Регионален натпревар 2018

I година

1АБ. Одреди ги сите парови природни броеви за кои разликата меѓу нивните НЗС и НЗД е 15.

Решение. Нека $d = \mathrm{NZD}(x, y),\ s = \mathrm{NZS}(x, y)$. Оттука имаме: $x = da, y = db$, каде што $\mathrm{NZD}(a,b) = 1$ и важи добиваме $s = dab$. Од условот на задачата, $s - d = 15$. Ако замениме, се добива: $dab - d = 15$, т.е.

$$d(ab-1) = 15 \qquad (*)$$

Од (*) следува дека $d \in \{1,3,5,15\}$. Тогаш,

- за $d = 1$ следува $ab - 1 = 15$, т.е. $ab = 16$. Единствените заемно прости броеви чиј производ е 16 се 1 и 16, па $a = 1, b = 16$, т.е. $x = 1, y = 16$.

- за $d = 3$ следува $ab - 1 = 5$, т.е. $ab = 6$. Заемно прости броеви чиј производ е 6 се 1 и 6 или 2 и 3, па $x = 3, y = 18$ и $x = 6, y = 9$.

- за $d = 5$ следува $ab - 1 = 3$, т.е. $ab = 4$. Заемно прости броеви чиј производ е 4 се 1 и 4, па $x = 5, y = 20$.

- за $d = 15$ следува $ab - 1 = 1$, т.е. $ab = 2$. Заемно прости броеви чиј производ е 2 се 1 и 2, па $x = 15, y = 30$.

2АБ. Гаргамел фатил N Штрумфови и ги распределил во три вреќи. Кога Папа Штрумф го преместил од првата во втората вреќа, Муртенко од втората во третата, а Штрумфета од третата во првата, просечната висина на Штрумфовите во првата вреќа се намалила за 8 милиметри, а просечните висини во втората и третата вреќа се зголемиле за 5 и 8 милиметри, соодветно. Во првата вреќа имало девет Штрумфови. Колку Штрумфови фатил Гаргамел?

Решение. Нака во втората и третата вреќа имало K и L штрумфови соодветно и нека x, y и z се висините на Папа Штрумф, Муртенко и Штрумфета. Ако висините на Штрумфовите во првата вреќа се $x, x_2, x_3, ..., x_9$, тогаш

$$\frac{x+x_2+x_3+...+x_9}{9} = 8 + \frac{z+x_2+x_3+...+x_9}{9}, \text{ т.е. } \frac{x}{9} = 8 + \frac{z}{9}.$$

Аналогно, разгледувајќи ги втората и третата вреќа добиваме $5 + \frac{y}{K} = \frac{x}{K}$ и $8 + \frac{z}{L} = \frac{y}{L}$. Според тоа, $x = 72 + z,\ 5K + y = x$ и $8L + x = y$, па ако ги собереме последните три равенки добиваме $72 = 5K + 8L$. Бидејќи K и L се природни броеви, од последната равенка следува $8 \mid K$. Но, не е можно $K \geq 16$, бидејќи тогаш L ќе биде негативен број, ниту пак $K = 0$ (во втората вреќа на почетокот бил Муртенко), па затоа $K=8$. Според тоа, $8L=72-40$, т.е. $L=4$, што значи дека Гаргамел фатил $N=9+K+L=21$ штрумф.

3А. Определи ги целобројните вредности на параметарот a, за кои решенијата на системот

$$\begin{cases} a(x+y-1)=x-2y-1 \\ a(x-y-3)=x+2y-3 \end{cases}$$

се целобројни.

Решение. Дадениот систем е еквивалентен со системот:

$$\begin{cases} (a-1)x+(a+2)y=a-1 \\ (a-1)x-(a+2)y=3a-3 \end{cases}.$$

т.е. со системот

$$\begin{cases} 2(a-1)x=4a-4 \\ 2(a+2)y=-2a+2 \end{cases}$$

Ако $a\neq 1$, тогаш $x=2$, а ако $a=1$, тогаш $x\in\mathbb{Z}$.

