XI Международная Жаутыковская олимпиада по математике
Алматы, 2015

13 января 2015 года, 9.00-13.30
Первый день
(Каждая задача оценивается в 7 баллов)

1. Каждая точка плоскости с целыми координатами покрашена в белый или голубой цвет. Докажите, что можно выбрать цвет так, чтобы при каждом натуральном n нашёлся треугольник площади n с тремя вершинами выбранного цвета.

2. Точка M лежит внутри треугольника ABC. Прямая BM пересекает сторону AC в точке N. Точка K симметрична M относительно AC. Прямая BK пересекает AC в точке P. Докажите, что если $\angle AMP = \angle CMN$, то $\angle ABP = \angle CBN$.

3. Найдите все функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такие, что

$$f(x^3 + y^3 + xy) = x^2 f(x) + y^2 f(y) + f(xy)$$

при всех $x, y \in \mathbb{R}$.

XI International Zhautykov Olympiad in Mathematics
Almaty, 2015

January 13, 9.00-13.30
First day
(Each problem is worth 7 points)

1. Each point with integral coordinates in the plane is coloured white or blue. Prove that one can choose a colour so that for every positive integer n there is a triangle of area n with three vertices of the chosen colour.

2. Inside the triangle ABC a point M is given. The line BM meets the side AC at N. The point K is symmetrical to M with respect to AC. The line BK meets AC at P. If $\angle AMP = \angle CMN$, prove that $\angle ABP = \angle CBN$.

3. Determine all the functions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ such that

$$f(x^3 + y^3 + xy) = x^2 f(x) + y^2 f(y) + f(xy)$$

for all $x, y \in \mathbb{R}$.

1. Each integral point of the plane is coloured white or blue. Prove that one can choose a colour so that for every positive integer n there is a triangle of area n with three vertices of the chosen colour.

Solution. If every two neighbouring points (that is, points at distance 1) have different colours then, in fact, we have a monochromatic lattice of $\sqrt{2} \times \sqrt{2}$ squares, where triangle with any integral area is easily found.

When this is not the case, we consider neighbouring points A and B ($AB = 1$) of the same colour (say white). To find a triangle of area n, we need a white point on the line parallel to AB at the distance $2n$. If there is such point for each n, we are done. Otherwise, we have a line ℓ with blue points only.

Consider a line ℓ_1 "next to ℓ", that is, the line parallel to ℓ at distance 1 from it. If it contains a blue point, we have a triangle with blue vertices of area $\frac{n}{2}$ for each positive integer n.

The only remaining case is that of line ℓ_1 containing only white points. Then we consider the line $\ell_2 \neq \ell$ at distance 1 from ℓ_1, and again, if there is a white point on ℓ_2, we are done. Now, if all points of ℓ_2 are blue, then for each n we have a triangle of area n with three blue vertices.

2. Inside the triangle ABC a point M is given. The line BM meets the side AC at N. The point K is symmetrical to M with respect to AC. The line BK meets AC at P. If $\angle AMP = \angle CMN$, prove that $\angle ABP = \angle CBN$.

Solution. Let D, E, F be the feet of perpendiculars to BP, MP, BM respectively drawn through A, and G, Q, H be the feet of perpendiculars to BP, MP, BM respectively drawn through C.

Note that $\triangle AFM \sim \triangle CQM$ and $\triangle AME \sim \triangle CMH$, therefore $\frac{AF}{CQ} = \frac{AM}{CM} = \frac{AE}{CH}$. By symmetry we have also $CQ = CG$, $AE = AD$ and $\angle FAD = \angle FBD = \angle GCH$, therefore $\frac{AF}{CG} = \frac{AD}{CH}$. It follows that $\triangle FAD \sim \triangle GCH$, thus $\angle AFD = \angle CGH$.

Now the points A, B, F, D are concyclic, therefore $\angle ABP = \angle AFD$, and similarly $\angle CBN = \angle CGH$. Combining that with the above, we have $\angle ABP = \angle CBN$.

Problem 3

Setting $x = 1$, $y = 0$ in the initial equation

$$f(x^3 + y^3 + xy) = x^2 f(x) + y^2 f(y) + f(xy) \tag{1}$$

gives $f(0) = 0$.

