Самоил Малчески
Скопје

НЕРАВЕНСТВО НА КОШИ-БУЊАКОВСКИ-ШВАРЦ И НЕГОВА ПРИМЕНА

Неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц прв го докажал францускиот математичар Коши во 1821 година, а интегралната аналогија на истото ја докажал рускиот математичар Буњаковски во 1859 година. Ова неравенство во своите работи го користел и германскиот математичар Шварц, но доста подоцна, по 1884 година.

Теорема 1 (неравенство на Коши-Буњаковски-Шварц). Ако $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, за $i=1,2,...,n$, тогаш

$$(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i)^2 \le \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i^2 , \tag{1}$$

при што знак за равенство важи ако и само ако

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = ... = \frac{a_n}{b_n} . \tag{2}$$

Доказ. Да го разгледаме квадратниот трином

$$P(t) = \sum_{i=1}^{n} (a_i t - b_i)^2 = t^2 \sum_{i=1}^{n} a_i^2 - 2t \sum_{i=1}^{n} a_i b_i + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 .$$

Полиномот $P(t)$ е ненегативен за секој $t \in \mathbb{R}$, па затоа неговата дискриминанта е непозитивна, т.е. точно е неравенството

$$4(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i)^2 - 4\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \le 0 ,$$

кое е еквивалентно со неравенството (1). Понатаму, во (1) важи знак за равенство ако и само ако дискриминатата на полиномот $P(t)$ е еднаква на нула. Последното значи дека разгледуваниот квадратен полином има двоен корен, па како тој е збир на квадрати, добиваме ако и само ако

$$a_i t - b_i = 0 \text{, за } i = 1, 2, ..., n ,$$

т.е. ако и само ако се исполнети равенствата (2). ■

Во продолжение ќе разгледаме некои примени на ова неравенство.

Задача 1. Нека a,b,c,d се ненегативни релани броеви. Докажи дека

$$\sqrt{ab}+\sqrt{cd}\le\sqrt{(a+c)(b+d)}\ .$$

Решение. Од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц применето на броевите $a_1=\sqrt{a}, a_2=\sqrt{c}$ и $b_1=\sqrt{b}, b_2=\sqrt{d}$ следува

$$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}+\sqrt{c}\cdot\sqrt{d}\le\sqrt{a+c}\cdot\sqrt{b+d}\ ,$$

т.е.

$$\sqrt{ab}+\sqrt{cd}\le\sqrt{(a+c)(b+d)}\ .\ \blacksquare$$

Задача 2. Нека a,b,c се позитивни реални броеви. Докажи дека

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge\frac{1}{\sqrt{ab}}+\frac{1}{\sqrt{bc}}+\frac{1}{\sqrt{ca}}\ .$$

Решение. Даденото неравенство непосредно следува од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц применето на броевите

$$a_1=\frac{1}{\sqrt{a}}, a_2=\frac{1}{\sqrt{b}}, a_3=\frac{1}{\sqrt{c}}\ \text{и}\ b_1=\frac{1}{\sqrt{b}}, b_2=\frac{1}{\sqrt{c}}, b_3=\frac{1}{\sqrt{a}}\ .$$

Деталите ги оставаме на читателот за вежба. ■

Задача 3. Нека a,b,c и d се позитивни реални броеви такви што $a+b+c+d=4$. Докажи дека

$$\frac{(a+\sqrt{b})^2}{\sqrt{a^2-ab+b^2}}+\frac{(b+\sqrt{c})^2}{\sqrt{b^2-bc+c^2}}+\frac{(c+\sqrt{d})^2}{\sqrt{c^2-cd+d^2}}+\frac{(d+\sqrt{a})^2}{\sqrt{d^2-da+a^2}}\le 16\ .$$

Решение. За произволни позитивни реални броеви x и y важи

$$\sqrt{x^2-xy+y^2}\ge\frac{x+y}{2}\ ,$$

а од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц следува

$$(x+\sqrt{y})^2\le(x+y)(x+1)\ ,$$

па затоа,

$$\frac{(x+\sqrt{y})^2}{\sqrt{^2-xy+y^2}}\le 2(x+1)\ .$$

Според тоа,

$$\frac{(a+\sqrt{b})^2}{\sqrt{a^2-ab+b^2}}+\frac{(b+\sqrt{c})^2}{\sqrt{b^2-bc+c^2}}+\frac{(c+\sqrt{d})^2}{\sqrt{c^2-cd+d^2}}+\frac{(d+\sqrt{a})^2}{\sqrt{d^2-da+a^2}}\le$$
$$\le 2(a+1)+2(b+1)+2(c+1)+2(d+1)$$
$$=2(a+b+c+d)+8=16,$$