Ако $a=-2$, тогаш нема решение за y, па и за системот. Ако $a\neq -2$, имаме $y=\frac{-a+1}{a+2}=-1+\frac{3}{a+2}$.

Бидејќи решенијата треба да бидат целобројни, следува дека $(a+2)\,|\,3$, па оттука $a+2\in\{\pm 1,\pm 3\}$, од каде што следува дека $a\in\{-5,-3,-1,1\}$. Добиваме дека бараните решенија се:

$$\begin{aligned} a=-5&: \quad x=2, y=-2 \\ a=-3&: \quad x=2, y=-4 \\ a=-1&: \quad x=2, y=2 \\ a=1&: \quad x\in\mathbb{Z}, y=0 \end{aligned}$$

3Б. Определи ги сите парови цели броеви (x,y) кои ја задоволуваат равенката

$$xy+3y=x^2+6x+12.$$

Решение. Равенката може да се трансформира на следниов начин

$$\begin{aligned} y(x+3)&=(x+3)^2-9+12 \\ y(x+3)&=(x+3)^2+3 \\ y&=x+3+\tfrac{3}{x+3} \end{aligned}$$

Дропката $\frac{3}{x+3}$ треба да е цел број, па за $x\neq -3$ ги имаме следниве случаи

1) $x+3=-1 \Rightarrow x=-4$ и $y=-4$

2) $x+3=1 \Rightarrow x=-2$ и $y=4$

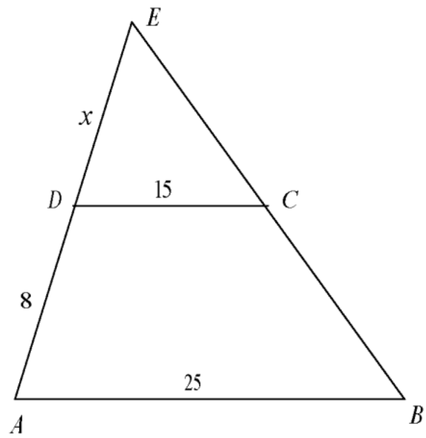
3) $x+3=3 \Rightarrow x=0$ и $y=4$

4) $x+3=-3 \Rightarrow x=-6$ и $y=-4$

Значи, решението на равенката се паровите (-4,-4), (-2,4), (0,4), (-6,-4).

4А. Должините на основите на еден трапез се $a=25, b=15$, а на еден од краците должината е $c=8$. Определи го периметарот и плоштината на трапезот, ако збирот на аглите на поголемата основа е 90°.

Решение. Ги продолжуваме краците на трапезот $ABCD$ до нивниот пресек во точката E. Од условот на задачата, збирот на аглите на поголемата основа во трапезот, кои се агли на основата во триаголникот ABE е 90°, што значи дека овој триаголник е правоаголен со прав агол во темето E.



Триаголниците ABE и DCE се слични, заради паралелноста на основите во трапезот, па може да направиме пропорција (според податоците од условот - види цртеж): $25:15=(8+x):x$, од каде што $x=12$.

Од правоаголниот триаголник DCE имаме: $\overline{CE}=\sqrt{15^2-12^2}=9$, а од правоаголниот триаголник ABE имаме

$$\overline{BE}=\sqrt{25^2-20^2}=15, \text{ т.е. } \overline{BC}=\overline{BE}-\overline{CE}=15-9=6.$$

Според тоа, за периметарот на трапезот добиваме

$$L=25+8+15+6=54,$$

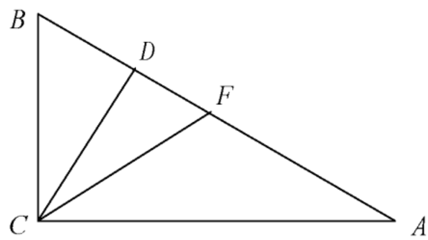
а за плоштината

$$P=P_{ABE}-P_{DCE}=\frac{20\cdot15}{2}-\frac{12\cdot9}{2}=150-54=96.$$

4Б. Во еден правоаголен триаголник должината на висината повлечена кон хипотенузата е 4, а должината на тежишната линија од правиот агол е 5. Пресметај го збирот на должините на катетите на овој триаголник.

