XXIV РЕПУБЛИЧКИ НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА
ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД ОСНОВНОТО ОБРАЗОВАНИЕ

VII одделение

1. Масата на еден сад полн со вода е 2000 g. Ако се одлее 20% од водата, вкупната маса ќе се намали на 88% од првобитната маса. Пресметај ја:

а) масата на водата; б) масата на празниот сад.

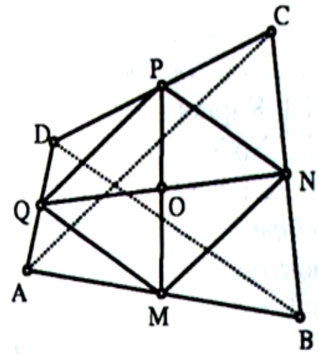
Решение: 88% од масата на садот што е полн со вода е 1760 g ($88\% \cdot 2000 = 1760$). Според тоа масата на одлеаната вода е 2000 g - 1760 g = 240 g. Оваа маса претставува 20% од масата на водата. а) Во садот имало $5 \cdot 240$ g = 1200 g вода. б) Масата на садот е 2000 g - 1200 g = 800 g.

2. Од три различни цифри, од кои ниедна не е нула, се формирани сите можни трицифрени броеви. Нивниот збир, зголемен за 1, е 1999. Кои се тие три цифри? Наведи ги сите можни случаи.

Решение: Нека бараните цифри се a, b и c и нека $a<b<c$. Сите трицифрени броеви се: $\overline{abc}$, $\overline{acb}$, $\overline{bac}$, $\overline{bca}$, $\overline{cab}$ и $\overline{cba}$. Имаме

$\overline{abc}+\overline{acb}+\overline{bac}+\overline{bca}+\overline{cab}+\overline{cba}+1=1999$, односно $100a+10b+c+100a+10c+b+100b+10a+c+100b+10c+a+100c+10a+b+100c+10b+a+1=1999$; $222(a+b+c)=1998$, следи $a+b+c=9$, па $a=1$, $b=2$, $c=6$; $a=1$, $b=3$, $c=5$; $a=2$, $b=3$, $c=4$.

3. Во конвексен четириаголник ABCD точките M, N, P и Q се средини на страните AB, BC, CD и DA, соодветно. Ако $\overline{AC}=30$ cm, $\overline{MP}=26$ cm и $\overline{NQ}=28$ cm, пресметај ја плоштината на четириаголникот MNPQ.



Решение: Ќе покажеме дека MNPQ е паралелограм. Во ΔABC отсечката MN е средна линија. Затоа $\overline{MN}=\frac{\overline{AC}}{2}$ и $MN \parallel AC$. Слично, во ΔACD отсечката PQ е средна линија. Затоа $\overline{PQ}=\frac{\overline{AC}}{2}$ и $PQ\parallel AC$. Оттука $\overline{MN}=\overline{PQ}$ и $MN\parallel PQ$, т.е. четириаголникот MNPQ е паралелограм. Нека O е пресекот на дијагоналите на паралелограмот ABCD. Бидејќи дијагоналите го делат паралелограмот на четири триаголници со еднакви плоштини имаме: $\overline{ON}=\frac{1}{2}\overline{QN}=14$ cm; $\overline{OM}=\frac{1}{2}\overline{PM}=13$ cm; $\overline{MN}=\overline{QP}=\frac{1}{2}\overline{AC}=15$ cm. $P_{MNPQ}=4\cdot P_{MON}=$

$$=4\cdot\sqrt{21\cdot(21-13)\cdot(21-14)\cdot(21-15)}=4\cdot\sqrt{21\cdot 8\cdot 7\cdot 6}=4\cdot 84=336.$$

Плоштината на четириаголникот MNPQ е 336 cm^2.

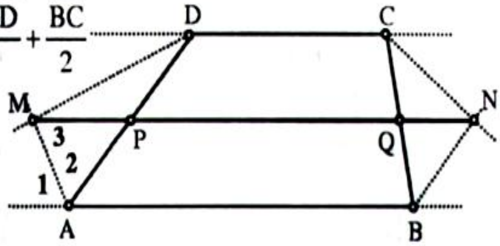
4. Симетралите на надворешните агли кај темињата A и D на трапезот ABCD ($AB\parallel CD$) се сечат во точката M, а симетралите на надворешните агли кај темињата B и C се сечат во точката N така што $\overline{MN}=12$ cm. Пресметај го периметарот на трапезот.

