Регионален натпревар 1992

I година

1. Ученик ги отчукува по ред природните броеви од 1 до 1000. Која цифра стои на 1992 -то место?

Решение. Со отчукување на едноцифрените и двоцифрените броеви, учникот отчукал $9\cdot 1+90\cdot 2=189$ цифри. Значи, остануваат уште $1992-189=1803$ цифри, а $1803:3=601$, т.е. учникот ги отчукал првите 601 трицифрени броеви. Според тоа, 1992-та цифра е третата цифра на 601-от трицифрен број, т.е. 700. Следствено, бараната цифра е 0.

2. Да се докаже дека бројот $2222^{5555}+5555^{2222}$ е делив со 7 .

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned}2222^{5555}+5555^{2222} &= (2222^{5555}+4^{5555})+(5555^{2222}-4^{2222})-(4^{5555}-4^{2222})\\ &= (2222+4)(2222^{5554}-2222^{5553}\cdot 4+....-2222\cdot 4^{5553}+4^{5554})+\\ &\quad +(5555-4)(5555^{2221}+5555^{2220}\cdot 4+...+5555\cdot 4^{2220}+4^{2221})+\\ &\quad +4^{2222}(4^{3333}-1)=7A+7B+4^{2222}(64^{1111}-1)\\ &= 7A+7B+4^{2222}(64-1)(64^{1110}+64^{1109}+...+64+1)\\ &= 7A+7B+7C=7(A+B+C)\end{aligned}$$

3А. Ако барем еден од броевите a,b и c е различен од нула, тогаш барем еден од броевите $(a+b+c)^2-8ab$, $(a+b+c)^2-8bc$ и $(a+b+c)^2-8ca$ е позитивен. Докажи!

Решение. Го претпоставуваме спротивното, т.е. дека

$$(a+b+c)^2-8ab\le 0\,,\qquad (a+b+c)^2-8bc\le 0\,,\qquad (a+b+c)^2-8ca\le 0\,.$$

Ако ги собереме овие три неравенства се добива

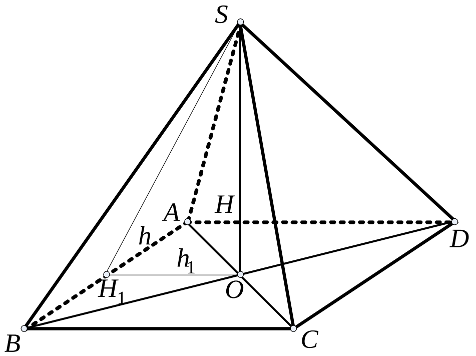
$$a^2+b^2+c^2+(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\le 0\,,$$

што е во спротивност со условот $a^2+b^2+c^2>0$. Затоа, барем еден од дадените три броја е позитивен.

4А. Основата на правилна четириаголна пирамида е ромб со страна $a=2$ cm, составен од два рамнострани триаголници. Пократкиот раб на пирамидата има должина $b=2$ cm. Да се определи плоштината и волуменот на пирамидата.

Решение. Бидејќи основата на пирамидата е ромб составен од два рамнострани триаголници со страна $a=2$ cm имаме

$$B = 2\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}.$$



За да ја определиме плоштината на обвивката на пирамидата треба да ја определиме висината $h = \overline{SH_1}$. Триаголникот ACS е рамностран со страна a, па неговата висина е $H = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Бидејќи $\triangle AEO$ е половина од рамностран триаголник, неговата висина h_1 е половина од висината на ΔAEC, т.е. $h_1 = \frac{a\sqrt{3}}{4}$. Но ΔH_1OS е правоаголен па

$$h = \sqrt{H^2 + h_1^2} = \sqrt{\frac{3}{4}a^2 + \frac{3}{16}a^2} = \frac{a\sqrt{15}}{4}.$$

Значи, плоштината на пирамидата е

$$P = B + 4\cdot\frac{ah}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + 2\frac{a^2\sqrt{15}}{4} = 2\sqrt{3}(1+\sqrt{5}),$$