Решение. Нека бараниот триаголник е ABC со прав агол кај темето C. Нека CD е висината и CF е тежишната линија спуштени од C. Бидејќи триаголникот ABC е правоаголен, следува

$$\overline{AF}=\overline{FB}=\overline{CF}=5.$$



Триаголникот CDF е правоаголен, па

Питагорова теорема имплицира дека $\overline{DF}=\sqrt{5^2-4^2}=3$.

Повторно Питагорина теорема имплицира

$$\overline{AC}=\sqrt{\overline{AD}^2+\overline{CD}^2}=\sqrt{4+16}=2\sqrt{5} \text{ и } \overline{BC}=\sqrt{\overline{DB}^2+\overline{CD}^2}=\sqrt{64+16}=4\sqrt{5}.$$

Збирот на катетите изнесува $6\sqrt{5}$.

II година

1А. Корените на квадратната равенка $x^2+ax+b+1=0$ се природни броеви. Докажи дека a^2+b^2 е сложен број.

Решение. Нека x_1 и x_2 се корените на дадената равенка. Според Виетовите формули $x_1+x_2=-a$ и $x_1x_2=b+1$. Оттука добиваме дека

$$\begin{aligned}a^2+b^2&=(x_1+x_2)^2+(x_1x_2-1)^2\\&=x_1^2+2x_1x_2+x_2^2+x_1^2x_2^2-2x_1x_2+1\\&=x_1^2+1+x_1^2x_2^2+x_1^2\\&=(1+x_1^2)(1+x_2^2)\end{aligned}$$

и бидејќи $x_1,x_2\geq 1$следува дека a^2+b^2 е сложен број.

2АБ. Во множеството реални броеви реши го системот равенки

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y+z}=\frac{1}{3},\ \frac{1}{y}+\frac{1}{z+x}=\frac{1}{5},\ \frac{1}{z}+\frac{1}{x+y}=\frac{1}{7}.$$

Решение. Јасно, $x\neq 0$, $y\neq 0$, $z\neq 0$. Со сведување под најмал заеднички содржател од дадениот систем го добиваме системот

$$\begin{aligned}xy+xz&=3(x+y+z)\\yz+yx&=5(x+y+z)\\zx+zy&=7(x+y+z)\end{aligned}$$

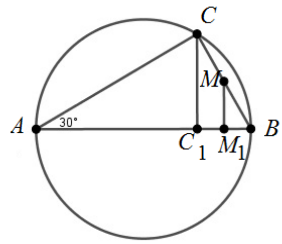
Ако ги собереме првата и втората равенка и потоа ја одземеме третата равенка, добиваме $2xy=x+y+z$. На сличен начин добиваме

$$2yz=9(x+y+z) \text{ и } 2zx=5(x+y+z).$$

Затоа важи $x+y+z=2xy=\frac{2}{9}yz=\frac{2}{5}zx$ и ако $x\neq 0$, $y\neq 0$, $z\neq 0$ заклучуваме дека $9x=5y=z$. Сега лесно се добива дека $x=\frac{59}{18}$, $y=\frac{59}{10}$, $z=\frac{59}{2}$.

3А. Нека е дадена кружница со дијаметар AB и нека C е точка од кружницата различна од A и B. Нека M е средина на тетивата BC и растојанието од M до AB е $1cm$. Ако $\measuredangle BAC=30^\circ$, пресметај ја должината на тетивата AC.