Решение: Според дадените услови точките M и N се еднакво оддалечени од основите. Значи точките M и N лежат на права што ја содржи средната линија на трапезот. Тогаш $\measuredangle 1=\measuredangle 2$

- по услов; $\measuredangle 1 = \measuredangle 3$ како наизменични агли. Следи: ΔAMP е рамнокрак па $\overline{PM} = \overline{PA} = \overline{PD}$. Слично $\overline{QN} = \overline{QB} = \overline{QC}$.

$\overline{MN} = \overline{MP} + \overline{PQ} + \overline{QN} = \frac{\overline{AD}}{2} + \frac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2} + \frac{\overline{BC}}{2}$

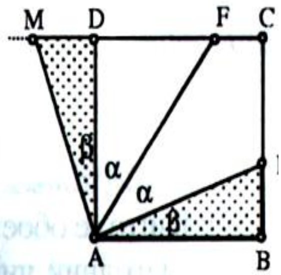
$= \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA}) = \frac{1}{2}L.$



Следи $L = 2 \cdot \overline{MN} = 2 \cdot 12 = 24$;
$L = 24$ cm.

5. На страната BC од квадратот ABCD е избрана точка P што е различна од точките B и C. Симетралата на аголот DAP ја сече страната CD во точката F. Докажи дека $\overline{AP} = \overline{FD} + \overline{BP}$.

Решение: Да означиме: $\measuredangle PAF = \measuredangle FAD = \alpha$; $\measuredangle BAP = \beta$. Ја продолжуваме страната CD преку темето D до точката M така што $\overline{DM} = \overline{BP}$. Според признакот АСА $\Delta ABP \cong \Delta ADM$. Следи: $\overline{AM} = \overline{AP}$; $\measuredangle DAM = \measuredangle BAP = \beta$, следи $\measuredangle FAM = \alpha + \beta$. Исто така $\measuredangle BAF = \alpha + \beta = \measuredangle AFM$ - како наизменични агли... . Следи ΔAFM е рамнокрак па $\overline{FM} = \overline{AM}$, $\overline{AM} = \overline{AP}$, па $\overline{FM} = \overline{AP}$ каде $\overline{FM} = \overline{FD} + \overline{DM}$.



VIII одделение

1. Одреди ги сите трицифрени броеви $\overline{abc}$, такви што $\overline{abc} : c = \overline{bc}$ и $a \neq 0, b \neq 0$ и $c \neq 0$.

Решение: Од $\overline{abc} : c = \overline{bc}$ добиваме $\overline{abc} = c \cdot \overline{bc}$, односно производот $c \cdot \overline{bc}$ е број чијашто цифра на единици е c. Ова е можно само ако $c \in \{1, 5, 6\}$.

1° $c \neq 1$ затоа што производот $1 \cdot \overline{b1}$ е двоцифрен број.

2° За $c = 5$ имаме: $100a + 10b + 5 = 5 \cdot (10b + 5)$, односно $5a = 2b + 1$, а ова е можно само за $a = 1$, $b = 2$ и за $a = 3$, $b = 7$. Бараните броеви се 125 и 375.

3° За $c = 6$ имаме $100a+10b+6 = 6\cdot(10b+6)$, односно $10a=5b+3$. Во ова равенство левата страна е делива со 5, а десната страна не е. Нема решение. Останува дека бараните броеви се 125 и 375.

2. Износот од 4 800 денари рамноправно треба да се подели на неколку другари. Ако тројца од другарите се откажат од својот дел, тогаш преостанатите другари ќе добијат по 80 денари повеќе.

Колку другари учествувале во поделбата на овој износ?

Решение: Нека n е бројот на другарите, а x износот што секој од нив ќе го добие. Имаме:

$$n\cdot x = 4800 \ldots(1) \qquad (n-3)\cdot(x+80) = 4800 \ \ldots(2)$$

Од (1) и (2) се добива:

$$(n-3)\cdot(x+80) = n\cdot x \quad \text{или} \quad n\cdot x + 80\,n - 32x - 240 = n\cdot x.$$

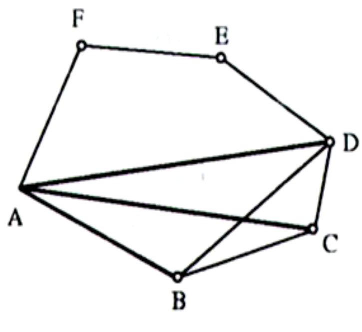
$$\text{или} \qquad 80\,n - 32x - 240 = 0 \ldots (3)$$

Од (1) имаме дека $x = \dfrac{4800}{n}$ заменуваме во (3) и добиваме:

