Статијата прв пат е објавена во списанието ТАНГЕНТА на ДМ на Србија во 2002/03 година

ЗАДАТАК О ТРИ РИБАРА

Ратко Тошић, Нови Сад

Пол Дирак (1902 – 1984) је један од највећих физичара двадесетог века. Обједињио је квантну механику и општу теорију релативности. Добио је Нобелову награду 1933. године. Предсказао је постојање антиматерије.

Вероватно је Дираково предвиђање о постојању антиматерије погодовало ширењу легенде о томе како је у ђачким данима решио постављени му задатак о три рибара. Сам Дирак, међутим, тврдио је да му је то решење саопштио Џ. Г. К. Вајтхед, професор математике из Оксфорда. Задатак гласи:

Једне тамне ноћи су три рибара ловили рибу. Како су се уморили, легли су да спавају а да пре тога нису поделили улов. У зору се један од њих пробудио и, не желећи да узнемирава другове, поделио рибе на три једнака дела, при чему је преостала једна риба. Он је ту преосталу рибу бацио у реку, узео свој део и отишао кући. Затим се пробудио други рибар. Не знајући да је први већ поштено узео свој део, он је такође поделио рибе на три једнака дела, при чему је такође бацио у реку једну сувишну рибу, узео свој део и отишао кући. На крају се пробудио и трећи рибар. Не знајући шта су урадили његови другови, поступио је на исти начин; поделио је рибе на три једнака дела, при чему је једну сувишну рибу бацио у реку, узео своју трећину и отишао кући.

Колико је укупно риба били уловљено?

Одговор, који се приписује Дираку је: Уловљене су укупно минус две (-2) рибе.

Лако је проверити да је одговор формално тачан. Кад се пробудио први рибар, видео је минус две рибе, једну је бацио у реку и остале су минус три $(-2-1=-3)$ рибе. Узео је своју трећину (-1) после чега су остале поново минус две (-2) рибе. На потпуно исти начин поступају други и трећи рибар и сваки одлази кући "задовољан", са минус једном рибом.

Приметимо да ово није и једино решење. Читалац ће лако, после мало експериментисања, пронаћи и нека позитивна решења. На пример, једно позитивно решење је: 25. Заиста, ако је укупан број уловљених риба једнак 25, онда поделом на начин описан у условима задатка први рибар узима 8 риба, други 5, а трећи се враћа кући са 3 рибе. Нажалост, у овом случају је добар део улова остао неискоришћен.

Исто тако, читалац може лако проверити да је и број 52 једно решење задатка. Уствари, задатак има бесконачно много решења. Да бисмо нашли сва решења, поступимо на следећи начин:

Нека је $R = R_0$ укупан број уловљених риба, R_1 број риба које су остале после одласка првог рибара, R_2 – после одласка другог и R_3 – после одласка трећег.

Тада је $R_1 = \frac{2}{3}(R_0 - 1)$, и уопште за $k = 0, 1, 2$ је

$$R_{k+1} = \frac{2}{3}(R_k - 1). \tag{1}$$

Интересују нас само цели ненегативни бројеви $R = R_0$, R_1, R_2 и R_3 који задовољавају рекурентну формулу (1). Чак и при том ограничењу, задатак има бесконачно много решења. Потражићемо општу формулу за број R.

Занемарићемо за тренутак услов ненегативности, јер ћемо на основу опште формуле коју добијемо лако издвојити ненегативна решења. Приметимо прво да је решење Дирака једино решење за које је $R = R_1 = R_2 = R_3$. Заиста, ако су сви ти бројеви једнаки једном истом броју C, онда из (1), добијамо једначину $C = \frac{2}{3}(C - 1)$, одакле је $C = -2$.

Нека је сада R_k произвољан низ који задовољава рекурентну формулу (1). Посматрајмо низ $R'_k = R_k - C = R_k + 2$. Како је

$$R'_{k+1} = R_{k+1} - C = \frac{2}{3}(R_k - 1) - \frac{2}{3}(C - 1) = \frac{2}{3}(R_k - C) = \frac{2}{3}R'_k,$$

следи да је низ R'_k геометријска прогресија са количником $\frac{2}{3}$. Одатле је

$$R_k = R'_k - 2 = \left(\frac{2}{3}\right)^k R'_0 - 2 = \left(\frac{2}{3}\right)^k (R + 2) - 2. \tag{2}$$

Из (2) се види да ће бројеви R_0, R_1, R_2 и R_3 сви бити цели ако и само ако је број $R + 2$ дељив са $3^3 = 27$. Зато је $R = 27n - 2$, где је n произвољан цео број. Очигледно, сва четири броја ће бити ненегативни за $n \geq 1$.