Решение. Нека M_1 е ортогонална проекција на M врз AB, а C_1 е ортогонална проекција на C врз AB. Од $\overline{MM_1}=1cm$ и MM_1 е средна линија во $\triangle C_1BC$, следува дека $\overline{CC_1}=2\overline{MM_1}=2cm$. Од $\triangle AC_1C$ е правоаголен и $\measuredangle C_1AC=30^\circ$ следува дека хипотенузата $\overline{AC}=2\overline{CC_1}=4cm$.



4АБ. Правоаголникот $ABCD$ е поделен на 9 помали правоаголници, така што плоштината на четири од нив се $8,10,5,12$ како што е прикажано на цртежот. Определи ја најмалата можна вредност на плоштината на правоаголникот $ABCD$.

8	10	
	5	
		12

Решение. Со a,b,c ќе ги означиме ширините на вертикалните правоаголници кои го разделуваат правоаголникот $ABCD$, а со x,y,z висините на хоризонталните правоаголници на кои е разделен правоаголникот $ABCD$ (види цртеж). Тогаш според дадените податоци имаме $ax=8$, $bx=10$, $by=5$ и $cz=12$. Од последните равенства добиваме $a=\frac{8}{x}, b=\frac{10}{x}, c=\frac{12}{z}, y=\frac{x}{2}$. Со P ќе ја означиме плоштината на правоаголникот. Тогаш

	a	b	c
x	8	10	
y		5	
z			12

$$\begin{aligned} P &= 8+10+5+12+az+ay+bz+cx+cy \\ &= 35+\frac{8}{x}z+\frac{8}{x}\frac{x}{2}+\frac{10}{x}z+\frac{12}{z}\frac{x}{2}+\frac{12}{z}x \\ &= 39+18\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right) \end{aligned}$$

Изразот $\frac{z}{x}+\frac{x}{z}$ добива најмала вредност $2\sqrt{\frac{x}{z}\cdot\frac{z}{x}}=2$ и таа се достигнува за $\frac{x}{z}=\frac{z}{x}$, т.е. $x^2=z^2$. Бидејќи $x,z>0$ добиваме $x=z$. Во тој случај плоштината е $P=75$. Притоа $x=z=2y$.

1Б. За кое m, корените на равенката $x^2-2mx+m^2-1=0$ се наоѓаат во интервалот $(-2,4)$?

Решение. Корените на равенката

$$x^2-2mx+m^2-1=0$$

се

$$x_{1,2}=\frac{2m\pm\sqrt{4m^2-4m^2+4}}{2}=m\pm 1 \text{ т.е. } x_1=m-1 \text{ и } x_2=m+1.$$

Бидејќи корените треба да се наоѓаат во интервалот $(-2,4)$ имаме

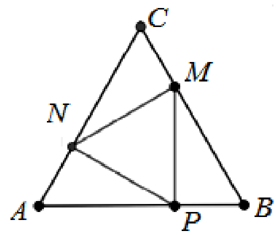
$$\begin{cases} -2 < m-1 < 4 \\ -2 < m+1 < 4 \end{cases}$$

и оттука

$$\begin{cases} -1 < m < 5 \\ -3 < m+1 < 3 \end{cases},$$

т.е. $-1 < m < 3$.

3Б. Во рамностран триаголник ABC со плоштина 1, вписан е рамностран триаголник MNP, така што M лежи на страната BC, N лежи на страната AC, P лежи на страната AB, и притоа MP е нормална на AB. Колкава е плоштината на триаголникот MNP?