што и требаше да се докаже. ■

Задача 4. Нека a,b и c се позитивни реални броеви такви што $a^2+b^2+c^2=1$. Докажи го неравенството

$$\frac{a^3}{b^2+c}+\frac{b^3}{c^2+a}+\frac{c^3}{a^2+b}\geq\frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}.$$

Решение. Од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц следува

$$(a(b^2+c)+b(c^2+a)+c(a^2+b))(\frac{a^3}{b^2+c}+\frac{b^3}{c^2+a}+\frac{c^3}{a^2+b})\geq a^2+b^2+c^2=1,$$

па затоа е доволно да се докаже

$$ab^2+bc^2+ca^2+ab+bc+ca\leq\frac{1}{\sqrt{3}}+1.$$

Познато е дека

$$ab+bc+ca\leq a^2+b^2+c^2=1.$$

Понатаму, повторно од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц следува

$$\begin{aligned}ab^2+bc^2+ca^2&\leq\sqrt{(a^2+b^2+c^2)(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)}\\&=\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2},\end{aligned}$$

па затоа е доволно да се докаже дека

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\leq\frac{1}{3},$$

а последното неравенство важи бидејќи

$$3(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\leq(a^2+b^2+c^2)^2=1.$$

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Задача 5. Нека a,b,c и d се позитивни реални броеви такви што $a+b+c+d=4$. Докажи дека

$$\frac{(a+\sqrt{b})^2}{\sqrt{a^2-ab+b^2}}+\frac{(b+\sqrt{c})^2}{\sqrt{b^2-bc+c^2}}+\frac{(c+\sqrt{d})^2}{\sqrt{c^2-cd+d^2}}+\frac{(d+\sqrt{a})^2}{\sqrt{d^2-da+a^2}}\leq 16.$$

Решение. За произволни позитивни реални броеви x и y важи

$$\sqrt{x^2-xy+y^2}\geq\frac{x+y}{2},$$

а од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц следува

$$(x+\sqrt{y})^2\leq(x+y)(x+1),$$

па затоа,

$$\frac{(x+\sqrt{y})^2}{\sqrt{^2-xy+y^2}}\leq 2(x+1).$$

Според тоа,

$$\frac{(a+\sqrt{b})^2}{\sqrt{a^2-ab+b^2}}+\frac{(b+\sqrt{c})^2}{\sqrt{b^2-bc+c^2}}+\frac{(c+\sqrt{d})^2}{\sqrt{c^2-cd+d^2}}+\frac{(d+\sqrt{a})^2}{\sqrt{d^2-da+a^2}}\leq$$
$$\leq 2(a+1)+2(b+1)+2(c+1)+2(d+1)$$
$$=2(a+b+c+d)+8=16,$$

што и требаше да се докаже. ■

Во следните две задачи ќе го искористиме неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц за да определиме најголема вредност на даден израз.

Задача 6. Нека x,y,z се реални броеви поголеми или еднакви на $\frac{1}{3}$ и такви што $x+y+z=2$. Определи ја најголемата можна вредност на изразот

$$A=\sqrt{3x-1}+\sqrt{3y-1}+\sqrt{3z-1}.$$

Решение. Од неравенството на Копи-Буњаковски-Шварц, применето на броевите

$$a_1=1, a_2=1, a_3=1 \text{ и } b_1=\sqrt{3x-1}, b_2=\sqrt{3y-1}, b_3=\sqrt{3z-1},$$

следува

$$A=1\cdot\sqrt{3x-1}+1\cdot\sqrt{3y-1}+1\cdot\sqrt{3z-1}$$
$$\leq\sqrt{3}\cdot\sqrt{3x-1+3y-1+3z-1}$$
$$=\sqrt{3}\cdot\sqrt{3(x+y+z)-3}$$
$$=\sqrt{3}\cdot\sqrt{6-3}=3,$$

