Ристо Малчески, Македонија
Алија Муминагиќ, Данска

# ТРИ ИДЕНТИТЕТИ ЗА ФИБОНАЧИЕВИТЕ БРОЕВИ

Како што знаеме, низата Фибоначиеви броеви $\{f_n\}$ определена со

$$f_0 = 0,\ f_1 = 1 \text{ и } f_{n+2} = f_{n+1} + f_n, \text{ за } n \geq 0, \tag{1}$$

експлицитно се задава со помош на формулата на Бине

$$f_n = \tfrac{1}{\sqrt{5}}[(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\tfrac{1-\sqrt{5}}{2})^n],\ n \geq 0. \tag{2}$$

Во оваа кратка статија користејќи ги (1) и (2) ќе докажеме неколку идентитети поврзани со Фибоначиевите броеви.

**Задача 1 (Цезаро).** Докажи дека

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k f_k = f_{3n}$$

**Решение.** Ако ги искористиме формулите на Бине, при ознаки $r = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ и $1-r = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, и Њутновата биномна формула, добиваме

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k f_k &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k \tfrac{1}{\sqrt{5}}(r^k - (1-r)^k) \\ &= \tfrac{1}{\sqrt{5}}(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k r^k - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k (1-r)^k) \\ &= \tfrac{1}{\sqrt{5}}((1+2r)^n - (1+2(1-r))^n).\end{aligned} \tag{3}$$

Понатаму, од $r^2 = r+1$ следува

$$r^3 = r^2 \cdot r = r(r+1) = r^2 + r = r+1+r = 2r+1$$

и аналогно се докажува дека $(1-r)^3 = 1+2(1-r)$. Сега, заменуваме во (3) и добиваме

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k f_k = \tfrac{1}{\sqrt{5}}((1+2r)^n - (1+2(1-r))^n) = \tfrac{1}{\sqrt{5}}(r^{3n} - (1-r)^{3n}) = f_{3n}. \blacksquare$$

**Задача 2.** Докажи дека

$$f_n^2 = 2f_{n-1}^2 + 2f_{n-2}^2 - f_{n-3}^2, \text{ за } n \geq 0. \tag{4}$$

**Решение.** *Прв начин*. Со квадрирање на $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, за $n \geq 3$ последователно добиваме

$$f_n^2 = f_{n-1}^2 + f_{n-2}^2 + 2f_{n-1}f_{n-2}$$

$$2f_{n-1}f_{n-2}=f_n^2-f_{n-1}^2-f_{n-2}^2. \tag{5}$$

Ако во (5) наместо $n$ ставиме $n-1$ добиваме

$$2f_{n-2}f_{n-3}=f_{n-1}^2-f_{n-2}^2-f_{n-3}^2. \tag{6}$$

Сега, од (5) ја одземаме (6) и добиваме

$$2f_{n-2}(f_{n-1}-f_{n-3})=f_n^2-2f_{n-1}^2+f_{n-3}^2. \tag{7}$$

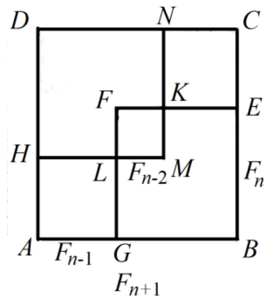
Ако во (7) замениме $f_{n-1}-f_{n-3}=f_{n-2}$, добиваме

$$2f_{n-2}^2=f_n^2-2f_{n-1}^2+f_{n-3}^2, \text{ т.е. } f_n^2=2f_{n-1}^2+2f_{n-2}^2-f_{n-3}^2,$$

што и требаше да се докаже.

