Ристо Малчески, Скопје

ОДБРАНИ ЗАДАЧИ ОД ТЕОРИЈА НА БРОЕВИ

Теоријата на броеви е задолжителна тема на сите национални и меѓународни математички олимпијади. Истото важи и за ЈММО и ММО. Во продолжение на оваа тема ќе ги дадеме задачите од теорија на броеви и нивните решенија, кои се задавани на македонските математички олимпијади во перидот 2015-2019 година. Исо така, ќе дадеме и некои задачи кои во овој период се предлагани од комисијата за меѓународни натпревари. Притоа ќе ги користиме ознаките $\mathrm{NZS}(a,b)=[a,b]$ и $\mathrm{NZD}(a,b)=(a,b)$.

Задача 1. Одреди ги сите природни броеви n за кои збирот на парните броеви поголеми од n^3-n^2, а помали од n^3+n^2, е помал од 2018.

Решение. Бидејќи $n^3-n^2=n^2(n-1)$ и $n^3+n^2=n^2(n+1)$ се парни броеви, бараниот збир е

$$\begin{aligned}(n^3-n^2+2)+(n^3-n^2+4)+...+(n^3-n^2+2n^2-2)&=\\ &=(n^3-n^2)(n^2-1)+2(1+2+3+...+n^2-1)\\ &=(n^3-n^2)(n^2-1)+(n^2-1)n^2=(n^2-1)n^3\end{aligned}$$

Се бараат сите природни броеви за кои $(n^2-1)n^3<2018$. Лесно се проверува дека $n\in\{1,2,3,4,5\}$.

Задача 2. Одреди ги сите природни броеви n за кои бројот

$$\sqrt{n+\sqrt{2018}}+\sqrt{n-\sqrt{2018}}$$

е рационален број.

Решение. Нека

$$\sqrt{n+\sqrt{2018}}+\sqrt{n-\sqrt{2018}}=r$$

е рационален број. Со квадрирање добиваме

$$2n+2\sqrt{n+\sqrt{2018}}\cdot\sqrt{n-\sqrt{2018}}=r^2,$$

односно

$$2n+2\sqrt{n^2-2018}=r^2.$$

Оттука следува дека

$$\sqrt{n^2-2018}=\frac{1}{2}(r^2-2n)$$

е рационален број (десната страна на равенството е рационален број). Од друга страна, бидејќи n е природен број, а десната страна на равенството рационален број, следува дека постои природен број m за кој

$$n^2-2018=m^2 \text{ и } 2n+2m=r^2 \text{ .}$$

Од $2(n+m)=r^2$, следува дека бројот $n+m$ е парен број. Од

$$n^2-m^2=(n-m)(m+m)=2\cdot 1009$$

и тоа што броевите $n-m$ и $n+m$ се со иста парност, добиваме $4|2\cdot 1009$, што е противречност. Значи, не постои природен број n за кој бројот $\sqrt{n+\sqrt{2018}}+\sqrt{n-\sqrt{2018}}$ е рационален број.

Задача 3. Нека со a_n го означиме збирот на цифрите на бројот 1189^n, $n\in\mathbb{N}$. Најди ја минималната вредност на a_n.

Решение. Минималната вредност на a_n е 19 и таа се достигнува за $n=1$.

Бидејќи $1189\equiv 1(\mathrm{mod}\,9)$, имаме дека $1189^n\equiv 1(\mathrm{mod}\,9)$, па затоа

$$a_n\equiv 1189^n\equiv 1(\mathrm{mod}\,9) \text{, за } n\in\mathbb{N}.$$

Според тоа, a_n е некој од броевите $1,10,19,28,...$. Јасно, $a_n=1$ не е можно бидејќи $n\in\mathbb{N}$. Сега, за да покажеме дека најмалата вредност на a_n е 19, доволно е да покажеме дека a_n не може да биде 10.

Да претпоставиме спротивно, т.е. да претпоставиме дека $a_n=10$, за некој природен број n. Да го разгледаме бројот 1189^n-1. Бидејќи 1189^n завршува на 1 или 9, збирот на цифрите на 1189^n-1 е $10-1=9$. Од друга страна, $1189\equiv 1(\mathrm{mod}\,11)$, па $1189^n\equiv 1(\mathrm{mod}\,11)$. Следува 1189^n-1 е деливо со 11. Нека збирот на цифрите на непарните места и збирот на цифрите на парните места го означиме со a и b соодветно. Тогаш $a\equiv b(\mathrm{mod}\,11)$. Од друга страна $a+b$ е еднаков на 9. Од

$$0\le a,b\le 9 \text{ и } a\equiv b(\mathrm{mod}\,11),$$

следува дека $a=b$. Но, тогаш од $a+b=9$, добиваме $2a=9$, што е противречност. Значи, најмалата вредност на a_n е 19.