а волуменот на пирамидата е

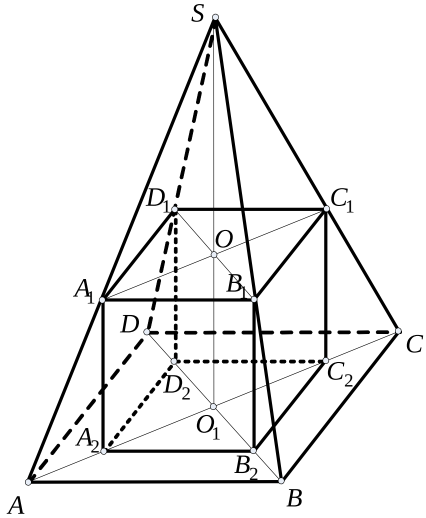
$$V = \frac{1}{3}BH = \frac{1}{3}\frac{a^2\sqrt{3}}{2}\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3}{4} = 2.$$

3Б. Во продавница имало 6 сандаци со јаболка со тежини од 15 kg, 18kg, 19kg, 20kg и 31 kg. Двајца купувачи купиле 5 сандаци, така што едниот зел двапати повеќе јаболка од другиот. Кој сандак останал непродаден?

Решение. Збирот на тежините на сите сандаци изнесува 119 kg. Купувачите зеле 5 сандаци, со тоа што едниот зел двапати повеќе од другиот, па затоавкупната тежина мора да е делива со 3. Тоа е единствено можно ако се изостави сандакот од 20 kg, бидејќи само 20 при делење со три има ист остаток како и при делењето на 119 со 3. За да провериме дека задачата има смисла, да видиме кои сандаци ги купиле купувачите. Вкупната тежина на петте сандаци е 99 kg. Првиот купувач зел 66 kg, а вториот 33 kg. Значи, првиот ги купил сандаците со тежини 16 kg,19kg и 31 kg, а вториот ги купил сандаците со тежини 15 kg и 18 kg.

4Б. Во права правилна четириаголна пирамида е впишана коцка, така што четири нејзини раба се на бочните ѕидови на пирамидата, а други четири раба се на основата на пирамидата.

Да се определи волуменот и плоштината на коцката ако пирамидата има висина h и основен раб a.



Решение. Пирамидата да ја означиме со $SABCD$, а коцката впишана во неа со $A_1B_1C_1D_1A_2B_2C_2D_2$. Да го означиме со x работ на коцката. Од сличноста $\Delta SO_1B \sim \Delta SOB_1$ добиваме

$$\overline{SO}:\overline{SO_1}=\overline{OB_1}:\overline{O_1B}\,.$$

Знаеме дека

$$SO_1=h\,,\ \overline{SO}=h-x\,,\ \overline{ON}=\tfrac{x}{2}\,,\ \overline{O_1B}=\tfrac{a}{\sqrt{2}}$$

од каде се добива

$$\frac{h-x}{h}=\frac{x}{a}\,,\ \ x=\frac{ah}{a+h}\,.$$

Од овде, за плоштината и волуменот на коцката се добива

$$P=6x^2=6(\tfrac{ah}{a+h})^2\,,\ \ V=x^3=(\tfrac{ah}{a+h})^3\,.$$

II година

1. Најди комплексен број z што ги задоволува равенствата

$$|z+2i|=|z-4i| \qquad \text{и} \qquad |z-4|=1\,.$$

Решение. Нека $z=a+ib$. Со замена во равенствата добиваме

$$|a+ib+2i|=|a+ib-4i| \qquad \text{и} \qquad |a+ib-4|=1$$

кои се еквивалентни со

$$|a+i(b+2)|=|a+i(b-4)| \qquad \text{и} \qquad |a-4+ib|=1$$

$$\sqrt{a^2+(2+b)^2}=\sqrt{a^2+(b-4)^2} \qquad \text{и} \qquad \sqrt{(a-4)^2+b^2}=1$$

$$a^2+b^2+4b+4=a^2+b^2-8b+16 \qquad \text{и} \qquad a^2-8a+16+b^2=1$$

$$12b=12 \qquad \text{и} \qquad a^2-8a+16b^2=1\,.$$

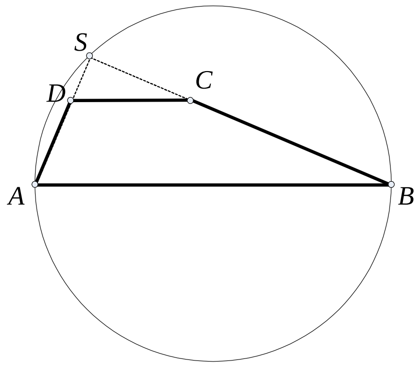
Затоа, $b=1$, а 4 е решение на на равенката $a^2-8a+16=0$. Одовде $a=4$, па $z=4+i$.

