Алекса Малчески, Скопје
Катерина Аневска, Скопје

РЕШАВАМЕ ЗАДАЧИ СО МНОЖЕСТВА

Во редовната настава се запозна со множествата и операциите со истите, како што се унија, пресек и разлика. Меѓутоа множествата и операциите со истите се од огромна важност, па затоа во следните разгледувања ќе се задржиме на неколку елементарни задачи од теоријата на множества.

1. Дадени се множествата $A=\{x\,|\,x\in\mathbb{Z}, |x|<4\}$, $B=\{x\,|\,x\in\mathbb{Z}, x>-5, x\leq 1\}$ и $C=\{x\,|\,x\in\mathbb{Z}, -3<x\leq 2\}$. Определи го множеството
$$(A\cup B)\setminus(C\cap B).$$
Решение. Дадените множества се:
$$A=\{-3,-2,-1,0,1,2,3\},\ B=\{-4,-3,-2,-1,0,1\} \text{ и } C=\{-2,-1,0,1,2\}.$$
Според тоа, $A\cup B=\{-4,-3,-2,-1,0,1,2,3\}$ и $C\cap B=\{-2,-1,0,1\}$, па затоа $(A\cup B)\setminus(C\cap B)=\{-4,-3,2,3\}$. ■

2. Определи ги сите елемент на множеството A ако
$$A=\{x\,|\,x\in\mathbb{Z}, x\leq 7, |x|>2, x>-7\}.$$
Решение. Множеството A се состои од сите броеви кои се помали или еднакви на 7, чија апсолутна вредност е поголема од 2 и кои се поголеми од -7. Според тоа, $A=\{-6,-5,-4,-3,3,4,5,6,7\}$. ■

3. Дадени се множествата $A=\{a\,|\,a\in\mathbb{N}, a\leq 7\}$ и $B=\{b\,|\,b\in\mathbb{N}, 4\leq b<9\}$. Определи го множеството C за кое важи
$$C=\{c\,|\,c\in\mathbb{N}, c=a-b, a\in A, b\in B\}.$$
Решение. Имаме, $A=\{1,2,3,4,5,6,7\}$ и $B=\{4,5,6,7,8\}$. Според тоа,
$$\{d\,|\,d=a-b, a\in A, b\in B\}=\{-7,-6,-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3\},$$
па затоа $C=\{c\,|\,c\in\mathbb{N}, c=a-b, a\in A, b\in B\}=\{1,2,3\}$. ■

4. Определи го множеството N ако:
$$M\cup N\cup P=\{x\,|\,x\in N, x<10\},\ M\cap P=\varnothing,$$
$$M\setminus N=\{6,8\},\ P\setminus N=\{3,2\}.$$
Решение. Имаме, $M\cup N\cup P=\{x\,|\,x\in\mathbb{N}, x<10\}=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ и како $M\cap P=\varnothing$. $M\setminus N=\{6,8\}$ и $P\setminus N=\{3,2\}$, заклучуваме дека $N=\{1,4,5,7,9\}$. Направи Венов дијаграм. ■

5. Определи го множеството B, ако за множествата A,B и C важи
$$A\cup B\cup C=\{a,b,c,d,e,m,n,p,q\},\ A\cap C=\varnothing,$$
$$A\setminus B=\{e,m\} \text{ и } C\setminus B=\{c,p\}.$$

Решение. Од $A \cap C = \varnothing$, $A \setminus B = \{e, m\}$ и $C \setminus B = \{c, p\}$ следува
$$(A \cup B \cup C) \setminus B = (A \cup C) \setminus B = (A \setminus B) \cup (C \setminus B) = \{c, e, m, p\},$$
и како $B \subseteq A \cup B \cup C$ добиваме $B = \{a, b, d, n, q\}$. ■

6. Определи го множеството P, ако за множествата $M.N$ и P важи
$$M \cup N \cup P = \{1,2,3,4,5\}, M \cap N \cap P = \{1,4\}, N \setminus P = \{2,5\} \text{ и } P \setminus M \neq \varnothing.$$
Решение. Од $M \cap N \cap P = \{1,4\}$ следува дека $1,4 \in P$. Понатаму, од $N \setminus P = \{2,5\}$ следува дека $2,5 \notin P$. Заради $P \setminus M \neq \varnothing$ во множеството P мора да биде елементот 3 и $3 \notin M$. Конечно, $P = \{1,3,4\}$. ■