*Втор начин*. Ако во (4) наместо $n$ ставиме $n+1$ добиваме

$$f_{n+1}^2=2f_n^2+2f_{n-1}^2-f_{n-2}^2.$$




Да земеме квадрат $ABCD$ со должина на страна $\overline{AB}=\overline{BC}=f_{n+1}$. Квадратите $BEFG$ и $DHMN$ се поставени како на цртежот десно и имаат должини на страни $\overline{BE}=\overline{HM}=f_n$. Сега, ако $HM\cap FG=L$ и $MN\cap EF=K$, тогаш четириаголниците $AGLH$ и $CNKE$ се квадрати со должини на страни $\overline{AG}=\overline{CE}=f_{n+1}-f_n=f_{n-1}$, па затоа четириаголникот $FKML$ е квадрат со должина на страна $\overline{FK}=f_n-f_{n-1}=f_{n-2}$.

Од досега изнесеното следува

$$\begin{aligned} f_{n+1}^2 &= P_{ABCD}=P_{EFGB}+P_{DHMN}-P_{FKML}+P_{AGLH}+P_{KECN}\\ &= f_n^2+f_n^2-f_{n-2}^2+f_{n-1}^2+f_{n-1}^2=2f_n^2+2f_{n-1}^2-f_{n-2}^2, \end{aligned}$$

што и требаше да се докаже.

*Трет начин*. Ако во (2) ставиме $\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\beta=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, тогаш формулата на Бине ја запишуваме во обликот

$$f_n=\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n-\beta^n),\ n\geq 0. \tag{8}$$

Сега, ако прво земеме предвид дека

$$\alpha\beta=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{1-\sqrt{5}}{2}=-1,$$

а потоа дека од $\alpha^2=\alpha+1$ следува

$$\begin{aligned} 2\alpha^4+2\alpha^2-1 &= 2\alpha^4+\alpha^2+\alpha^2-1=2\alpha^4+\alpha^2+\alpha=2\alpha^4+\alpha(\alpha+1)\\ &= 2\alpha^4+\alpha^3=\alpha^4+\alpha^4+\alpha^3=\alpha^4+\alpha^3(\alpha+1)\\ &= \alpha^4+\alpha^5=\alpha^4(\alpha+1)=\alpha^6 \end{aligned}$$

и аналогно $2\beta^4+2\beta^2-1=\beta^6$ и ја искористиме (8), добиваме:

$$
\begin{aligned}
2f_n^2+2f_{n-1}^2-f_{n-2}^2 &= \tfrac{1}{5}[2(\alpha^n-\beta^n)^2+2(\alpha^{n-1}-\beta^{n-1})^2-(\alpha^{n-2}-\beta^{n-2})^2]\\
&= \tfrac{1}{5}(2\alpha^{2n}+2\beta^{2n}-4\cdot(-1)^n+2\alpha^{2n-2}+2\beta^{2n-2}\\
&\quad -4\cdot(-1)^{n-1}-\alpha^{2n-4}-\beta^{2n-4}+2\cdot(-1)^{n-2})\\
&= \tfrac{1}{5}(2\alpha^{2n}+2\alpha^{2n-2}-\alpha^{2n-4}+2\beta^{2n}+2\beta^{2n-2}-\beta^{2n-4}-2\cdot(-1)^{n+1})\\
&= \tfrac{1}{5}[\alpha^{2n-4}(2\alpha^4+2\alpha^2-1)+\beta^{2n-4}(2\beta^4+2\beta^2-1)-2\cdot(-1)^{n+1}]\\
&= \tfrac{1}{5}(\alpha^{2n-4}\alpha^6+\beta^{2n-4}\beta^6-2\cdot(-1)^{n+1})\\
&= \tfrac{1}{5}(\alpha^{2n+2}+\beta^{2n+2}-2\cdot(-1)^{n+1})\\
&= \tfrac{1}{5}(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1})^2 = f_{n+1}^2,
\end{aligned}
$$

