ФУНКЦИЈА ЦЕО ДЕО

Ђорђе Баралић, Илија Радичевић

ученици III разреда Прве крагујевачке гимназије

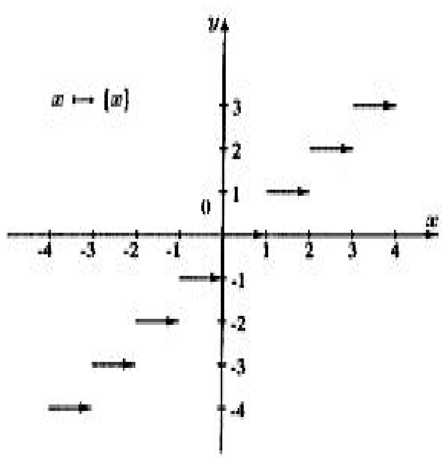
За реалан број x са $[x]$ означавамо највећи цео број који није већи од x и зовемо га **цео део** броја x.

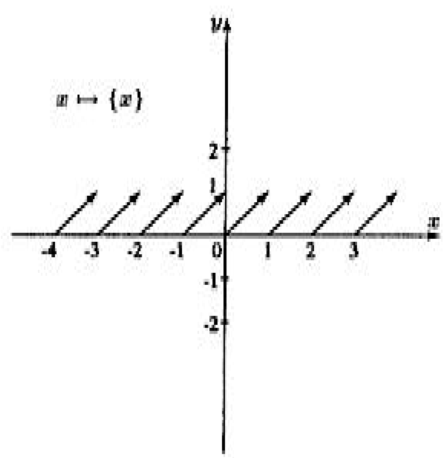
Примери: $[3] = 3,\ [4,5] = 4,\ [-\sqrt{3}] = -2,\ [\pi] = 3.$

За реални број x са $\{x\}$ означавамо **разломљени део** броја x, тј. узимамо да је $\{x\} = x - [x]$.

Примери: $\{3\} = 3,\ \{2,178\} = 0,178,\ \{-\sqrt{3}\} = -\sqrt{3} - [\sqrt{3}] = -\sqrt{3} - (-2) = 2 - \sqrt{3}$, $\{-1,253\} = -1,253 - [-1,253] = -1,253 + 2 = 0,747.$

На следећим сликама дати су графици функција $x \mapsto [x]$ и $x \mapsto \{x\}$.





Особине: За произвољне реалне бројеве x и y важи:

(1) $x - 1 < [x] \leqslant x < [x] + 1$;

(2) $0 \leqslant \{x\} < 1$;

(3) $[x + n] = [x] + n$, за сваки цео број n;

(4) $\left[\frac{[x]}{n}\right] = \left[\frac{x}{n}\right]$, при чему је $x > 0$ и n произвољан природан број;

(5) $[x] + [y] \leqslant [x + y] \leqslant [x] + [y] + 1$.

(6) $[nx] \geqslant n\,[x]$, за сваки природан број n;

(7) $[x - y] \leqslant [x] - [y]$;

(8) $\quad [xy] \geqslant [x] \cdot [y]$, ако је $x > 0$ и $y > 0$;

(9) $\quad \left[x + \frac{1}{2}\right] = [2x] - [x]$;

(10) $\quad [2x + 2y] \geqslant [x] + [y] + [x + y]$.

Доказ. (1) Директно из дефиниције функције $x \mapsto [x]$.

(2) Из (1) следи $\{x\} = x - [x] \geqslant x - x = 0$ и $\{x\} = x - [x] < x - (x - 1) = 1$.

(3) Нека је $n \in \mathbb{N}$ и $x \in \mathbb{R}$. Из (1) имамо: $[x] \leqslant x < [x] + 1$ па је

$$[x] + n \leqslant x + n < [x] + n + 1\,,$$

одакле је $[x + n] = [x] + n$.

