Huygensova[1] nejednakost i njene primjene

Šefket Arslanagić[2], Sarajevo

U raznim područjima matematike, i njezine primjene, pojavljuju se raznorazne nejednakosti, a neke od njih upoznajemo još u srednjoj školi. Sada ćemo prikazati jednu elementarnu nejednakost koja se primjenjuje kod dokazivanja mnogih drugih.

Teorem. Ako su realni brojevi $x_i > 0,\ i = 1, 2, \ldots, n$, tada vrijedi nejednakost

$$(1 + x_1)(1 + x_2)\ldots(1 + x_n) \geqslant (1 + \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n})^n. \tag{1}$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Dokaz. Za pozitivne realne brojeve $x_i,\ y_i > 0,\ i = 1, 2, \ldots n$, promatrajmo brojeve $\dfrac{x_i}{x_i + y_i},\ \dfrac{y_i}{x_i + y_i}$. Koristeći nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine, $A \geqslant G$, za n pozitivnih realnih brojeva imamo:

$$\frac{1}{n}\left(\frac{x_1}{x_1 + y_1} + \frac{x_2}{x_2 + y_2} + \ldots + \frac{x_n}{x_n + y_n}\right) \geqslant \sqrt[n]{\frac{x_1}{x_1 + y_1} \cdot \frac{x_2}{x_2 + y_2} \cdot \ldots \cdot \frac{x_n}{x_n + y_n}},$$

$$\frac{1}{n}\left(\frac{y_1}{x_1 + y_1} + \frac{y_2}{x_2 + y_2} + \ldots + \frac{y_n}{x_n + y_n}\right) \geqslant \sqrt[n]{\frac{y_1}{x_1 + y_1} \cdot \frac{y_2}{x_2 + y_2} \cdot \ldots \cdot \frac{y_n}{x_n + y_n}}.$$

Zbrajanjem ovih nejednakosti dobivamo

$$\frac{1}{n}\left(\frac{x_1 + y_1}{x_1 + y_1} + \frac{x_2 + y_2}{x_2 + y_2} + \ldots + \frac{x_n + y_n}{x_n + y_n}\right)$$
$$\geqslant \sqrt[n]{\frac{x_1 x_2 \ldots x_n}{(x_1 + y_1)(x_2 + y_2)\ldots(x_n + y_n)}} + \sqrt[n]{\frac{y_1 y_2 \ldots y_n}{(x_1 + y_1)(x_2 + y_2)\ldots(x_n + y_n)}}$$

odnosno

$$\sqrt[n]{(x_1 + y_1)(x_2 + y_2)\ldots(x_n + y_n)} \geqslant \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} + \sqrt[n]{y_1 y_2 \ldots y_n}. \tag{2}$$

Stavljajući $y_1 = y_2 = \ldots = y_n = 1$, nakon sređivanja, dobivamo (1). Jednakost vrijedi ako i samo ako je $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1$. Time je dokazana Huygensova nejednakost.

Sada ćemo na nekoliko primjera prikazati kako se nejednakost (1), odnosno (2), primjenjuje na dokazivanje raznih drugih nejednakosti.

Primjer 1. Neka je $S = a_1 + a_2 + \ldots + a_n,\ a_i > 0,\ i = 1, 2, \ldots n$. Tada vrijedi nejednakost

$$\left(1 + \frac{1}{a_1}\right)\left(1 + \frac{1}{a_2}\right)\ldots\left(1 + \frac{1}{a_n}\right) \geqslant \left(1 + \frac{n}{S}\right)^n. \tag{3}$$

Jednakost se postiže ako i samo je $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

[1] Christian Huygens (1639. – 1695.) je poznati holandski matematičar i fizičar, a velik dio života proveo je u Parizu.

[2] Autor je profesor na Prirodno-matematičkom fakultetu Sveučilišta u Sarajevu, e-mail: asefket@pmf.unsa.ba

Dokaz. Iz nejednakosti (1), za $x_i = \dfrac{1}{a_i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, slijedi

$$\left(1+\frac{1}{a_1}\right)\left(1+\frac{1}{a_2}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{a_n}\right) \geqslant \left(1+\frac{1}{\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}}\right)^n. \tag{4}$$

Koristeći AG nejednakost

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n},$$

odnosno, u obliku

$$\frac{1}{\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}} \geqslant \frac{n}{a_1+a_2+\ldots+a_n}, \tag{5}$$

iz (1) i (5) dobivamo traženu nejednakost. Jednakost vrijedi ako i samo ako je $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Primjer 2. Neka su a, b, c i D bridovi i dijagonala pravokutnog paralelepipeda $ABCDEFGH$. Označimo kutove $\alpha = \sphericalangle ABH$, $\beta = \sphericalangle HBF$ i $\gamma = \sphericalangle HBC$. Tada vrijedi nejednakost

$$\left(1+\frac{1}{\cos^2\alpha}\right)\left(1+\frac{1}{\cos^2\beta}\right)\left(1+\frac{1}{\cos^2\gamma}\right) \geqslant 64.$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je paralelepiped kocka.