Задача 4. Одреди ги сите природни броеви n за кои постојат природни броеви a,b и c такви што

$$a+b+c=3n \text{ и } ab+ac+bc=n^3.$$

Решение. Од неравенството

$$(a+b+c)^2 \geq 3(ab+ac+bc)$$

и од условот на задачата следува $9n^2 \geq 3n^3$, односно $n \leq 3$.

Ако $n=3$, тогаш $a+b+c=9$ и $ab+ac+bc=27$. Без губење на општоста можеме да претпоставиме дека $a \leq b \leq c$. Лесно се проверува дека $a=b=c=3$ е решение на дадениот систем.

Ако $n=2$, тогаш $a+b+c=6$ и $ab+ac+bc=8$. Лесно се проверува дека дадениот систем нема решение.

Ако $n=1$, тогаш системот $a+b+c=1$ и $ab+ac+bc=1$ очигледно нема решение.

Следува дека единствен природен број кој го задоволува условот на задачата е 3.

Задача 5. Нека $a,b,c,a+b-c,a+c-b,b+c-a,a+b+c$ се по парови различни прости броеви и $a+b=800$. Со d да ја означиме разликата меѓу најголемиот и најмалиот од овие седум прости броја. Определи ја најголемата можна вредност на d.

Решение. Да забележиме дека ако еден од броевите a, b или c е 2, тогаш b и c се непарни, што повлекува $a+b+c$ е парен, што не е можно според условите на задачата. Значи $a,b,c \geq 3$ и сите седум прости броја се непарни. Без губење од општоста, може да претпоставиме дека $a<b$. Бидејќи $a+b-c \geq 3$, добиваме $c \leq 797$. Најголемиот од седумте прости броја е $a+b+c$. Значи,

$$d \leq (a+b+c)-3 \leq 800+797-3=1594.$$

Најголемата можна вредност на d е 1594 и се достигнува за

$$a=13, b=787, c=797.$$

Задача 6. Нека a е природен број таков што $(a,10)=1$. Докажи дека последните две цифри на a^k за $k=1,2,...$, периодично се повторуваат.

Решение. Ги разгледуваме остатоците на степените на броевите a^k при делење со 100. Имено во множеството $a,a^2,a^3,...,a^{100}$ не постои број делив со 100 бидејќи $(a,10)=1$. Тоа се 100 броеви кои имаат најмногу 99 различни остатоци при делење со 100. Од принципот на Дирихле следува дека барем два од тие броеви имаат ист остаток при делење со 100. Значи, постојат $1 \le r < s \le 100,$ такви што $a^s - a^r = a^r(a^{s-r} - 1)$ е делив со 100. Тоа значи дека $a^{s-r} - 1 \equiv 0 \pmod{100}$. Добиваме $a^{s-r+k} \equiv a^k \pmod{100}$ или периодичност на последните две цифри на a^k.

Задача 7. Докажи дека 1023 е делител на $7^{6^n} + 4^{6^n - 1} - 5$ за секој природен број n.

Решение. Бидејќи $7^6 = 117649 \equiv 4 \pmod{1023}$ и $6^{n-1} = 5m + 1$ за некој некој природен број m добиваме дека

$$7^{6^n} = (7^6)^{6^{n-1}} = (7^6)^{5m+1} \equiv 4^{5m+1} \equiv (4^5)^m \cdot 4 \equiv 4 \pmod{1023}. \qquad (1)$$

Бидејќи $6^n = 5k + 1$ за некој природен број k добиваме

$$4^{6^n - 1} = 4^{5k} = (4^5)^k \equiv 1 \pmod{1023}. \qquad (2)$$

Од (1) и (2) следува за секој природен број n важи

$$7^{6^n} + 4^{6^n - 1} - 5 \equiv 4 + 1 - 5 = 0 \pmod{1023},$$

т.е. 1023 е делител на $7^{6^n} + 4^{6^n - 1} - 5$ за секој природен број n.

Задача 8. Во множеството природни броеви решени ја равенката

$$1 + x^z + y^z = [x^z, y^z] \ .$$

Решение. Нека $d = (x, y)$. Тогаш $d \mid [x^z, y^z]$, $d \mid x^z$ и $d \mid y^z$, од каде следува $d = 1$. Равенката преминува во облик $1 + x^z + y^z = x^z y^z$, односно $(x^z - 1)(y^z - 1) = 2$. Добиваме $x^z - 1 = 1,\ y^z - 1 = 2$ или $x^z - 1 = 2,\ y^z - 1 = 1$, од што следува $x = 2, y = 3, z = 1$ или $x = 3, y = 2, z = 1$. ■

Задача 9. Определи ги сите природни броеви $n > 2$, такви што

$$n = a^3 + b^3,$$

каде што a е најмалиот природен делител на n поголем од 1 и b е произволен природен делител на n.

Решение. Прво да забележиме дека ако n е непарен број, тогаш мора и двата делители a и b да се непарни броеви. Но, нивниот збир е парен број, па n мора да биде парен, што е противречност. Значи, n е парен и

$a=2$. Тогаш мора и b да биде парен. Важи и $b|(n-b^3)=a^3=8$. Оттука, добиваме дека $b\in\{2,4,8\}$. Значи, бараните броеви n се $n=16, n=72$ и $n=520$.

