EVOLVENTA (JAMTK) 4(2) (2021), 12 – 21

Publikovano od UM TK,
Udruženje matematičara TK
Dostupno na: http://evolventa.ba
http://www.umtk.info

Osvrt na jedan zadatak sa više načina rješavanja

Reuf Ibrahimefendić[a]

[a]*Penzioner, Tuzla*

Sažetak: U ovom radu se daju još tri načina (sedmi, osmi i deveti) rješavanja zadatka 1.1 iz objavljenog članka: *Jedan zadatak sa više načina rješavanja* i na osnovu toga nekoliko zadataka sa rješenjima. Zajedno sa već objavljenim ovaj rad čini jedinstvcnu cjelinu.

1. Uvod

U časopisu EVOLVENTA Vol.2, No.l, Tuzla 2019. (elektronska publikacija) objavljen je članak: JEDAN ZADATAK SA VIŠE NAČINA RJEŠAVANJA (autor Alija Muminagić) str. br. 2-10. U sekciji 2. PRVI NAČIN je prikazano kako učenici 8. i 9. razreda osnovne škole mogu dokazati jednakost (1), to jest

$$r_a + r_b + r_c = 4R + r \tag{1}$$

gdje su r_a, r_b i r_c poluprečnici trouglu pripisanih kružnica uz odgovarajuće stranice, a R i r poluprečnici opisane i upisane kružnice tog trougla.

2. Različiti načini dokazivanja jrdnskosti (1)

Učenicima osnovne škole možemo pokazati i ovo RJEŠENjE:

Način I:

U svakom trouglu vrijedi

$$r_a = \frac{P}{s-a}\ ,\ r_b = \frac{P}{s-b}\ ,\ r_c = \frac{P}{s-c}, \tag{2}$$

gdje je P površina trougla, a s poluobim. Koristeći veze (2) imamo

$$\begin{aligned}
r_a + r_b + r_c &= P \cdot \left(\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s-b} + \frac{1}{s-c}\right)\\
&= P \cdot \frac{(s-b)(s-c)+(s-a)(s-c)+(s-a)(s-b)}{(s-a)(s-b)(s-c)}\\
&= P \cdot \frac{s^2 - sb - sc + bc + s^2 - sc - sa + ac + s^2 - sb - sa + ab}{(s-a)(s-b)(s-c)}\\
&= P \cdot \frac{3s^2 - 2s(a+b+c) + ab + bc + ca}{(s-a)(s-b)(s-c)}
\end{aligned}$$

Ciljna skupina: srednja škola
Ključne riječi: trougao, opisana i upisana kružnica, pripisane kružnice, poluprečnik, Heronov obrazac
Kategorizacija: Stručno-istraživački rad
Rad preuzet: juli 2021.

Kako je $a+b+c=2s$ i na osnovu Heronovog obrasca, $s(s-a)(s-b)(s-c)=P^2$, izraženog sa

$$(s-a)(s-b)(s-c)=\frac{P^2}{s},$$

dalje imamo

$$P\cdot\frac{3s^2-2s(a+b+c)+ab+bc+ca}{(s-a)(s-b)(s-c)}=P\cdot\frac{3s^2-2s\cdot 2s+ab+bc+ca}{\frac{P^2}{s}}=\frac{s}{P}\cdot(-s^2+ab+bc+ca).$$

Dakle, vrijedi

$$r_a+r_b+r_c=\frac{s}{P}\cdot(-s^2+ab+bc+ca) \tag{3}$$

Pokažimo da vrijedi veza $ab+bc+ca=r^2+s^2+4Rr$. Kako je $r^2=\left(\frac{P}{s}\right)^2$ i $abc=4RP$ tada je $4R=\frac{abc}{P}=\frac{abc}{r\cdot s}$ i $4Rr=\frac{abc}{P}\cdot r=\frac{abc}{s}$. Na osnovu ovoga imamo

$$\begin{aligned}
r^2+s^2+4Rr &= \left(\frac{P}{s}\right)^2+s^2+\frac{abc}{s}=\frac{P^2}{s^2}+s^2+\frac{abc}{s}\\
&=\frac{P^2+s^4+abc\cdot s}{s^2}=(\text{zbog } P^2=s(s-a)(s-b)(s-c))\\
&=\frac{s[(s-a)(s-b)(s-c)+s^3+abc]}{s^2}=\frac{(s^2-sb-sa+ab)(s-c)+s^3+abc}{s}\\
&=\frac{s^3-s^2b-s^2c+sbc-s^2a+sac+sab-abc+s^3+abc}{s}\\
&=\frac{2s^3-s^2(a+b+c)+s(ab+bc+ca)}{s}=\frac{2s^3-s^2\cdot 2s+s(ab+bc+ca)}{s}\\
&=ab+bc+ca.
\end{aligned}$$