Taking $y = 0$ in (1) we obtain

$$f(x^3) = x^2 f(x). \tag{2}$$

Substituting $y = -x$ into (1) leads to

$$f(-x^2) = x^2 f(x) + x^2 f(-x) + f(-x^2) \Rightarrow f(-x) = -f(x). \tag{3}$$

From (1) and (3) it follows that

$$\begin{aligned} &f(x^3 + y^3 + xy) + f(x^3 - y^3 - xy) \\ &\quad = x^2 f(x) + y^2 f(y) + f(xy) + x^2 f(x) - y^2 f(y) - f(xy) = 2x^2 f(x) = 2f(x^3). \end{aligned} \tag{4}$$

Note that for any a, $b \in \mathbb{R}$ there exist x, $y \in \mathbb{R}$ such that

$$a = x^3 + y^3 + xy, \quad b = x^3 - y^3 - xy.$$

To this end, we take x, y that satisfy the equations

$$x^3 = \frac{a+b}{2}, \quad y^3 + xy = \frac{a-b}{2}$$

(we see that functions in left hand sides of the equations have the ranges $\mathbb{R}$). Therefore, we can rewrite (4) in the form

$$f(a) + f(b) = 2f\Big(\frac{a+b}{2}\Big), \quad a,\ b \in \mathbb{R}.$$

Thus, we have

$$f(0) + f(a+b) = 2f\Big(\frac{a+b}{2}\Big) \Rightarrow f(a+b) = f(a) + f(b), \quad a,\ b \in \mathbb{R}.$$

Further, we change $x \to x+1$ in (2), denote $c = f(1)$, and from additivity of f obtain

$$\begin{aligned} f((x+1)^3) &= (x+1)^2 f(x+1) \\ \Leftrightarrow f(x^3) + 3f(x^2) + 3f(x) + c &= (x^2 + 2x + 1)(f(x) + c) \\ \Leftrightarrow 3f(x^2) &= (2x-2)f(x) + (x^2 + 2x)c \end{aligned} \tag{5}$$

Substituting $x \to -x$ in (5), we get

$$3f(x^2) = (-2x-2)f(-x) + (x^2 - 2x)c = (2x+2)f(x) + (x^2 - 2x)c \tag{6}$$

From the equality of right hand sides of (5) and (6) we obtain

$$f(x) = cx.$$

It is easy to verify that this function satisfies the given equation for all $c \in \mathbb{R}$.

Answer: $f(x) = cx$, $c \in \mathbb{R}$.

4. Determine the maximum integer n such that for each $k \leqslant \frac{n}{2}$ there are two positive divisors of n with difference k.

Solution. The answer is 24. This number obviously satisfies the condition: $1 = 2 - 1$, $2 = 4 - 2$, $3 = 6 - 3$, $4 = 8 - 4$, $5 = 8 - 3$, $6 = 8 - 2$, $7 = 8 - 1$, $8 = 12 - 4$, $9 = 12 - 3$, $10 = 12 - 2$, $11 - 12 - 1$, $12 = 24 - 12$.

Suppose $n > 24$ satisfies the condition. If n is odd, it has no divisors between n and $\frac{n}{3}$, therefore $\frac{n-1}{2}$ must have the form $n - d$, where d divides n. But then $d = \frac{n+1}{2}$ clearly does not divide n. Thus n is even.

If $\frac{n}{3} \leqslant k < \frac{n}{2}$ and $k = d_1 - d_2$, where d_1 and d_2 divide n, then $d_1 = \frac{n}{2}$ (since obviously $d_1 > \frac{n}{3}$, and for $d_1 = n$ the number d_2 must be greater than $\frac{n}{2}$). Therefore, for every such k the number $\frac{n}{2} - k$ divides n. This means that n is divisible by all positive integers not exceeding $\frac{n}{6}$. Since $n > 24$, it is divisible by 3 and 4 and therefore by 12.

The numbers $\frac{n}{6}$ and $\frac{n}{6} - 1$ are coprime and divide n. Therefore their product also divides n, and $n \geqslant \frac{n}{6}\left(\frac{n}{6} - 1\right)$, that is, $n \leqslant 42$. Since $12|n$, it remains to check the number 36, which is not divisible by $5 < \frac{36}{6}$ and therefore does not satisfy the condition.

5. Let A_n be the set of partitions of the sequence 1, 2, $\ldots$, n into several subsequences such that every two neighbouring terms of each subsequence have different parity, and B_n the set of partitions of the sequence 1, 2, $\ldots$, n into several subsequences such that all the terms of each subsequence have the same parity (for example, the partition $\{(1,4,5,8),(2,3),(6,9),(7)\}$ is an element of A_9, and the partition $\{(1,3,5),(2,4),(6)\}$ is an element of B_6).

Prove that for every positive integer n the sets A_n and B_{n+1} contain the same number of elements.