Задача 10. Определи ги сите природни броеви n такви што бројот $(n^3+39n-2)n!+17\cdot 21^n+5$ е точен квадрат.

Решение. Нека означиме $a_n=(n^3+39n-2)n!+17\cdot 21^n+5$.

Ако $n\geq 4$, тогаш $8|n!$. Уште повеќе, $a_n\equiv 5^n+5\,(\text{mod}\,8)$.

Ако n е парен број, тогаш $5^n\equiv 1\,(\text{mod}\,8)$, па $a_n\equiv 6(\text{mod}\,8)$. Но, сите точни квадрати имаат остатоци 0, 1 или 4 при делење со 8. Значи, ако $n\geq 4$ и n е парен, тогаш a_n не е точен квадрат.

Нека $n\geq 7$. Јасно $7|n!$. Тогаш $a_n\equiv 5\,(\text{mod}\,7)$. Од друга страна остатоците на точните квадрати при делење со 7 се 0, 1, 2 или 4. Значи, a_n не е точен квадрат за $n\geq 7$. Па, од претходната дискусија останува да провериме за $n=1$, $n=2$, $n=3$ и $n=5$.

Ако $n=5$, $a_5\equiv 2\cdot 1^5+5\equiv 2\,(\text{mod}\,5)$. Бидејќи остатоците на полн квадрат при делење со 5 се 0, 1 или 4, заклучуваме дека a_5 не е полн квадрат.

За $n=3$, имаме $a_3\equiv 3\,(\text{mod}\,7)$, па a_3 не е точен квадрат.

За $n=2$, имаме $a_2\equiv 1+5\equiv 2\,(\text{mod}\,4)$, па a_2 не е точен квадрат.

За $n=1$, $a_1=(1+39-2)\cdot 1+17\cdot 21+5=400$.

Значи, само за $n=1$ бројот a_n е точен квадрат. ■

Задача 11. Определи ги сите природните броеви n такви што 9^n-7 може да се претстави како производ од најмалку два последователни природни броеви.

Решение. Производ на три последователни природни броеви е делив со 3, а $9^n-7\equiv 2(\text{mod}\,3)$, заклучуваме дека за секој природен број n бројот 9^n-7 не може да се запише како производ на три последователни броја.

Нека $9^n-7=m(m+1)$ за некој природен број m. Последната равенка е еквивалентна со равенката

$$4\cdot 9^n-27=(2m+1)^2,$$

т.е. со равенката

$$4\cdot 9^n-(2m+1)^2=27.$$

Бидејќи $\{1,3,9,27\}$ се сите делители на 27 и

$$2\cdot 3^n+2m+1>2\cdot 3^n-2m-1$$

можни се два случаја:

$$1)\ \begin{cases}2\cdot 3^n+2m+1=27\\ 2\cdot 3^n-2m-1=1\end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases}2\cdot 3^n+2m+1=9\\ 2\cdot 3^n-2m-1=3\end{cases}.$$

Во случајот 1) ако ги собереме равенките добиваме $3^n=7$, што не е можно.

Во случајот 2) ако ги собереме равенките добиваме $3^n=3$, од каде наоѓаме $n=1$. Со замена во првата равенка добиваме $2\cdot 3+2m+1=9$, т.е. $m=1$. Притоа, $9^1-7=1\cdot(1+1)$.

Задача 12. Најди ги сите прости броеви од облик $1+2^p+3^p+...+p^p$ каде p е прост број.

Решение. *Прв начин.* За $p=2$ го добиваме бројот $1+2^2=5$, кој е прост број. Нека $p>2$ односно нека p е непарен број. Тогаш бројот

$$1+2^p+3^p+...+p^p=(1^p+(p-1)^p)+(2^p+(p-2)^p)+...+((\tfrac{p-1}{2})^p+(\tfrac{p+1}{2})^p)+p^p$$

е делив број со p, бидејќи секој од броевите во заградите е делив со p. Навистина, од

$$k^p\equiv k^p(\mathrm{mod}\,p)\ ,\ p-k\equiv -k(\mathrm{mod}\,p)\ \text{и}\ (p-k)^p\equiv(-k)^p\equiv -k^p(\mathrm{mod}\,p),$$

следува $k^p+(p-k)^p\equiv k^p-k^p\equiv 0(\mathrm{mod}\,p)$. Значи, секој број од облик $1+2^p+3^p+...+p^p$ е сложен за произволен непарен прост број p.

Конечно, единствено решение на проблемот е бројот 5 кој се добива за $p=2$.