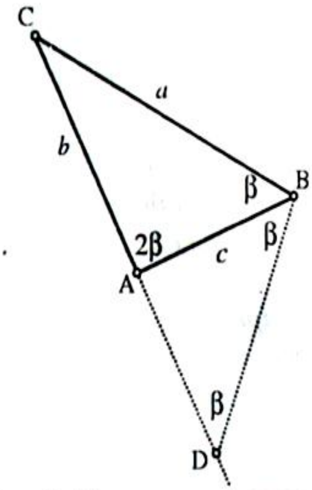
$$80\,n - \frac{14400}{n} - 240 = 0; \quad n^2 - 3n - 180 = 0; \quad n(n-3) = 180,\ n = 15.$$

Значи, во поделбата учествувале 15 другари.

3. Во конвексен шестаголник страните и дијагоналите се отсечки што се обоени со црвена или жолта боја. Докажи дека постои триаголник чии страни се отсечки што се обоени со иста боја.



Решение(доказ): Секое теме од шестаголник е крај на најмногу 5 отсечки (страни и дијагонали). Бидејќи има две бои, според Принципот на Дирихле, постојат три отсечки што се обоени со иста (пр.: црвена) боја. Нека тоа се отсечките AB, AC и AD. Ако краевите на две од овие отсечки се поврзат со отсечка што е обоена со црвена боја се добива бараниот "црвен" триаголник. Значи, ниеден од трите пара отсечки не треба да се поврзе со отсечка обоена со црвена боја. Но, тогаш триаголникот што го образуваат овие три отсечки е обоен со жолта боја (на пример тоа е триаголникот BCD), а тоа требаше да се докаже.

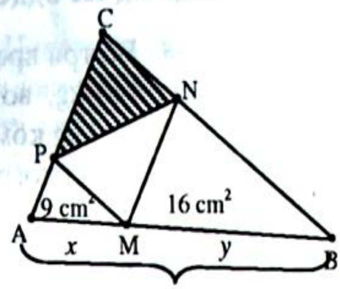


4. Во триаголникот ABC со страни a, b и c познато е дека $b = 50$ cm, $c = 48$ cm и внатрешниот агол кај темето A е два пати поголем од внатрешниот агол кај темето B. Одреди ја страната a.

Решение: Ќе ја продолжиме страната CA преку темето A до точката D така што $\overline{AD} = \overline{AB}$. Тогаш, триаголникот DBA е рамнокрак па $\measuredangle D = \measuredangle DBA$. За овој триаголник $\measuredangle BAC = 2\beta$ е надворешен. Тој е еднаков на збирот на аглите на основата DB, т.е. $\measuredangle D + \measuredangle DBA = 2\beta$. **Значи,** $\measuredangle D = \measuredangle DBA = \beta$. Но, тогаш $\measuredangle CBD = 2\beta$, па триаголниците ABC и BDC се слични. Имаме $\overline{BC} : \overline{AC} = \overline{CD} : \overline{BC}$ **или** $a : 50 = (50+48) : a$; $a^2 = 50 \cdot 48$; т.е. $a = 70$ cm.

5. На страните AB, BC и CA од триаголникот ABC се избрани точки M, N и P, соодветно, така што MP ∥ BC и MN ∥ AC. Ако плоштината на ΔAMP е 9 cm^2, а плоштината на ΔMBN е 16 cm^2, пресметај ја плоштината на триаголникот NPC.

Решение: Четириаголникот MNCP е паралелограм па $P_{CPN} = P_{MNP}$. Имаме $P_{CPN} = \frac{1}{2}(P_{ABC} - P_{AMP} - P_{MBN})$ ... (1). Од сличноста на триаголниците AMP и ABC, односно на триаголниците MBN и ABC следува: $x : c = \sqrt{P_{AMP}} : \sqrt{P_{ABC}}$ ... (2) и $y : c = \sqrt{P_{MBN}} : \sqrt{P_{ABC}}$ ... (3)



каде $P_{AMP} = 9$ cm^2, а $P_{MBN} = 16$ cm^2. Ако замениме и ги собереме соодветните страни на (2) и (3) добиваме:
$\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} + \frac{\overline{MB}}{\overline{AB}} = \frac{3}{\sqrt{P_{ABC}}} + \frac{4}{\sqrt{P_{ABC}}}$ од каде $\frac{3+4}{\sqrt{P_{ABC}}} = 1$, односно $P_{ABC} = 49$ cm^2.

Ако замениме во (1) се добива $P_{PNC} = \frac{1}{2}(49-16-9) = 12$, т.е. $P_{PNC} = 12$ cm^2.