Uvrštavanjem ove veze u (3) imamo

$$r_a+r_b+r_c=\frac{s}{P}\left(-s^2+r^2+s^2+4Rr\right)=\frac{s\cdot r(r+4R)}{r\cdot s}=4R+r.$$

Način II:
Na stranici br. 4 u [2], u okviru drugog načina dokaza jednakosti (1) stoji: "Predlažemo da srednjoškolci daju planimetrijski dokaz za "

$$\frac{1}{r}-\frac{1}{r_c}=\frac{2}{h_c}\ \text{ i }\ \frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}=\frac{2}{h_c}. \tag{4}$$

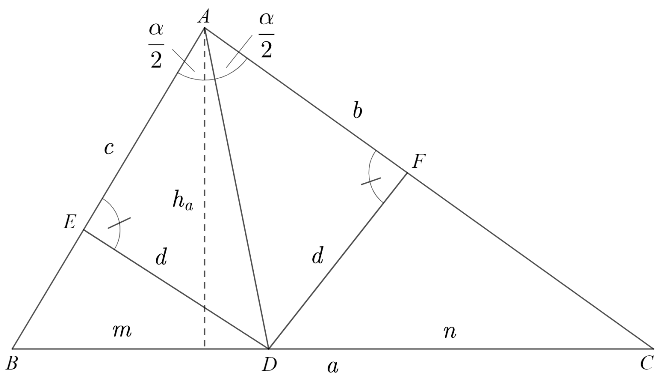
Ovdje ćemo izložiti taj planimetrijski dokaz, ali prethodno ćemo dokazati dva teorema.

Teorem 2.1. *Simetrala unutrašnjeg ugla trougla dijeli naspramnu stranicu na dva odreska, čije se duljine odnose kao duljine drugih dviju stranica trougla, koje s tim odrescima imaju zajedničku tačku.*

Dokaz: Postoji mnogo dokaza ove tvrdnje od kojih je ovdje izložen jedan, a čitaocima preporučujemo da teorem pokušaju dokazati i na druge načine.

Neka je AD simetrala unutrašnjeg ugla α trougla $\triangle ABC$. Uz oznake kao na Slici 1. treba dokazati da vrijedi:

$$|BD|:|CD|=|AB|:|AC| \ \text{ ili } \ m:n=c:b$$



Slika 1.

Označimo podnožja normala iz tačke D na stranice AB i AC sa E i F. Tada je $|DE| = |DF| = d$ (zašto?). Neka $[XYZ]$ označava površinu trougla XYZ. Sada imamo

$$[ABD] : [ADC] = \frac{1}{2} m \cdot h_a : \frac{1}{2} n \cdot h_a = m : n$$

S druge strane je

$$[ABD] : [ADC] = \frac{1}{2} c \cdot d : \frac{1}{2} b \cdot d = c : b$$

Zato je

$$m : n = c : b = BD : CD \tag{5}$$

$\square$

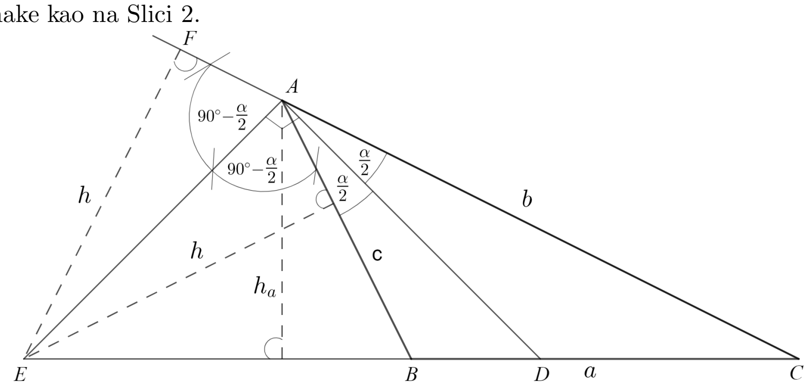
Formulišite obrat ove teoreme i dajte dokaz.

