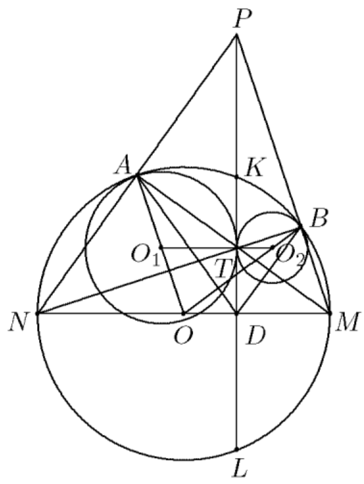
БМО 1993

1. Нека a, b, c, d, e и f се реални броеви такви што
$$a+b+c+d+e+f=10$$
$$(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2+(d-1)^2+(e-1)^2+(f-1)^2=6.$$
Определи ја најголемата вредност која може да ја прими бројот f.
Решение. Од условот на задачата следува
$$a+b+c+d+e+f=10 \text{ и } a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2=20.$$
Тогаш, од неравенството меѓу аритметичката и кавадратната средина следува
$$10-f=a+b+c+d+e\leq 5\sqrt{\tfrac{a^2+b^2+c^2+d^2+e^2}{5}}=\sqrt{5(20-f^2)},$$
па затоа $(10-f)^2\leq 5(20-f^2)$, т.е. $2f(3f-10)\leq 0$. Според тоа, бараната максимална вредност на f е $f_{\max}=\frac{10}{3}$ и се достигнува кога $a=b=c=d=e=\frac{4}{3}$.

2. За природниот број чиј декаден запис е
$$a_N 10^N + a_{N-1}10^{N-1}+...+10a_1+a_0,\ a_i\in\{0,1,2,...,9\}$$
ќе велиме дека е *монотон* ако $a_N\leq a_{N-1}\leq ...\leq a_1\leq a_0$. Определи го бројот на сите монотони броеви со најмногу 1993 цифри.
Решение. Нека A е множеството од сите монотони броеви со најмногу 1993 цифри. Нека B е множеството од сите низи со должина 1993 од видот
$$\underset{a_0}{00...0}\underset{a_1}{11...1}\underset{a_2}{22...2}...\underset{a_9}{99...9}, \tag{1}$$
каде $a_0+a_1+...+a_9=1993$, со барем еден ненулти елемент (не е задолжително сите цифри да се појавуваат). Тогаш меѓу множествата A и B постои биекција, т.е. $|A|=|B|$. Низите во B заедно со низата од 1993 нули можат да бидат пребороени на следниот начин: тие се еднакви на бројот на начините на кои можеме да поставиме девет прегради меѓу различните цифри, при што ако две прегради се соседни, тогаш соодветната цифра отсуствува. Овој број е еднаков на $\binom{1993+10-1}{10-1}$, што значи дека
$$|A|=|B|=\binom{2002}{9}-1.$$

3. Кружниците C_1 и C_2 со центри соодветно O_1 и O_2 надворешно се допираат во точката T. Нека C е кружница со центар O таква што C_1 и C_2 се допираат внатрешно со C соодветно во точките A и B. Заедничката тангента на C_1 и C_2 во точката T ја сече C во точките K и L. Ако D е средината на отсечката KL, докажи дека $\measuredangle O_1OO_2=\measuredangle ADB$.



Решение. Нека правите AT и BT по вторпат ја сечат кружницата C соодветно во точките M и N. Тогаш од рамнокракиот триаголник ATO_1 добиваме

$$\measuredangle O_1TA = \measuredangle O_1AT,$$

од рамнокракиот триаголник AMO добиваме

$$\measuredangle OMA = \measuredangle OAT,$$

а точките A, O_1 и O лежат на една права. Значи, $\measuredangle O_1TA = \measuredangle OMA$, па затоа $O_1O_2 \parallel OM$. Аналогно $O_1O_2 \parallel ON$, т.е. точките O, M и N лежат на една права. На истата права лежи и точката D, бидејќи $KL \perp O_1O_2$, па затоа дијаметарот MN е нормален на тетивата KL, а D е средина на KL. Бидејќи MN е дијаметар, важи $\measuredangle NBM = \measuredangle NAM = 90^\circ$, па затоа темињата на $\triangle ABD$ се подножјата на висините во $\triangle MNP$, каде P е пресечната точка на NA и MB. Тогаш