7. Определи го множеството C, ако за множествата A, B и C важи
$$A \cup B \cup C = \{1,2,3,4,5,6\}, \ A \cap B \cap C = \{1,4\},$$
$$B \setminus C = \{2,5,6\} \text{ и } C \setminus A \neq \varnothing.$$
Решение. Од $A \cap B \cap C = \{1,4\}$ следува дека $1,4 \in C$. Понатаму, од $B \setminus C = \{2,5,6\}$ следува дека $2,5,6 \notin C$. Од друга страна имаме $A \cup B \cup C = \{1,2,3,4,5,6\}$, па затоа $C = \{1,4\}$ или $C = \{1,3,4\}$. Но, $1,4 \in A$ и како $C \setminus A \neq \varnothing$, заклучуваме дека $C = \{1,3,4\}$. ■

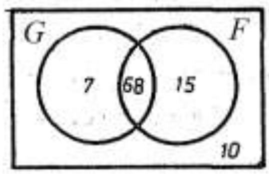
8. Дадени се множествата $A = \{a,b,c,d,e\}, B = \{a,d,f\}, C = \{b,e,f,g\}$ и $D = \{a,f,g,h\}$. Определи го множеството S за кое важи
$$S \subseteq A, S \cap (B \cup D) = \varnothing, (A \cap C) \setminus S = \varnothing \text{ и } \{c\} \setminus S = \{c\}.$$
Решение. Имаме $B \cup D = \{a,d,f,g,h\}$ и $A \cap C = \{b,e\}$. Од $S \subseteq A$ и $S \cap (B \cup D) = \varnothing$ следува дека $S \subseteq \{b,c,e\}$. Понатаму, од $A \cap C = \{b,e\}$ и $(A \cap C) \setminus S = \varnothing$ следува $b,e \in S$, а од $\{c\} \setminus S = \{c\}$ следува $c \notin S$. Конечно, $S = \{b,e\}$. ■

9. На правата p последователно се земени точки A, B, C и D. Определи го множеството $(AC \setminus BD) \cap (AC \cap AB)$.
Решение. Бидејќи $AC \setminus BD$ е AB без точката B и $AC \cap AB = AB$, заклучуваме дека $(AC \setminus BD) \cap (AC \cap AB)$ е AB без точката B. ■

При изучувањето на множествата се запозна и со таканаречениот Венов дијаграм и беговата примена во решавање на енкои елементарни задачи. Во натамошните разгледувања, преки примери, ќе покажеме како Веновиот дијаграм може да сесикористи при решавање на некоилогички задачи.

10. На една конференција имало 100 учесници. Од нив 10 не знаеле ниту германски ниту француски јазик, 75 знаеле германски јазик и 83 знаеле француски јазик. Колку учесници на конференцијата ги знаеле двата јазика?

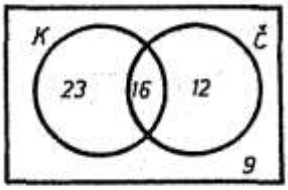
Решение. Задачата ќе ја решиме со помош на Венов дијаграм (цртеж десно). Најмалку еден јазик знаат $100-10=90$ учесници на конференцијата, $90-75=15$ знаат само француски јазик, а $83-15=68$ ги знаат и двата јазика. ■



11. Во едно училипте работат 60 наставници. Од нив 39 пијат кафе, 28 пијат чај и 16 пијат и кафе и чај. Дали во училиптето има наставници кои не пијат ниту чај ниту кафе?

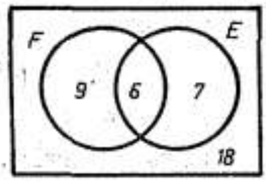
Решение. Решението на задачата е дадено на Веновиот дијаграм прикажан на цртежот десно. Само кафе пијат $39-16=23$ наставници, само чај пијат $28-16=12$ наставници, а ниту кафе ниту чај не пијат

$$60-(23+16+12)=9 \text{ наставници. } ■$$



12. Во една група од 40 луѓе 15 знаат француски јазик, 13 знаат англиски јазик и 6 ги знаат и двата јазика. Дали во групата има луѓе кои не знаат ниту еден од двата јазика?