Teorem 2.2. *Ako simetrala unutrašnjeg ugla α trougla $\triangle ABC$ siječe stranicu BC u tački D, a simetrala pripadnog spoljašnjeg ugla produžetak stranice CB, preko tačke B, u tački E, vrijedi da je*

$$|BE| : |CE| = |BD| : |CD| = c : b \tag{6}$$

Dokaz: (Primjetite da simetrala spoljašnjeg ugla kod vrha A i simetrala odgovarajućeg unutrašnjeg ugla dijele naspramnu stranicu jednakom omjeru i to jedna u spoljašnjem, a druga u unutrašnjem omjeru.)

Uvedimo oznake kao na Slici 2.



Slika 2.

Trouglovi $\triangle AEB$ i $\triangle AEC$ imaju jednake visine (h) iz zajedničkog vrha E. Tako je

$$[AEB] = \frac{1}{2} c \cdot h \iff 2 \cdot [AEB] = c \cdot h \;\text{ i }\; [AEC] = \frac{1}{2} b \cdot h \iff 2 \cdot [AEC] = b \cdot h,$$

pa vrijedi $[AEB] : [AEC] = c : b$. S druge strane ti trouglovi imaju zajedničku visinu h_a iz vrha A. Zato je

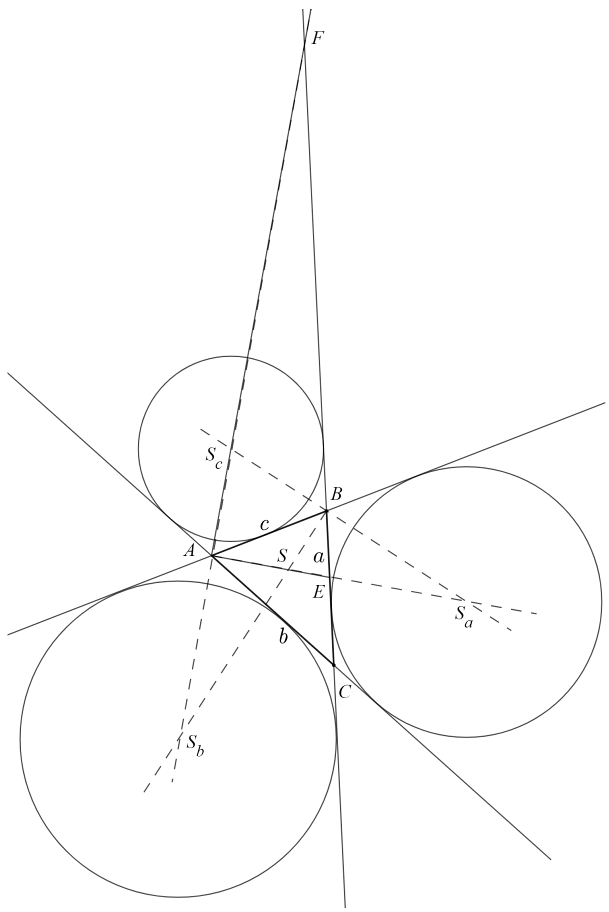
$$2 \cdot [AEB] = BE \cdot h_a \text{ i } 2 \cdot [AEC] = CE \cdot h_a,$$

odakle slijedi $[AEB] : [AEC] = |BE| : |CE| = c : b \overset{(3)}{=} BD : CD$. □

Primjer 2.3. *Ako je S središte upisane kružnice $\triangle ABC$ i S_a, S_b i S_c središta pripisanih kružnica koja odgovaraju trouglovim stranicama BC, CA i AB i ako su E i F tačke u kojima simetrala unutrašnjeg i spoljašnjeg ugla kod vrha A sijeku pravac BC dokazati da je*

a) $|AS| : |SE| = |AS_a| : |S_aE|$,

b) $|AS_b| : |S_bF| = |AS_c| : |S_cF|$.