2. Ако краците на еден трапез се меѓусебно нормални, тогаш збирот од квадратите на неговите дијагонали е еднаков на збирот од квадратите на неговите основи. Докажи!

Решение. Нека краците на трапезот се сечат во точката S. Од $\triangle ACS$ и $\triangle BDS$ имаме

$$\overline{AC}^2=\overline{AS}^2+\overline{CS}^2\,,\ \ \overline{BD}^2=\overline{BS}^2+\overline{DS}^2\,,$$

а од овде



$$\overline{AC}^2+\overline{BD}^2=\overline{AS}^2+\overline{BS}^2+\overline{CS}^2+\overline{DS}^2 . \quad (1)$$

Од правоаголните триаголници $\triangle ABS$ и $\triangle DCS$ имаме

$$\overline{AB}^2=\overline{AS}^2+\overline{BS}^2 ,$$

$$\overline{DC}^2=\overline{DS}^2+\overline{CS}^2 .$$

Со замена на ова во (1) се добива

$$\overline{AC}^2+\overline{BD}^2=\overline{AB}^2+\overline{DC}^2 .$$

3А. Ако a,b и c се реални броеви, такви што $a+b+c=2$ и $ab+bc+ca=1$, тогаш $0\le a\le \frac{4}{3}$. Докажи!

Решение. Од $a+b+c=2$ се добива $b+c=2-a$. Од $ab+bc+ca=1$, се добива

$$bc=1-a(b+c)=1-a(2-a) .$$

Затоа броевите b и c се решенија на квадратната равенка

$$x^2+(a-2)x+1-a(2-a)=0 .$$

Бидејќи b и c се реални броеви, мора дискриминантата на квадратната равенка да е ненегативна, т.е.

$$0\le D=(a-2)^2-4(1-a(2-a))=-3a^2+4a ,$$

од каде што следува $0\le a\le \dfrac{4}{3}$.

4А. Да се докаже неравенството

$$\sqrt{a_1^2+a_2^2+...+a_n^2}\le |a_1|+|a_2|+|a_3|+...+|a_n|$$

Решение.Даденото неравенство е еквивалентно со

$$a_1^2+a_2^2+...+a_n^2\le (|a_1|+|a_2|+|a_3|+...+|a_n|)^2 . \qquad (1)$$

Десната страна на (1) е

$$|a_1|^2+|a_2|^2+...+|a_n|^2+\sum_{1\le i<j\le n}2|a_i|\cdot|a_j|\ge |a_1|^2+|a_2|^2+|a_3|^2+...+|a_n|^2$$

$$=a_1^2+a_2^2+...+a_n^2$$

па со тоа неравенството (1) е докажано.

3Б. Со формулата

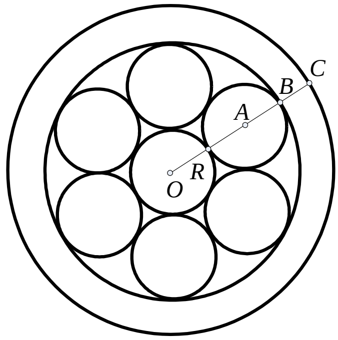
$$y=x^2-2(k-1)x+k^2 ,\ k\in\mathbb{R} ,$$

дадено е множество од параболи. Да се определи геометриското место на темињата на параболите.

Решение. Темето на параболата $y = ax^2 + bx + c$ е зададено со $T(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a})$. Заменувајќи $a = 1, b = 2(k-1)$ и $c = k^2$, се добива дека темето е $T(k-1, 2k-1)$ за даден реален број k. Бидејќи $2k-1 = 2(k-1)+1$, бараното геометриско место е правата $y = 2x+1$

4Б. Дадена е кружница што допира шест еднакви на неа кружници што се допираат меѓу себе. Околу нив е опишан концентричен прстен со плоштина еднаква на плоштината на сите седум кругови заедно. Да се докаже дека ширината на прстенот е еднаква на радиусот на круговите.