Solution. To prove that $|A_n| = |B_{n+1}|$ we construct a bijection between the two types of partitions.

Let A be a partition of the first type, that is, the elements of each subsequence in A have alternating parities. We map this partition to the partition B defined by the following rule:

Two numbers $x < y$ are adjacent in some subsequence in A if and only if x and $y+1$ are adjacent in some subsequence in B.

For example, the partition $\{(1,4,7,8),(2,5,10),(3,6),(9)\} \in A_{10}$ is mapped to the partition $\{(1,5,11),(2,6),(4,8),(3,7,9),(10)\} \in B_{11}$.

It follows immediately that all the terms of each subsequence in B have the same parity, that is, $B \in B_{n+1}$.

Transforming each pair (x,z) of consecutive terms in any partition $B \in B_{n+1}$ into pair $(x, z-1)$ (where obviously $x < z-1$ and the numbers x and $z-1$ have different parity) we construct the unique $A \in A_n$ which maps to B. Thus our mapping is a bijection.

6. The area of a convex pentagon $ABCDE$ is S, and the circumradii of the triangles ABC, BCD, CDE, DEA, EAB are R_1, R_2, R_3, R_4, R_5. Prove the inequality

$$R_1^4 + R_2^4 + R_3^4 + R_4^4 + R_5^4 \geqslant \frac{4}{5\sin^2 108^\circ} S^2.$$

Solution. First we prove the following

Lemma 1. In a convex n-gon $A_1A_2 \ldots A_n$ with area S we have

$$4S \leqslant A_nA_2 \cdot R_1 + A_1A_3 \cdot R_2 + \ldots + A_{n-1}A_1 \cdot R_n,$$

where R_i is the circumradius of the triangle $A_{i-1}A_iA_{i+1}$, $A_0 = A_n$, $A_{n+1} = A_n$.

Let M_i be the midpoint of A_iA_{i+1} for $i = 1, \ldots, n$. For each i we consider the quadrilateral formed by the segments A_iM_i and A_iM_{i-1} and the perpendiculars to this segments drawn through M_i and M_{i-1}, respectively. We claim that these n quadrilateral cover the n-gon. Indeed, let P be a point inside the n-gon. Let PA_k be the minimum among the distances PA_1, PA_2, $\ldots$, PA_n. We have $PA_k \leqslant PA_{k+1}$ and $PA_k \leqslant PA_{k-11}$, therefore P belongs to the n-gon and to each of the two half-planes containing A_k and bounded by the perpendicular bisectors to A_kA_{k+1} and A_kA_{k-11}, that is, to the k-th quadrilateral. To complete the proof it remains to note that the area of the i-th quadrilateral does nor exceed $\frac{1}{2} \cdot \frac{A_{i-1}A_{i+1}}{2} \cdot R_i$.

For our problem it follows that $4S \leqslant 2R_1^2 \sin\angle A_1 + 2R_2^2 \sin\angle A_2 + \ldots + 2R_5^2 \sin\angle A_5$. Applying Cauchy-Buniakowsky inequality, we obtain

$$2S \leqslant R_1^2 \sin\angle A_1 + R_2^2 \sin\angle A_2 + \ldots + R_5^2 \sin\angle A_5 \leqslant \sqrt{(R_1^4 + \ldots + R_5^4)(\sin^2\angle A_1 + \ldots + \sin^2\angle A_5)} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{5(R_1^4 + \ldots + R_5^4)\sin^2 108^\circ},$$

thus

$$\frac{4S^2}{5\sin^2 108^\circ} \leqslant R_1^4 + R_2^4 + \ldots + R_5^4.$$

In the above inequality we made use of the following

Lemma 2. If α_1, α_2, $\ldots$, α_5 are angles of a convex pentagon, then $\sin^2\alpha_1 + \ldots + \sin^2\alpha_5 \leqslant 5\sin^2 108^\circ$.

The sum in question does not depend on the order of the angles, therefore we may assume $\alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \ldots \leqslant \alpha_5$.

If $\alpha_1 = 108^\circ$, then $\alpha_2 = \ldots = \alpha_5 = 108^\circ$, and the inequality turns to equality.