Slika 3.

Primjenjujući Teoreme 2.1. i 2.2. na trouglove $\triangle ABE$ i $\triangle ABF$, dobijamo da je (Slika 3):

a) $|AS| : |SE| = |AS_a| : |S_aE|$.
Primjetite da je u $\triangle ABE$, BS simetrala unutrašnjeg ugla kod vrha B, a BS_a simetrala spoljašnjeg ugla kod vrha B u $\triangle ABE$.

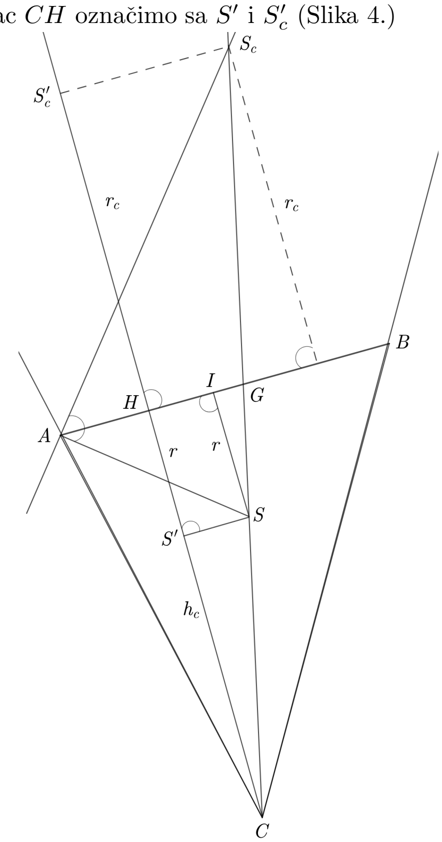
b) $|AS_c| : |S_cF| = |AS_b| : |S_bF|$.
Ovdje je BS_c simetrala unutrašnjeg ugla kod vrha B u $\triangle ABF$, a BS_b simetrala spoljašnjeg ugla kod vrha B u $\triangle ABF$.

Dokazujemo sada da je $\frac{1}{r} - \frac{1}{r_c} = \frac{2}{h_c}$.

Dokaz: U $\triangle ACG$ je AS simetrala unutrašnjeg ugla kod vrha A, a AS_c je simetrala spoljašnjeg ugla kod vrha A. Prema rješenju zadatka 1. vrijedi da je:

$$|CS| : |SG| = |CS_c| : |S_cG|. \tag{7}$$

Neka je $|CH| = h_c$ visina iz vrha C na stranicu $|AB| = c$. Produžimo $h_c = CH$, preko tačke H i projekcije tačaka S i S_c na pravac CH označimo sa S' i S'_c (Slika 4.)



Slika 4.

Sada vrijedi

$$|CS'| : |S'H| = |CS| : |SG| \overset{(5)}{=} |CS_c| : |S_cG| = |CS'_c| : |S'_cH|.$$