(4) Нека је $n \in \mathbb{N}$ и $x \in \mathbb{R}$, $x \geqslant 0$. Ако је $\left[\frac{x}{n}\right] = k$, тада је $k \leqslant \frac{x}{n} < k + 1$, тј. $kn \leqslant x < kn + n$, па и $kn \leqslant [x] < kn + n$. Ако последњу једнакост поделимо са n добијамо

$$k \leqslant \frac{[x]}{n} < k + 1\,, \quad \text{тј.} \quad \left[\frac{[x]}{n}\right] = k\,.$$

(5) Обзиром да је $[\{x\} + \{y\}] \geqslant 0$ то је

$$[x + y] = [[x] + \{x\} + [y] + \{y\}] \overset{(3)}{=} [x] + [y] + [\{x\} + \{y\}] \geqslant [x] + [y]\,.$$

Како је $\{x\} + \{y\} < 2$, то је $[\{x\} + \{y\}] \leqslant 1$, па је

$$[x + y] = [x] + [y] + [\{x\} + \{y\}] \leqslant [x] + [y] + 1\,.$$

(6) Нека је n произвољан природан број. Тада је

$$[nx] = [n[x] + n\{x\}] = n[x] + [n\{x\}] \geqslant n[x]\,.$$

(7) Како је $0 \leqslant \{x\}, \{y\} < 1$, то је

$$[x - y] = [[x] + \{x\} - [y] - \{y\}] = [x] - [y] + [\{x\} - \{y\}] \leqslant [x] - [y]\,,$$

па је

$$[\{x\} - \{y\}] = \begin{cases} 0, & \{x\} \geqslant \{y\} \\ -1, & \{x\} < \{y\} \end{cases}\,.$$

(8) Важи

$$\begin{aligned} [xy] &= [([x] + \{x\})([y] + \{y\})] \\ &= [x] \cdot [y] + [[x] \cdot \{y\} + \{x\} \cdot [y] + \{x\} \cdot \{y\}] \geqslant [x] \cdot [y]\,. \end{aligned}$$

(9) Разликујемо два случаја:

1. случај: ако је $0 \leqslant \{x\} < \dfrac{1}{2}$, тада је

$$\left[x+\frac{1}{2}\right] = \left[[x]+\{x\}+\frac{1}{2}\right] = [x] \quad \text{и} \quad [2x] = [2([x]+\{x\})] = [2[x]+2\{x\}] = 2[x]\,,$$

па је $\left[x+\dfrac{1}{2}\right] = [2x]-[x]$.

2. случај: ако је $\dfrac{1}{2} \leqslant \{x\} < 1$, тада је $[x] = \left[[x]+\alpha+\dfrac{1}{2}\right]$, где је $\alpha = \{x\}-\dfrac{1}{2}$ и $0 \leqslant \alpha < \dfrac{1}{2}$, па је

$$\left[x+\frac{1}{2}\right] = \left[[x]+\alpha+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right] = [[x]+1+\alpha] = [x]+1$$

и

$$[2x] = \left[2\left([x]+\alpha+\frac{1}{2}\right)\right] = [2[x]+1+\alpha] = 2[x]+1\,,$$

одакле следи да је $\left[x+\dfrac{1}{2}\right] = [2x]-[x]$.

(10) Доказ препуштамо читаоцу.

Задаци

1. Нека су x, y, z произвољни реални бројеви. Доказати да је

$$x+[y+z] = y+[x+z] = z+[x+y]$$

ако и само ако је

$$\{x\} = \{y\} = \{z\}\,.$$

Решење. Није тешко доказати да једнакости $x+[y+z] = y+[x+z] = z+[x+y]$ важе ако и само ако је испуњено

$$(*) \qquad \{x\}+[\{y\}+\{z\}] = \{y\}+[\{x\}+\{z\}] = \{z\}+[\{x\}+\{y\}]\,.$$

Очигледно, ако је $\{x\}=\{y\}=\{z\}$, важи и $(*)$. С друге стране, ако важи $(*)$, имамо да је, на пример, $\{x\}-\{y\} = [\{x\}+\{z\}]-[\{y\}-\{z\}] \in \mathbb{Z}$, па пошто $\{x\}, \{y\} \in [0,1)$, биће $\{x\}=\{y\}$. Слично се доказује да је $\{y\}=\{z\}$, па је тиме доказано да је $\{x\}=\{y\}=\{z\}$.