при што знак за равенство важи ако и само ако $\frac{\sqrt{3x-1}}{1}=\frac{\sqrt{3y-1}}{1}=\frac{\sqrt{3z-1}}{1}$, т.е. ако и само ако $x=y=z$. Со замена во $x+y+z=2$, добиваме дека $x=y=z=\frac{2}{3}$. Според тоа, најголемата вредност на дадениот израз A е еднаква на 3 и истата се достигнува за $x=y=z=\frac{2}{3}$. ■

Задача 7. Определи ја најголемата можна вредност на изразот

$$A=\sqrt{x}+4\sqrt{1-\frac{x}{2}}.$$

Решение. Јасно, дадениот израз е определен за $x\in[0,2]$. Од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц, применето на броевите

$$a_1=1, a_2=2, a_3=2 \text{ и } b_1=\sqrt{x}, b_2=\sqrt{1-\tfrac{x}{2}}, b_3=\sqrt{1-\tfrac{x}{2}},$$

следува

$$\begin{aligned} A &= 1\cdot\sqrt{x}+2\cdot\sqrt{1-\tfrac{x}{2}}+2\cdot\sqrt{1-\tfrac{x}{2}} \\ &\le \sqrt{9}\cdot\sqrt{x+1-\tfrac{x}{2}+1-\tfrac{x}{2}} \\ &= 3\sqrt{2} \end{aligned}$$

при што знак за равенство важи ако и само ако $\frac{\sqrt{x}}{1}=\frac{\sqrt{1-\frac{x}{2}}}{2}$, т.е. ако и само ако $x=\frac{2}{9}$. Според тоа, најголемата вредност на дадениот израз A е еднаква на $3\sqrt{2}$ и истата се достигнува за $x=\frac{2}{9}$. ■

Во следните неколку задачи ќе покажеме како неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц може да се примени за решавање на некои ирационални равенки.

Задача 9. Реши ја равенката

$$\sqrt{x-3}+2\sqrt{5-x}=\sqrt{10}\,. \tag{3}$$

Решение. Дефиниционата област на непозната x во равенката (3) е интервалот $[3,5]$. Ако за броевите $a_1=\sqrt{x-3}, a_2=\sqrt{5-x}$ и $b_1=1, b_2=2$ го примениме неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц го добиваме неравенството

$$(\sqrt{x-3}+2\sqrt{5-x})^2 \le (\sqrt{x-3}^2+\sqrt{5-x}^2)\cdot(1^2+2^2)\,,$$

кое е еквивалентно со неравенството

$$\sqrt{x-3}+2\sqrt{5-x}\le\sqrt{10}\,, \tag{4}$$

во кое според условот на здачата треба да важи знак за равенство. Но според теорема 1, во неравенството (4) знак за равенство важи ако и само ако $\frac{\sqrt{x-3}}{1}=\frac{\sqrt{5-x}}{2}$. Ако последната равенка ја квадрираме наоѓаме $x=\frac{17}{5}$ и како $\frac{17}{5}\in[3,5]$, тоа е решение на почетната равенка. ■

Задача 10. Реши ја равенката

$$x\sqrt{1+x}+\sqrt{3-x}=2\sqrt{x^2+1}\,. \tag{5}$$

Решение. Дефиниционата област на непозната x во равенката (5) е интервалот $[-1,3]$. Ако за броевите $a_1=\sqrt{1+x}, a_2=\sqrt{3-x}$ и $b_1=x, b_2=1$ го примениме неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц го добиваме неравенството

$$(x\sqrt{1+x}+\sqrt{3-x})^2 \le (\sqrt{1+x}^2+\sqrt{3-x}^2)(x^2+1^2)$$

кое е еквивалентно со неравенството

$$|\, x\sqrt{1+x}+\sqrt{3-x}\,| \le 2\sqrt{x^2+1}\,. \qquad (6)$$

во кое според условот на задачата треба да важи знак за равенство. Но, според теорема 1, во неравенството (6) знак за равенство важи ако и само ако $\frac{\sqrt{1+x}}{x}=\frac{\sqrt{3-x}}{1}$. Од последната равенка следува $x>0$, па затоа решенијата на равенката (5) ги бараме во интервалот $(0,3]$. Ако последната равенка ја квадрираме ја добиваме равенката $x^3-3x^2+x+1=0$, која е еквивалентна на равенката $(x-1)(x^2-2x-1)=0$. Решенијата на последната се $x_1=1, x_{2,3}=1\pm\sqrt{2}$. Конечно, од $x\in(0,3]$ добиваме дека решенија на дадената равенка се $x_1=1$ и $x_2=1+\sqrt{2}$. ■