Решение. Триаголниците APN, BMP и CNM се правоаголни со агли 30° и 60°, а бидејќи сите за катета ја имаат страната на триаголникот MNP, тие се складни. Ако страната на триаголникот ABC е a, а на MNP е x и ако $\overline{MB} = y$, тогаш $\overline{PB} = \frac{y}{2}$ и тогаш $\overline{CM} = \frac{y}{2}$. Важат: $y + \frac{y}{2} = a$, $x = \frac{y}{2}\sqrt{3}$ и оттука

$$x = \frac{\frac{2a}{3}}{2}\sqrt{3} = \frac{a}{3}\sqrt{3}.$$

Плоштината на триаголникот MNP е

$$\frac{x^2}{4}\sqrt{3} = \frac{3a^2}{4\cdot 9}\sqrt{3} = \frac{1}{3}\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{3}.$$

III година

1А. Во множеството реални броеви реши ја равенката

$$\log(\log x) + \log(\log x^3 - 2) = 0.$$

Решение. Најпрво да забележиме дека треба да важи $x > 0,$ $\log x > 0$ и $\log x^3 - 2 > 0,$ од каде добиваме дека $\log x > \frac{2}{3}$, односно $x > \sqrt[3]{100}$.

Имаме:

$$\log(\log x) + \log(\log x^3 - 2) = 0 \;\Leftrightarrow\; \log(\log x(\log x^3 - 2)) = 0 \;\Leftrightarrow\; \log x(\log x^3 - 2) = 1$$
$$\Leftrightarrow\; 3\log^2 x - 2\log x - 1 = 0.$$

Со смената $\log x = t$, последната равенка се трансформира во $3t^2 - 2t - 1 = 0$, чии решенија се $t_1 = 1$ и $t_2 = -\frac{1}{3}$. Решението $t = -\frac{1}{3}$ се отфрла бидејќи од условот имаме дека $t > \frac{2}{3}$. За $t = 1$ се добива $x = 10$.

2АБ. Определи го триаголникот со најголема плоштина, ако должините на неговите страни a,b,c го задоволуваат условот: $1<a\leq 2\leq b\leq 5<c\leq 6$.

Решение. Прво ќе го определиме триаголникот со најголема плоштина со страни a,b и c за кој се исполнети условите $1<a\leq 2\leq b\leq 5$. Нека аголот што го зафаќаат страните a и b е γ. Тогаш плоштината на триаголникот е $P=\frac{1}{2}ab\sin\gamma$.

При фиксни a и b, најголема вредност P има за $\sin\gamma=1$, т.е. $\gamma=90^\circ$. Значи триаголникот кој има најголема плоштина при фиксни a и b е правоаголен и неговата најголема плоштина при ограничувањата $1<a\leq 2\leq b\leq 5$ е за $a=2$ и $b=5$ и таа изнесува $P=5$. Во тој случај c е хипотенуза на правоаголен триаголник и $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{2^2+5^2}=\sqrt{29}$.

Конечно, бидејќи $5<\sqrt{29}<6$, добиваме дека бараниот триаголник е правоаголен со катети 2 и 5.

3А. Рамнокрак трапез со висина 12, крак 13 и средна линија 15, ротира околу пократката основа. Пресметај го волуменот на така добиеното тело.

Решение. Од условите на задачата добиваме $\frac{a+b}{2}=15, h=12, c=13$, каде што a и b се должините на основите, h е висината, а c е должината на кракот на трапезот. Од Питагоровата Теорема следува дека $\frac{a-b}{2}=\sqrt{13^2-12^2}=5$, од каде се добива дека $a=20$ и $b=10$.

Бараниот волумен е $V=V_1-2V_2$, каде што V_1 е волумен на цилиндар со радиус на основата $h=12$ и висина $a=20$, а V_2 е волумен на конус со радиус на основата $h=12$ и висина $\frac{a-b}{2}=5$.

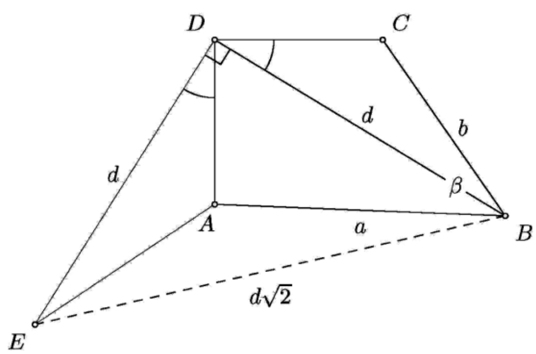
Значи бараниот волумен е $V=12^2\pi\cdot 20-2\cdot\frac{1}{3}12^2\pi\cdot 5=2400\pi$.