Втор начин. Од малата теорема на Ферма следува дека $a^p\equiv a(\mathrm{mod}\,p)$, за секој природен број a и секој прост број p. Тогаш

$$1+2^p+3^p+...+p^p\equiv 1+2+...+p=\frac{p(p+1)}{2}(\mathrm{mod}\,p).$$

Ако p е непарен број, $p+1$ е парен од каде следува дека

$$\frac{p(p+1)}{2}\equiv 0(\mathrm{mod}\,p),$$

што е значи дека во овој случја задачата нема решение. За $p=2$ добиваме $1+2^2=5$, па затоа единствено решение на задачта е бројот 5.

Задача 13. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$125\cdot 2^n-3^m=271.$$

Решение. Ако равенката ја разгледаме по модул 5 добиваме $3^m\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,5)$, па затоа $m=4k+2$ за некој природен број k. Ако равенката ја разгледаме по модул 7 добиваме $-2^n-9^{2k+1}\equiv 5\,(\mathrm{mod}\,7)$, од каде следува

$$2^n+2^{2k+1}\equiv 2\,(\mathrm{mod}\,7).$$

Бидејќи $2^s\equiv 1,2,4\,(\mathrm{mod}\,7)$ за $s\equiv 0,1,2\,(\mathrm{mod}\,3)$, соодветно, можно е само $2^n\equiv 2^{2k+1}\equiv 1(\mathrm{mod}\,7)$, па така $3|n$ и $3|2k+1$. Според тоа $3|m$ и $3|n$, т.е. $n=3x$ и $m=3y$. Според тоа, дадената равенка можеме да ја запишеме во обликот $5^3\cdot 2^{3x}-3^{3y}=271$ или

$$(5\cdot 2^x-3^y)(25\cdot 2^{2x}+5\cdot 2^x\cdot 3^y+3^{2y})=271.$$

Од последното равенство следува

$$25\cdot 2^{2x}+5\cdot 2^x\cdot 3^y+3^{2y}\le 271,$$

па затоа $25\cdot 2^{2x}\le 271$, од каде добиваме $x<2$. Со замена $x=1$ во

$$5^3\cdot 2^{3x}-3^{3y}=271$$

добиваме $y=2$. Според тоа, единствено решение на дадената равенка е $(m,n)=(6,3)$.

Задача 14. За природните броеви x,y,z,t важи

$$xy-zt=x+y=z+t\,. \qquad (*)$$

Дали е можно и двата производи xy и zt да се точни квадрати?

Решение. Нека претпоставиме дека $xy=a^2$ и $zt=c^2$, каде $a,c>0$.

Нека претпоставиме дека бројот $x+y=z+t$ е непарен. Тогаш броевите x и y се со спротивна парност, а исто важи и за броевите z и t. Според тоа, производите xy и zt се непарни, но $xy-zt=x+y$ е парен, што е противречност. Според тоа, $x+y$ е парен број, па затоа $s=\frac{x+y}{2}=\frac{z+t}{2}$ е природен број.

Понатаму, ставаме $b=\frac{|x-y|}{2}, d=\frac{|z-t|}{2}$. Сега од условите на задачата следува:

$$s^2=a^2+b^2=c^2+d^2 \tag{1}$$

и

$$2s=a^2-c^2=d^2-b^2. \tag{2}$$

Последното равенство во (2) следува од (1), а од (2) следува дека $a,d>0$. Понатаму ќе ги користиме само равенствата (1) и (2), заедно со фактот дека a,d,s се природни броеви, додека b и c се ненегативни цели броеви, од кои може само еден да е еднаков на нула. Јасно, без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $b\geq c$, што значи $b>0$. Затоа $d^2=2s+b^2>c^2$, од каде следува

$$d^2>\frac{c^2+d^2}{2}=\frac{s^2}{2}. \tag{3}$$

Од друга страна, бидејќи според (2) бројот d^2-b^2 е парен, заклучуваме дека d и b се со иста парност, па затоа $0<b\leq d-2$. Според тоа, $2s=d^2-b^2\geq d^2-(d-2)^2=4(d-1)$, т.е.

$$d\leq\frac{s}{2}+1. \tag{4}$$

Од (3) и (4) следува $2s^2<4d^2\leq 4(\frac{s}{2}+1)^2$, т.е. $(s-2)^2<8$, што значи $s\leq 4$.

На крајот, лесно се докажува дека секој број од облик s^2 каде $1\leq s\leq 4$ има единствено претставување како збир од два квадрати и тоа $s^2=s^2+0^2$. Според тоа, од (1) и $a,d>0$ следува $b=c=0$, што е противречност.

Конечно од добиената противречност следува дека не е можно и двата производи xy и zt да се точни квадрати.

Задача 15. Определи ги сите природни броеви m кои имаат точно три различни прости делители p, q и r, такви што:

а) $p-1|m,\ qr-1|m$,

б) $q-1\nmid m, r-1\nmid m,\ 3\nmid q+r$.

Решение. Бројот m можеме да го претставиме во облик $m=p^aq^br^c$. Броевите q и r не можат да бидат 2, бидејќи $2-1=1$ е делител на секој природен број, од каде следува дека се непарни, т.е. $qr-1$ е парен, па мора m да биде парен, т.е. $p=2$.