Најмање ненегативно решење добија се за $n = 1$: $R_{\min} = 25$. За $n = 0$ добија се решење Дирака: $R = -2$.

Приметимо да је решење Дирака и "најправедније", јер сваки рибар добија исти број риба (додуше "негативних").

Лако се израчунава, на основу (1), да ако је $R = 27n - 2$, онда је $R_1 = 18n - 2$, $R_2 = 12n - 2$, $R_3 = 8n - 2$. Ако означимо са r_k број риба које је узео k-ти рибар ($k = 1, 2, 3$), онда је $r_k = \frac{R_k}{2}$, тј. $r_1 = 9n - 1$, $r_2 = 6n - 1$, $r_3 = 4n - 1$.

Размотримо сада други приступ за решавање задатка. Означимо са N укупан број уловљених риба, а са A, B, C редом број риба које су добили први, други и трећи рибар. Задатак се сада своди на решавање система од три диофантске једначине:

$$\begin{aligned} N &= 3A + 1 \\ 2A &= 3B + 1 \\ 2B &= 3C + 1. \end{aligned}$$

Смисао сваке од горњих једначина је јасан. Добро познатим методама горњи систем се своди на једну диофантску једначину:

$$4N = 27C + 19. \tag{3}$$

Постоје стандардне методе за решавање оваквих једначина, којима се нећемо бавити овом приликом. Уочимо само да је $N = 25$, $C = 3$ једно решење. Из система једначина добијамо да је тада $A = 8$, $B = 5$.

У овом специјалном случају лако се види да је лева страна једначине (3) дељива са 4, док је десна дељива са 4 ако и само ако је $C = 4n - 1$ за неки природан број n. Уврштавајући у (1) $C = 4n - 1$, добијамо $N = 27n - 2$.

Наведени задатак се у разним варијантама појављује у научно–популарној литератури. 9. октобра 1926. године у новинама *Saturday Evening Post* објављена је кратка прича Б. Е. Вилијамса под насловом "Кокосови ораси". Сиже се своди на то да је неки предузимач, желећи да спречи свог конкурента, љубитеља занимљиве математике, да добије важан посао, преко свог службеника успео да му подметне проблем интересантног садржаја. Удубљен у решавање проблема, конкурент је пропустио рок за подношење пријаве и на тај начин изгубио посао.

Ево како је формулисан задатак из Вилијамсове приче:

Пет морнара и мајмун претрпели су бродолом и искрцали се на пусто острво. Цео први дан провели су у сакупљању кокосових ораха. Увече су скупили орахе на гомилу и легли да спавају.

У току поћи, док су остали спавали, један морнар се пробудио. Помислио је да ујутру, приликомм поделе ораха, може доћи до свађе и одлучио да одмах узме свој део. Зато је разделио орахе на пет једнаких гомила, а један преостали орах је дао мајмуну. Затим је свој део сакрио, а остале поново скупио на једну гомилу.

После неког времена пробудио се други морнар и урадио то исто. И код њега је, приликом поделе на једнаке делове, преостао један орах и он га је дао мајмуну. Тако су се морнари будили један за другим. Сваки је узео за себе једну петину ораха са гомиле коју је нашао после буђења, и сваки је дао по један преостали орах мајмуну. Ујутру кад су се пробудили поделили су преостале орахе и сваки је добио по једну петину, после чега није преостало ништа. Наравно, сваки морнар је знао да део ораха недостаје, али како ниједном савест није била чиста, нико ништа није казао.

Колико је кокосових ораха било на почетку?

З А Д А Ц И

1. Решити задатак из Вилијамсове приче.

2. Три морнара, лутајући острвом нашли су гомилу кокосових ораха. Први је узео половину од свих ораха и још пола ораха, други – половину од онога што је преостало и још пола ораха, трећи – половину остатка о још пола ораха. Остао је само један орах који је дао мајмуну. Колико је ораха било на гомили кад су је морнари нашли?

3. (Уопштени задатак о рибама) У задатку о подели риба, нека је r број рибара, а при свакој подели на r делова баца се q преосталих риба ($q < r$). Доказати да је тада $R = r^r n - q(r-1)$. За које ће вредности n сви бројеви R_k, $k = 0, 1, \ldots, r$, бити ненегативни?