4АБ. Во конвексен четириаголник $ABCD$ важи $\overline{AD}=\overline{CD}$ и $\measuredangle ADC=90^\circ$. Ако $\overline{AB}=a, \overline{BC}=b, \overline{BD}=d$ и $\measuredangle ABC=\beta$, докажи дека $2d^2=a^2+b^2+2ab\sin\beta$.

Решение. Нека E е точка таква што триаголникот BDE е рамнокрак правоаголен со прав агол во темето D, а A и E се од сита страна на правата BD. Тогаш $\overline{BE}=d\sqrt{2}$ и важи

$\measuredangle EDA=90^\circ-\measuredangle ADB=\measuredangle BDC$.

Бидејќи $\overline{CD}=\overline{AD}$ и $\overline{DE}=\overline{DB}$,



од признакот САС следува дека триаголниците EDA и BCD се складни. Затоа важи $\overline{AE}=b$.

Понатаму, имаме

$$\measuredangle EAB = 360^\circ - \measuredangle EAD - \measuredangle DAB = 360^\circ - \measuredangle DCB - \measuredangle DAB$$
$$= \measuredangle ADC + \measuredangle ABC = 90^\circ + \beta.$$

Конечно, од косинусната теорема применета на триаголникот ABE следува

$$2d^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(90^\circ + \beta) = a^2 + b^2 + 2ab\sin\beta .$$

1Б. Во множеството реални броеви реши ја равенката

$$\log_{x+1}(x^3 - 9x + 8)\cdot \log_{x-1}(x+1) = 3 .$$

Решение. Дадената равенка е еквивалентна со равенката $x^3 - 9x + 8 = (x-1)^3$.

По средувањето се добива $x^2 - 4x + 3 = 0$, чии решенија се $x_1 = 1, x_2 = 3$.

Решението $x_1 = 1$ отпаѓа поради дефиницијата на логаритамската функција. Лесно се проверува дека $x = 3$ е решение на почетната равенка.

3Б. Даден е правоаголен триаголник *CBA* со катети со должина 3 и 4. Над помалата катета и хипотенузата надвор од триаголникот се конструирани квадрати *BCSR* и *ABQP* соодветно. Пресметај ја плоштината на триаголникот *BRQ*.

Решение. Од Питагоровата теорема се добива дека должината на хипотенузата е 5.

Нека $\measuredangle ABC = \beta$ и $\measuredangle QBR = \theta$ (види цртеж). Од тоа што

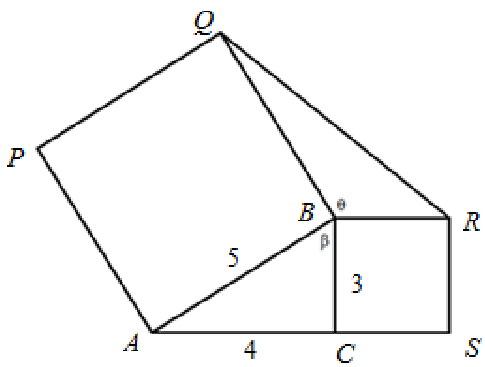
$$\measuredangle ABQ = \measuredangle CBR = 90^\circ ,$$

имаме дека важи

$$\beta + \theta = 180^\circ \text{ т.е. } \theta = 180^\circ - \beta .$$

Тогаш

$$\sin\theta = \sin(180^\circ - \beta) = \sin\beta = \tfrac{4}{5} .$$



Конечно, плоштината на триаголникот QBR е $P = \frac{1}{2}\overline{BQ}\cdot\overline{BR}\sin\theta = 6$.