Од $(q,qr-1)=1=(r,qr-1)$ и $qr-1|m$, следува дека $qr-1|2^a$, од каде $qr-1=2^k$ за некој природен број $k\le a$. Ова значи дека бројот 2^k+1 има точно два делители. Бројот k може да се претстави во облик $k=2^t s$, каде t е најголемиот степен на 2 во k, а s е најголемиот непарен делител на k. Ако $s>1$, тогаш:

$$2^k+1=(2^{2^t})^s+1=(2^{2^t}+1)((2^{2^t})^{s-1}-(2^{2^t})^{s-2}+...-2^{2^t}+1).$$

Ова е можно само ако

$$q=2^{2^t}+1,\ r=(2^{2^t})^{s-1}-(2^{2^t})^{s-2}+...-2^{2^t}+1$$

или обратно, но тогаш $q-1=2^{2^t}|m$ или $p=2^{2^t}|m$, што противречи на условите на задачата.

Следува дека $s=1$, т.е. $k=2^t$ е степен на 2 и $qr=2^{2^t}+1$, т.е. $2^{2^t}+1$ е производ на два прости броја За $t=0$ имаме $2^{2^t}+1=3$ ова очигледно не е можно, па затоа $t>1$.

Од

$$2^{2^t}+1\equiv 2^{2\cdot 2^{t-1}}+1\equiv (2^2)^{2^{t-1}}+1\equiv 4^{2^{t-1}}+1\equiv 1^{2^{t-1}}+1\equiv 1+1\equiv 2(\text{mod}3),$$

следува дека $3\nmid q$ и $3\nmid r$. Ако $q\equiv r(\text{mod}3)$, тогаш $qr\equiv 1(\text{mod}3)$, па мора едниот да е конгруентен со еден, а другиот со два, но тогаш нивниот збир е делив со три, што противречи на последниот услов од задачата, па затоа број кој ги задоволува дадените услови не постои.

Задача 16. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$xyz+yzt+xzt+xyt=xyzt+3.$$

Решение. Равенката ја делиме со $xyzt$ и добиваме

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}=1+\frac{3}{xyzt}.$$

Заради симетрија, без губење од општост, претпоставуваме дека

$$x\le y\le z\le t. \qquad (1)$$

од каде следува $\frac{1}{x}\ge\frac{1}{y}\ge\frac{1}{z}\ge\frac{1}{t}$. Добиваме

$$\frac{4}{x}\ge\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}=1+\frac{3}{xyzt}>1,$$

од каде следува $x<4$.

Случај 1. Нека $x=3$. Тогаш равенката е од облик

$$3yz+yzt+3zt+3yt=3yzt+3,$$

односно

$$3(yz+zt+yt)=2yzt+3.$$

По делење на оваа равенка со yzt добиваме

$$3(\tfrac{1}{y}+\tfrac{1}{z}+\tfrac{1}{t})=2+\tfrac{3}{yzt}>2,\ \tfrac{9}{y}>2,$$

од каде $y\leq 4$.Можни вредности за y се 3 и 4.

а) За $y=4$ добиваме

$$3(4z+zt+4t)=8zt+3,12(z+t)=5zt+3,12(\tfrac{1}{z}+\tfrac{1}{t})=5+\tfrac{3}{zt}>5,\tfrac{24}{z}>5,$$

од каде $z\leq 4$. Од (1) следува $z=4$ и равенката го добива обликот $12(4+t)=20t+3,$ односно $8t=45$, па t не е природен број.

б) За $y=3$, добиваме

$$3(3z+zt+3t)=6zt+3,\ 3(z+t)=zt+1,3(\tfrac{1}{z}+\tfrac{1}{t})=1+\tfrac{1}{zt}>1,\ \tfrac{6}{z}>1,z<6.$$

Можни вредности за z се $3,4,5$.

- Ако $z=3$, тогаш $3(3+t)=3t+1$ што не е можно.
- Ако $z=4$, тогаш $3(4+t)=4t+1,\ \ t=11$.
- Ако $z=5$, тогаш $3(5+t)=5t+1,\ t=7$.

Решенија се четворките $(3,3,4,11)$ и $(3,3,5,7)$.

Случај 2. Нека $x=2$. Тогаш равенката е од облик

$$2yz+yzt+2zt+2yt=2yzt+3,$$

односно,

$$2(yz+zt+yt)=yzt+3 \qquad (2)$$

Тогаш секој од броевите y,z,t е непарен. По делење на оваа равенка со yzt добиваме $2(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t})=1+\frac{3}{yzt}>1$ од каде $\frac{6}{y}>1$, односно $y<6$.