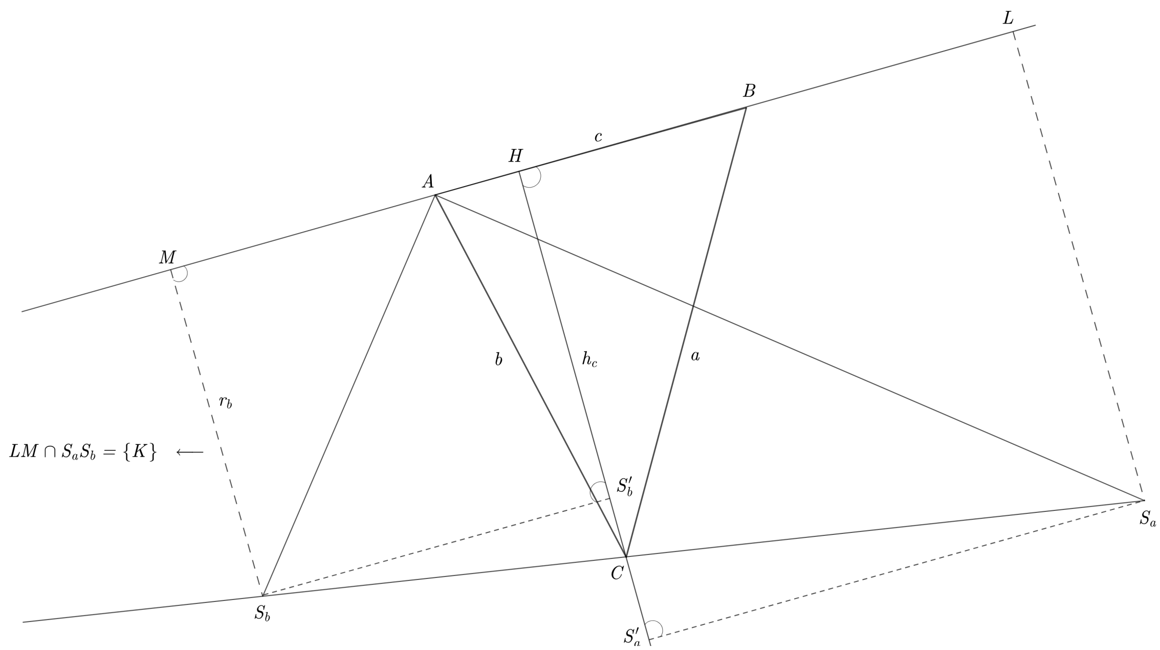
Dakle, $|CS'| : |S'H| = |CS'_c| : |S'_cH|$, a zbog $|CS'| = |CH| - |HS'| = h_c - r$ i $|CS'_c| = h_c + r_c$ dobijamo

$$(h_c - r) : r = (h_c + r_c) : r_c \Longleftrightarrow \frac{h_c}{r} - 1 = \frac{h_c}{r_c} + 1 \Longleftrightarrow h_c\Big(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_c}\Big) = 2$$
$$\Longleftrightarrow \frac{1}{r} - \frac{1}{r_c} = \frac{2}{h_c}.$$

□

Dokazujemo sada da vrijedi $\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} = \frac{2}{h_c}$.

Dokaz: Neka su S_a i S_b središta pripisanih kružnica koje odgovaraju stranicama a i b $\triangle ABC$, a K tačka u kojoj pravac S_aS_b siječe stranicu $AB = c$ istog trougla.



Slika 5.

Prema zadatku 1 u trouglu $\triangle ACK$ vrijedi (Slika 5.)

$$|CS_b| : |S_bK| = |CS_a| : |S_aK|.$$

Označimo sa S_a' i S_b' projekcije tačaka S_a i S_b na visinu $|CH| = h_c$ i njezin produžetak (preko tačke C). Sada imamo da je

$$\begin{aligned}|CS_b'| : |S_b'H| = |S_a'C| : |S_a'H| &\iff (h_c - r_b) : r_b = (r_a - h_c) : r_a \\ &\iff \frac{h_c}{r_b} - 1 = 1 - \frac{h_c}{r_a} \\ &\iff h_c\left(\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b}\right) = 1 + 1 \\ &\iff \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} = \frac{2}{h_c}.\end{aligned}$$

Dokaz jednakosti (1) dalje ide kao u objavljenom članku [2] , (sekcija 3. drugi način, str. 4) □

Način II:

Prethodno ćemo dokazati da vrijedi:

a) $r_a = s \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, $r_b = s \cdot \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}$, $r_c = s \cdot \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$.

Dokaz: Vidi sliku 4 u [2]. Imamo da je:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{r_a}{AP} \iff AP \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = r_a \iff (\text{zbog } AP = s, \text{ v. str.br.5 u [2]}) \iff r_a = s \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

Na sličan način dokazujemo druge dvije formule. □

b) $r = 4R \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{\gamma}{2}$.

Dokaz: Dokazaćemo da je

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}\ ,\ \sin \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{ca}}\ ,\ \sin \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}.$$

Iz kosinusne teoreme, to jest jednakosti $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$ imamo

$$-2bc \cdot \cos\alpha = a^2 - b^2 - c^2. \tag{8}$$

Sada je

$$\begin{aligned}\sin^2\frac{\alpha}{2} &= \frac{1-\cos\alpha}{2} = \frac{2bc - 2bc\cdot\cos\alpha}{2\cdot 2bc} = \frac{2bc + a^2 - b^2 - c^2}{4bc} \qquad \text{(na osnovu (8))}\\ &= \frac{a^2 - (b^2 - 2bc + c^2)}{4bc} = \frac{a^2 - (b-c)^2}{4bc} = \frac{(a-b+c)(a+b-c)}{4bc}\\ &= \frac{2\cdot(s-b)\cdot 2\cdot(s-c)}{4bc},\end{aligned}$$

to jest $\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$. Druge dvije formule se dokazuju na isti način.

