakle, vrijedi stroga nejednakost.

**Zadatak 2.** Neka je  $T$  točka unutar trokuta  $ABC$  i neka su  $x, y, z$  redom udaljenosti te točke od stranica  $a, b, c$  trokuta. Neka je  $R$  polumjer trokutu opisane kružnice. Dokažite da vrijedi

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \leq \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2R}},$$

pri čemu jednakost vrijedi ako i samo ako je trokut  $ABC$  jednakostraničan, a točka  $T$  središte trokutu opisane kružnice.

*Rješenje.* Prema CSB-nejednakosti je

$$\begin{aligned}
 & (\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z})^2 \\
 &= \left( \sqrt{ax} \cdot \sqrt{\frac{1}{a}} + \sqrt{by} \cdot \sqrt{\frac{1}{b}} + \sqrt{cz} \cdot \sqrt{\frac{1}{c}} \right)^2 \\
 &\leq ((\sqrt{ax})^2 + (\sqrt{by})^2 + (\sqrt{cz})^2) \cdot \left( \left(\sqrt{\frac{1}{a}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{1}{b}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{1}{c}}\right)^2 \right) \\
 &= (ax + by + cz) \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right),
 \end{aligned}$$

odakle slijedi

$$(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}) \leq \sqrt{ax + by + cz} \cdot \sqrt{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}},$$

pri čemu jednakost vrijedi ako i samo ako je

$$\frac{\sqrt{ax}}{\sqrt{\frac{1}{a}}} = \frac{\sqrt{by}}{\sqrt{\frac{1}{b}}} = \frac{\sqrt{cz}}{\sqrt{\frac{1}{c}}}$$

što je ekvivalentno sa  $a^2x = b^2y = c^2z$ . Kako je  $ax + by + cz = 2P$  i  $P = \frac{abc}{4R}$ , gdje je  $P$  površina trokuta  $ABC$ , to je  $ax + by + cz = \frac{abc}{2R}$ , pa imamo

$$\begin{aligned}
 & \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \\
 &\leq \sqrt{\frac{abc}{2R}} \cdot \sqrt{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}} \\
 &= \sqrt{\frac{abc}{2R}} \cdot \sqrt{\frac{bc + ac + ab}{abc}} = \sqrt{\frac{ab + bc + ca}{2R}}.
 \end{aligned}$$

Dalje, opet prema CSB-nejednakosti dobivamo

$$\sqrt{ab + bc + ca} \leq \sqrt{a^2 + b^2 + c^2},$$

pri čemu jednakost vrijedi ako i samo ako je  $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{a}$ , tj.  $a = b = c$ . Konačno imamo

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \leq \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2R}}.$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je  $a^2x = b^2y = c^2z$  i  $a = b = c$ , a to je ako i samo ako je  $a = b = c$  i  $x = y = z$ . Dakle, jednakost vrijedi ako i samo ako je trokut  $ABC$  jednakostraničan, a točka  $T$  središte kružnice upisane u taj trokut.

**Zadatak 3.** Uz uvjete zadatka 2, dokažite da vrijedi nejednakost

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \leq 3\sqrt{\frac{R}{2}}.$$

*Rješenje.* Najprije dokažimo nejednakost  $a^2 + b^2 + c^2 \leq 9R^2$ . Prema poučku o sinusima je  $a = 2R \sin \alpha$ ,  $b = 2R \sin \beta$ ,  $c = 2R \sin \gamma$ , pa je

$$\begin{aligned} & a^2 + b^2 + c^2 \\ &= 4R^2(\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma) \\ &= 4R^2\left(\frac{1 - \cos 2\alpha}{2} + \frac{1 - \cos 2\beta}{2} + 1 - \cos^2 \gamma\right) \\ &= 4R^2(2 - \cos(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta) - \cos^2(\alpha + \beta)) \\ &= 4R^2(2 - \cos(\alpha + \beta) \cdot 2\cos \alpha \cos \beta) \\ &= 4R^2(2 + 2\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma) = 8R^2(1 + \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma). \end{aligned}$$

Ako je trokut  $ABC$  tupokutan, onda je ili  $\cos \alpha < 0$ , ili  $\cos \beta < 0$ , ili  $\cos \gamma < 0$ , pa je  $\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma < 0$  i stoga  $a^2 + b^2 + c^2 < 9R^2$ . Za pravokutan trokut je  $a^2 + b^2 + c^2 = 8R^2$ . Neka je trokut  $ABC$  šiljastokutan. Tada su  $\cos \alpha$ ,  $\cos \beta$ ,  $\cos \gamma > 0$ , pa prema nejednakosti aritmetičke i geometrijske sredine imamo

$$\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma \leq \left(\frac{\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma}{3}\right)^3.$$