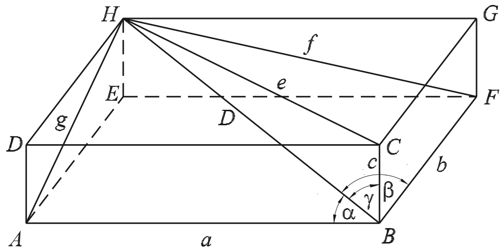
Dokaz. Uz oznake kao na slici imamo:

$$e = \sqrt{a^2+b^2},\ f = \sqrt{a^2+c^2},\ g = \sqrt{b^2+c^2},\ D = \sqrt{a^2+b^2+c^2},$$

$$\cos\alpha = \frac{a}{D},\ \cos\beta = \frac{b}{D},\ \cos\gamma = \frac{c}{D},$$

odakle dobivamo

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \tag{7}$$



Iz (3) i (7), stavljajući $n = 3$, $a_1 = \cos^2\alpha$, $a_2 = \cos^2\beta$, $a_3 = \cos^2\gamma$, slijedi

$$\left(1+\frac{1}{\cos^2\alpha}\right)\left(1+\frac{1}{\cos^2\beta}\right)\left(1+\frac{1}{\cos^2\gamma}\right) \geqslant \left(1+\frac{3}{1}\right)^3 = 64.$$

Jednakost u (6) vrijedi ako i samo ako je $\alpha = \beta = \gamma$, tj. ako i samo ako je paralelepiped kocka.

Primjer 3. Ako su α, β, γ kutovi trokuta tada vrijedi nejednakost

$$\left(1+\frac{1}{\sin\alpha}\right)\left(1+\frac{1}{\sin\beta}\right)\left(1+\frac{1}{\sin\gamma}\right) \geqslant \left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3. \tag{8}$$

Dokaz. Stavljajući u (3) $a_1 = \sin\alpha$, $a_2 = \sin\beta$, $a_1 = \sin\gamma$, $S = \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma$, dobivamo

$$\left(1+\frac{1}{\sin\alpha}\right)\left(1+\frac{1}{\sin\beta}\right)\left(1+\frac{1}{\sin\gamma}\right) \geqslant \left(1+\frac{3}{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}\right)^3,$$

a radi poznate nejednakosti

$$0 < \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}, \qquad (2.1 \text{ u } [3])$$

odnosno

$$\frac{1}{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma} \geqslant \frac{2\sqrt{3}}{9},$$

slijedi (8). Jednakost vrijedi ako i samo ako je $\alpha = \beta = \gamma = 60°$, tj. ako i samo ako je trokut jednakostraničan.

Primjer 4. Za svaki realan broj x vrijedi nejednakost

$$\left(1+\frac{1}{\sin^2 x}\right)\left(1+\frac{1}{\cos^2 x}\right) \geqslant 9. \tag{9}$$

Dokaz. Uzimajući u (1) $x_1 = \dfrac{1}{\sin^2 x}$, $x_2 = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, $n = 2$, dobivamo

$$\left(1+\frac{1}{\sin^2 x}\right)\left(1+\frac{1}{\cos^2 x}\right) \geqslant \left(1+\frac{1}{|\sin x\cos x|}\right)^2,$$

a odavde, zbog $\dfrac{1}{|\sin x\cos x|} = \dfrac{2}{|\sin 2x|} \geqslant 2$, slijedi tražena nejednakost. Jednakost vrijedi ako i samo ako je $\sin^2 x = \cos^2 x$, tj. $|\sin x| = |\cos x| = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Primjer 5. Neka su a, b, c stranice i R polumjer trokutu opisane kružnice. Tada vrijedi nejednakost

$$\left(1+\frac{1}{a^2}\right)\left(1+\frac{1}{b^2}\right)\left(1+\frac{1}{c^2}\right) \geqslant \left(1+\frac{1}{3R^2}\right)^3. \tag{10}$$

Dokaz. Slijedi neposredno iz nejednakosti (3), uzimajući $a_1 = a^2$, $a_2 = b^2$, $a_3 = c^2$, $S = a^2 + b^2 + c^2$ i koristeći nejednakost

$$a^2 + b^2 + c^2 \leq 9R^2, \qquad (5.13 \text{ u } [3]).$$

Jednakost u (10) vrijedi ako i samo ako je $a = b = c$.

Primjer 6. Neka su h_a, h_b, h_c visine trokuta i $s = \dfrac{a+b+c}{2}$ njegov poluopseg. Tada vrijedi nejednakost

$$\left(1+\frac{1}{h_a}\right)\left(1+\frac{1}{h_b}\right)\left(1+\frac{1}{h_c}\right) \geqslant \left(1+\frac{\sqrt{3}}{s}\right)^3. \tag{11}$$

Dokaz. Slijedi neposredno iz nejednakosti (3), uzimajući $a_1 = h_a$, $a_2 = h_b$, $a_3 = h_c$, $S = h_a + h_b + h_c$ i poznatu nejednakost

$$h_a + h_b + h_c \leq s\sqrt{3}, \qquad (6.1 \text{ u } [3]).$$

Jednakost u (11) vrijedi ako i samo ako je $a = b = c$.