Задача 11. Реши ја равенката

$$\sqrt{x^3+x^2+9x+9}=x\sqrt{x}+3\,.$$

Решение. Дадената равенка последователно е еквивалентна на равенките

$$\sqrt{x^2(x+1)+9(x+1)}=x\sqrt{x}+3,$$
$$\sqrt{(x+1)(x^2+9)}=x\sqrt{x}+3.$$

Од последната равенка следува дека дефиниционата област на непознатата x во почетната равенка е интервалот $[0,+\infty)$. Очигледно $x=0$ е едно решение на равенката. Понатаму, на броевите $a_1=x, a_2=3$ и $b_1=\sqrt{x}, b_2=1$ го применуваме неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц и по средувањето го добиваме неравенството

$$x\sqrt{x}+3\le\sqrt{(x^2+9)(x+1)}\,,$$

во кое според условот треба да важи знак за равенство. Сега, за $x>0$ од теорема 1 следува дека во последното неравенство знак за равенкство важи ако и само ако $\frac{x}{\sqrt{x}}=\frac{3}{1}$, од каде добиваме добиваме $x=9$.

Конечно, решенија на почетната равенка се $x=0$ и $x=9$. ■

Задача 12. Реши ја равенката

$$\sqrt{5x^2+5y^2}=x+2y-1.$$

Решение. Ако на броевите $a_1=x, a_2=y$ и $b_1=1, b_2=2$ го примениме неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц, по средувањето добиваме

$$x+2y\le\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{5}, \text{ т.е. } x+2y\le\sqrt{5x^2+5y^2}.$$

Но, за секои реални броеви x и y важи $x+2y>x+2y-1$, па затоа

$$\sqrt{5x^2+5y^2}>x+2y-1,$$

што значи дека дадената равенка нема решенија. ■

Задача 13. Реши го системот равенки

$$\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{1+2x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+2y^2}}=\frac{2}{\sqrt{1+2xy}}\\ \sqrt{x(1-2x)}+\sqrt{y(1-2y)}=\frac{2}{9}.\end{cases}$$

Решение. Допуштливи вредности за x и y се $0\le x,y\le\frac{1}{2}$.

Лема. За секои реални броеви x и y такви што $0\le x,y\le\frac{1}{2}$ точно е неравенството

$$\frac{1}{\sqrt{1+2x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+2y^2}}\le\frac{2}{\sqrt{1+2xy}},$$

при што знак за равенство важи ако и само ако $x=y$.

Доказ. Од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц добиваме

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1+2x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+2y^2}}\right)^2\le 2\left(\frac{1}{1+2x^2}+\frac{1}{1+2y^2}\right), \tag{1}$$

при што знак за равенство важи ако и само ако $\sqrt{1+2x^2}=\sqrt{1+2y^2}$, т.е. $x=y$.

Од друга страна, бидејќи $0\le x,y\le\frac{1}{2}$, добиваме

$$\frac{1}{1+2x^2}+\frac{1}{1+2y^2}-\frac{2}{1+2xy}=\frac{2(y-x)^2(2xy-1)}{(1+2xy)(1+2x^2)(1+2y^2)}\le 0, \tag{2}$$

при што знак за равенство важи ако и само ако $x=y$. Сега тврдењето на Лемата следува од (1) и (2). ■

Од Лемата следува дека дадениот систем е еквивалентен со системот

$$\begin{cases} x = y \\ \sqrt{x(1-2x)} + \sqrt{y(1-2y)} = \frac{2}{9}, \end{cases}$$

шии решенија се $x = y = \frac{9-\sqrt{73}}{36}$ и $x = y = \frac{9+\sqrt{73}}{36}$.

Литература

1. Arslanagić, Š.: *Matematika za nadarene*, Bosanska riječ, Sarajevo, 2005
2. Mitrinović, D. S.; Vasić, P. M.: *Analitičke nejednakosti,* Građevinska knjiga, Beograd, 1970
3. Малчески, Р.: *Елементарни алгебарски и аналитички неравенства* (второ издание), Армаганка, Скопје, 2019
4. Рангелова, П.: *Векторите при решавање на задачи с ирационални изрази*, Математика 1/2013, София