што и требаше да се докаже. ■

**Задача 3.** Докажи дека

$$f_n^3=3f_{n-1}^3+6f_{n-2}^3-3f_{n-3}^3-f_{n-4}^3\text{, за } n\ge 0. \tag{9}$$

**Решение.** Имаме:

$$
\begin{aligned}
f_n^3 &= \tfrac{1}{5\sqrt{5}}(\alpha^{3n}-3\alpha^{2n}\beta^n+3\alpha^n\beta^{2n}-\beta^{3n})\\
&= \tfrac{1}{5\sqrt{5}}(\alpha^{3n}-3(-1)^n\alpha^n+3(-1)^n\beta^n-\beta^{3n})\\
&= \tfrac{1}{5}\cdot\tfrac{\alpha^{3n}-\beta^{3n}}{\sqrt{5}}-\tfrac{3}{5}(-1)^n\cdot\tfrac{\alpha^n-\beta^n}{\sqrt{5}}\\
&= \tfrac{1}{5}f_{3n}-\tfrac{3}{5}(-1)^n f_n.
\end{aligned}
$$

Според тоа, ако во последниот идентитет $n$ последователно го замениме со $n-1$, $n-2, n-3$ и $n-4$ за десната страна на (9) добиваме:

$$
\begin{aligned}
3f_{n-1}^3+6f_{n-2}^3-3f_{n-3}^3-f_{n-4}^3 &= \tfrac{1}{5}(3f_{3n-3}+6f_{3n-6}-3f_{3n-9}-f_{3n-12})-\\
&\quad -\tfrac{3}{5}(-1)^n(-3f_{n-1}+6f_{n-2}+3f_{n-3}-f_{n-4}).
\end{aligned}
$$

Понатаму,

$$
\begin{aligned}
-3f_{n-1}+6f_{n-2}+3f_{n-3}-f_{n-4} &= -3f_{n-1}+3(f_{n-2}+f_{n-3})+3f_{n-2}-f_{n-4}\\
&= -3f_{n-1}+3f_{n-1}+3f_{n-2}-f_{n-4}\\
&= 3f_{n-2}-f_{n-4}=3f_{n-2}-(f_{n-2}-f_{n-3})\\
&= 2f_{n-2}+f_{n-3}=f_{n-2}+(f_{n-2}+f_{n-3})\\
&= f_{n-2}+f_{n-1}=f_n,
\end{aligned}
$$

и користејќи дека $f_k=f_{k-1}+f_{k-1}$, со последователно намалување на индексот на $f_{3n}$, на потполно аналоген начин како погоре се докажува дека

$$f_{3n}=3f_{3n-3}+6f_{3n-6}-3f_{3n-9}-f_{3n-12}.$$

Според тоа,

$$\begin{aligned} f_n^3 &= \tfrac{1}{5} f_{3n} - \tfrac{3}{5}(-1)^n f_n \\ &= \tfrac{1}{5}(3f_{3n-3} + 6f_{3n-6} - 3f_{3n-9} - f_{3n-12}) - \tfrac{3}{5}(-1)^n(-3f_{n-1} + 6f_{n-2} + 3f_{n-3} - f_{n-4}) \\ &= 3f_{n-1}^3 + 6f_{n-2}^3 - 3f_{n-3}^3 - f_{n-4}^3, \end{aligned}$$

што и требаше да се докаже. ■

Литература


1. Abbas Roohol Amini: Fibonacci Numbers a Long Division Formula, Mathematical Spectrum, Vol. 40, Number 2, 2007/08 2. Jens Carstensen
2. Alija Muminagić: Fibonaccital og polynomiers division, Matematik Magasinet 40, yuni, 2008
3. Карстенсен, Ј., Муминагиќ, А. (2020). Фибоначиеви броеви и полиноми со целобројни коефициенти, Армаганка, Скопје (armaganka.org.mk)
4. Малчески, Р. (2009). Фибоначиеви броеви, Сигма, Скопје
5. Малчески, Р., Муминагиќ, А. (2021). Некои релации за Фибоначиевите и Лукасовите броеви, Армаганка, Скопје (armaganka.org.mk)