Статијата прв пат е објавена во списанието Математичко-физички лист на ДМФА на Хрватска 1988

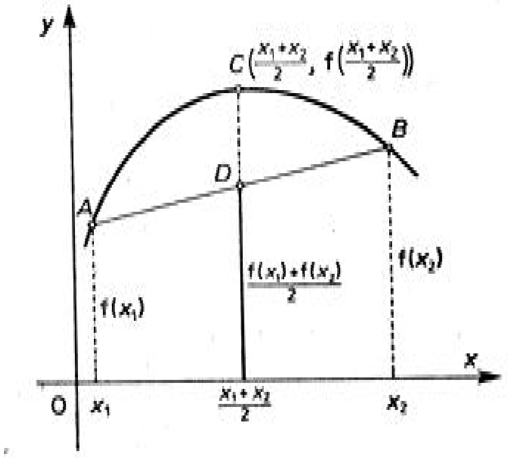
Konveksnost i konkavnost grafika funkcije

dr SVETOZAR VUKADINOVIĆ, Beograd

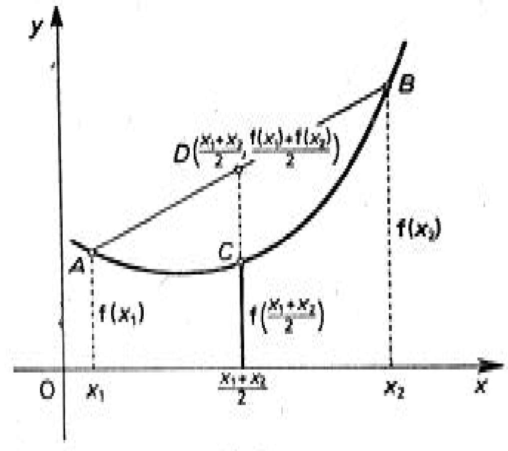
Grafik funkcije $y = f(x)$ u oblasti definisanosti može da bude konveksan (konkavan nadole, sl. 1) ili konkavan (konkavan nagore, sl. 2).

Ako spojimo dve proizvoljne tačke $A[x_1, f(x_1)]$ i $B[x_2, f(x_2)]$ konveksnog luka krive $y = f(x)$, onda je deo tog luka između tačaka A i B — iznad tetive AB. Znači, kod konveksnog luka ordinata proizvoljne tačke luka, izabrane između tačaka A i B, uvek će biti veća od ordinate tačke tetive sa istom apscisom. Ako izaberemo tačke na luku (C) i tetivi (D) sa apscisom $\frac{x_1 + x_2}{2}$, onda je ordinata tačke konveksnog luka $y_C = f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$ veća od ordinate tačke tetive $y_D = \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$, tj. tada je ispunjeno

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$



Sl. 1.



Sl. 2.

ili

$$d = \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} - f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < 0. \tag{1}$$

Ako spojimo dve proizvoljne tačke A i B konkavnog luka krive $y = f(x)$, onda je deo tog luka između tačaka A i B — ispod tetive AB. Znači, kod konkavnog luka ordinata proizvoljne tačke luka, izabrane između tačaka A i B, uvek će biti manja od ordinate tačke tetive sa istom apscisom. Ako i ovde izaberemo tačke na luku (C) i tetivi (D) sa apscisom $\frac{x_1 + x_2}{2}$, onda je ordinata tačke konkavnog luka $y_C = f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$ manja od ordinate tačke tetive $y_D = \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$, tj. tada je ispunjeno

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

ili

$$d = \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} - f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) > 0. \tag{2}$$

Kao što vidimo, da bismo utvrdili da li je posmatrani luk krive konveksan ili konkavan potrebno je ispitati znak razlike d, pa ako je ta razlika negativna, onda je luk krive konveksan, a ako je pozitivna, onda je luk krive konkavan.

Tačka u kojoj kriva prelazi iz konveksnosti u konkavnost (ili obrnuto) naziva se prevojna tačka krive (tačka infleksije).

Primer. 1. Ispitati za koje vrednosti x je kriva $y = x^3 - 4x$ konveksna, a za koje je konkavna. *Rešenje.* Formirajmo razliku

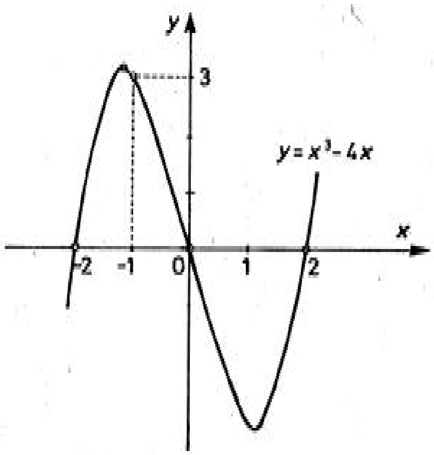
$$d = \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} - f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = \frac{x_1^3 - 4x_1 + x_2^3 - 4x_2}{2} - \left[\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^3 - 4\,\frac{x_1 + x_2}{2}\right] =$$

$$= \frac{x_1^3 + x_2^3 - 4(x_1 + x_2)}{2} - \frac{(x_1 + x_2)^3}{8} + 2(x_1 + x_2) = \frac{3}{8}(x_1 + x_2)(x_1 - x_2)^2.$$