$$\measuredangle NDA = \measuredangle MDB = \measuredangle MPN$$

и затоа

$$\begin{aligned}\measuredangle O_1OO_2 = \measuredangle AOB &= 180^\circ - \measuredangle AON - \measuredangle BOM \\ &= 180^\circ - (180^\circ - 2\measuredangle ANM) - (180^\circ - 2\measuredangle BMN) \\ &= 2(\measuredangle ANM + \measuredangle BMN) - 180^\circ = 180^\circ - 2\measuredangle MPN \\ &= 180^\circ - \measuredangle NDA - \measuredangle MDB = \measuredangle ADB.\end{aligned}$$

4. Нека p е прост број и $m \geq 2$ е природен број. Докажи дека равенката

$$\frac{x^p+y^p}{2} = \left(\frac{x+y}{2}\right)^m$$

во множеството природни броеви има решение $(x, y) \neq (1,1)$ само ако $m = p$.

Решение. Јасно, ако $m = p$, тогаш дадената равенка има бесконечно многу решенија од видот $(x, x), x \in \mathbb{N}$.

Нека (x, y) е решение на равенката. Ако $x = y$, тогаш $x^p = x^m$, па затоа $m = p$. Затоа во натамошните разгледувања ќе сметаме дека $x \neq y$. Да забележиме дека од

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^m = \frac{x^p+y^p}{2} > \left(\frac{x+y}{2}\right)^p$$

следува дека $m > p$.

Нека $\text{NZD}(x,y)=d$, $x=du$ и $y=dv$, каде $\text{NZD}(u,v)=1$. Заменуваме во равенката и добиваме

$$u^p+v^p=2d^{m-p}(\tfrac{u+v}{2})^m . \tag{1}$$

Ако u и v се со различна парност, тогаш $(u+v)^m$ е делител на u^p+v^p , што не е можно, бидејќи $(u+v)^m>(u+v)^p\geq u^p+v^p$. Според тоа, u и v се непарни броеви. Нека $u+v=2^a t$, каде a е природен број и t е непарен број. Да забележиме дека $\text{NZD}(t,u)=\text{NZD}(t,v)=1$. За $p=2$ имаме $u^2+v^2\equiv 2(\text{mod}\,4)$, а кога p е непарен прост број имаме

$$\begin{aligned}u^p+v^p&=(2^a t-v)+v^p\\&=2^a t[(2^a t)^{p-1}-\tbinom{p}{1}(2^a t)^{p-2}v+...-2^a tv^{p-2}\tbinom{p}{p-2})+pv^{p-1}],\end{aligned}$$

каде pv^{p-1} е непарен број, а сите собирци освен него во средната заграда се парни броеви. Според тоа, ако p е непарен број, тогаш највисокиот степен на 2 кој е делител на u^p+v^p е 2^a, а ако $p=2$, тогаш е 2. Но десната страна на (1) е делива барем со $2^{1+(m-1)a}$. Затоа $1+(m-1)a\leq a$, а тоа е можно само за $a=1$. Добивме $u+v=2t$, каде t е непарен број, при што очигледно $t\geq 3$. Сега равенката (1) го добива видот

$$(2t-v)^p+v^p=2d^{m-p}t^m .$$

За $p=2$ имаме $t\,|\,2v^2$, што не е можно бидејќи $\text{NZD}(t,v)=1$. Ако p е непарен прост број, добиваме

$$2^p t^{p-1}-\tbinom{p}{1}2^{p-1}t^{p-2}v+...-\tbinom{p}{p-2}4tv^{p-2}+2pv^{p-1}=2d^{m-p}t^{m-1},$$

од каде следува дека $t\,|\,p$, т.е. $t=p$. Но, сега сите членови со исклучок на $2pv^{p-1}$ се деливи со p^2 , што не е можно.

Според тоа, равенката нема решенија за кои $x\neq y$, со што тврдењето е докажано.