Primjer 7. Ako su m_a, m_b, m_c duljine težišnica trokuta i $s = \dfrac{a+b+c}{2}$ njegov poluopseg, vrijedi nejednakost

$$\left(1+\frac{1}{m_a}\right)\left(1+\frac{1}{m_b}\right)\left(1+\frac{1}{m_c}\right) > \left(1+\frac{3}{2s}\right)^3. \tag{12}$$

Dokaz. Slijedi neposredno iz nejednakosti (3) za $a_1 = m_a$, $a_2 = m_b$, $a_3 = m_c$, $S = m_a + m_b + m_c$ i poznate nejednakosti

$$\frac{3}{2}s < m_a + m_b + m_c < 2s, \quad (8.1 \text{ u } [3]).$$

Primjer 8. Dani su realni brojevi x_k, $k = 1, 2, \ldots, n$. takvi da je $0 < x_k \leqslant 1$. Tada vrijedi nejednakost

$$(1-x_1)(1-x_2)\ldots(1-x_n) \leqslant (1-\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n})^n. \tag{13}$$

Dokaz. Imamo

$$\frac{1}{x_1 \ldots x_n} = \left(1+\left(\frac{1}{x_1}-1\right)\right)\ldots\left(1+\left(\frac{1}{x_n}-1\right)\right). \tag{*}$$

Iz (1) i (*) dobivamo

$$\left(1+\left(\frac{1}{x_1}-1\right)\right)\ldots\left(1+\left(\frac{1}{x_n}-1\right)\right) \geqslant \left(1+\sqrt[n]{\left(\frac{1}{x_1}-1\right)\ldots\left(\frac{1}{x_n}-1\right)}\right)^n,$$

odnosno

$$\frac{1}{x_1 \ldots x_n} \geqslant \left(1+\sqrt[n]{\frac{(1-x_1)\ldots(1-x_n)}{x_1 \ldots x_n}}\right)^n,$$

a odavde slijedi tražena nejednakost. Jednakost u (13) vrijedi ako i samo ako je $x_1 = \ldots = x_n$.

Primjer 9. Izračunati

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\left(n+\sqrt[n]{n!}\right)^n}{(n!)^2}.$$

Rješenje. Stavljajući u (1) $x_i = \dfrac{k}{i}$, $k > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, dobivamo

$$\left(1+\frac{k}{1}\right)\left(1+\frac{k}{2}\right)\ldots\left(1+\frac{k}{n}\right) \geqslant \left(1+\sqrt[n]{\frac{k^n}{n!}}\right)^n, \quad \text{tj.}$$

$$\frac{(1+k)(2+k)\ldots(n+k)}{n!} \geqslant \left(1+\sqrt[n]{\frac{k^n}{n!}}\right)^n,$$

a odavde, uzimajući $k = n$,

$$\frac{(n+1)(n+2)\dots(n+n)}{n!} \geqslant \frac{\left(\sqrt[n]{n!}+n\right)^n}{n!}. \tag{14}$$

Kako je

$$(n+1)(n+2)\dots(n+n) = \frac{(2n)!}{n!},$$

iz (14) dobivamo

$$\frac{\left(\sqrt[n]{n!}+n\right)^n}{(n!)^2} \leqslant \frac{(2n)!}{(n!)^3}. \tag{15}$$

Sada ćemo pokazati da je

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^3} = 0. \tag{16}$$

Promatrajmo niz $\{x_n\}$ čiji je opći član

$$x_n = \frac{(2n)!}{(n!)^3}.$$

Imamo,

$$x_{n+1} = \frac{(2(n+1))!}{[(n+1)!]^3} = \frac{(2n)!(2n+1)(2n+2)}{(n!)^3(n+1)^3}, \quad \text{tj.}$$

$$x_{n+1} = x_n \cdot \frac{2(2n+1)}{(n+1)^2}. \tag{17}$$

Kako je $\dfrac{2(2n+1)}{(n+1)^2} < \dfrac{1}{2}$ za $n \geqslant 7$ $(\Leftarrow 12 \leqslant (n-3)^2)$. Sada je za $n \geqslant 7$

$$x_n < \left(\frac{1}{2}\right)^{n-7} x_7,$$

odakle slijedi, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$, tj. vrijedi (16). Sada je iz (15)

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+\sqrt[n]{n!})^n}{(n!)^2} = 0.$$

Literatura

[1] ŠEFKET ARSLANAGIĆ, *Anwendungen bekannter Ungleichungen*, Wurzel (Yena), 12(1996), 261–270.

[2] ŠEFKET ARSLANAGIĆ, *Matematika za nadarene*, Bosanska riječ, Sarajevo, 2004.

[3] O. BOTTEMA AND OTHERS, *Geometric inequalities*, Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen, 1969.

[4] D. S. MITRINOVIĆ, *Analitic Inequalities*, Springer–Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1970.