Sada dokazujemo b).

Vrijedi (vidi iznad):

$$\begin{aligned}\sin^2\frac{\alpha}{2}\cdot\sin^2\frac{\beta}{2}\cdot\sin^2\frac{\gamma}{2} &= \frac{(s-b)(s-c)}{bc}\cdot\frac{(s-c)(s-a)}{ac}\cdot\frac{(s-a)(s-b)}{ab}\\ &= \left(\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{abc}\right)^2.\end{aligned}$$

Odavde je onda

$$\begin{aligned}\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2} &= \frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{abc} = \frac{s\cdot(s-a)(s-b)(s-c)}{s\cdot abc}\\ &= \frac{P^2}{sP4R} = \frac{P}{4Rs} = \frac{rs}{4Rs} = \frac{r}{4R}.\end{aligned}$$

Dakle, $r = 4R\sin\dfrac{\alpha}{2}\cdot\sin\dfrac{\beta}{2}\cdot\sin\dfrac{\gamma}{2}$. □

c) $s = 4R\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}$.

Dokaz:

$$\begin{aligned}s &= \frac{a+b+c}{2} \qquad \text{(prema sinusnoj teoremi } \tfrac{a}{\sin\alpha} = \tfrac{b}{\sin\beta} = \tfrac{c}{\sin\gamma} = 2R\text{)}\\ &= 2R\cdot\frac{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma}{2} \qquad \text{(zbog } \sin x + \sin y = 2\cdot\sin\tfrac{x+y}{2}\cdot\cos\tfrac{x-y}{2} \text{ i } \sin x = 2\sin\tfrac{x}{2}\cos\tfrac{x}{2}\text{)}\\ &= R\cdot\left(2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + 2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\right)\\ &\left\{\begin{array}{l}\text{zbog}\quad \sin\dfrac{\alpha+\beta}{2} = \sin\left(\dfrac{\alpha}{2}+\dfrac{\beta}{2}\right) = \sin\left(90^\circ - \dfrac{\gamma}{2}\right) = \cos\dfrac{\gamma}{2} \quad \text{i}\\ \quad\sin\dfrac{\gamma}{2} = \left[90^\circ - \left(\dfrac{\alpha}{2}+\dfrac{\beta}{2}\right)\right] = \cos\left(\dfrac{\alpha}{2}+\dfrac{\beta}{2}\right) = \cos\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\end{array}\right\}\\ &= 2R\cdot\left(\cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\right)\\ &= 2R\cdot\cos\frac{\gamma}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \qquad \text{(zbog } \cos x + \cos y = 2\cdot\cos\tfrac{x+y}{2}\cos\tfrac{x-y}{2}\text{)}\\ &= 4R\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2},\end{aligned}$$

to jest

$$s = 4R \cdot \cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}.$$

Sada je

$$\begin{aligned} r_a + r_b &= s \cdot \left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\right) = 4R \cdot \cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\left(\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} + \frac{\sin\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}}\right) \\ &= 4R \cdot \cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} \cdot \frac{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}} \\ &= 4R \cdot \cos\frac{\gamma}{2} \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right) = 4R \cdot \cos\frac{\gamma}{2} \cdot \sin\left(90^\circ - \frac{\gamma}{2}\right) \\ &= 4R \cdot \cos^2\frac{\gamma}{2} \qquad (*) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_c - r &= s \cdot \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} - 4R \cdot \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \\ &= 4R \cdot \cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} \cdot \left(\frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}}\right) - 4R \cdot \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \\ &= 4R \cdot \sin\frac{\gamma}{2} \cdot \left(\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\right) \\ &= 4R \cdot \sin\frac{\gamma}{2} \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right) = 4R \cdot \sin\frac{\gamma}{2} \cdot \cos\left(90^\circ - \frac{\gamma}{2}\right) \\ &= 4R \cdot \sin^2\frac{\beta}{2} \qquad (**) \end{aligned}$$