2. Решити једначину $x^2 - 2[x] + \{x\} = 0$.

Решење. Ако претпоставимо да дата једначина има решења и да је x једно њено решење, пошто је $\{x\} \geqslant 0$ и $x^2 \geqslant 0$, имамо да је $[x] \geqslant 0$. Нека је $[x] = k$ и $\{x\} = \alpha$. Тада је $(k+\alpha)^2 - 2k + \alpha = 0$, тј.

$$(**) \qquad \alpha^2 + (2k+1)\alpha + k^2 - 2k = 0.$$

Из последње једначине и чињенице да је $\alpha \geqslant 0$ добијамо да је

$$\alpha = \frac{-(2k+1) + \sqrt{(2k+1)^2 - 4(k^2-2k)}}{2},$$

тј.

$$\alpha = \frac{-(2k+1) + \sqrt{12k+1}}{2} \quad \text{и} \quad 12k+1 \geqslant (2k+1)^2.$$

У скупу целих бројева ($k \in \mathbb{Z}$) неједначина $12k+1 \geqslant (2k+1)^2$, тј. $4k(k-2) \leqslant 0$, има три решења; $k \in \{0, 1, 2\}$.

Ако је $k = 0$, једначина (**) постаје $\alpha^2 + \alpha = 0$, па је, због $\alpha \in [0,1)$, $\alpha = 0$. Дакле, $x = k + \alpha = 0$.

Ако је $k = 1$, једначина (**) постаје $\alpha^2 + 3\alpha - 1 = 0$, па је, опет због $\alpha \in [0,1)$, $\alpha = \dfrac{-3+\sqrt{13}}{2}$. Дакле,

$$x = 1 + \frac{-3+\sqrt{13}}{2} = \frac{\sqrt{13}-1}{2}.$$

Најзад, ако је $k = 2$, из $\alpha^2 + 5\alpha = 0$ и $\alpha \in [0,1)$, добијамо да је $\alpha = 0$, па је $x = 2$.

Дакле, решења дате једначине су 0, $\dfrac{\sqrt{13}-1}{2}$, 2.

3. Решити једначину $\{x\} + \{2x\} + \{3x\} = x$.

Решење. Нека је x решење дате једначине, $k = [x]$ и $\alpha = \{x\}$. Постоје следеће могућности:

1. могућност: ако је $\alpha \in \left[0, \dfrac{1}{3}\right)$, тада је $6\alpha = k + \alpha$, тј. $5\alpha = k$; пошто је $0 \leqslant \alpha < \dfrac{1}{3}$, биће $0 \leqslant k < \dfrac{5}{3}$, тј. $k = 0$ или $k = 1$, па је, у овом случају, $x = k + \alpha = 0$ или $x = k + \alpha = 1 + \dfrac{1}{5} = 1\dfrac{1}{5}$;

2. могућност: ако је $\alpha \in \left[\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{2}\right)$, тада је $\alpha + 2\alpha + 3\alpha - 1 = k + \alpha$, тј. $5\alpha = k + 1$; пошто је $0 \leqslant \alpha < \dfrac{1}{3}$, биће $\dfrac{2}{3} \leqslant k < \dfrac{3}{2}$, тј. $k = 1$ па је $x = k + \alpha = 1 + \dfrac{2}{5} = 1\dfrac{2}{5}$;

3. могућност: ако је $\alpha \in \left[\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}\right)$, тада је $\alpha + 2\alpha - 1 + 3\alpha - 1 = k + \alpha$, тј. $5\alpha = k + 2$; пошто је $\dfrac{1}{2} \leqslant \alpha < \dfrac{2}{3}$, биће $\dfrac{1}{2} \leqslant k < \dfrac{4}{3}$, тј. $k = 1$, па је $x = k + \alpha = 1 + \dfrac{3}{5} = 1\dfrac{3}{5}$;

4. могућност: ако је $\alpha \in \left[\frac{2}{3}, 1\right)$, тада је $\alpha + 2\alpha - 1 + 3\alpha - 2 = k + \alpha$, тј. $5\alpha = k + 3$; пошто је $\frac{2}{3} \leqslant \alpha < 1$, биће $\frac{1}{3} \leqslant k < 2$, тј. $k = 1$, па је $x = k + \alpha = 1 + \frac{4}{5} = 1\frac{4}{5}$.