Kako je

$$\begin{aligned} \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma &= 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} + \cos^2 \frac{\gamma}{2} - \sin^2 \frac{\gamma}{2} \\ &= 2 \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} + 1 - 2 \sin^2 \frac{\gamma}{2} \leq 2 \sin \frac{\gamma}{2} + 1 - 2 \sin^2 \frac{\gamma}{2} \\ &= \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \left(1 - 2 \sin \frac{\gamma}{2}\right)^2 \leq \frac{3}{2}, \end{aligned}$$

to je

$$\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma \leq \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}.$$

Slijedi

$$a^2 + b^2 + c^2 \leq 8R^2 \left(1 + \frac{1}{8}\right) = 9R^2.$$

Primjenom prethodnog zadatka zaključujemo

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \leq \sqrt{\frac{9R^2}{2R}} = 3\sqrt{\frac{R}{2}}.$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je trokut jednakostraničan, a točka  $T$  središte trokutu upisane kružnice.

**Zadatak 4.** Neka su  $a, b, c$  duljine stranica, a  $t_a, t_b, t_c$  redom duljine težišnica trokuta  $ABC$ . Dokažite da vrijedi nejednakost

$$at_a + bt_b + ct_c \leq \frac{\sqrt{3}}{2}(a^2 + b^2 + c^2).$$

*Rješenje.* Prema CSB-nejednakosti je

$$(at_a + bt_b + ct_c)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2)(t_a^2 + t_b^2 + t_c^2).$$

Kako vrijedi

$$t_a^2 + t_b^2 + t_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$$

(vidjeti [2]), to je

$$(at_a + bt_b + ct_c)^2 \leq \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)^2,$$

odakle slijedi

$$at_a + bt_b + ct_c \leq \frac{\sqrt{3}}{2}(a^2 + b^2 + c^2).$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je  $\frac{a}{t_a} = \frac{b}{t_b} = \frac{c}{t_c} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ , a to je ako i samo ako je trokut jednakostraničan.

**Zadatak 5.** Neka su  $a, b, c$  duljine stranica trokuta  $ABC$ , a  $a_1, b_1, c_1$  duljine stranica trokuta  $A_1B_1C_1$ . Dokažite da je  $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$  ako i samo ako vrijedi

$$\sqrt{aa_1} + \sqrt{bb_1} + \sqrt{cc_1} = \sqrt{(a+b+c)(a_1+b_1+c_1)}.$$

*Rješenje.* Prema CSB-nejednakosti je

$$\begin{aligned} & (\sqrt{aa_1} + \sqrt{bb_1} + \sqrt{cc_1})^2 \\ & \leq ((\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 + (\sqrt{c})^2)((\sqrt{a_1})^2 + (\sqrt{b_1})^2 + (\sqrt{c_1})^2) \\ & = (a+b+c)(a_1+b_1+c_1), \end{aligned}$$

pa je

$$\sqrt{aa_1} + \sqrt{bb_1} + \sqrt{cc_1} \leq \sqrt{(a+b+c)(a_1+b_1+c_1)}.$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je  $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$ , odnosno ako i samo ako je  $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ .

**Zadatak 6.** Neka su  $\alpha, \beta, \gamma$  kutovi trokuta. Dokažite da vrijedi nejednakost

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{\gamma}{2} \geq 1.$$

*Rješenje.* Dokažimo najprije da vrijedi nejednakost

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} + \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 1.$$

Iz  $\frac{\gamma}{2} = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right)$  slijedi

$$\operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} = \operatorname{tg} \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right),$$

pa je

$$\begin{aligned} & \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} + \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \left( \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \right) \\ = & \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}}{\operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}}{\operatorname{tg} \left( \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} \right)} \\ = & \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}}{\frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}}{1 - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}}} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + 1 - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = 1. \end{aligned}$$

Kako je prema CSB-nejednakosti

$$\begin{aligned} & \left( \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} + \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right)^2 \\ \leq & \left( \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{\gamma}{2} \right) \left( \operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{\gamma}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \right) \\ = & \left( \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{\gamma}{2} \right)^2, \end{aligned}$$

to je

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{\gamma}{2} \geq 1.$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\beta}{2}} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\beta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}},$$

a to je ako i samo ako je  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$  odnosno  $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}$ .