IV година

1А. Определи го вториот член на аритметичката прогресија ако збирот на првите 10 члена е 300, а првиот, вториот и петтиот член, во тој редослед, формираат геометриска прогресија.

Решение. Од $\frac{10}{2}(2a_1+9d)=300$ добиваме $2a_1+9d=60$. **...(5б)** Од друга страна $a_1a_5=a_2^2$, т.е. $a_1(a_1+4d)=(a_1+d)^2$ и оттука $d=2a_1$.

Заменувајќи во $2a_1+9d=60$ добиваме $a_1=3$, па $d=6$. Значи, $a_2=9$.

1Б. Во геометриската прогресија $a_1,a_2,...,a_n$ важи $a_1+a_3=20, a_2+a_4=40$ и $S_n=a_1+...+a_n=1020$. Определи го n.

Решение. Нека q е количникот на прогресијата. Од $a_1+a_3=20, a_2+a_4=40$ добиваме дека $a_1(1+q^2)=20$ и $a_1q(1+q^2)=40$. Со делење на второто со првото равенство добиваме $q=2$, **...... (5б)** а од $a_1(1+q^2)=20$ добиваме $a_1=4$. Сега, од $S_n=a_1\frac{q^n-1}{q-1}=4\frac{2^n-1}{2-1}=1020$ имаме $2^n=256$, т.е. $n=8$.

2А. Определи колку подредени парови од природни броеви (x,y) постојат за кои е исполнето $\text{NZS}(x,y)=6!$.

Решение. Бидејќи $6!=2^4\cdot3^2\cdot5^1$ и $x=2^{a_1}\cdot3^{a_2}\cdot5^{a_3}$, $y=2^{b_1}\cdot3^{b_2}\cdot5^{b_3}$ од условот на задачата следува дека $\max\{a_1,b_1\}=4, \max\{a_2,b_2\}=2, \max\{a_3,b_3\}=1$. Според тоа, паровите $(a_1,b_1),(a_2,b_2)$ и (a_3,b_3) може да се изберат на 9, 5 и 3 начини (со директна проверка). Следува дека постојат $9\cdot5\cdot3=135$ подредени парови за кои е исполнет условот на задачата.

2Б. Дадени се правите $y=\frac{3}{4}x+6$, $y=\frac{3}{4}x+3$ и точката $T(7,24)$. Определи равенка на права која ја содржи дадената точка, а отсечката со крајни точки, кои се добиваат во пресекот на таа права со дадените прави, е со должина 4 .

Решение. Равенката на бараната права е $y-24=k(x-7)$. Во нејзиниот пресек се добиваат точките $A(\frac{7k-18}{k-\frac{3}{4}},\frac{\frac{45}{4}k-18}{k-\frac{3}{4}})$ и $B(\frac{7k-21}{k-\frac{3}{4}},\frac{\frac{33}{4}k-18}{k-\frac{3}{4}})$.

Од условот на задачата добиваме дека $(\frac{3}{k-\frac{3}{4}})^2+(\frac{3k}{k-\frac{3}{4}})^2=16$, која се сведува на квадратната равенка $7k^2-24k=0$. Нејзини решенија се $k_1=0$ и $k_2=\frac{24}{7}$. Според тоа, бараните прави се $y=24$ и $y=\frac{24}{7}x$.

3АБ. Дадена е низа од позитивни реални броеви $a_0,a_1,a_2,...$ такви што важи

$$a_1=1-a_0,\ a_{n+1}=1-a_n(1-a_n),\ \text{за}\ n\geq1.$$

Докажи дека за секој природен број n важи

$$a_0 a_1 \cdot \ldots \cdot a_n \left(\frac{1}{a_0} + \frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right) = 1. \qquad (1)$$