Решение. Да го означиме центарот на дадениот круг со O, радиусот со R, а ширината на прстенот BC со x. Плоштината на концентричниот прстен по услов на задачата е еднаква на плоштината на сите кругови заедно. Затоа



$$\pi(\overline{OC}^2 - \overline{OB}^2) = \pi[(3R+x)^2 - (3R)^2] = 7\pi R^2,$$

од каде што следува

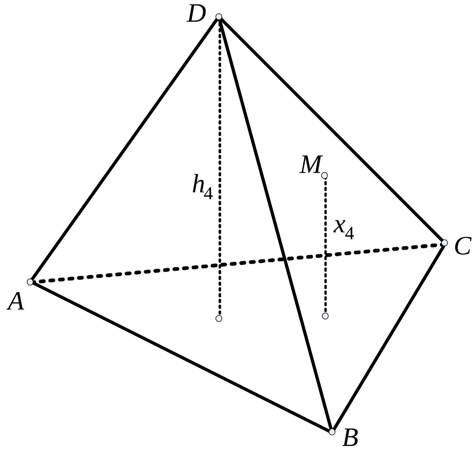
$$x^2 + 6Rx - 7R^2 = 0.$$

Бидејќи $x > 0$, од квадратната равенка се добива $x = R$.

III година

1. Ако x_1, x_2, x_3 и x_4 се растојанијата од произволна точка M во еден тетраедар $ABCD$ до неговите ѕидови, а h_1, h_2, h_3 и h_4 се соодветните висини на тетраедарот, тогаш

$$\frac{x_1}{h_1} + \frac{x_2}{h_2} + \frac{x_3}{h_3} + \frac{x_4}{h_4} = 1.$$



Решение. Нека h_1, h_2, h_3 и h_4 се висините спуштени од темињата A, B, C и D соодветно. Плоштините на триаголниците BCD, ACD, ABD и ABC да ги означиме соодветно со S_1, S_2, S_3 и S_4. Тогаш

$$\frac{x_1}{h_1} + \frac{x_2}{h_2} + \frac{x_3}{h_3} + \frac{x_4}{h_4} = \frac{\frac{1}{3}x_1 \cdot S_1}{\frac{1}{3}h_1 \cdot S_1} + \frac{\frac{1}{3}x_2 \cdot S_2}{\frac{1}{3}h_2 \cdot S_2} + \frac{\frac{1}{3}x_3 \cdot S_3}{\frac{1}{3}h_3 \cdot S_3} + \frac{\frac{1}{3}x_4 \cdot S_4}{\frac{1}{3}h_4 \cdot S_4}$$

$$=\frac{V_{BCDM}}{V_{ABCD}}+\frac{V_{ACDM}}{V_{ABCD}}+\frac{V_{ABDM}}{V_{ABCD}}+\frac{V_{ABCM}}{V_{ABCD}}$$
$$=\frac{V_{ABCD}}{V_{ABCD}}=1.$$

2. Да се докаже дека

$$2+\mathrm{tg}1^\circ\,\mathrm{tg}2^\circ=\mathrm{ctg}1^\circ\,\mathrm{tg}2^\circ\ .$$

Решение. Од

$$\mathrm{tg}1^\circ=\mathrm{tg}(2^\circ-1^\circ)=\frac{\mathrm{tg}2^\circ-\mathrm{tg}1^\circ}{1+\mathrm{tg}2^\circ\,\mathrm{tg}1^\circ}$$

се добива

$$1+\mathrm{tg}2^\circ\cdot\mathrm{tg}1^\circ=\mathrm{ctg}2^\circ\,\mathrm{tg}1^\circ-1$$

односно

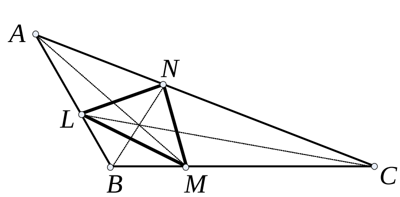
$$2+\mathrm{tg}1^\circ\,\mathrm{tg}2^\circ=\mathrm{ctg}1^\circ\,\mathrm{tg}2^\circ\ .$$