Sabiranjem jednakosti $(*)$ i $(**)$ dobijamo

$$\begin{aligned} r_a + r_b + r_c - r &= 4R \cdot \underbrace{\left(\cos^2\frac{\gamma}{2} + \sin^2\frac{\gamma}{2}\right)}_{=1} = 4R \\ &\Longleftrightarrow r_a + r_b + r_c = 4R + r. \end{aligned}$$

$\square$

U gornjem smo se služili adicionim formulama:
$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y,\ \cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y,$
$\sin(90^\circ - x) = \cos x$ i $\cos(90^\circ - x) = \sin x$
kao i vezom
$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \Longleftrightarrow \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = 90^\circ \Longleftrightarrow \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}.$

3. Zadaci

Zadatak 3.1. *Dokazati da u svakom truglu vrijedi:*
a) $\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}$ *b)* $\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}$ *c)* $\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r_c}$

Rješenje: *a)* Iz prethodno dokazanih jednakosti $\frac{1}{r} - \frac{1}{r_c} = \frac{2}{h_c}$ i $\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} = \frac{2}{h_c}$, dobijamo

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} \iff \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}.$$

b) Dokazali smo već da vrijedi $\frac{2}{h_c}=\frac{1}{r}-\frac{1}{r_c}$, a analogno se dokazuje da je $\frac{2}{h_a}=\frac{1}{r}-\frac{1}{r_a}$ i $\frac{2}{h_b}=\frac{1}{r}-\frac{1}{r_b}$. Nakon sabiranja ovih jednakosti imamo

$$\left(\frac{2}{h_a}+\frac{2}{h_b}+\frac{2}{h_c}\right)=\frac{1}{r}-\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r}-\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r}-\frac{1}{r_c} \iff 2\cdot\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)=\frac{3}{r}-\underbrace{\left(\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}\right)}_{=\frac{1}{r}}=\frac{2}{r}.$$

Dakle, vrijedi tvrđenje *b)*.

c) Imamo da je $\frac{2}{h_a}=\frac{1}{r}-\frac{1}{r_a} \iff \frac{1}{h_a}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_a}\right)$, a analogno je

$$\frac{1}{h_b}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_b}\right) \text{ i } \frac{1}{h_c}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_c}\right)$$

Sada imamo

$$\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}-\frac{1}{h_c}=\frac{1}{2r}-\frac{1}{2r_a}+\frac{1}{2r}-\frac{1}{2r_b}-\frac{1}{2r}+\frac{1}{2r_c} \Leftrightarrow \frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{2r}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}-\frac{1}{r_c}\right)$$

zbog $\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}=\frac{1}{r}-\frac{1}{r_c}$, vrijedi

$$\frac{1}{2r}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_c}-\frac{1}{r_c}\right)=\frac{1}{2r}-\frac{1}{2r}+\frac{1}{2r_c}+\frac{1}{2r_c}=\frac{1}{r_c}\ .$$

$\square$

Zadatak 3.2. *Dokazati da u svakom trouglu $\triangle ABC$ vrijedi $P=r\cdot r_a\cdot\sqrt{\frac{4R-r_a+r}{r_a-r}}$.]*

Rješenje: Iz $r_a+r_b+r_c=4R+r$ slijedi $4R-r_a+r=r_b+r_c$, pa je

$$\begin{aligned}P=r\cdot r_a\cdot\sqrt{\frac{4R-r_a+r}{r_a-r}} &\iff P^2=r^2\cdot r_a^2\frac{4R-r_a+r}{r_a-r}\\ &\iff P^2=r^2\cdot r_a^2\cdot\frac{r_b+r_c}{r_a-r}\end{aligned}$$

