Иван Трајков, Скопје

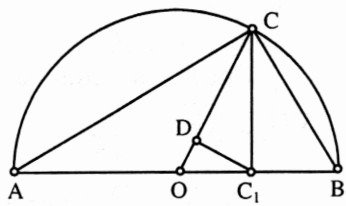
ГЕОМЕТРИСКИ ДОКАЗ ЗА СРЕДИНИТЕ

Во минатиот број зборувавме за односот меѓу срединиите и дадовме алгебарски доказ за n=2. Овде ќе дадеме геометриски доказ за односот на средините, т.е. ќе докажеме дека: $\sqrt{\dfrac{a_1^2+a_2^2}{2}} \geq \dfrac{a_1+a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 a_2} \geq \dfrac{2}{\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}}$, $a_1>0$, $a_2>0$.

Неравенството поминува во равенство само ако $a_1 = a_2$.

I начин: Нека точката C_1 лежи на отсечката AB така што $\overline{AC_1} = a_1$, $\overline{C_1B} = a_2$ и нека точката O е средина на отсечката AB.

Цртаме полукружница $k(O, \overline{OA})$. Во точката C_1 повлекуваме нормала на AB, која ја сече полукружницата во точката C. Од точката C_1 повлекуваме $C_1D \perp OC$ (црт. 1).



Црт. 1

Од ΔCC_1D следува $\overline{CC_1} \geq \overline{CD}$, а од ΔCC_1O следува $\overline{CO} \geq \overline{CC_1}$. Оттука следува дека $\overline{CO} \geq \overline{CC_1} \geq \overline{CD}$. Ако $O \equiv C_1$, тогаш важи равенството.

Од $\Delta ABC \Rightarrow \overline{CO} = \dfrac{1}{2}\overline{AB} = \dfrac{a_1+a_2}{2}$, а според Евкидовата теорема $\overline{CC_1}^2 = \overline{AC_1} \cdot \overline{C_1B}; \overline{CC_1} = \sqrt{a_1 \cdot a_2}$, а бидејќи CC_1 е висина во ΔABC.

Од ΔCC_1O следува $\overline{C_1D}^2 = \overline{CD} \cdot \overline{CO}$, т.е. $\overline{CD} = \dfrac{\overline{CC_1}}{\overline{CO}} = \dfrac{a_1 \cdot a_2}{\dfrac{a_1 + a_2}{2}} = \dfrac{2a_1 a_2}{a_1 + a_2}$.

Значи, $\overline{CO}$ е аритметичка средина, $\overline{CC_1}$ - геометриска, а $\overline{CD}$ хармониска средина на позитивните броеви a_1 и a_2.

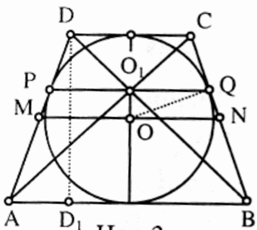
Бидејќи $\overline{CO} \geq \overline{CC_1} \geq \overline{CD}$ имаме: $\dfrac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 \cdot a_2} \geq \dfrac{2a_1 \cdot a_2}{a_1 + a_2}$

што требаше да се докаже.

II начин:

Нека ABCD е рамнокрак трапез, во кој е впишана кружница (црт. 2).

Ако $\overline{AB} = a_1$, $\overline{CD} = a_2$, тогаш $\overline{AD} = \overline{BC} = \dfrac{a_1 + a_2}{2}$, бидејќи трапезот е тангентен четириаголник.



Црт. 2

Средната линија на трапезот е $\overline{MN} = \overline{AD} = \dfrac{a_1 + a_2}{2}$.