3А. Да се реши равенката

$$\log_2(-x^2+7x-10)+3\sqrt{\cos(\pi\sqrt{x^2+7})-1}=1$$

Решение. Мора да биде $-x^2+7x-10>0$, од каде што се добива $2<x<5$. Исто така, мора да биде $\cos(\pi\sqrt{x^2+7})-1\geq 0$ од каде се добива $\cos(\pi\sqrt{x^2+7})=1$, т.е. $\pi\sqrt{x^2+7}=2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ или $\sqrt{x^2+7}=2k$, $k\in\mathbb{Z}$. Од $\sqrt{x^2+7}\geq 0$ добиваме $\sqrt{x^2+7}=2k$ каде што $k=0,1,\dots$. Затоа, $2<x=\sqrt{4k^2-7}<5$ каде што $k=0,1,\dots$. За $k=0$ и $k=1$, x не постои во множеството на реалните броеви. За $k=2$ се добива $x=3$, а за $k\geq 3$ се добива $x\geq\sqrt{29}>5$ што не е можно. Значи, равенката има смисла само за $x=3$, а тоа е и решение на равенката.

4А. Ако во даден триаголник еден негов агол изнесува 120°, тогаш триаголникот со темиња во пресеците на симетралите на аглите со спротивни страни е правоаголен. Докажи!

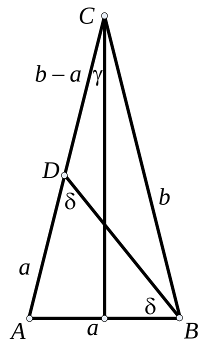


Решение. Нека $\measuredangle ABC=120^\circ$, а со L,M и N да ги означиме пресеците на симетралите на аглите кај темињата C,A и B со страните AB,BC и CA соодветно. Ќе докажеме дека NL е симетрила на аголот $\measuredangle ANB$. Навистина, растојанието од L до правата AC е еднакво со растојанието од L до правата BC, зашто CL е симетрала на аголот $\measuredangle BCA$. Но, растојанието од L до правата BC е еднакво со растојанието од L до правата BN, бидејќи $\measuredangle NBL = \measuredangle LBK = 60^\circ$. Затоа растојанието од L до правата AC е еднакво со растојанието од L до правата BN, и од овде следува дека NL е симетрала на аголот $\measuredangle ANB$. Аналогно се покажува дека MN е симетрала на аголот $\measuredangle BNC$. Затоа,

$$\measuredangle LNM = \measuredangle LNB + \measuredangle BNM = \tfrac{1}{2}\measuredangle ANB + \tfrac{1}{2}\measuredangle BNC = \tfrac{1}{2}\cdot 180^\circ = 90^\circ .$$

3Б. Да се конструира рамнокрак триаголник, ако се дадени аголот при врвот и разликата на кракот и основата.

Решение. Нека ΔABC има страна $\overline{AB} = a$, $\overline{BC} = \overline{CA} = b$ и $\gamma = \measuredangle ACB$ е дадениот агол. Нека точката D е избрана на отсечката AC така што $\overline{CD} = b - a$. Од условот



$$2\cdot \measuredangle ACB + \gamma = 180^\circ ,$$

добиваме $\measuredangle BAC = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}$. Користејќи дека ΔABD е рамнокрак се добива дека $\measuredangle ABD = \delta$. Тогаш од условот

$$\measuredangle BAC + 2\delta = 180^\circ ,$$

заменувајќи ја добиената вредност за аголот $\measuredangle BAC$, се добива $\delta = 45^\circ + \frac{\gamma}{4}$. Одовде следува дека $\measuredangle BDC = 180^\circ - \delta = 135^\circ - \frac{\gamma}{4}$. Затоа, ΔBDC може да се конструира(имено, познати се: страната $\overline{CD} = b - a$, аголот γ и $\measuredangle BDC$). Нека s е симетрала на страната BD. Тогаш $s \cap CD = \{A\}$.

4Б. Да се најде множеството решенија на равенката

$$\log_2[1+\log_2(1+\log_2 x)] = \sqrt{\tfrac{1}{2}x - x^2} .$$

Решение. Мора да биде $1+\log_2 x > 0$, т.е. $x > \frac{1}{2}$. Исто така, мора да биде $\frac{1}{2}x - x^2 \geq 0$ од каде што следува $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$. Според тоа, множеството решенија на равенката е празно множество.