а) Ако $y=5$ тогаш (2) е од облик $2(5z+zt+5t)=5zt+3$, односно $10(z+t)=3zt+3$. Оттука $10(\frac{1}{z}+\frac{1}{t})=3+\frac{3}{zt}>3$ значи $\frac{1}{z}>\frac{3}{20}$, односно $z\leq 6$. Единствена можност е $z=5$. Добиваме $10(5+t)=15t+3$, односно $5t=47$ од каде t не е природен број.

б) Ако $y=3$, (2) е од облик

$$2(3z+zt+3t)=3zt+3,$$

односно

$$6(z+t)=zt+3.$$

Тогаш

$$6(\frac{1}{z}+\frac{1}{t})=1+\frac{3}{zt}>1,$$

од каде $\frac{12}{z}>1$, односно $z<12$. Можности за z се: $3,5,7,9,11$.

- Ако $z=3$, тогаш $6(3+t)=3t+3$, од каде $3t=-15$, односно $t=-5\notin\mathbb{N}$.
- Ако $z=5$, тогаш $6(5+t)=5t+3$, $t=-27\notin\mathbb{N}$.
- Ако $z=7$, тогаш $6(7+t)=7t+3$, $t=39$.
- Ако $z=9$, тогаш $6(9+t)=9t+3$, од каде $3t=51$, односно $t=17$.

Значи во овој случај решенија се четворките $(2,3,7,39)$ и $(2,3,9,17)$.

Случај 3. Останува $x=1$. Тогаш равенката е од облик

$$yz+yzt+zt+yt=yzt+3,$$

односно

$$yz+zt+yt=3.$$

Од (1) добиваме $3yz\leq 3$, односно $yz\leq 1$, од каде $y=1$ и $z=1$. Тогаш $1+2t=3$, односно $t=1$. Решение е четворката $(1,1,1,1)$.

Конечно, решенија на почетната равенка се сите пермутации на $(3,3,4,11)$, $(3,3,5,7)$, $(2,3,7,39)$, $(2,3,9,17)$, $(1,1,1,1)$ и сите нивни пермутации.

Задача 17. Определи ги сите прости броеви p и q за кои

$$pq\,|\,(5^p-2^p)(7^q-2^q).$$

Решение. Најпрво ќе ја покажеме следната лема.

Лема. Нека r и q се непарни прости броеви. Ако $r\,|\,7^q-2^q$, $(r\,|\,5^q-2^q)$, тогаш $r=5$ $(r=3)$.

Доказ. Нека $r\,|\,7^q-2^q$.

Случај 1) Ако $r=q$, тогаш според малата теорема на Ферма имаме

$$7^q\equiv 7(\mathrm{mod}\,q), 2^q\equiv 2(\mathrm{mod}\,q),$$

од каде

$$7^q-2^q\equiv 7-2=5(\mathrm{mod}\,q).$$

Следува дека $r\,|\,5$, односно $r=5$.

Случај 2) Нека $r\neq q$. Според малата теорема на Ферма добиваме

$$7^{r-1}\equiv 1(\mathrm{mod}\,r), 2^{r-1}\equiv 1(\mathrm{mod}\,r).$$

Според тоа,

$$7^{r-1}\equiv 2^{r-1}(\mathrm{mod}\,r).$$

Од тука и од $r\,|\,7^q-2^q$, следува дека

$$7^n\equiv 2^n(\mathrm{mod}\, r)$$

за сите природни броеви кои се деливи со $r-1$ и q. Бидејќи $(r-1,q)=1$, постојат природни броеви m и k такви што $qk=(r-1)m+1$ (или $(r-1)k=qm+1$). Тогаш

$$2^{(r-1)m+1}=2^{qk}\equiv 7^{qk}=7^{(r-1)m+1}=7\cdot 7^{(r-1)m}\equiv 7\cdot 2^{(r-1)m}(\mathrm{mod}\, r)\,.$$

Според тоа, $r\,|\,5\cdot 2^{(r-1)m}$, односно $r=5$.

Аналогно се покажува другото тврдење. ■

Очигледно е дека p и q се непарни броеви.

Ако $p\,|\,5^p-2^p$, тогаш $p=3$. Според тоа, $3q\,|\,3^2\cdot 13(7^q-2^q)$, односно $q\,|\,3\cdot 13(7^q-2^q)$. Следува дека $q\in\{3,5,13\}$.

Ако $p\,|\,7^q-2^q$, тогаш $p=5$. Според тоа, $5q\,|\,3093(7^q-2^q)$. Бидејќи $3093=3\cdot 1031$ и 1031 е прост број $q\in\{3,5,1031\}$.

Значи, $(p,q)=\{(3,3),(3,5),(3,13),(5,3),(5,5),(5,1031)\}$.