Решение. Аналогно како во претходната задача добиваме дека $15-6=9$ луѓе знаат само француски јазик, $13-6=7$ знаат само англиски јазик и $40-(9+6+7)=18$ луѓе не знаат ниту еден од двата јазика. ■



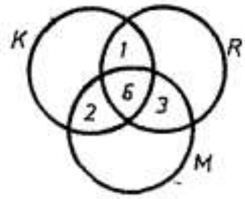
13. На училишниот натпревар по математика учествувале 100 ученици и секој од нив решавал по 3 задачи. Само 3 ученици не решиле ниту една задача. Од останатите ученици 65 ја решиле првата или третата задача, а 61 ученик ја решил втората или третата задача. Колку ученици ја решиле првата, колку втората и колку третата задача?

Решение. Најмалку една задача решиле $100-3=97$ ученици. Ако првата или третата задача ја решиле 65 ученици, втората задача ја решиле $97-65=32$ ученика. Втората и третата задача ја решил 61 ученик, што значи дека првата задача ја решиле $97-61=36$ ученици, а третата задача ја решиле $61-32=29$ ученици. ■

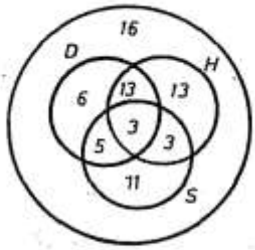
14. Сите ученици на едно одделение се членови на една од секциите: кошаркарска, рецитаторска и математичка. Само 6 ученици се членови на сите три секции, а 12 ученици се членови на повеќе од една секција. Понатаму, 8 ученици се членови на математичката и кошаркарската секција, а 9 ученици се членови на математичката и рецитаторската секција.

Колку ученици учествуваат во работата на рецитаторската и кошаркарската секција, а не се членови на математичката секција?

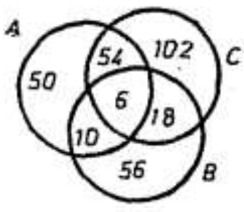
Упатство. Од условите на задачата состави го Веновиот дијаграм прикажан на цртежот десно. Само 1 ученик кој не е член на математичката секција учлествува во работата на рецитаторската и кошаркарската секција.



15. Од 70 ученици во шесто одделение точно 27 се членови на драмската секција, 32 пеат во хор, а 22 се спортисти. Во драмската секција има 16 членови на хорот, а во хорот има 6 спортисти, додека во драмската секција има 8 спортисти. Тројца спортисти се членови и на хорот и на драмската секција. Колку ученици не членува во ниту една од споменатите секции? Колку ученици се занимаваат само со спорт?
Упатство. Од условите на задачата го составуваме Веновиот дијаграм прикажан на цртежот десно, од кој се гледа дека 16 ученици не се во ниту една секција, а 11 ученици се занимаваат само со спорт.



16. Во едно училиште се продаваат три списанија *A*, *B* и *C*. Списанието *A* го купуваат 120 ученици, списанието *B* го купуваат 90 ученици и списанието *C* го купуваат 180 ученици. Списанијата *A* и *C* ги купуваат 60 ученици, а списанијата *A* и *B* 16 ученици. Точно два ученика не купуваат ниту едно списание.
а) Колку ученици купуваат точно две списанија?
б) Колку ученици учат во ова училиште?
Упатство. Од условите на задачата го составуваме Веновиот дијаграм прикажан на цртежот десно.
а) Точно две списанија купуваат
$$54+10+18=82 \text{ ученика.}$$
б) Во училиштето учат $50+54+102+10+6+18+56+2=298$ ученици.



17. Колку учесници биле на конференција на која секој учесник говори најмалку еден од јазиците француски, англиски и руски, ако се знае дека:
- два учесника ги говорат сите три јазици,
- девет учесници говорат само француски и англиски јазик,
- тринаесет учесници говорат француски и руски јазик,
- дванаесет учесници говорат руски и англиски јазик,
- дваесет и девет учесници говорат само англиски јазик,
- шест учесници говорат само француски јазик и
- седум учесници говорат само руски јазик.

Упатство. Од условите на задачата состави го Веновиот дијаграм прикажан на цртежот десно. На конференцијата имало
$$7+10+2+11+6+9+8=53 \text{ учесници.}$$