Решение. За $n = 0$ имаме $a_0 \cdot \frac{1}{a_0} = 1$, т.е. точно е равенството (1). Нека претпоставиме дека равенството (1) е точно за секој природен број $n \geq 0$. Тогаш

$$a_0 a_1 \cdot \ldots \cdot a_n a_{n+1} \left(\frac{1}{a_0} + \frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_{n+1}}\right) = a_{n+1} \cdot a_0 a_1 \cdot \ldots \cdot a_n \left(\frac{1}{a_0} + \frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right) + a_0 a_1 \cdot \ldots \cdot a_n$$
$$= a_{n+1} + a_0 a_1 \cdot \ldots \cdot a_n$$

што значи дека за да докажеме дека (1) важи и за $n+1$ доволно е да го докажеме равенството

$$a_n = 1 - a_0 a_1 \cdot \ldots \cdot a_{n-1}. \qquad (2)$$

Равенството (2) ќе го докажеме со индукција по n. За $n = 1$ имаме $a_1 = 1 - a_0$, што значи дека равенството (2) е точно. Нека претпоставиме дека равенството (2) е точно за некој природен број $n \geq 1$. Тогаш

$$a_{n+1} = 1 - a_n(1 - a_n) = 1 - a_n \cdot a_0 a_1 \cdot \ldots \cdot a_{n-1} = 1 - a_0 a_1 \cdot \ldots \cdot a_{n-1} a_n,$$

па од принципот на математичка индукција следува дека (2) важи за секој природен број $n \geq 1$.

Од претходно изнесеното следува дека (1) важи за $n+1$, па од принципот на математичка индукција следува дека (1) важи за секој природен број n.

4АБ. а) Множеството $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ е разбиено (разделено) на две дисјунктни подмножества A и B. Докажи дека барем во едно од нив постојат три различни броја x, y и z такви што $x + y = z$.

б) Дали за множеството $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ е точно тврдењето од задачата под а).

Решение. Нека тврдењето на задачата не е исполнето. Значи множеството $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ не може да се разбие на две дисјунктни подмножества за кои е исполнет условот на задачата.

Од условот $A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, добиваме дека бројот 5 припаѓа на едно од множествата. Без ограничување на општоста ќе претпоставиме дека $5 \in A$. Аналогно, бројот 4 припаѓа на точно едно од множествата A и B и бројот 6 припаѓа точно на едно од множествата A и B. Во зависност од броевите $4, 5$ и 6 и направената претпоставка, ги имаме следните случаи.

Случај 1. $5 \in A$, $4 \in A$. Тогаш $9 \in B$ и $1 \in B$. Според тоа $8 \in A$. Бидејќи $5, 8 \in A$ добиваме дека $3 \in B$. Но, од $1, 3 \in B$ добиваме $2 \in A$, а од $2, 4 \in A$ имаме $6 \in B$. Значи, во овој случај $1, 3, 6, 9 \in B$, што не е можно и е спротивно од претпоставката на доказот.

Случај 2. $5, 6 \in A$, $4 \in B$. Од $5, 6 \in A$ добиваме дека $1 \in B$, а од $1, 4 \in B$ добиваме дека $3 \in A$. Но, од $3, 5 \in A$ добиваме дека $8 \in B$. Сега, од $1, 8 \in B$ имаме $9 \in A$. Значи, $3, 5, 6, 9 \in A$, што е спротивно на претпоставката на доказот.

Случај 3. $5 \in A$, $4,6 \in B$. Од $4,6 \in B$ добиваме дека $2 \in A$, а од $5,2 \in A$, добиваме дека $3 \in B$. Но, сега, од $3,4 \in B$ имаме $7 \in A$. Значи, $2,5,7 \in A$, што е спротивно на претпоставката на доказот.

Конечно, во било кое разбивање на множеството $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ на две дисјунктни подмножества A и B исполнет е условот на задачата.

б) Множеството $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ може да се разбие на дисјунктни подмножества $A=\{1,2,4,8\}$ и $B=\{3,5,6,7\}$, за кои не е исполнет условот на задачата од делот а).