If $\alpha_1 < 108^\circ$, then $\alpha_5 > 108^\circ$. Note that $\alpha_1 + \alpha_5 < 270^\circ$ (if $\alpha_1 + \alpha_5 \geqslant 270^\circ$, then $\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 \leqslant 270^\circ$, therefore $\alpha_2 \leqslant 90^\circ$, a fortiori $\alpha_1 \leqslant 90^\circ$ and thus $\alpha_5 \geqslant 180^\circ$, a contradiction). Then we have

$$\sin^2 108^\circ + \sin^2(\alpha_1 + \alpha_5 - 108^\circ) - \sin^2\alpha_1 - \sin^2\alpha_5 = 2\cos(\alpha_1 + \alpha_5)\sin(\alpha_1 - 108^\circ)\sin(\alpha_5 - 108^\circ) > 0.$$

It means that changing the angles α_1 by 108° and α_5 by $\alpha_1 + \alpha_5 - 108^\circ$ increases the sum of squares of the sines. Iterating this operation, we shall make all the angles equal to 108°, thus proving the inequality.

4. Найдите наибольшее натуральное n такое, что для любого натурального $k \leqslant \frac{n}{2}$ найдутся два натуральных делителя n с разностью k.

Решение. Ответ – 24. Это число, очевидно, удовлетворяет условию: $1 = 2-1$, $2 = 4-2$, $3 = 6-3$, $4 = 8-4$, $5 = 8-3$, $6 = 8-2$, $7 = 8-1$, $8 = 12-4$, $9 = 12-3$, $10 = 12-2$, $11 - 12 - 1$, $12 = 24 - 12$.

Предположим, что $n > 24$ удовлетворяет условию. Если n нечётно, у него нет делителей между n и $\frac{n}{3}$, поэтому $\frac{n-1}{2}$ должно иметь вид $n-d$, где d – делитель n. Но тогда $d = \frac{n+1}{2}$, очевидно, не делит n. Таким образом, n чётно.

Если $\frac{n}{3} \leqslant k < \frac{n}{2}$ и $k = d_1 - d_2$, где d_1 and d_2 – делители n, то $d_1 = \frac{n}{2}$ (поскольку, очевидно, $d_1 > \frac{n}{3}$, а при $d_1 = n$ число d_2 должно быть больше $\frac{n}{2}$). Поэтому для каждого такого k число $\frac{n}{2} - k$ – делитель n. Это означает, что n делится на все натуральные числа, не превосходящие $\frac{n}{6}$. Поскольку $n > 24$, оно делится на 3, 4 и, следовательно, на 12.

Числа $\frac{n}{6}$ и $\frac{n}{6} - 1$ взаимно просты и делят n. Поэтому n делится на их произведение, значит, $n \geqslant \frac{n}{6}\left(\frac{n}{6} - 1\right)$, то есть $n \leqslant 42$. Так как $12|n$, остаётся проверить число 36, которое не делится на $5 < \frac{36}{6}$ и потому не удовлетворяет условию.

5. Обозначим через A_n множество разбиений последовательности 1, 2, …, n на несколько подпоследовательностей, в каждой из которых любые два соседних члена имеют разную чётность, а через B_n – множество разбиений последовательности 1, 2, …, n на несколько подпоследовательностей, в каждой из которых все члены имеют одинаковую чётность (например, разбиение $\{(1,4,5,8),(2,3),(6,9),(7)\}$ является элементом A_9, а разбиение $\{(1,3,5),(2,4),(6)\}$ является элементом B_6).

Докажите, что при каждом натуральном n множества A_n и B_{n+1} содержат одинаковое количество элементов.

Решение. Для доказательства равенства $|A_n| = |B_{n+1}|$ мы построим биекцию между двумя видами разбиений.

Пусть A – разбиение первого вида, то есть в каждой подпоследовательности, входящей в A, чётности членов чередуются. Мы сопоставим этому разбиению разбиение B, заданное следующим правилом:

Два числа $x < y$ – соседние в некоторой подпоследовательности из A тогда и только тогда, когда x и $y+1$ – соседние в некоторой подпоследовательности из B.

Например, разбиению $\{(1,4,7,8),(2,5,10),(3,6),(9)\} \in A_{10}$ соответствует $\{(1,5,11),(2,6),(4,8),(3,7,9),(10)\} \in B_{11}$.

Из этого правила немедленно следует, что в каждой подпоследовательности из B все члены имеют одинаковую чётность, то есть $B \in B_{n+1}$.

Сопоставляя каждой паре (x,z) соседних членов подпоследовательности в любом разбиении $B \in B_{n+1}$ пару $(x, z-1)$ (в которой, очевидно, $x < z-1$ и числа x и $z-1$ одной чётности), мы получим единственное разбиение $A \in A_n$, переходящее в B. Таким образом, наше соответствие – биекция.