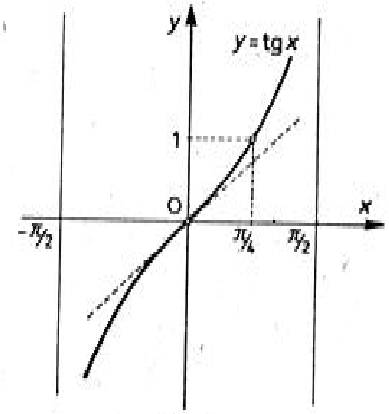
Ako su apscise x_1 i x_2 izabrane pozitivne ($0 < x_1 < x_2$), onda je $x_1 + x_2 > 0$, a kako je i $(x_1 - x_2)^2 > 0$, to je $d > 0$, pa je za $x > 0$ luk krive $y = f(x)$ konkavan. Za $x_1 < x_2 < 0$, razlika $d < 0$, pa je za $x < 0$ luk krive $y = f(x)$ konveksan. Prevojna tačka krive je koordinatni početak. Grafik funkcije $y = x^3 - 4x = x(x - 2)(x + 2)$ dat je na sl. 3.

Primer 2. Ispitati funkciju $y = \operatorname{tg} x$ $\left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$ u pogledu konveksnosti i konkavnosti.

Rešenje. Grafik funkcije $y = \operatorname{tg} x$ je simetričan u odnosu na koordinatni početak (neparna funkcija), i kako je za $x = 0$ i $\operatorname{tg} x = 0$, grafik prolazi kroz koordinatni početak (sl. 4). Zbog toga je dovoljno ispitati grafik funkcije samo za $0 \leqslant x < \frac{\pi}{2}$. Ako se za ove vrednosti x pokaže, na primer, da je grafik konkavan, onda će za $-\frac{\pi}{2} < x \leqslant 0$ grafik biti konveksan (i obrnuto). Neka je, dakle, $x \geqslant 0$.



Sl. 3.



Sl. 4.

Uzmimo dve tačke x_1 i x_2 takve da je $0 \leqslant x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2}$ i formirajmo razliku:

$$d = \frac{\operatorname{tg} x_1 + \operatorname{tg} x_2}{2} - \operatorname{tg} \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

Radi jednostavnosti stavimo $\frac{x_1}{2} = \alpha$, $\frac{x_2}{2} = \beta$. Sledi

$$d = \frac{\operatorname{tg} 2\alpha + \operatorname{tg} 2\beta}{2} - \operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} + \frac{\operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg}^2 \beta} - \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} =$$

$$= \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta)}{(1 - \operatorname{tg}^2 \alpha)(1 - \operatorname{tg}^2 \beta)} - \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} =$$

$$= \frac{(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta)(\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta)^2}{(1 - \operatorname{tg}^2 \alpha)(1 - \operatorname{tg}^2 \beta)(1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta)}.$$

Kako je $0 \leqslant x < \frac{\pi}{2}$, to je $0 \leqslant \alpha < \frac{\pi}{4}$ i $0 \leqslant \beta < \frac{\pi}{4}$, pa je $0 \leqslant \operatorname{tg} \alpha < 1$, $0 \leqslant \operatorname{tg} \beta < 1$. Sledi da je $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta > 0$, $1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta > 0$, $1 - \operatorname{tg}^2 \alpha > 0$, $1 - \operatorname{tg}^2 \beta > 0$, $(\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta)^2 > 0$, pa je i $d > 0$. Na taj način pokazali smo da je

$$\frac{\operatorname{tg} x_1 + \operatorname{tg} x_2}{2} - \operatorname{tg} \frac{x_1 + x_2}{2} > 0 \text{ za } 0 \leqslant x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2},$$

što znači da je za $x \geqslant 0$ kriva $y = \operatorname{tg} x$ konkavna. Zbog simetričnosti grafika funkcije u odnosu na koordinatni početak, sledi da je za $x \leqslant 0$ grafik funkcije konveksan. Koordinatni početak je prevojna tačka grafika funkcije $y = \operatorname{tg} x$.

Vežbanja. Ispitati sledeće funkcije u pogledu konveksnosti i konkavnosti:

$$y = x^2,\ y = \frac{1}{x},\ y = \frac{1}{x^2},\ y = \sqrt{x},\ y = a^x,\ y = \sin x,\ y = \log_a x\ (0 < a < 1,\ a > 1).$$