Дакле, решења дате једначине су $0,\ 1\frac{1}{5},\ 1\frac{2}{5},\ 1\frac{3}{5},\ 1\frac{4}{5}$.

4. Решити једначину $\frac{1}{\{x\}} = [x] + 2003$.

Решење. Ако је x решење дате једначине, из $\{x\} > 0$ следи да је $[x] + 2003 > 0$, тј. $[x] > -2003$. Нека је $[x] = k$ и $\{x\} = \alpha$. Приметимо најпре да је α рационалан број, тј. да је $\alpha = \frac{p}{q}$, за неки цео број p и наки природан број $q > 1$ тако да је $\operatorname{nzd}(p,q) = 1$. Дакле, имамо

$$\frac{q}{p} = k + 2003, \quad k, p, q \in \mathbb{Z}, \quad q > 1, \quad \operatorname{nzd}(p,q) = 1,$$

одакле због $q > 1$ добијамо да је

$$p = 1, \quad q = k + 2003 \quad \text{и} \quad k > -2002.$$

Није тешко проверити да, за свако $k \geqslant -2001$, број $x = k + \frac{1}{k + 2003}$ задовољава дату једначину, па једначина има бесконачно много решења.

5. Решити систем једначина

$$\begin{aligned} x - y &= 2001 \\ [x] + [y] &= 2003. \end{aligned}$$

Решење. Нека је пар (x, y) решење датог система. Прву једначину датог система можемо записати и у облику

$$[x] + \{x\} - [y] - \{y\} = 2001,$$

одакле следи да $\{x\} - \{y\} \in \mathbb{Z}$, тј. $\{x\} = \{y\}$, због $0 \leqslant \{x\}, \{y\} < 1$, па је

$$\begin{aligned} [x] - [y] &= 2001 \\ [x] + [y] &= 2003, \end{aligned}$$

тј. $[x] = 2002$ и $[y] = 1$. Дакле, дати систем једначина има бесконачно много решења; скуп решења је

$$\mathcal{R} = \{(2002 + \omega, 1 + \omega) \mid 0 \leqslant \omega < 1\}.$$

Задаци за самостални рад

1. Доказати да ако за неки реалан број x важи $\{8x\} = \{15x\}$, онда је и $\{26x\} = \{75x\}$.

2. Решити једначину $\left[\frac{5+6x}{8}\right] = \frac{15x-7}{5}$.

Решење: $x_1 = \frac{7}{15}$, $x_2 = \frac{4}{5}$.

3. (XX Московска олимпијада) Решити једначину $x^3 - [x] = 4$.

Решење: $x = \sqrt[3]{5}$.

4. Решити систем једначина:

$$x + [y] + \{z\} = 1,1$$
$$y + [z] + \{x\} = 2,2$$
$$z + [x] + \{y\} = 3,3.$$

Решење: $x = 1; y = 0,2; z = 2,1$.

5. (XXVIII Савезно такмичење, Титов Врбас, 1987, I разред) Дат је природан број n. Одредити број решења једначине

$$x^2 - [x^2] = (x - [x])^2 ,$$

за које је $1 \leqslant x \leqslant n$.

Решење: $n^2 - n + 1$.

6. Доказати да једначина

$$[x] + [2x] + [4x] + [8x] + [16x] + [32x] = 12345$$

нема реална решења.

7. Доказати да су сва позитивна решења једначине $[x] = x \cdot \{x\}$ ирационална.

8. (XXX Савезно такмичење, Скопље, 1989, I разред) Одредити све природне бројеве n за које важи једнакост

$$\left[\sqrt[3]{1}\right] + \left[\sqrt[3]{2}\right] + \cdots + \left[\sqrt[3]{n}\right] = 2n .$$

Решење: $n = 33$.

Статијата прв пат е објавена во списанието ТАНГЕНТА на ДМ на Србија во 2003/04 година