6. Площадь выпуклого пятиугольника $ABCDE$ равна S, а радиусы описанных окружностей треугольников ABC, BCD, CDE, DEA и EAB – R_1, R_2, R_3, R_4 и R_5. Докажите неравенство

$$R_1^4 + R_2^4 + R_3^4 + R_4^4 + R_5^4 \geqslant \frac{4}{5\sin^2 108^\circ} S^2.$$

Решение. Нам потребуется

Лемма 1. Площадь S выпуклого n-угольника $A_1A_2\ldots A_n$ удовлетворяет неравенству

$$4S \leqslant A_nA_2 \cdot R_1 + A_1A_3 \cdot R_2 + \ldots + A_{n-1}A_1 \cdot R_n,$$

где R_i – радиус описанной окружности треугольника $A_{i-1}A_iA_{i+1}$, $A_0 = A_n$, $A_{n+1} = A_n$.

Пусть M_i – середина A_iA_{i+1} при $i = 1, \ldots, n$. Для каждого i рассмотрим четырёхугольник, образованный отрезками A_iM_i и A_iM_{i-1}, а также перпендикулярами к этим отрезкам, восставленными в точках M_i and M_{i-1} соответственно. Мы докажем, что эти n четырёхугольников покрывают наш n-угольник. Действительно, пусть P – точка внутри n-угольника. Пусть PA_k – наименьшее из расстояний PA_1, PA_2, $\ldots$, PA_n. Имеем $PA_k \leqslant PA_{k+1}$ и $PA_k \leqslant PA_{k-1}$, поэтому P лежит в n-угольнике и в каждой из двух полуплоскостей, содержащих A_k и ограниченных серединными перпендикулярами к A_kA_{k+1} и A_kA_{k-1}, значит, в k-ом четырёхугольнике. Для завершения доказательства осталось заметить, что площадь i-го четырёхугольника не превосходит $\frac{1}{2} \cdot \frac{A_{i-1}A_{i+1}}{2} \cdot R_i$.

В условиях нашей задачи отсюда следует, что $4S \leqslant 2R_1^2 \sin\angle A_1 + 2R_2^2 \sin\angle A_2 + \ldots + 2R_5^2 \sin\angle A_5$. Используя неравенство Коши-Буняковского, получаем

$$2S \leqslant R_1^2 \sin\angle A_1 + R_2^2 \sin\angle A_2 + \ldots + R_5^2 \sin\angle A_5 \leqslant \sqrt{(R_1^4 + \ldots + R_5^4)(\sin^2\angle A_1 + \ldots + \sin^2\angle A_5)} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{5(R_1^4 + \ldots + R_5^4)\sin^2 108^\circ},$$

таким образом

$$\frac{4S^2}{5\sin^2 108^\circ} \leqslant R_1^4 + R_2^4 + \ldots + R_5^4.$$

В вышеприведённом неравенстве была использована

Лемма 2. Если α_1, α_2, $\ldots$, α_5 – углы выпуклого пятиугольника, то $\sin^2\alpha_1 + \ldots + \sin^2\alpha_5 \leqslant 5\sin^2 108^\circ$.

Оцениваемая сумма не зависит от порядка углов, поэтому можно считать, что $\alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \ldots \leqslant \alpha_5$.

Если $\alpha_1 = 108^\circ$, то $\alpha_2 = \ldots = \alpha_5 = 108^\circ$, и неравенство обращается в равенство.

Если $\alpha_1 < 108^\circ$, то $\alpha_5 > 108^\circ$. Заметим, что $\alpha_1 + \alpha_5 < 270^\circ$ (если $\alpha_1 + \alpha_5 \geqslant 270^\circ$, то $\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 \leqslant 270^\circ$, поэтому $\alpha_2 \leqslant 90^\circ$, тем более $\alpha_1 \leqslant 90^\circ$ и, следовательно, $\alpha_5 \geqslant 180^\circ$ – противоречие). Поэтому

$$\sin^2 108^\circ + \sin^2(\alpha_1 + \alpha_5 - 108^\circ) - \sin^2\alpha_1 - \sin^2\alpha_5 = 2\cos(\alpha_1 + \alpha_5)\sin(\alpha_1 - 108^\circ)\sin(\alpha_5 - 108^\circ) > 0.$$

Это значит, что замена α_1 на 108° и α_5 на $\alpha_1 + \alpha_5 - 108^\circ$ увеличивает сумму квадратов синусов. Повторяя эту операцию, мы сделаем все углы равными 108°, и неравенство будет доказано.