Задача 18. Определи ги сите парови (p,q) каде p и q се природни броеви за кои важи

$$(p+1)^{p-1}+(p-1)^{p+1}=q^q.$$

Решение. Имаме

$$(p+1)^{p-1}+(p-1)^{p+1}\geq(p+1)^{p-1}\geq(p-1)^{p-1} \qquad (1)$$

$$(p+1)^{p-1}+(p-1)^{p+1}<(p+1)^{p+1}+(p+1)^{p+1}=2(p+1)^{p+1}<(p+2)^{p+2} \qquad (2)$$

Од (1) и (2) следува

$$(p-1)^{p-1}\leq q^q<(p+2)^{p+2}.$$

а) Нека $q=p-1$, односно

$$(p+1)^{p-1}+(p-1)^{p+1}=(p-1)^{p-1}.$$

Од

$$(p+1)^{p-1}+(p-1)^{p+1}\geq(p+1)^{p-1}\geq(p-1)^{p-1}$$

имаме

$$(p-1)^{p+1}=0 \text{ и } (p+1)^{p-1}=(p-1)^{p-1},$$

па затоа $p=1,q=0$. Но 0 не е природен од што следува дека равенката

$$(p+1)^{p-1}+(p-1)^{p+1}=(p-1)^{p-1},$$

а со тоа и почетната равенка во овој случај нема решение во множеството $\mathbb{N}$.

б) Нека $q=p$, односно

$$(p+1)^{p-1}+(p-1)^{p+1}=p^p.$$

Ако $p=1$, тогаш

$$(p+1)^{p-1}+(p-1)^{p+1}=1 \text{ и } p^p=1.$$

Значи $(p,q)=(1,1)$ е решение на

$$(p+1)^{p-1}+(p-1)^{p+1}=p^p,$$

а со тоа и на почетната равенка.

Ако $p=2$, тогаш

$$(p+1)^{p-1}+(p-1)^{p+1}=4 \text{ и } p^p=4.$$

Значи $(p,q)=(2,2)$ е решение на

$$(p+1)^{p-1}+(p-1)^{p+1}=p^p,$$

а со тоа и на почетната равенка.

Ако $p=3$,тогаш

$$(p+1)^{p-1}+(p-1)^{p+1}=32 \text{ а } p^p=27.$$

Значи во овој случја немаме решение на

$$(p+1)^{p-1}+(p-1)^{p+1}=p^p,$$

т.е. немаме решение на почетната равенка.

Ако $p\geq 4$, тогаш важи $(p-1)^p>p^{p-1}$. Добиваме

$$(p+1)^{p-1}+(p-1)^{p+1}>(p+1)^{p-1}+p^{p-1}(p-1)>p^{p-1}+p^{p-1}(p-1)=p^p,$$

Па затоа во овој случај немаме решение на

$$(p+1)^{p-1}+(p-1)^{p+1}=p^p,$$

т.е. немаме решение и на почетната равенк.

б) Нека $q=p+1$. Тогаш

$$\begin{aligned}
&(p+1)^{p-1}+(p-1)^{p+1}=(p+1)^{p+1} &&\Leftrightarrow\\
&(p-1)^{p+1}=(p+1)^{p-1}((p+1)^2-1) &&\Leftrightarrow\\
&(p-1)^{p+1}=(p+1)^{p-1}p(p+2).
\end{aligned}$$

Бидејќи p и $p-1$ се заемно прости заклучуваме дека последната равенка нема решение во $\mathbb{N}$, што значи дека во овој случај почетната равенка нема решенија во $\mathbb{N}$.

Конечно, сите решенија на почетната равенка се

$$(p,q)=(1,1) \text{ и } (p,q)=(2,2).$$

Задача 19. Нека n е природен број. Во секое поле на табла со димензии $n\times n$ е запишан цел број. Нека се исполнети следниве услови:

i) Секој број на таблата е конгруентен со 1 по модул n.

ii) Збирот на броевите во секој ред, како и збирот на броевите во секоја колона, е конгруентен со n по модул n^2.

Нека R_i е производот на броевите од $i-$тиот ред, а C_j е производот на броевите од $j-$тата колона. Докажи дека збировите $R_1+R_2+...+R_n$ и $C_1+C_2+...+C_n$ се конгруентни по модул n^4.

Решение. Нека A_{ij} е бројот запишан во пресекот на $i-$тиот ред и $j-$тата колона, P е производот од сите n^2 броеви. Да означиме со $a_{ij}=A_{ij}-1$ и $r_i=R_i-1$. Ќе докажеме дека

$$\sum_{i=1}^{n} R_i \equiv (n-1)+P(\mathrm{mod}\, n^4). \tag{1}$$

Ако се земе предвид симетријата на условите на задачата, ќе важи

$$\sum_{j=1}^{n} C_j \equiv (n-1)+P(\mathrm{mod}\, n^4),$$

од каде ќе следува тврдењето на задачата.