**Zadatak 7.** Neka su  $a, b, c$  duljine stranica trokuta, a  $s$  njegovu poluopseg. Dokažite da vrijedi nejednakost

$$\frac{a}{(b+c)^2} + \frac{b}{(c+a)^2} + \frac{c}{(a+b)^2} \geq \frac{9}{8s}.$$

*Rješenje.* Prema CSB-nejednakosti je

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\sqrt{a}}{b+c} \cdot \sqrt{a} + \frac{\sqrt{b}}{c+a} \cdot \sqrt{b} + \frac{\sqrt{c}}{a+b} \cdot \sqrt{c} \right)^2 \\ \leq & \left( \frac{a}{(b+c)^2} + \frac{b}{(c+a)^2} + \frac{c}{(a+b)^2} \right) (a+b+c), \end{aligned}$$

tj.

$$\frac{a}{(b+c)^2} + \frac{b}{(c+a)^2} + \frac{c}{(a+b)^2} \geq \frac{1}{a+b+c} \left( \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \right)^2.$$

Dokažimo sada da je

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Prema nejednakosti između aritmetičke i harmonijske sredine je

$$\frac{\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}}{3} \geq \frac{3}{(b+c) + (c+a) + (a+b)},$$

odnosno

$$\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \geq \frac{9}{2(a+b+c)}.$$

Kako je

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = (a+b+c) \left( \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \right) - 3,$$

to je

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq (a+b+c) \cdot \frac{9}{2(a+b+c)} - 3,$$

tj.

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

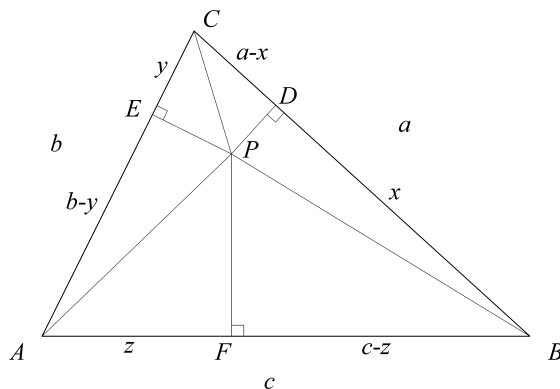
Jednakost vrijedi ako i samo ako je  $a = b = c$ . No,  $a+b+c = 2s$ , pa konačno imamo

$$\frac{a}{(b+c)^2} + \frac{b}{(c+a)^2} + \frac{c}{(a+b)^2} \geq \frac{1}{2s} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{8s}.$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je  $a = b = c$ .

**Zadatak 8.** Neka je dan trokut  $ABC$  i točka  $P$  unutar njega. Neka su  $D$ ,  $E$  i  $F$  redom nožišta okomica iz točke  $P$  na pravce  $BC$ ,  $CA$  i  $AB$ . Dokažite da vrijedi nejednakost

$$|AB|^2 + |BC|^2 + |CA|^2 \leq 4(|AF|^2 + |BD|^2 + |CE|^2).$$



Slika 1.

*Rješenje.* Neka je  $|AB| = c$ ,  $|BC| = a$ ,  $|CA| = b$ ,  $|AF| = z$ ,  $|BD| = x$  i  $|CE| = y$ . Tada je  $|FB| = c - z$ ,  $|DC| = a - x$ ,  $|EA| = b - y$  (*Slika 1*). Primijenimo Pitagorin poučak na trokute  $PBD$  i  $BPF$ :

$$|PB|^2 = x^2 + |PD|^2,$$

$$|PB|^2 = (c - z)^2 + |PF|^2,$$

odakle je

$$x^2 + |PD|^2 = (c - z)^2 + |PF|^2. \quad (3)$$

Analogno iz trokuta  $CPD$  i  $PCE$  odnosno  $APE$  i  $PAF$  dobivamo

$$y^2 + |PE|^2 = (a - x)^2 + |PD|^2, \quad (4)$$

$$z^2 + |PF|^2 = (b - y)^2 + |PE|^2. \quad (5)$$

Zbrajanjem (3), (4) i (5) dobivamo

$$x^2 + y^2 + z^2 = (a - x)^2 + (b - y)^2 + (c - z)^2$$

odakle je

$$ax + by + cz = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2).$$

Kako je prema CSB-nejednakosti

$$(ax + by + cz)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2),$$

to je

$$\frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2),$$

tj.

$$a^2 + b^2 + c^2 \leq 4(x^2 + y^2 + z^2),$$

što je i trebalo dokazati. Jednakost vrijedi ako i samo ako je  $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z} = 2$ , a to je ako i samo ako su  $D$ ,  $E$  i  $F$  polovišta stranica trokuta i stoga  $P$  središte trokutu  $ABC$  opisane kružnice.

## Literatura

- [1] A. ENGEL, *Problem-Solving Strategies*, Springer-Verlag, New York-Berlin-Heidelberg, 1998.
- [2] I. ILIŠEVIĆ, *Čebiševljeva nejednakost*, Osječka matematička škola **2**(2004), 65–75.
- [3] J. PEČARIĆ, *Nejednakosti*, HMD i Element, Zagreb, 1996.
- [4] D. S. MITRINOVIĆ, J. PEČARIĆ, *Hölderova i srodne nejednakosti*, Naučna knjiga, Beograd, 1990.