IV година

1. Во јазикот на едно племе има само две букви. Познато е дека ниту еден збор од тој јазик не е почеток на друг збор. Дали може речникот на ова племе да има:

3 збора со четири букви,
10 збора со пет букви,
30 збора со шест букви и

5 збора со седум букви?

Решение. Ќе покажеме дека одговорот е “не”. Да земеме кои било пет збора со со должина 7. Од условот на задачата треба да имаме $30\cdot 2^1=60$ збора со должина 6 кои не се јавуваат како почеток на зборови со должина 7. Од условот на задачата исто така се добива дека треба да имаме $10\cdot 2^2=40$ збора со должина 5 кои не се јавуваат како почеток на зборови со должина 7 и треба да имаме $3\cdot 2^3=24$ зборови со должина 4 кои не се јавуваат како почеток на зборови со должина 7. Затоа, доколку одговорот на задачата е позитивен, тогаш постојат барем $5+60+40+24=129$ збора со должина7. Но ова е противречност бидејќи зборови со должина 7 има точно $128=2^7$.

2. Да се определат броевите A,B и C, така што за секој природен број $n\in\mathbb{N}$ да важи равенството

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+...+\frac{n}{2^n}=\frac{An+B}{2^n}+C. \tag{1}$$

Решение. A,B и C треба да се одредат така што да важи (1) за секој природен број n. За $n=1$ се добива

$$\frac{1}{2}=\frac{A+B}{2}+C. \tag{2}$$

За $n+1$ равенството (1) станува

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+...+\frac{n}{2^n}+\frac{n+1}{2^{n+1}}=\frac{A(n+1)+B}{2^{n+1}}+C.$$

При претпоставка дека равенството (1) важи за бројот n, претходното равенство важи ако и само ако

$$\frac{An+B}{2^n}+C+\frac{n+1}{2^{n+1}}=\frac{A(n+1)+B}{2^{n+1}}+C.$$

По средувањето се добива

$$(A+1)n+(B-A+1)=0.$$

Ова равенство треба да важи за секој природен број n, па затоа $A+1=0$ и $B-A+1=0$, т.е. $A=-1$ и $B=-2$. Од (2) се добива $C=2$. Од принципот на математичка индукција произлегува дека за овие вредности на A,B и C равенството (1) навистина важи за секој $n\in\mathbb{N}$.

3А. Нека во остроаголен триаголик ABC тежишните линии повлечени во B и C се заемно нормални. Докажи дека

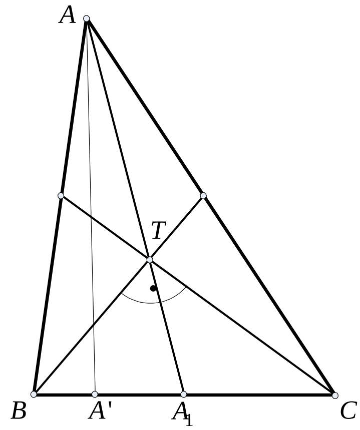
$$\text{ctg}\measuredangle B+\text{ctg}\measuredangle C\geq\frac{2}{3}.$$

Решение. Нека T е тежиштето на триаголникот, A_1 е средината на отсечката BC, а A' е проекцијата на точката A врз правата BC (види цртеж). Од

$$\text{ctg}\measuredangle B=\frac{\overline{BA'}}{AA'},\ \text{ctg}\measuredangle C=\frac{\overline{CA'}}{AA'},$$

добиваме

$$\operatorname{ctg}\measuredangle B+\operatorname{ctg}\measuredangle C=\frac{\overline{BA'}}{\overline{AA'}}+\frac{\overline{CA'}}{\overline{AA'}}=\frac{\overline{BA'}+\overline{CA'}}{\overline{AA'}}$$
$$=\frac{\overline{BC}}{\overline{AA'}}\geq\frac{\overline{BC}}{\overline{AA_1}} \qquad (1)$$