Според *i)* бројот n е делител на a_{ij} за секои i и j. Така, секој производ од најмалку два од a_{ij} е делив со n^2, па затоа

$$\begin{aligned}R_i=\prod_{j=1}^{n}(1+a_{ij})=1+\sum_{j=1}^{n}a_{ij}+\sum_{1\le j_1<j_2\le n}a_{ij_1}a_{ij_2}+...\equiv\\ \equiv 1+\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\equiv 1-n+\sum_{j=1}^{n}A_{ij}(\mathrm{mod}\, n^2)\end{aligned},$$

за секој индекс i. Сега, од условот ii) следува дека $R_i\equiv 1(\mathrm{mod}\, n^2)$, што значи дека $n^2\,|\,r_i$. Затоа секој производ од најмалку два од броевите r_i е делив со n^4. Според тоа,

$$P=\prod_{i=1}^{n}R_i=\prod_{i=1}^{n}(1+r_i)=1+\sum_{j=1}^{n}r_i(\mathrm{mod}\, n^4)$$

и затоа

$$\sum_{j=1}^{n} R_i = n + \sum_{j=1}^{n} r_i \equiv n + (P-1) (\operatorname{mod} n^4)$$

што и требаше да се докаже.

Задача 20. Определи ги сите функции $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ такви што

$$n!+f(m)! \mid f(n)!+f(m!) \qquad (*)$$

за секои $m,n\in\mathbb{N}$.

Решение. За $m=n=1$ од (*) добиваме $1+f(1)! \mid f(1)!+f(1)$ и затоа $1+f(1)! \mid f(1)-1$. Но, $|f(1)-1| < f(1)!+1$, па затоа од $1+f(1)! \mid f(1)-1$ следува $f(1)-1=0$, т.е. $f(1)=1$.

Ако во (*) ставиме $m=1$ добиваме $n!+1 \mid f(n)!+1$, па затоа $n! \le f(n)!$, односно $n \le f(n)$. Од друга страна, ставаме $(m,n)=(1,p-1)$, каде p е произволен прост број и користејќи ја теоремата на Вилсон добиваме дека $p \mid (p-1)!+1 \mid f(p-1)!+1$, па затоа $f(p-1) < p$. Но, $f(p-1) \ge p-1$ и како $f(p-1) < p$ заклучуваме дека

$$f(p-1)=p-1.$$

Понатаму, нека фиксираме природен број m. За секој прост број p ставаме $n=p-1$ и од (*) добиваме $(p-1)!+f(m)! \mid (p-1)!+f(m!)$, што значи дека

$$(p-1)!+f(m)! \mid f(m!)-f(m)!,$$

за секој прост број p. Последното значи дека $f(m!)=f(m)!$, за секој $m\in\mathbb{N}$. Според тоа, (*) може да се запише како $n!+f(m)! \mid f(n)!+f(m)!$. Последното значи дека

$$n!+f(m)! \mid f(n)!-n!,$$

за секои $m,n\in\mathbb{N}$. Сега, ако го фиксираме $n\in\mathbb{N}$ и земеме доволно голем m, заклучуваме дека $f(n)!=n!$, т.е. $f(n)=n$, за секој $n\in\mathbb{N}$.

Задача 21. Нека $x,y\in\mathbb{N}$. Ако за секој $n\in\mathbb{N}$ важи $(ny)^2+1 \mid x^{\varphi(n)}-1$, тогаш $x=1$. Докажи!

Решение. Нека $n=3^k$ и да претпоставиме дека p е прост делител на $(3^k y)^2+1$ таков што $p\equiv 2 (\operatorname{mod} 3)$.

Бидејќи p е делител на $x^{\varphi(n)}-1=x^{2\cdot 3^{k-1}}-1$, редот на x по модул p е делител на $p-1$ и на $2\cdot 3^{k-1}$. Но, $(p-1,2\cdot 3^{k-1})\,|\,2$, па затоа $p\,|\,x^2-1$. Сега тврдењето на задачата ќе следува ако докажеме дека простиот број p може да прима бесконечно многу вредности.

Нека го претпоставиме спротивното, т.е. дека постојат само конечно многу прости броеви p такви што $p\equiv 2(\bmod 3)$ и кои се делители на членовите на низата

$$a_k=3^{2k}y^2+1, k\geq 0.$$

Нека $p_1,p_2,...,p_m$ се овие прости броеви. Јасно, без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $3\nmid y$. Тогаш

$$a_0=y^2+1\equiv 2(\bmod 3),$$

па така тој има прост делител од видот $3s+2, s\in\mathbb{N}_0$.

За $N=(y^2+1)p_1p_2...p_m$ имаме

$$a_{\varphi(N)}=3^{2\varphi(N)}y^2+1\equiv y^2+1(\bmod N),$$

што значи дека

$$a_{\varphi(N)}=(y^2+1)(tp_1p_2...p_m+1),$$

за некој природен број t. Бидејќи

$$y^2+1\equiv 2(\bmod 3) \text{ и } 3^{2\varphi(N)}y^2+1\equiv 1(\bmod 3),$$

бројот $tp_1p_2...p_m+1$ мора да има прост делител од видот $3s+2$, но тоа не е ниту еден од простите броеви $p_1,p_2,...,p_m$, што е противречност. Конечно, од добиената противречност следува тврдењето на задачата.