Од ΔAD_1D следува дека висината

$$\overline{DD_1} = \sqrt{\left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2 - \left(\frac{a_1 - a_2}{2}\right)^2} = \sqrt{a_1 \cdot a_2}\,.$$

Ќе докажеме дека PQ е хармониска средина од основите на трапезот ABCD, каде што P и Q се допирни точки на кружницата и краците AD и BC. Од сличноста на триаголниците ACD И AO_1P следува

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AO_1}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{PO_1}};\ \frac{\overline{AO_1} + \overline{O_1C}}{\overline{AO_1}} = \frac{a_2}{\overline{PO_1}};\ 1 + \frac{\overline{O_1C}}{\overline{AO_1}} = \frac{a_2}{\overline{PO_1}} \ldots\ldots(1)$$

Од сличноста на триаголниците ABO_1 и DO_1C следува:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}=\frac{\overline{AO_1}}{\overline{O_1C}};\ \frac{a_1}{a_2}=\frac{\overline{AO_1}}{\overline{O_1C}},\text{ т.е. }\frac{\overline{O_1C}}{\overline{AO_1}}=\frac{a_2}{a_1}\ .$$

Ако извршиме замена во равенството (1) ќе добиеме:
$1+\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_2}{\overline{PO_1}}$, т.е. $\overline{PO_1}=\frac{a_1a_2}{a_1+a_2}$, па $\overline{PQ}=2\overline{PO_1}=\frac{2a_1a_2}{a_1+a_2}$.

Од цртежот следува дека $\overline{MN}\geq PQ$, а од ΔAA_1D следува $\overline{MN}=\overline{AD}\geq\overline{DD_1}$. Според тоа $\overline{MN}\geq\overline{DD_1}\geq\overline{PQ}$, , т.е.

$$\frac{a_1+a_2}{2}\geq\sqrt{a_1a_2}\geq\frac{2a_1a_2}{a_1+a_2}.$$

Неравенството ќе помине во равенство ако трпезот помине во квадрат, т.е. $a_1=a_2$.

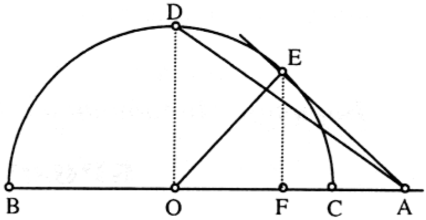
III начин:

Сега во целост ќе ја докажеме теоремата, т.е. дека

$$S_k\geq S_a\geq S_g\geq S_h\ .$$

На отсечката $\overline{BA}=a$ избираме точка C така што

$$\overline{CA}=a_2\ .$$



Црт. 3

Цртаме полукружница $k\left(O,\frac{1}{2}\overline{BC}\right)$, $\overline{BC}=\frac{a_1-a_2}{2}$ (црт. 3).

Нека AE е тангента на полукружницата, $OD\perp AB$ и $EF\perp AB$. Од цртежот се гледа дека $\overline{AO}=\overline{AC}+\overline{CO}=a_2+\frac{1}{2}(a_1-a_2)$, т.е. $\overline{AO}=\frac{a_1+a_2}{2}$. Од правоаголниот триаголник AOE имаме:

$$\overline{AE}=\sqrt{\overline{AO}^2-\overline{OE}^2}=\sqrt{\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2-\left(\frac{a_1-a_2}{2}\right)^2}=\sqrt{a_1\cdot a_2}\ .$$

Од правоаголниот триаголник AOD имаме:

$$\overline{AD}=\sqrt{\overline{AO}^2+\overline{OD}^2}=\sqrt{\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2+\left(\frac{a_1-a_2}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2}{2}}.$$

Од ΔAOE според Евклидовата теорема имаме:

$$\overline{AE}^2=\overline{AO}\cdot\overline{AF};\ \overline{AF}=\frac{\overline{AE}^2}{\overline{AO}}=\frac{a_1\cdot a_2}{\frac{1}{2}(a_1+a_2)}=\frac{2a_1a_2}{a_1+a_2}.$$

Значи, $\overline{AO}$ е аритметичка средина, $\overline{AE}$ геометриска, $\overline{AD}$ квадратна и $\overline{AF}$ хармониска средина на позитивните броеви a_1 и a_2. Од цртежот се гледа дека:

$$\overline{AD}>\overline{AO}>\overline{AE}>\overline{AF},\ \text{т.е.}\ \sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2}{2}}\geq\frac{a_1+a_2}{2}\geq\sqrt{a_1\cdot a_2}\geq\frac{2a_1a_2}{a_1+a_2}.$$

Статијата прв пат е објавена во списанието Нумерус