Бидејќи $\measuredangle BTC=90^\circ$, следува дека

$$\overline{TA_1}=\overline{A_1C}=\tfrac{1}{2}\overline{BC},$$

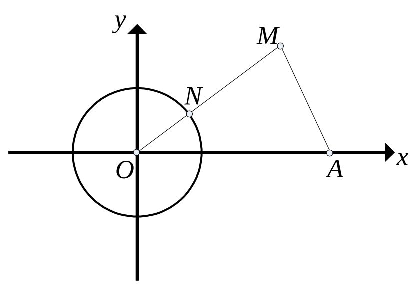
а освен тоа $\overline{AA_1}=3\overline{TA_1}$. Според тоа, од (1) добиваме

$$\operatorname{ctg}\measuredangle B+\operatorname{ctg}\measuredangle C\geq\frac{\overline{BC}}{\overline{AA_1}}=\frac{\overline{BC}}{3\overline{TA_1}}=\frac{2\overline{TA_1}}{3\overline{TA_1}}=\frac{2}{3}.$$

4А. Што претставува геометриското место на точки во рамнината Oxy еднакво оддалечени од кружницата $x^2+y^2=1$ и точката $A(3,0)$?

Решение. Нека $M(x,y)$ е произволна точка од бараното геометриско место точки и N е точка во која правата OM (O е координатен почеток) се сече со кружницата. Бидејќи $\overline{NM}=\overline{AM}$, имаме

$$\overline{NM}=\overline{OM}-\overline{ON}=\overline{OM}-1,$$
$$\overline{OM}=\sqrt{x^2+y^2},$$
$$\overline{AM}=\sqrt{(x-3)^2+y^2},$$



добиваме

$$\sqrt{x^2+y^2}-1=\sqrt{(x-3)^2+y^2}.$$

Со квадрирање се добива

$$\sqrt{x^2+y^2}=3x-4.$$

Со повторно квадрирање се добива

$$8x^2-24x-y^2+16=0;$$
$$8(x-\tfrac{3}{2})^2-y^2=2,$$

а ова е равенка на хипербола.

3Б. Да се покаже дека за секој триаголник ABC важи равенството

$$\frac{a^2\sin(\beta-\gamma)}{\sin\alpha}+\frac{b^2\sin(\gamma-\alpha)}{\sin\beta}+\frac{c^2\sin(\alpha-\beta)}{\sin\gamma}=0$$

Решение. Од $a^2=4R^2\sin^2\alpha$, $b^2=4R^2\sin^2\beta$ и $c^2=4R^2\sin^2\gamma$, каде што R е радиусот на опишаната кружница, доволно е да се покаже дека

$$\sin\alpha\sin(\beta-\gamma)+\sin\beta\sin(\gamma-\alpha)+\sin\gamma\sin(\alpha-\beta)=0. \qquad (1)$$

Но,

$$\sin\alpha\sin(\beta-\gamma)=\tfrac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta+\gamma)-\cos(\alpha+\beta-\gamma)]$$
$$\sin\beta\sin(\gamma-\alpha)=\tfrac{1}{2}[\cos(\beta-\gamma+\alpha)-\cos(\beta+\gamma-\alpha)]$$
$$\sin\gamma\sin(\alpha-\beta)=\tfrac{1}{2}[\cos(\gamma-\alpha+\beta)-\cos(\gamma+\alpha-\beta)]$$

па со собирање на овие три равенства се добива равенството (1).

4Б. Точката $T(1,2)$ е тежиште на триаголникот ΔABC, точката $D(3,4)$ е средина на страната BC, а $S(\frac{14}{9},\frac{10}{9})$ е центар на опишаната кружница на триаголникот ABC. Најди ги координатите на темињата на триаголникот ABC.

Решение. Од својството на тежиштето имаме $\overline{AT}:\overline{TD}=2:1$. Според тоа, $A(-3,-2)$. Значи, квадратот на радиусот на опишаната кружница на триаголникот ΔABC е $r^2=\overline{AS}^2=\frac{2465}{61}$, а равенката на кружницата гласи

$$(9x-14)^2+(9y-10)^2=2465. \ (1)$$

Коефициентот на правецот на симетралата DS на страната BC е $k=2$. Затоа, коефициентот на правецот на страната BC е

$$k'=\frac{1}{k}=-\frac{1}{2},$$

а нејзината равенка гласи

$$x+2y-11=0 \qquad (2)$$

Со решавање на системот равенки (1) и (2) добиваме

$$B(7,2) \text{ и } C(-1,6).$$