Gore smo dokazali jednakost $\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}=\frac{2}{h_c}$ i analogno se dokazuje da je

$$\begin{aligned}&\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_c}=\frac{2}{h_a}\iff\frac{r_b+r_c}{r_b\cdot r_c}=\frac{2}{h_a}\iff r_b+r_c=\frac{2}{h_a}\cdot r_b\cdot r_c\\ &\iff r_b+r_c=\frac{2}{h_a}\cdot\frac{P}{(s+b)(s-c)}\iff r_b+r_c=\frac{2}{h_a}\cdot\frac{s(s-a)(s-b)(s-c)}{(s-b)(s-c)}\\ &\iff r_b+r_c=\frac{2}{h_a}\cdot s(s-a)\end{aligned}$$

Slično dokazujemo da je

$$r_a-r=\frac{2}{h_a}\cdot(s-b)(s-c)\ \left(\text{ovdje smo primijenili } r_b=\frac{P}{s-b},\ r_c=\frac{P}{s-c},\ P^2=s(s-a)(s-b)(s-c)\right)$$

Dakle,

$$
\begin{aligned}
&P^2 = r^2 \cdot r_a^2 \cdot \frac{r_b + r_c}{r_a - r} \Longleftrightarrow (\text{zbog } P = r \cdot s)\ r^2 \cdot s^2 = r^2 \cdot r_a^2 \cdot \frac{r_b + r_c}{r_a - r} \\
&\Longleftrightarrow s^2 = r_a^2 \cdot \frac{r_b + r_c}{r_a - r} \Longleftrightarrow s^2 = r_a^2 \cdot \frac{\frac{2}{h_a} s(s-a)}{\frac{2}{h_a} s(s-b)(s-c)} \Longleftrightarrow s^2 = r_a^2 \cdot \frac{s \cdot (s-a)}{(s-b)(s-c)} \\
&\Longleftrightarrow s(s-b)(s-c) = r_a^2 (s-a) \Longleftrightarrow s(s-a)(s-b)(s-c) = r_a^2 \cdot (s-a)^2 \Longleftrightarrow P^2 = P^2
\end{aligned}
$$

što je tačno. □

Zadatak 3.3. *Dokazati da u svakom truglu vrijedi jednakost*

$$\frac{r_a}{h_a} + \frac{r_b}{h_b} + \frac{r_c}{h_c} = 2\frac{R}{r} - 1.$$

Rješenje: Kako je $r_a = \frac{P}{s-a}, r_b = \frac{P}{s-b}, r_c = \frac{P}{s-c}$, te $h_a = \frac{2P}{a}, h_b = \frac{2P}{b}, h_c = \frac{2P}{c}$, imamo:

$$
\begin{aligned}
&\frac{r_a}{h_a} + \frac{r_b}{h_b} + \frac{r_c}{h_c} = \frac{\frac{P}{s-a}}{\frac{2P}{a}} + \frac{\frac{P}{s-b}}{\frac{2P}{b}} + \frac{\frac{P}{s-c}}{\frac{2P}{c}} = \frac{a}{2 \cdot (s-a)} + \frac{b}{2 \cdot (s-b)} + \frac{c}{2 \cdot (s-c)} = \cdots \\
&\cdots = \frac{(a+b+c) \cdot s^2 + 3abc - 2s \cdot (bc + ca + ab)}{2 \cdot (s-a)(s-b)(s-c)} \\
&\left\{ \begin{array}{c} \text{zbog } \ a+b+c = 2s,\ abc = 4RP,\ (s-a)(s-b)(s-c) = \frac{P^2}{s} = \frac{r^2 s^2}{s} = r^2 s \ \text{ i} \\ ab + bc + ca = r^2 + s^2 + 4Rr \end{array} \right\} \\
&= \cdots = \frac{2s^2(s^2 + 6Rr - r^2 - s^2 - 4Rr)}{2 \cdot r^2 s^2} = \frac{r(2R - r)}{r^2} = 2 \cdot \frac{R}{r} - 1
\end{aligned}
$$

□

Literatura

[1] A. Marić: *TROKUT definicije, poučci, formule, problemi, jdnakosti, nejednakosti*, Element, Zagreb, 2007.
[2] A. Muminagić: *Jedan zadatak s više načina rješavanja*, EVOLVENTA, Vol.2, No.1, str. 2-10.
[3] Pavković – Veljan: *MATEMATIKA 1, Zbirka zadataka s uputama i rješenjima za prvi razred srednjih škola*, Deseto izdanje, Školska knjiga, Zagreb, 1993.